

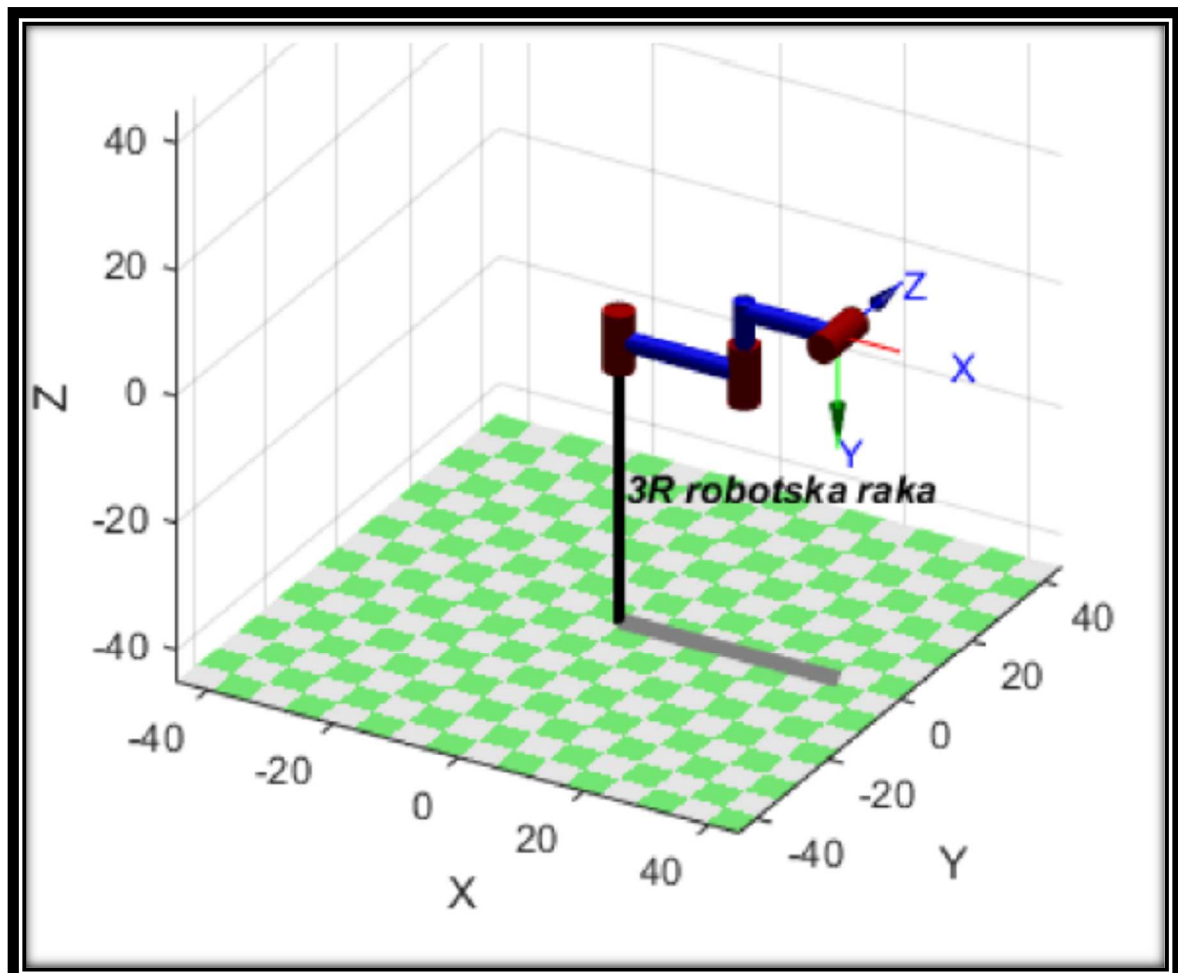


Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ - Скопје
Факултет за електротехника и информациски
технологии - Скопје



ЕЛИЗАБЕТА ЛАЗАРЕВСКА

ВОВЕД ВО РОБОТИКАТА



СКОПЈЕ, 2021

Издавач:

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:

Проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:

Д-р Елизабета Лазаревска, редовен професор на Факултетот за електротехника и информациски технологии - Скопје

Рецензенти

1. Д-р Весна Ојлеска Латкоска, вонреден професор на Факултетот за електротехника и информациски технологии - Скопје
2. Д-р Горјан Наџински, доцент на Факултетот за електротехника и информациски технологии - Скопје

Техничка обработка

Проф. д-р Елизабета Лазаревска

Лектура на македонски јазик:

Дијана Ристова

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

21/29(075.8)

ЛАЗАРЕВСКА, Елизабета

Вовед во роботиката [Електронски извор] / Елизабета Лазаревска. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Факултет за електротехника и информациски технологии, 2021

Начин на пристапување (URL):

http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41. - Текст во PDF формат, содржи 260 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 29.06.2021. - Библиографија: стр. 259-260

ISBN 978-9989-43-455-6

а) Роботика -- Високошколски учебници б) Роботска рака -- Кинематика -- Динамика -- Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 54226693

ПРЕДГОВОР

Учебникот Вовед во роботиката е наменет првенствено на студентите на Факултетот за електротехника и информациски технологии во Скопје, кои го слушаат предметот Роботика 1 во петтиот семестар од насоката Компјутерско системско инженерство, автоматика и роботика по новата студиска програма. Меѓутоа, тој успешно ќе им послужи и на останатите студенти од сродните технички факултети кои исто така слушаат предавања од областа на роботиката, на инженерите од праксата кои се сретнуваат со проблеми од роботиката, како и на сите останати кои сакаат да се стекнат со основни познавања од областа на роботиката. Од сите можни видови работи, учебникот ги презентира сериските роботски манипулатори, додека мобилните работи се изучуваат во рамките на друг наставен предмет. Како што кажува насловот на овој учебник, тој ја покрива основата на теоријата на роботските манипулатори, што значи дека во него главно се разгледува моделирањето на роботските манипулатори, додека нивното управување се изучува во рамките на друг наставен предмет.

Материјалот во учебникот е поделен во пет поглавја: Вовед, Кинематика, Диференцијална кинематика, Динамика и Планирање траектории. Во воведниот дел се дадени основните поими и дефиниции за роботиката и роботите, како и кус осврт кон историјата на роботиката. Извршена е поделба на роботите и се изложени нивните основни предности и недостатоци. Во продолжение се дефинирани основните компоненти на роботските манипулатори, нивните зглобови, роботски конфигурации и работен простор. Втората глава е посветена на кинематиката на роботските раце. Во воведниот дел од оваа глава, прикажано е претставувањето на точка, вектор и координатен систем во просторот, како и нивните основни трансформации – трансляции и ротации, за потоа вниманието да биде свртено кон главниот проблем на директната и инверзната кинематика на роботската рака. Изведени се основните кинематски равенки на позиција и ориентација на роботска рака, D-H моделот на роботската рака и значајно внимание е посветено на решавањето на задачата на инверзната кинематика на роботските манипулатори. Третата глава е посветена на диференцијалните движења и брзини на роботските манипулатори, при што детално се опишани елементарните диференцијални трансляции и ротации, комбинираниите диференцијални движења, зависноста на брзината на роботската рака од брзината на нејзините зглобови. Посебно внимание е одвоено за дефиницијата на Јакобијанот на роботската рака, неговото пресметување, како и утврдувањето на сингуларните конфигурации на раката. Наспроти кинематиката, која ја дефинира положбата на роботската рака без да води сметка за причините кои довеле до таа конкретна положба, динамиката на роботската рака го зема предвид и влијанието на силите и вртливите моменти кои предизвикуваат движење на раката и се причина раката да се најде во одредена положба. Токму со оваа проблематика се занимава четвртата глава од овој учебник. За опис на динамиката на роботските раце овде е усвоена Лагранжовата наспроти Њутновата механика. Изведен е општиот модел на динамиката на една роботска рака и прикажана е неговата структура и основните особини. На крајот се анализирани статичките сили и вртливи моменти во една роботска рака. Петтата и последна глава од овој учебник, накусо ја презентира проблематиката на планирање траектории на движење на роботските манипулатори. Дадени се само основите на оваа проблематика, која инаку зазема многу значајно место во роботиката, зашто движењето на роботските манипулатори е услов тие да можат да извршуваат различни задачи. Опишано е движењето на роботските манипулатори во простор без препреки и контакт со

работни и други површини, зашто анализата на ваквото движење е многу сложена и ги надминува рамките на овој труд. Учебникот завршува со преглед на релевантната светска литература од оваа област.

На крајот од секоја глава, дадени се одреден број нерешени задачи за проверка на усвоеното знаење. Учебникот е придружен со збирка од решени задачи по Вовед во роботиката, која веќе е издадена од страна на Универзитетот „Свети Кирил и Методиј“ во Скопје и може да се најде на неговата електронска страница. На ова место авторот сака само уште да нагласи дека сите слики во учебникот кои се означени со *, се генерирани со помош на програмскиот пакет Robotics Toolbox for MATLAB, кој е референциран во литературата под реден број [9].

Во недостаток на литература на македонски јазик од оваа современа проблематика, авторот се надева дека овој учебник барем малку ќе го ублажи тој проблем.

Авторот,

Во Скопје, 2021

СОДРЖИНА

1. ВОВЕД	1
1.1. ВОВЕД	1
1.2. ДЕФИНИЦИЈА НА РОБОТСКА РАКА	2
1.3. КЛАСИФИКАЦИЈА НА РОБОТСКИТЕ РАЦЕ	2
1.4. ДЕФИНИЦИЈА НА РОБОТИКАТА	3
1.5. ИСТОРИЈА НА РОБОТИКАТА	3
1.6. ПРЕДНОСТИ И НЕДОСТАТОЦИ НА РОБОТИТЕ	11
1.7. КОМПОНЕНТИ НА РОБОТСКАТА РАКА	12
1.8. СТЕПЕНИ СЛОБОДА НА ДВИЖЕЊЕ НА РОБОТСКАТА РАКА	14
1.9. ЗГЛОБОВИ НА РОБОТСКАТА РАКА	16
1.10. РОБОТСКИ КОНФИГУРАЦИИ	17
1.11. КООРДИНАТНИ СИСТЕМИ НА РОБОТСКАТА РАКА	22
1.12. РАБОТЕН ПРОСТОР НА РОБОТСКАТА РАКА	24
1.13. ЗАДАЧИ	26
2. КИНЕМАТИКА	29
2.1. ВОВЕД	29
2.2. МАТРИЧНО ПРЕТСТАВУВАЊЕ ВО ПРОСТОРОТ НА ОДРЕДЕНИ КИНЕМАТСКИ ЕЛЕМЕНТИ	30
2.2.1. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ТОЧКА ВО ПРОСТОРОТ	30
2.2.2. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ВЕКТОР ВО ПРОСТОРОТ	31
2.2.3. ПРЕТСТАВУВАЊЕ КООРДИНАТЕН СИСТЕМ ВО ПРОСТОРОТ	34
2.2.4. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ЦВРСТО ТЕЛО ВО ПРОСТОРОТ	36
2.3. ХОМОГЕНИ ТРАНСФОРМАЦИСКИ МАТРИЦИ	39
2.4. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ТРАНСФОРМАЦИИТЕ	40
2.4.1. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ЧИСТА ТРАНСЛАЦИЈА	40
2.4.2. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ЧИСТА РОТАЦИЈА ОКОЛУ КООРДИНАТНИТЕ ОСКИ	42
2.4.3. РОТАЦИЈА ОКОЛУ ПРОИЗВОЛНА ОСКА k	46
2.4.4. ПРЕТСТАВУВАЊЕ КОМБИНИРАНО ДВИЖЕЊЕ ВО ПРОСТОРОТ	51
2.5. ТРАНСФОРМАЦИИ ВО ОДНОС НА ПОДВИЖЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ	55
2.6. ИНВЕРЗНИ МАТРИЦИ ОД ТРАНСФОРМАЦИСКИТЕ МАТРИЦИ	58
2.7. ДИРЕКТНА И ИНВЕРЗНА КИНЕМАТИКА НА РОБОТСКАТА РАКА	64
2.7.1. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА ПОЗИЦИЈА НА РОБОТСКАТА РАКА	65
2.7.1.1. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА ПОЗИЦИЈА ВО ПРАВОАГОЛНИ КООРДИНАТИ	65
2.7.1.2. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА ПОЗИЦИЈА ВО ЦИЛИНДРИЧНИ КООРДИНАТИ	67

2.7.1.3. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА ПОЗИЦИЈА ВО СФЕРНИ КООРДИНАТИ	69
2.7.1.4. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА ПОЗИЦИЈА ВО АНТРОПОМОРФНИ КООРДИНАТИ	71
2.7.2. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА РОТАЦИЈА	72
2.7.2.1. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА РОТАЦИЈА СО ОЈЛЕРОВИ АГЛИ	72
2.7.2.2. RPY (Roll Pitch Yaw) АГЛИ	78
2.7.2.3. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ОРИЕНТАЦИЈА СО ЕДИНИЧНИ КВАТЕРНИОНИ	86
2.7.2.4. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА РОТАЦИЈА КАЈ АНТРОПОМОРФНА РОБОТСКА РАКА	94
2.7.3. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА ПОЛОЖБА НА РОБОТСКАТА РАКА	94
2.8. DENAVIT-HARTENBERG МОДЕЛ НА ДИРЕКТНАТА КИНЕМАТИКА НА РОБОТСКАТА РАКА	94
2.9. ИНВЕРЗНА КИНЕМАТИКА НА D-H РОБОТСКА РАКА	118
2.10. ЗАДАЧИ	130
3. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА КИНЕМАТИКА	133
3.1. ВОВЕД	133
3.2. ОСНОВНИ ПОИМИ ЗА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ДВИЖЕЊА И БРЗИНИ	133
3.3. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ДВИЖЕЊА НА КООРДИНАТЕН СИСТЕМ	144
3.3.1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ТРАНСЛАЦИИ	144
3.3.2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РОТАЦИИ	145
3.3.3. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РОТАЦИЈА ОКОЛУ ПРОИЗВОЛНА ОСКА k	146
3.3.4. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ТРАНСФОРМАЦИЈА И ПОИМ ЗА ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН ОПЕРАТОР	147
3.4. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ПРОМЕНА НА КООРДИНАТЕН СИСТЕМ	149
3.5. ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН ОПЕРАТОР ВО ОДНОС НА ПОДВИЖЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ	150
3.6. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ДВИЖЕЊА НА РОБОТСКАТА РАКА И КООРДИНАТНИОТ СИСТЕМ ПРИДРУЖЕН СО НЕА	153
3.7. ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ЈАКОБИЈАНОТ НА РОБОТСКАТА РАКА	154
3.7.2. ОДРЕДУВАЊЕ НА ЈАКОБИЈАНОТ НА АГОЛНАТА БРЗИНА	157
3.8. ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ЈАКОБИЈАНОТ НА РОБОТСКАТА РАКА ВО ОДНОС НА КООРДИНАТНИОТ СИСТЕМ ПРИДРУЖЕН СО ПОСЛЕДНИОТ ЗГЛОБ ОД РАКАТА	161
3.9. ВРСКА ПОМЕЃУ ЈАКОБИЈАНОТ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИОТ ОПЕРАТОР	163
3.10. ИНВЕРЗЕН ЈАКОБИЈАН	165
3.11. СИНГУЛАРИТЕТИ НА РОБОТСКАТА РАКА	169
3.12. ЗАДАЧИ	171
4. ДИНАМИКА	175
4.1. ВОВЕД	175

4.2. ДИНАМИЧКИ МОДЕЛ НА РОБОТСКАТА РАКА СО ПОМОШ НА ЛАГРАНЖОВАТА МЕХАНИКА	176
4.3. ЕЛЕМЕНТИ НА ДИНАМИЧКИОТ МОДЕЛ НА РОБОТСКАТА РАКА	186
4.4. ИЗВЕДУВАЊЕ НА ДИНАМИЧКИТЕ РАВЕНКИ НА РОБОТСКА РАКА ПРЕКУ НЕЈЗИНИОТ D-H МОДЕЛ	188
4.4.1. КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА НА РОБОТСКА РАКА ПРЕКУ НЕЈЗИНИОТ D-H МОДЕЛ	188
4.4.2. ПОТЕНЦИЈАЛНА ЕНЕРГИЈА НА РОБОТСКА РАКА ПРЕКУ НЕЈЗИНИОТ D-H МОДЕЛ	197
4.4.3. ЛАГРАНЖОВ ОПЕРАТОР ЗА РОБОТСКА РАКА ПРЕКУ НЕЈЗИНИОТ D-H МОДЕЛ	198
4.4.4. РАВЕНКИ НА ДВИЖЕЊЕ РОБОТСКА РАКА ПРЕКУ НЕЈЗИНИОТ D-H МОДЕЛ	198
4.5. СТРУКТУРА И ОСОБИНИ НА ДИНАМИЧКИОТ МОДЕЛ НА РОБОТСКАТА РАКА	203
4.5.1. ОСОБИНИ НА ИНЕРЦИСКАТА МАТРИЦА $M(q)$	204
4.5.2. ОСОБИНИ НА ЦЕНТРИПЕТАЛНАТА И КОРИОЛИСОВА МАТРИЦА $C(q, \dot{q})$	207
4.5. АНАЛИЗА НА СТАТИЧКИТЕ СИЛИ КАЈ РОБОТСКАТА РАКА	209
4.6. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА СИЛИТЕ И МОМЕНТИТЕ ОД ЕДЕН ВО ДРУГ КООРДИНАТЕН СИСТЕМ КАЈ РОБОТСКАТА РАКА	212
4.7. ЗАДАЧИ	214
5. ПЛАНИРАЊЕ ТРАЕКТОРИИ	219
5.1. ВОВЕД	219
5.2. ПАТ И ТРАЕКТОРИЈА НА ДВИЖЕЊЕ НА РОБОТСКАТА РАКА	219
5.3. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ТРАЕКТОРИИТЕ НА РОБОТСКАТА РАКА	220
5.4. ОСНОВИ НА ПЛАНИРАЊЕТО НА ТРАЕКТОРИЈАТА НА ДВИЖЕЊЕ НА РОБОТСКАТА РАКА	224
5.5. ПЛАНИРАЊЕ ТРАЕКТОРИЈА НА ДВИЖЕЊЕ ВО ПРОСТОРОТ НА ЗГЛОБОВИТЕ НА РОБОТСКАТА РАКА	228
5.5.1. ПЛАНИРАЊЕ ТРАЕКТОРИИ ПРЕТСТАВЕНИ СО ПОЛИНОМ ОД ПРВ СТЕПЕН	229
5.5.2. ПЛАНИРАЊЕ ТРАЕКТОРИИ ПРЕТСТАВЕНИ СО ПОЛИНОМ ОД ТРЕТ СТЕПЕН	231
5.5.3. ПЛАНИРАЊЕ ТРАЕКТОРИЈА ПРЕТСТАВЕНА СО ПОЛИНОМ ОД ПЕТТИ СТЕПЕН	236
5.5.4. ТРАЕКТОРИИ ПРЕТСТАВЕНИ СО ПОЛИНОМИ ОД ПОВИСОК СТЕПЕН	239
5.5.5. ПАРАБОЛИЧНО СПОЈУВАЊЕ ЛИНЕАРНИ СЕГМЕНТИ	244
5.6. ПЛАНИРАЊЕ ТРАЕКТОРИЈА НА ДВИЖЕЊЕ РОБОТСКА РАКА ВО ДЕКАРТОВИОТ ПРОСТОР	251
5.7. ЗАДАЧИ	256
6. ЛИТЕРАТУРА	259

Don't think of robots as replacements for humans -- think of them as things that will help make us better at tackling many of the problems we face.

EOIN TREACY

„Не размислувајте за роботите како замена на луѓето – размислувајте за нив како нешта што ќе ни помогнат поуспешно да се справуваме со предизвиците со кои се соочуваме.“

Ион Трејси

ГЛАВА 1. ВОВЕД

1.1. ВОВЕД

Луѓето од многу одамна се обидувале да направат машини кои ќе го имитираат движењето и однесувањето на човекот и/или останатиот жив свет. Типичен пример се статуите во Венеција кои удираат во часовник секој час и играчките на навивање.

Иако постојат разни видови работи, од наједноставни до најсложени - какви што се, на пример, хуманоидните работи, и сите тие во својата градба и дејствување се засновани врз истите принципи, материјалот од овој предмет ќе ги третира индустриските роботски манипулатори (роботски раце), презентирајќи ја нивната механика (кинematика и динамика), како и планирањето на нивните траектории.

Денешните работи се многу битни елементи на современата индустрија. Тие можат да извршуваат многу операции и задачи, при што не бараат посебни услови на заштита или удобство, како луѓето.

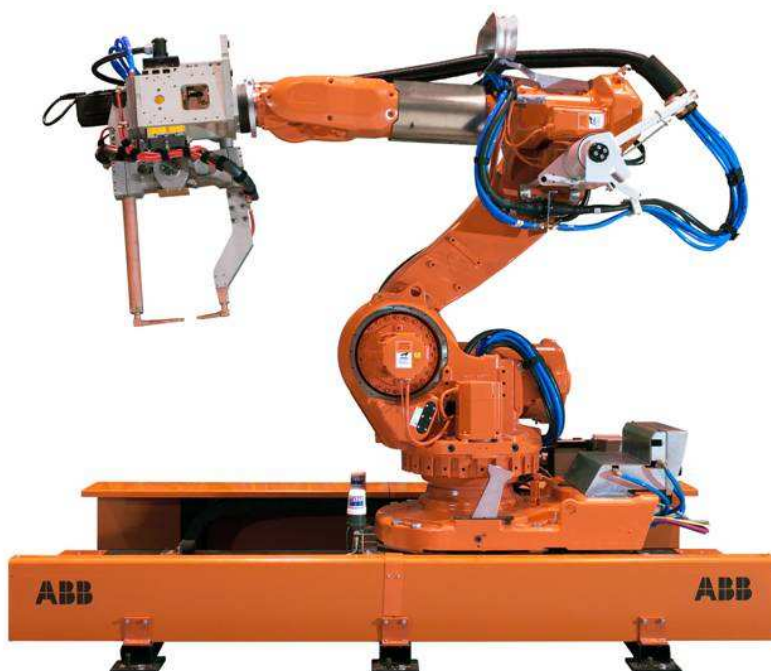


Слика 1.1. Часовникот на плоштадот „Св. Марко“ во Венеција – овој познат часовник (висок 1,52 м и со дијаметар од 1,22 м), заедно со лондонскиот Биг Бен, веројатно е еден од двата најславни часовници во светот. Изграден е во 1497 год. на врвот од голема кула, заедно со две циновски бронзени фигури (високи по 2,60 м), кои со чекани удираат по своното

Меѓу најпознатите компании кои изработуваат индустриски работи денес спаѓаат: ADEPT ROBOTICS, STAUBLI ROBOTICS, FANUC ROBOTICS, EPSON ROBOTICS, DENSO ROBOTICS, KUKA ROBOTICS.

Бројот работи вклучени во современото производство не одговара на првобитните предвидувања и очекувања, затоа што современите достигнувања во роботиката сè уште

не се доволни да ги остварат големите очекувања во полето. Оттаму, иако во индустријата во светот има неколку илјади роботи, тие сè уште се далеку од тоа по број да ги надминат луѓето работници.



Слика 1.2. Роботска рака

Роботите се применуваат секаде каде што се корисни. Како и луѓето, тие можат да извршуваат одредени задачи, но некои не можат. Роботите сами за себе ретко некогаш се полезни. Тие скоро секогаш се вградени во системи кои извршуваат одредени задачи и операции.

1.2. ДЕФИНИЦИЈА НА РОБОТСКА РАКА

Роботскиот манипулатор (роботската рака) е многу сличен со еден кран (дигалка). И двата механизма се состојат од **лостови (краци)** кои се поврзани со **зглобови**, имаат рака која се движи во просторот и може да биде поставена во произволна положба во работниот простор и можат да креваат одреден товар. Основната разлика меѓу двата механизма е што едниот го управува човек, а другиот го управува компјутер – програм.

Роботските манипулатори се механизми управувани од компјутер, кој од своја страна извршува одреден програм. Со промена на тој програм се менува и типот на дејствија што ги извршува роботската рака, без да има потреба од промена на нејзината градба. Дигалката не може да изврши ништо, доколку постојано не е управувана од страна на човекот оператор.

1.3. КЛАСИФИКАЦИЈА НА РОБОТСКИТЕ РАЦЕ

Различни земји имаат различни стандарди при класификацијата на роботските манипулатори. Американскиот институт за роботика RIA (ROBOTICS INSTITUTE OF AMERICA) ги дефинира следните класи роботски манипулатори:

- **Уреди кои извршуваат низа последователни чекори** (етапи) од една задача (операција) **во согласност со однапред зададена и неменлива процедура**, кои лесно се модифицираат.

- **Роботски манипулатори кои го запаметуваат движењето на човекот оператор и потоа го повторуваат**. Човекот оператор најнапред рачно ја извршува саканата операција водејќи ја роботската рака, а таа ги запомнува неговите движења за подоцна да може самостојно да ги повторува. Роботските манипулатори од оваа класа дејствуваат во согласност со запаметената информација.

- **Роботски манипулатори со нумеричко управување (нумеричко управувани работи)**. Наместо човекот сам да го учи роботскиот манипулатор изведувајќи ја задачата рачно, движењето на роботската рака се задава преку одреден програм вграден во истата.

- **Интелигентни работи** се работи кои можат да ја препознаат и осознаат околината и успешно да извршуваат задачи без оглед на промените во околината во која се извршуваат тие задачи.

1.4. ДЕФИНИЦИЈА НА РОБОТИКАТА

Роботиката е наука за проектирање (градба) и примена на роботите во служба на човекот. Роботските системи не се состојат само од работи, туку и од други уреди и потсистеми кои заедно со роботите се неопходни за извршување на одредените задачи. Роботите се применуваат во индустриското производство, во подводните и вселенските истражувања, во медицината, и за забава. Тие се многу полезни, но мора да бидат успешно програмирани и управувани. **Роботиката е интердисциплинарна област која се потпира врз машинството, електроинженерството, компјутерските науки, биологијата и многу други научни дисциплини.**

1.5. ИСТОРИЈА НА РОБОТИКАТА

Ако ги занемариме статуите во Венеција и играчките на навивање за кои стана збор, можеме да забележиме дека развојот на роботиката е тесно поврзан со развојот на индустријата, револуцијата во нумеричкото и компјутерско управување со индустриските и други машини, вселенските истражувања и живата имагинација на многу креативни личности.

Самиот збор робот за прв пат е искрован во расказот на чешкиот писател Карел Чапек „Универзалните работи на Росум“ во кој се зборува за човеколики машини, без чувства и душа, кои се силни и послушни, а можат да се произведат брзо и евтино. Наскоро сите земји во расказот на Чапек сакаат да ги опремаат своите армии со вакви робовски и роботски „војници“, кои се борат верно, а чија загуба никого не погодува. Меѓутоа, со тек на времето, роботите на Чапек сфаќаат дека се посупериорни од луѓето и се обидуваат да завладеат со светот.

По Втората светска војна започнува производство на автоматски и нумерички управувани машини со цел да се зголеми и подобри индустриското производство. Едновремено, за целите на нуклеарните истражувања се развиени манипулатори со

повеќе степени слобода на движење. „Бракот“ помеѓу нумерички програмираните машини и манипулаторите го произведува првиот робот, управуван со издупчени ленти хартија. Со развојот на индустријата, овие ленти се заменети со магнетни ленти, па мемориски елементи и на крајот со компјутери. Во продолжение се дадени најважните настани што го одбележуваат развојот на полето на роботиката.

- 1922 Чешкиот писател Карел Чапек го пишува расказот „Универзалните работи на Росум“ и го воведува поимот за „работа“ и „работник“ од каде потекнува зборот робот

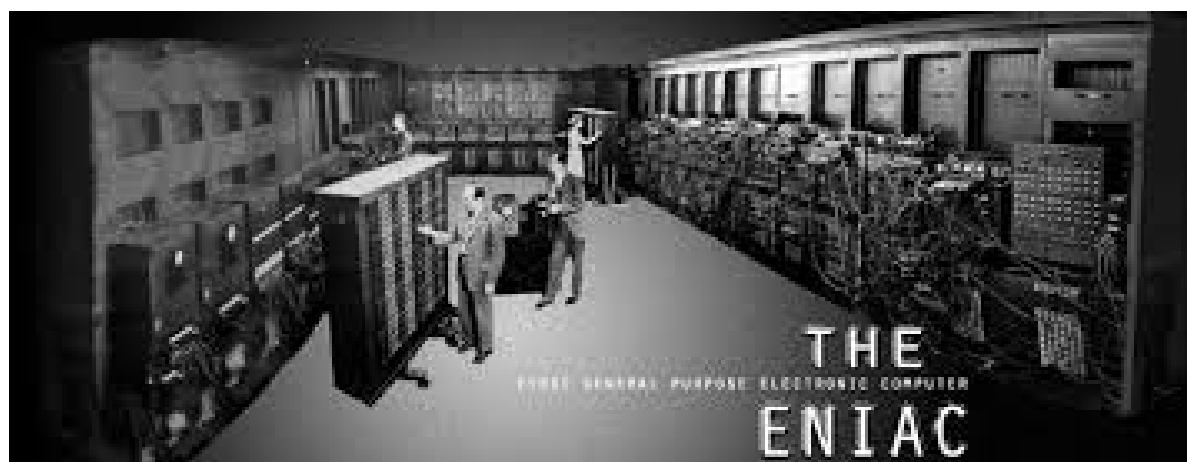


Карел Чапек (1890 - 1938)



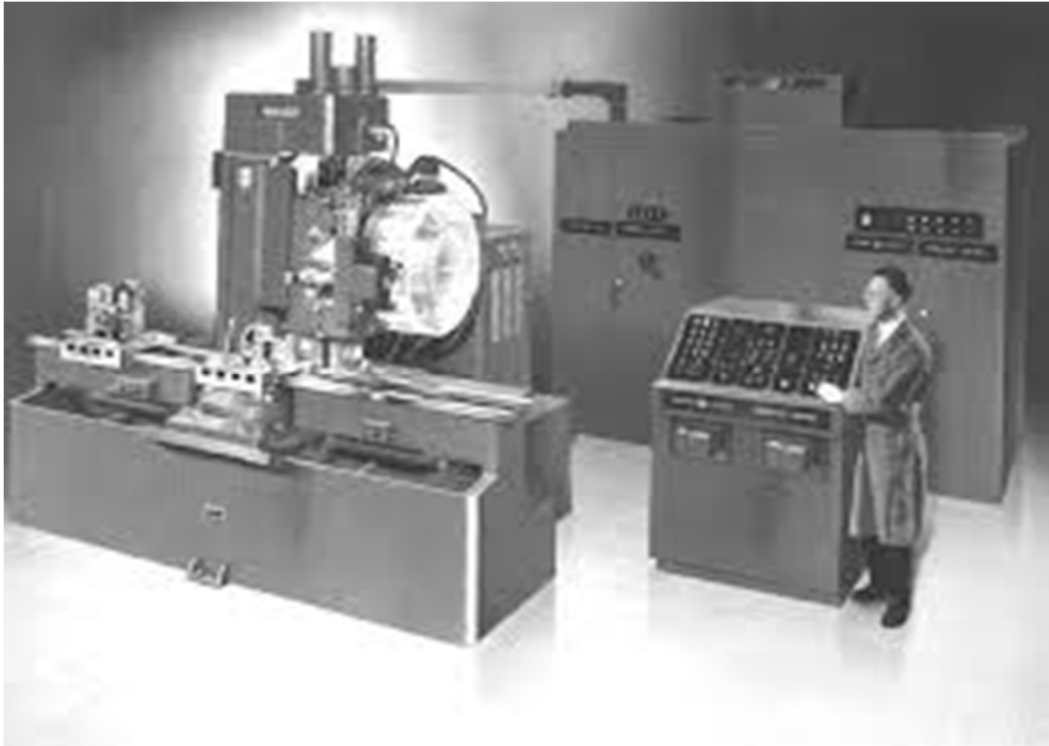
„Универзалните работи на Росум“ – драма 1920

- 1946 На Универзитетот во Пенсилванија е направен првиот компјутер ENIAC



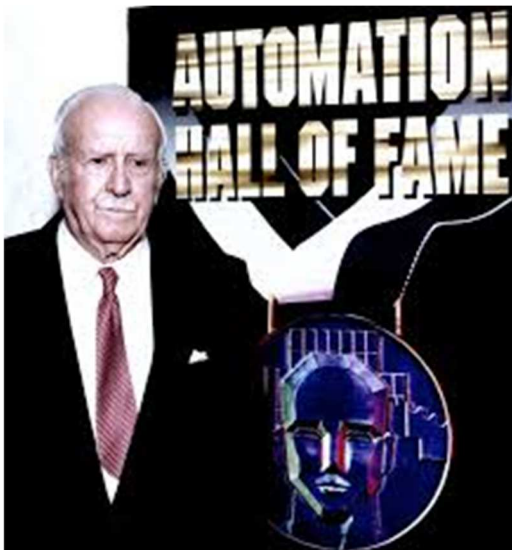
Првиот компјутер ENIAC

- 1952 На MIT универзитетот во Масачусетс е направена првата нумерички управувана машина

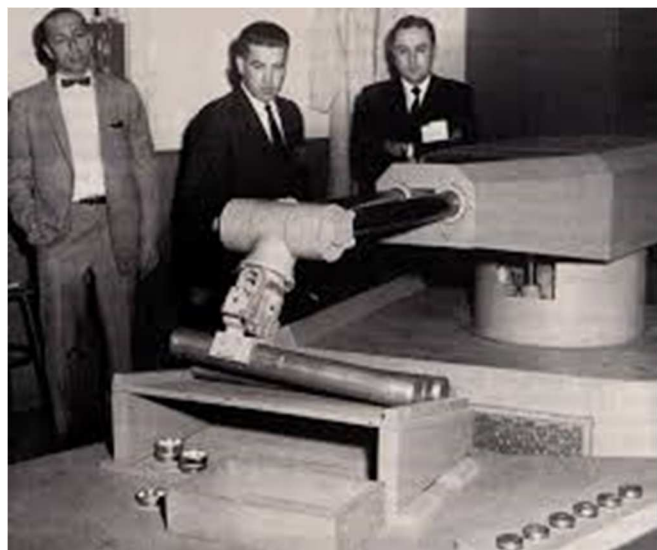


Една од првите нумерички управувани машини

- 1954 Џорџ Девол (George Devol) го развил првиот програмабилен робот

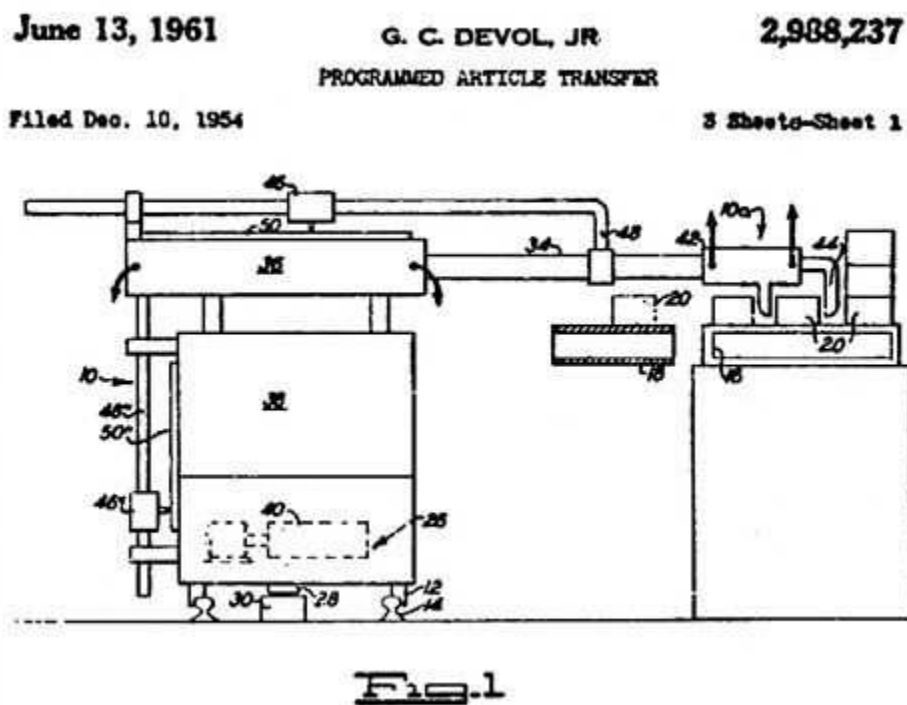


Џорџ Девол (1912 - 2011)



Првиот програмабилен робот на Девол

- 1955 Denavit и Hartenberg ги развиле хомогените трансформациски матрици
- 1961 Џорџ Девол го патентирал пронајдокот кој претставува основа на Unimate™ роботите



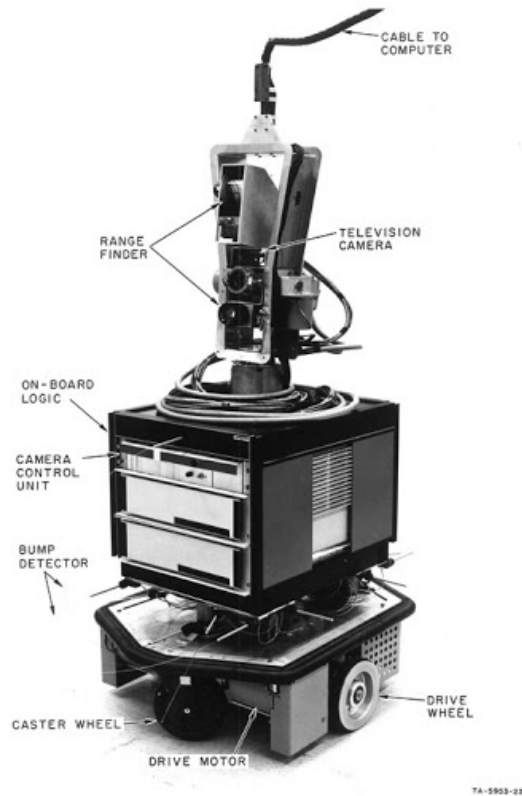
Патентот на Девол

- 1962 Се формира компанијата Unimation, се појавуваат првите индустриски роботи и GM (General Motors) го инсталира првиот Unimation робот во своите погони



Првите Unimation роботи

- 1967 Се појавува роботот Mark II™, а во Јапонија е извезен првиот индустриски робот
- 1968 Во истражувачкиот институт на Универзитетот Стенфорд во Калифорнија, САД (Stanford Research Institute SRI) е изграден интелигентен робот наречен Shakey



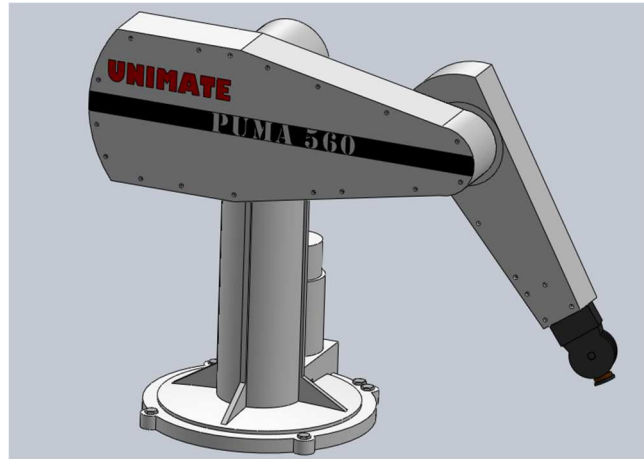
Роботот Shakey

- 1972 IBM го развива комерцијалниот робот IBM 7565
- 1973 Компанијата Milacron™ од Синсинати, САД го претставува роботот T3, кој е многу успешно прифатен во индустријата



Роботот T3

- 1978 Unimation го испорачува првиот PUMA робот во GM



PUMA робот

- 1983 Нагло расте интересот за роботиката, како во индустријата, така и во академскиот свет; многу универзитети воведуваат нови предмети и предавања од областа на роботиката
- 1986 Хонда започнува со својот истражувачки програм на полето на роботиката
- 1992 корпорацијата FANUC Robotics изработува прототип на првиот интелигентен робот
- 1996 Хонда го претставува својот прв хуманоиден робот P3
- 2000 Хонда ја претставува првата верзија на познатиот ASIMO робот
- 2003 две роботски возила познати како Mars Rovers се испратени на Марс за да ја испитаат површината на Марс и нејзиниот состав



Вселенско возило Mars Rover

- 2004 Јапонската компанија Yaskawa Motoman Robotics на пазарот претставува роботски управувач познат како NX100, кој обезбедува синхронизирано управување со четири работи (заклучно со 38 зглобови)



Роботски управувач NX100

- 2006 Италијанската водечка компанија за индустриска автоматизација Comau го лансира првиот безжичен модул за обучување работи



Модул за обучување работи

- 2006 KUKA AG го претставува на пазарот првиот лесен робот, кој тежи само 16 кг – направен од алуминиум, со вградени сензори, тој е високочувствителен, пренослив, енергетски ефикасен и идеално прилагоден за различни задачи од типот на ракување и сложување делови
- 2007 Јапонската компанија Yaskawa Motoman Robotics на пазарот претставува супер брз робот за заварување (побрз за 15 % од дотогашните работи за заварување)
- 2008 Јапонската компанија FANUC лансира нов робот кој може да подига товар од дури 1200 кг



KUKA AG алуминиумски лесен робот



Супербрз робот за заварување

- 2009 Јапонската компанија Yaskawa Motoman Robotics на пазарот претставува роботски управувач DX100, кој обезбедува синхронизирано управување со осум роботи (заклучно со 72 зглобови)



FANUC робот носивост 1200 кг



Осум роботи управувани со DX100

- 2010 Според Меѓународната роботска федерација (IFR) во светот се продадени 121.000 индустриски роботи
- 2011 во вселената е лансиран првиот човеколик робот познат како R2B
- 2013 Според Меѓународната роботска федерација (IFR) во светот се продадени 178.000 индустриски роботи
- 2018 Според Меѓународната роботска федерација (IFR) во светот се продадени 421.000 индустриски роботи
- 2019 AMAZON ја откупува компанијата Canvas Technology која има развиено автономни возила за испорака на пакети до влезот на купувачот.

1.6. ПРЕДНОСТИ И НЕДОСТАТОЦИ НА РОБОТИТЕ

Основни предности на роботите се:

- зголемување на продуктивноста, ефикасноста, безбедноста, квалитетот и постојаноста на производите
- можат да работат во ризични услови без да бараат посебна заштита, удобство или дополнителна грижа за безбедноста на работното место
- не бараат посебни работни услови како осветлување, вентилација, климатизација, заштита од бучава
- можат да работат неограничено и притоа никогаш не страдаат од досада, мамурлук, умор, главоболка, никогаш не се лутат, не им се слушава и никогаш не бараат здравствена заштита и годишен одмор
- постојано работат прецизно (сè додека не се расипат или не настрадаат на некој друг начин)
- можат да бидат многу попрецизни од човекот (типична прецизност им е од неколку илјадити делови на сантиметар, но постојат роботи кои имаат прецизност од микросантиметри)
- роботите и нивните компоненти (на пример, сензорите) можат да ги надминат можностите на човекот
- за разлика од луѓето, роботите можат да процесираат паралелно повеќе задачи
- роботите се одлични за вселенски истражувања; без нив нашето познавање на вселената би било многу посиромашно
- наспроти погрешното верување дека роботите им го земаат работното место на луѓето, тие обезбедуваат скоро исто толку нови работни места колку што одземаат, како на пример, во областа на програмирање на роботите, производството на роботи, роботската визија, процесирањето природен говор и слично
- покрај мобилните телефони, електричните автомобили, интернетот итн. роботите се само уште еден аспект на човековиот напредок
- како идни предводници во многу области на технолошкиот развој, роботите се неминовен и неразделив дел на нашата иднина

Основните недостатоци на роботите се:

- замената на човечката работна рака со роботи создава економски проблеми како, на пример, отпуштања (безработица) и социјални проблеми (како, на пример, штрајкови и други видови социјални протести и немири)
- роботите не се во состојба успешно да одговорат во вонредни ситуации и услови, освен ако таа ситуација и саканата реакција на неа не се однапред предвидени и вградени во програмот на роботот
- потребни се дополнителни мерки на заштита како на луѓето оператори што работат крај роботите, така и на останатите уреди од нивната околина поради

несоодветни или погрешни дејствија на роботот, губиток на напојување, оштетување на роботот, неспособност за донесување конкретни одлуки

- иако во одредена смисла и случаи се посупериорни од човекот, роботите имаат ограничени можности од аспект на нивните степени слобода на движење, сензори, системи за гледање, одсив во реално време
- роботите бараат константно напојување, што ги прави скапи и потенцијално штетни за околината, затоа што придонесуваат кон глобалното затоплување
- роботите се скапи уреди и поради почетната цена на чинење на опремата, цената на чинење на инсталацијата, потребата од периферни уреди, потребата од обучување, потребата за програмирање
- засега примената на роботите е сè уште прилично ограничена на индустријата, истражувањето, медицината и војската; надвор од овие области тие имаат занемарлива практична примена
- роботите немаат чувства и не можат да сочувствуваат или да ги разберат луѓето
- роботите сè уште се скапи и како такви се достапни само на тие што можат да си ги дозволат, што води кон натамошна поделба на општеството на богати и сиромашни
- примената на роботите ги прави многу организации и луѓе дополнително чувствителни на компјутерски „напади“ (замислете што би се случило ако некој неовластено влезе во компјутерската мрежа и ги репрограмира роботите да се однесуваат „несоодветно“ и „штетно“)

1.7. КОМПОНЕНТИ НА РОБОТСКАТА РАКА

Роботската рака, како систем, се состои од следните составни делови, кои заедно прават една целина:

Манипулатор (роботска рака) – е основното тело на роботската рака и се состои од врски, зглобови и други структурни елементи. Без останатите составни делови, манипулаторот сам за себе не претставува робот.

Краен извршен елемент – е делот што се приклучува на последниот зглоб од роботската рака и служи за фаќање предмети, поврзување со други машини и изведување одредени задачи. Производителите на индустриски работи по правило не ги произведуваат и продаваат овие елементи заедно со роботот. Тоа е задача на инженерите и консултантите на компаниите купувачи, кои треба да ги проектираат и инсталираат извршните елементи на роботските манипулатори во зависност од нивната конкретна примена и услови на работа. Примери за конкретни извршни елементи се: пиштол за прскање боја, пламеник за заварување, истискувач на лепило, дупчалка.

Актуатори – се „мускулите“ на манипулаторите. Најчесто тоа се сервомотори, чекорни мотори, пневматски и хидраулични мотори. Постојат и други видови актуатори кои се користат во специјални намени. Актуаторите ги управува соодветен управувачки уред.

Сензори – се елементи кои служат да обезбедат информации за внатрешната состојба на роботскиот манипулатор или за комуникација со надворешната средина. Значи може да се зборува за два вида сензори: внатрешни, вградени во самиот манипулатор и надворешни. Управувачкиот дел од манипулаторот мора да „знае“ каде се наоѓа секој негов крак и зглоб, за да може точно да ја одреди конфигурацијата на манипулаторот. Овие информации ги обезбедуваат внатрешните сензори на манипулаторот. Надворешните сензори му овозможуваат на манипулаторот да комуницира со надворешната средина. Такви се: системи за гледање, сензори за допир, синтисајзери на звук и говор и др.

Управувачки елемент – е уред кој ја управува работата на актуаторите и го координира движењето на манипулаторот врз основа на повратните информации од внатрешните сензори. По својата улога може да се спореди со рбетниот мозок кај човекот кој, иако ја нема моќта на големиот мозок, сепак ги управува и координира движењата на човекот. Следниот пример е добра илустрација на неговата улога кај една роботска рака. Нека, на пример, за да подигне одреден предмет, првиот зглоб на една роботска рака треба да биде поставен под агол од 35° . Доколку почетната положба на првиот зглоб не се поклопува со саканата, управувачкиот елемент на раката испраќа сигнал до актуаторот на првиот зглоб (струен сигнал во случајот на електричен мотор, дотек на воздух во пневматскиот цилиндер, дотек на течност до хидрауличниот серво-вентил) кој ќе го придвижи актуаторот. Внатрешниот сензор поврзан со првиот зглоб од раката (потенциометар, енкодер и сл.) ја мери промената на аголот на зглобот и резултатите од мерењата ги испраќа до управувачкиот елемент во вид на повратна информација. Кога аголот на првиот зглоб ќе ја постигне саканата вредност, сигналот од управувачкиот елемент се прекинува. Кај посвршените манипулатори, управувачкиот елемент ги управува и брзината на движење и применетата сила на роботската рака.

Процесор – е „мозокот“ на роботскиот манипулатор. Тој ги пресметува движењето на зглобовите на манипулаторот, одредува во која мерка и колку брзо треба да се придвижи секој зглоб за да ја постигне саканата положба и брзина, и го надгледува координираното дејствување на управувачкиот елемент и сензорите. Општо земено, процесорот е пресметувач кој работи како и секој друг пресметувач, но има специјална задача. Следствено, процесорот на манипулаторот ги има истите можности и ограничувања како и секој стандарден пресметувач и како и секој друг пресметувач мора да поседува соодветен оперативен систем, програми и периферни уреди (како, на пример, монитори).

Битно е да се истакне дека кај многу роботски манипулатори управувачкиот елемент и процесорот се сместени во иста единица. Меѓутоа, иако овие два елемента се во исто куќиште, па дури и се интегрирани во една изведба, имаат две различни функции.

Софтвер (програмска поддршка) – Постојат главно три типа софтвер што се користат кај роботските манипулатори. Првиот е оперативен систем кој го управува компјутерот. Вториот е софтверот кој го пресметува движењето на секој зглоб од манипулаторот врз основа на неговите кинематски равенки и испраќа соодветна информација до управувачкиот елемент на манипулаторот. Овој софтвер може да биде на различно ниво, од машински јазик до софистицирани јазици кои ги користат современите работи. Третиот тип го чинат апликативни програми и збир рутини кои се наменети за изведување специфични задачи или за примена на периферните уреди на манипулаторот како, на пример, рутини за „гледање“.

1.8. СТЕПЕНИ СЛОБОДА НА ДВИЖЕЊЕ НА РОБОТСКАТА РАКА

За да се определи положбата на една точка во просторот потребно е да се зададат нејзините три координати во избраниот референтен координатен систем. На пример, тоа се x , y и z координатите во Декартовиот правоаголен координатен систем. Без оглед на тоа што координатите на една точка можат да се изразат во различни координатни системи, секогаш се потребни и доволни само три координати за положбата на точката во просторот наполно да биде определена – помалку од три координати се недоволни за да се определи положбата на една точка во просторот, а повеќе од три не можат да се дефинираат во тридимензионален простор. Во согласност со погорекажаното, еден тридимензионален уред со три степени слобода на движење треба да биде во состојба произволно одбрана точка да постави во произволно зададена положба во рамките на својот работен простор.

За да се определи положбата на едно цврсто тело (тридимензионален објект) во просторот, потребно е да се определи положбата на една точка од телото, на пример, неговото тежиште. Меѓутоа, постои бесконечен број начини на кои телото може да се ориентира околу избраната точка. Затоа, освен координатите на избраната точка, потребно е да се зададе и ориентацијата на телото во однос на неа, за што се потребни дополнителни три информации. Тоа значи дека положбата на едно цврсто тело во просторот целосно е определена со шест координати. Во согласност со ова, една роботска рака мора да поседува шест степени слобода на движење да може целосно да постави и ориентира еден објект во својот работен простор; помалку од шест степени слобода на движење значат дека роботската рака има ограничени можности.

Систем со седум степени слобода на движење нема единствено решение. Тоа значи дека роботска рака со седум степени слобода на движење може да постави даден објект во просторот на бесконечен број начини. За да може да одбере еден конкретен начин од овој бесконечен број, управувачкиот дел на роботската рака мора да користи дополнителни рутини за одлучување. На пример, тој користи рутина која му овозможува да го одбере најкусиот или најбрзиот пат до саканата положба.

Човечката рака, ако се исклучи дланката со прстите, има седум степени слобода на движење: рамото има 3 степени слобода на движење, лактот има 1 степен слобода на движење и зглобот на дланката има 3 степени слобода на движење.

Во еден роботски систем, извршниот елемент никогаш не се вклучува во степените слобода на движење на системот.

Постојат случаи кога движењето на некој зглоб од роботската рака не може целосно да се управува. На пример, еден линеарен зглоб, придвижуван од пневматски цилиндер, може да реализира само целосно издолжување или целосно собирање на роботската рака. Останатите меѓуположби не се управливи. Во ваков случај на зглобот му се доделува само $1/2$ степен слобода на движење, што значи дека зглобот може да се постави само во одредени позиции во рамките на својот ограничен работен простор. Друг пример за зглоб со $1/2$ степен слобода на движење е ротациски зглоб кој може да се постави само на одреден агол, на пример, на 0° , 30° , 60° и 90° степени. Бидејќи и во овој случај зглобот има ограничени можности, тој поседува само ограничен степен слобода на движење.



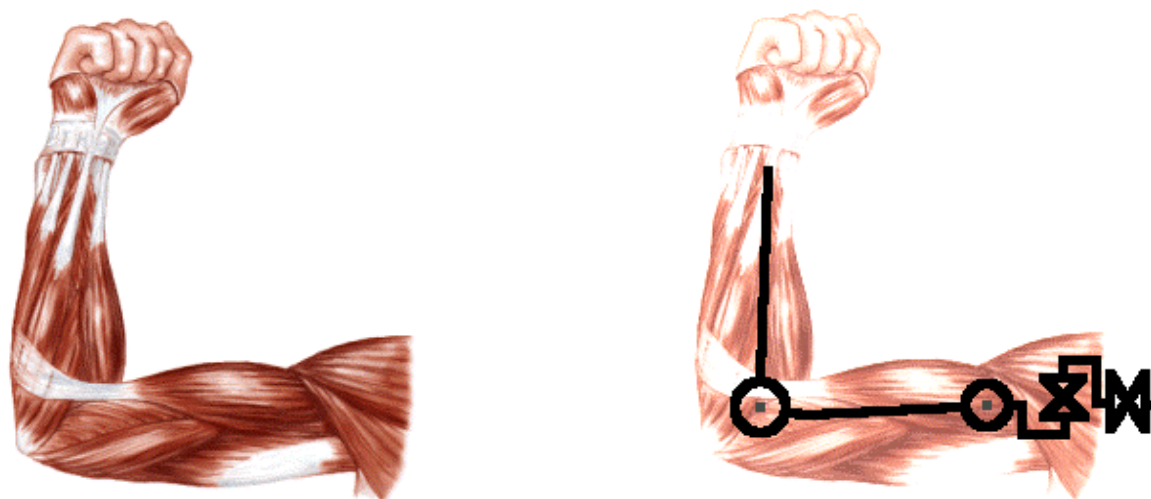
Слика 1.3. Роботска рака со 3 степени слобода на движење со транслациски зглоб (<https://www.societyofrobots.com>)



Слика 1.4. Роботска рака со 4 степени слобода на движење (<https://www.societyofrobots.com>)



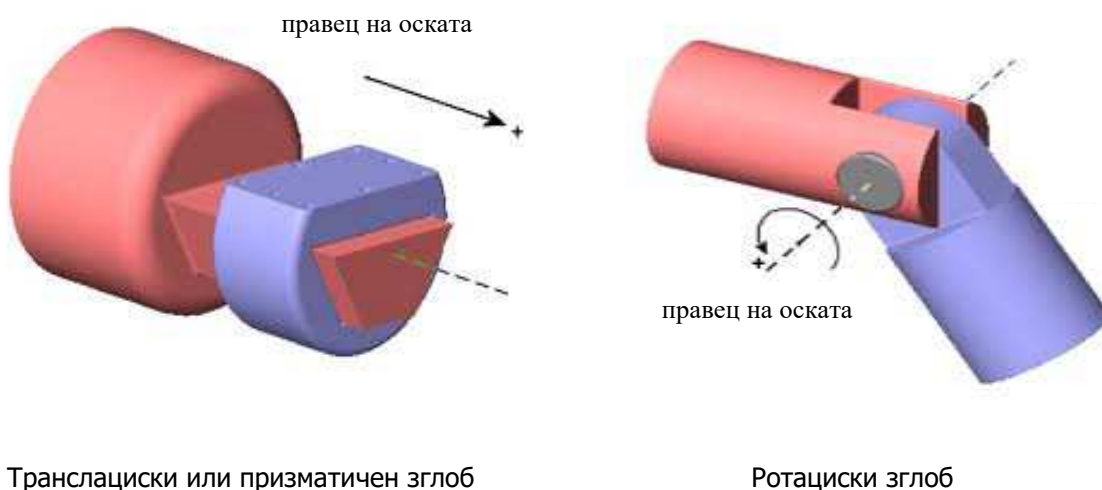
Слика 1.5. Роботска рака со 5 степени слобода на движење (<https://www.societyofrobots.com>)



Слика 1.6. Човечка рака (<https://www.societyofrobots.com>)

1.9. ЗГЛОБОВИ НА РОБОТСКАТА РАКА

Зглобовите на една роботска рака можат да бидат **транслациски**, **ротациски**, **цилиндрични** или **сферни**. Транслациските зглобови имаат еден степен слобода на движење и претставуваат транслациско движење изразено во метри или делови од метар. Ротациските зглобови исто така имаат еден степен слобода на движење и претставуваат ротациско движење изразено во степени или радијани. Најголемиот број роботски раце имаат транслациски или ротациски зглобови. Транслациските зглобови по правило се означуваат со P , додека ротациските зглобови се означуваат со R .



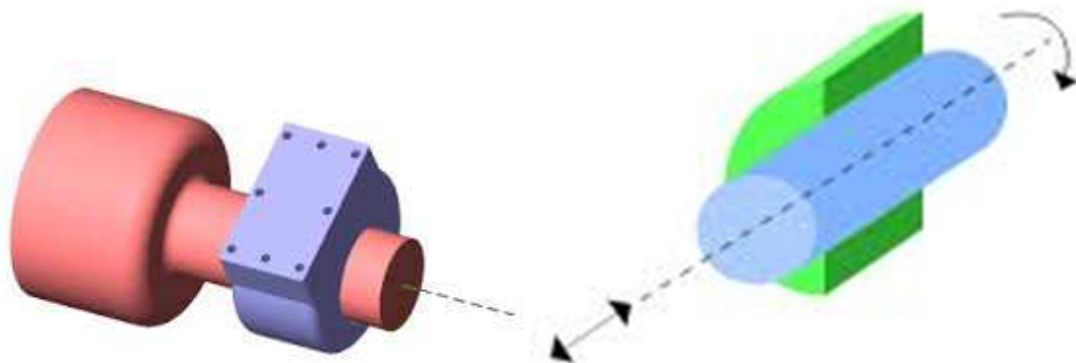
Транслациски или призматичен зглоб

Ротациски зглоб

Слика 1.7. Приказ на транслациски и ротациски зглоб (<https://www.mathworks.com>)

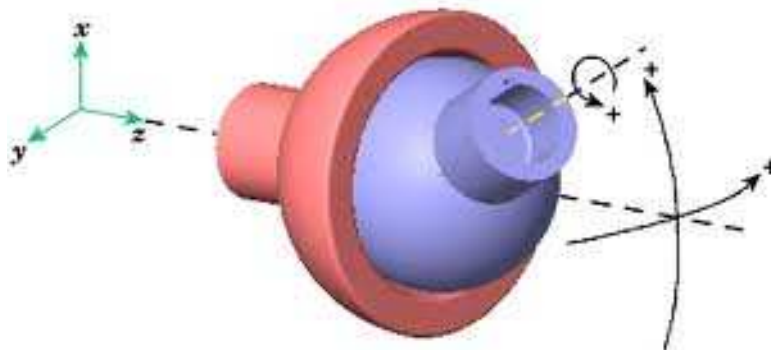
Цилиндричните зглобови поседуваат два степени слобода на движење – ротациско и транслациско, при што оската на ротација и оската на транслација мора да бидат паралелни. Сферните зглобови поседуваат три степени слобода на движење и претставуваат ротациски движења околу три оски на референтниот координатен систем, опишани со т.н. Ојлерови агли. Сферните зглобови се означуваат со S . Иако

сферните зглобови се сретнуваат кај многу системи, тие не се користат често во роботиката освен во истражувачки цели, бидејќи тешко се управуваат.



Слика 1.8. Цилиндричен зглоб – 2 степени слобода на движење (<https://www.mathworks.com>)

Транслациските роботски зглобови можат да бидат пасивни или активни (мотори). Како активни зглобови тие се изведуваат со хидраулични или пневматски цилиндри, или со линеарни електрични актуатори. Ротациските зглобови исто така можат да бидат пасивни или активни зглобови. Иако постојат хидраулични и пневматски активни ротациски зглобови, ротациските роботски зглобови најчесто се задвижуваат со електрични чекорни или сервомотори. Сферните зглобови секогаш претставуваат пасивни зглобови и не можат да дејствуваат како мотори.



Слика 1.9. Сферен зглоб – три степени слобода на движење (<https://www.mathworks.com>)

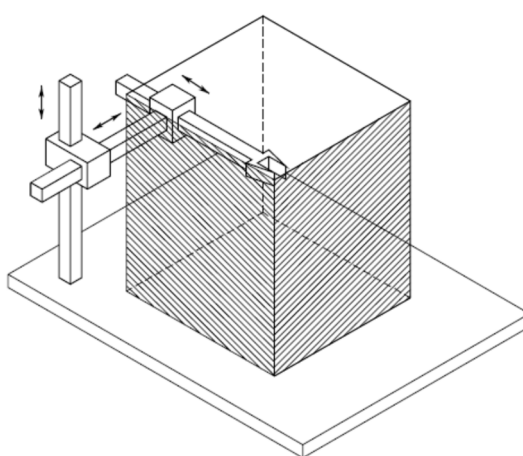
1.10. РОБОТСКИ КОНФИГУРАЦИИ

Конфигурацијата на една роботска рака се специфицира преку координатните системи поврзани со нејзините зглобови и типот зглобови што ги поседува. На пример, роботска рака што поседува 2 транслациски и 3 ротациски зглоба се означува со 2P3R. Кај роботските раце најчесто се сретнуваат следните конфигурации:

Правоаголна конфигурација 3P - роботскиот манипулатор има три транслациски зглобови за позиционирање на извршниот елемент. Очигледно, за негово ориентирање во просторот потребни се дополнителни ротациски зглобови.

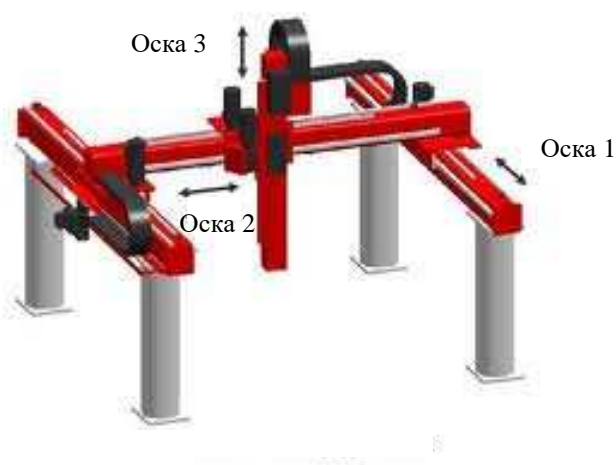


Слика 1.10. Картезијански роботски манипулатор (<https://www.azorobotics.com>)



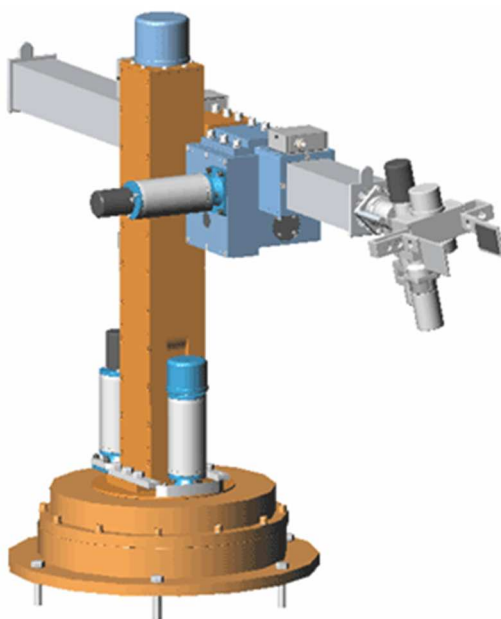
Слика 1.11. Шематски приказ на правоаголна односно Картезијанска роботска конфигурација и нејзиниот работен простор (m.federica.eu)

Во комерцијална примена се сретнуваат неколку типови правоаголни роботски манипулатори, чиј работен простор се движи од неколку кубни сантиметри до десетици илјади и кои можат да поместат товар до неколку стотини килограми. Најчест тип правоаголни роботски конфигурации кои денес се користат се т.н. Гантри роботи, кои се одликуваат со специјална изведба на хоризонталниот дел.

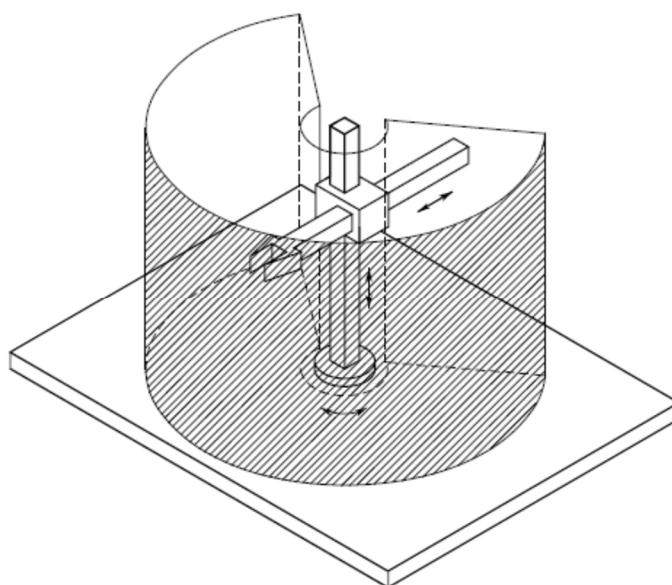


Слика 1.12. Gantry робот

Цилиндрична конфигурација R2P - роботскиот манипулатор има два линеарни и еден ротациски зглоб за позиционирање на извршниот елемент, додека за негово ориентирање во просторот потребни се дополнителни ротациски зглобови.



Слика 1.13. Цилиндрична роботска рака



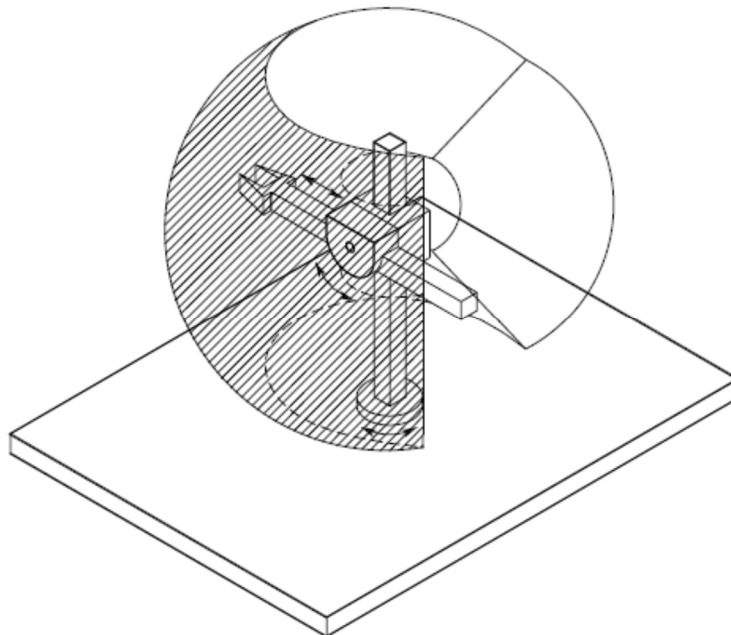
Слика 1.14. Цилиндрична роботска рака - шематски приказ и нејзиниот работен простор (m.federica.eu)

Овој тип роботски манипулатори, заедно со сферните, имале голема комерцијална примена во почетокот и биле многу популарни. Меѓутоа денес на пазарот се достапни само мал број комерцијални модели на цилиндрични и сферни роботски манипулатори. Причината за тоа лежи во одредени технички проблеми што се јавуваат во врска со движењето на нивниот призматичен зглоб.

Сферна конфигурација 2RP - роботскиот манипулатор има два ротациски и еден линеарен зглоб за позиционирање на извршниот елемент, како и дополнителни ротациски зглобови за негово ориентирање во просторот.



Слика 1.15. Сферна или поларна роботска рака

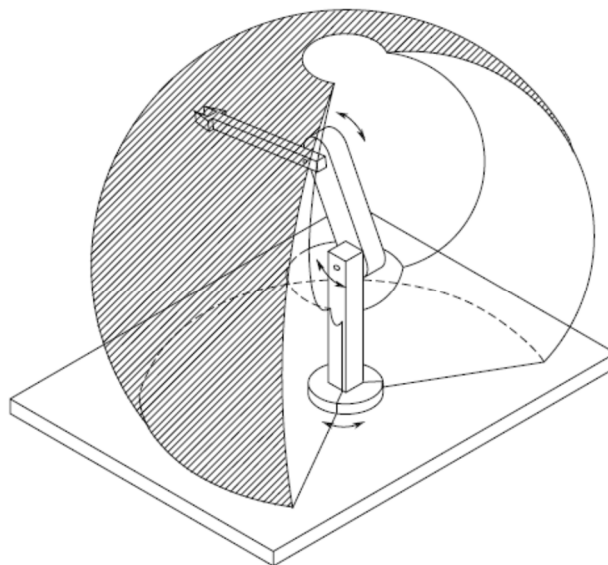


Слика 1.16. Шематски приказ на сферна роботска конфигурација и нејзиниот работен простор (m.federica.eu)

Антропоморфна конфигурација 3R - роботскиот манипулатор има три ротациски зглобови, слично како и човечката рака.



Слика 1.17. Антропоморфна роботска рака

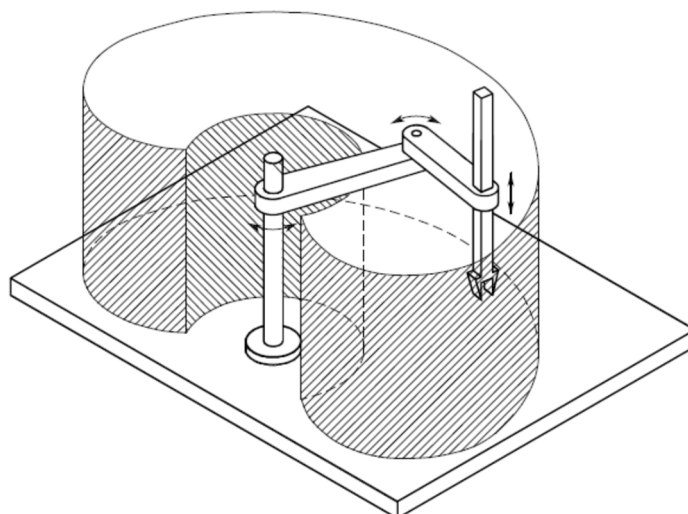


Слика 1.18. Шематски приказ на антропоморфна роботска конфигурација и нејзиниот работен простор (m.federica.eu)

SCARA - работи (Selective Compliance Assembly Robot Arm) - SCARA - роботските раце имаат два паралелни ротациски зглобови, кои им дозволуваат движење во хоризонталната рамнина и еден линеарен, кој се движи вертикално. Иако тие имаат иста RRP - структура како и сферните роботски манипулатори, значително се разликуваат од нив како по изглед така и по примената.



Слика 1.19. SCARA - роботска рака



Слика 1.20. Шематски приказ на една SCARA - роботска конфигурација и нејзиниот работен простор (m.federica.eu)

1.11. КООРДИНАТНИ СИСТЕМИ НА РОБОТСКАТА РАКА

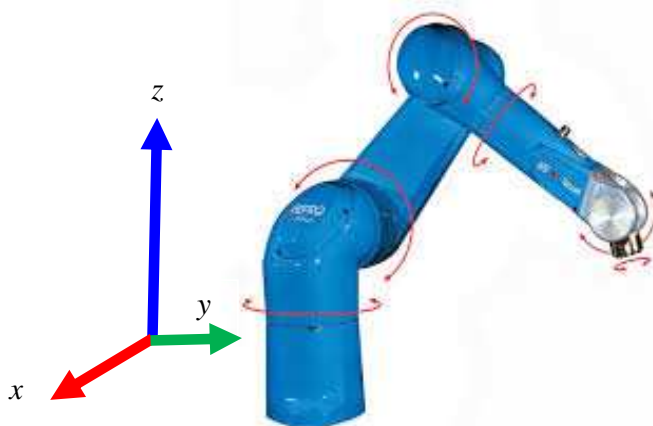
Движењето на еден роботски манипулатор се набљудува во однос на соодветен координатен систем. Со роботската рака можат да се придружат повеќе координатни системи како, на пример:

- Универзален координатен систем
- Координатен систем на зглобовите
- Координатен систем на извршниот елемент на раката

Притоа движењето на роботската рака е различно во однос на тие координатни системи. Бидејќи секој координатен систем дефинира одреден простор, движењето на раката

може да се набљудува во различни простори. Вообичаено, движењето на еден роботски манипулатор се прикажува во некој од следните три простори:

Универзален простор. Тој е дефиниран со x , y и z –оската. Кога движењето на роботската рака е претставено во овој координатен систем, нејзините зглобови се придвижуваат симултано долж трите координатни оски. Во универзалниот координатен систем, прикажан на слика 1.21, без оглед каде се наоѓа извршниот елемент на роботската рака, позитивно x движење е секогаш движење во позитивна насока долж x – оската. Се користи кога треба да се определи движењето на раката во однос на другите објекти во просторот, да се дефинира положбата на другите делови и машини со кои комуницира конкретната роботска рака и да се дефинираат патеките на движење на раката.



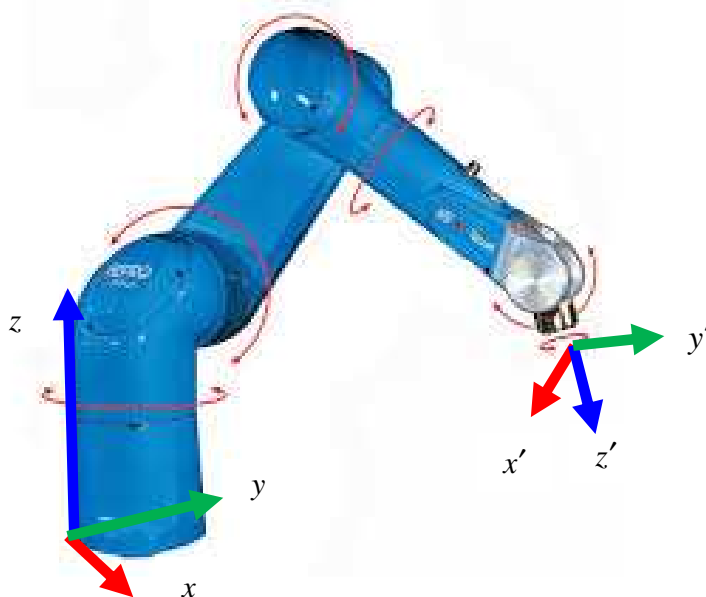
Слика 1.21. Универзален координатен систем

Простор на зглобовите. Прикажан е на слика 1.22. Се користи кога движењето на роботската рака треба да се определи преку движењето на секој од зглобовите на раката одделно. Нека, на пример, роботската рака треба да се постави во одредена положба (позиција и ориентација во просторот). Движењето може да се изведе така што секој од зглобовите на раката ќе се придвижи посебно и последователно. Во ваков случај, секој од зглобовите на роботската рака може да се набљудува одделно, зашто во еден момент се движи само еден зглоб од раката. Зависно од типот на зглобовите на раката (призматични, ротациски или сферни), движењето на раката ќе биде различно. Инверзната кинематика на роботската рака може да се набљудува како пресликување од просторот на раката во просторот на зглобовите.



Слика 1.22. Координатен систем на зглобовите

Простор на извршниот елемент на раката. Прикажан е на слика 1.23. Го одредува движењето на роботската рака во однос на координатниот систем придружен со нејзиниот извршен елемент. Овој координатен систем е претставен со координатните оски x' , y' и z' .

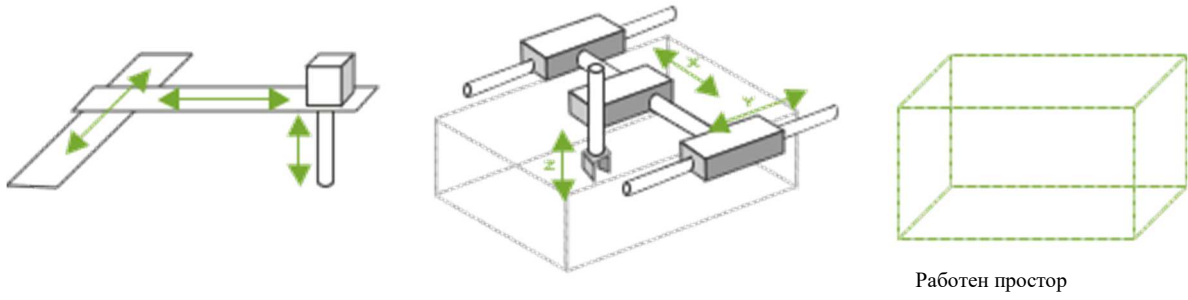


Слика 1.23. Координатен систем на извршниот елемент од раката

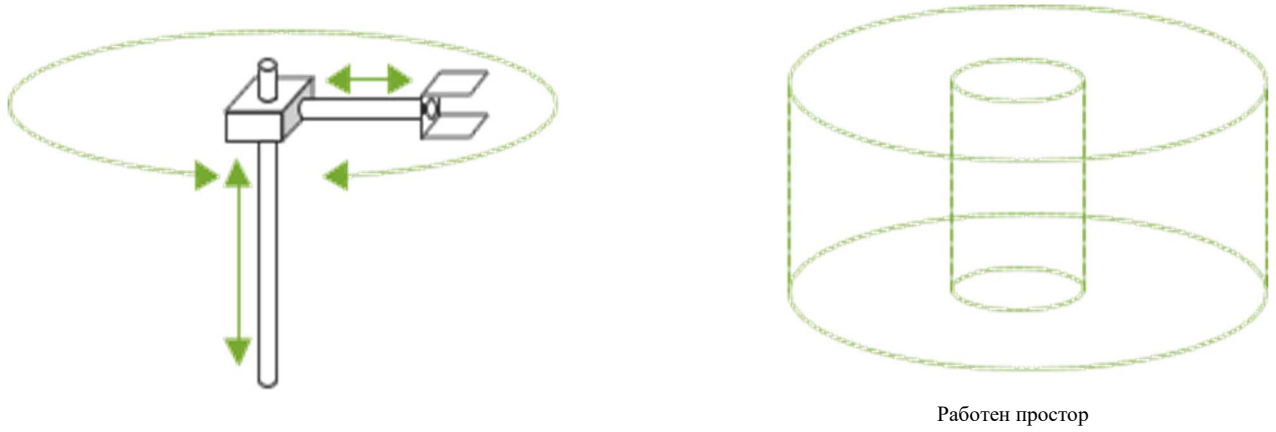
За разлика од универзалниот координатен систем, локалниот координатен систем (x' , y' , z') се движи заедно со роботската рака. Ако се набљудува роботската рака од слика 1.23, може да се забележи дека исто позитивно движење долж z' – оската ќе биде нагоре, доколку раката е завртена нагоре, и ќе биде надолу, доколку раката е завртена надолу. Со други зборови, координатниот систем придружен со извршниот елемент на роботската рака е подвижен и се менува со движењето на раката, така што движењата на раката во однос на овој координатен систем се различни, во зависност од тоа во која положба се наоѓа раката и каква е ориентацијата на самиот координатен систем. Во овој координатен систем сите зглобови на раката се движат симултано со цел да обезбедат нејзино координирано движење во однос на локалниот координатен систем. Тој е многу полезен при програмирањето на роботските раце, кога раката треба да се приближи до други објекти или оддалечи од нив, и кога треба да составува делови.

1.12. РАБОТЕН ПРОСТОР НА РОБОТСКАТА РАКА

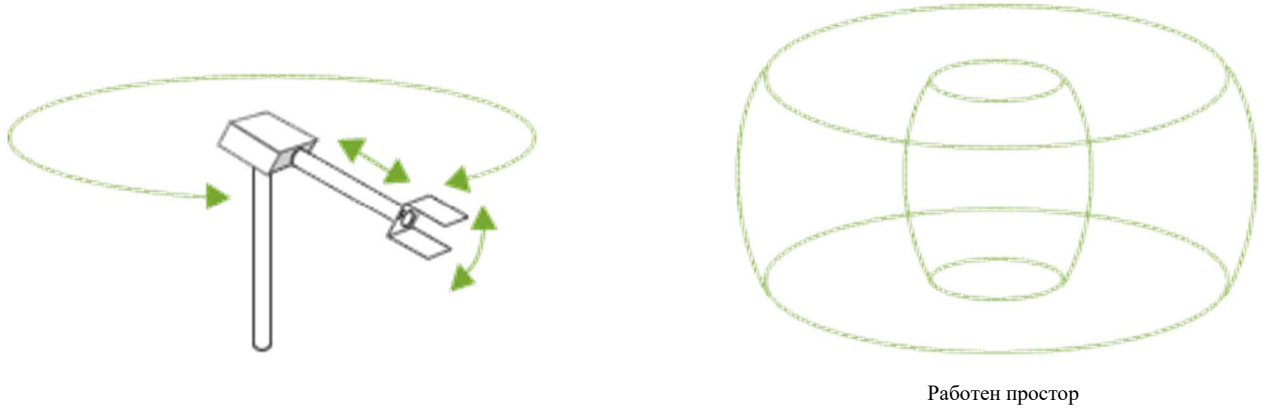
Под **работен простор на роботската рака** се подразбира множеството точки во просторот што раката може да ги дофати. Обликот на работниот простор зависи од конфигурацијата на раката и од нејзините карактеристики. Тој може да се определи математички преку равенствата на нејзините зглобови и краци, кога во нив ќе се внесат сите ограничувања на зглобовите и краците, каков што е опсегот на движење на еден зглоб. На пример, еден ротациски зглоб не мора секогаш да биде во состојба да се заврти за полн круг од 360° . Исто така, работниот простор може да се определи и емпириски, со движење на секој зглоб во неговиот дозволен опсег и набљудување на просторот што тој може да го дофати. На слика 1.24 до слика 1.27 се прикажани работните простори на некои најпознати роботски конфигурации.



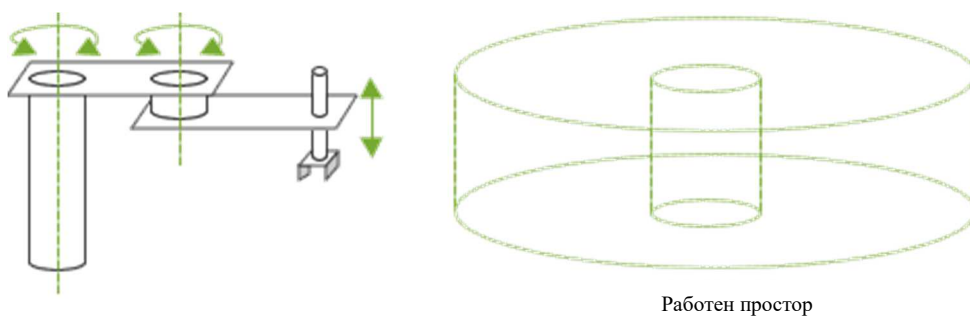
Слика 1.24. Работен простор на правоаголна роботска конфигурација



Слика 1.25. Работен простор на цилиндрична роботска конфигурација



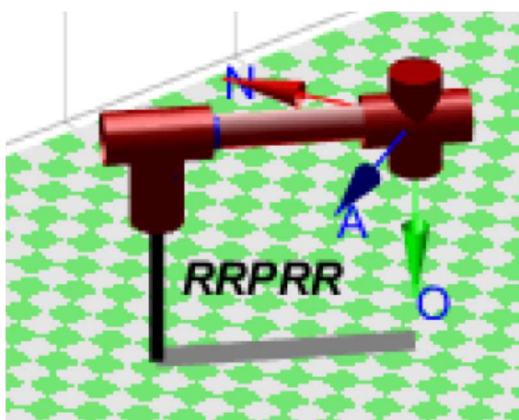
Слика 1.26. Работен простор на сферна роботска конфигурација



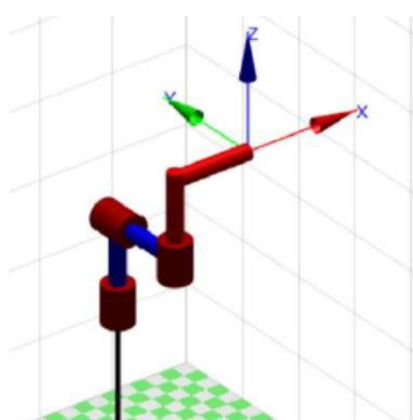
Слика 1.27. Работен простор на SCARA - роботска конфигурација

1.13. ЗАДАЧИ

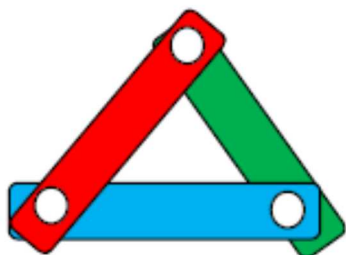
1.1. Колку степени слобода на движење поседува секој од механизмите прикажани на сликата 1.28.



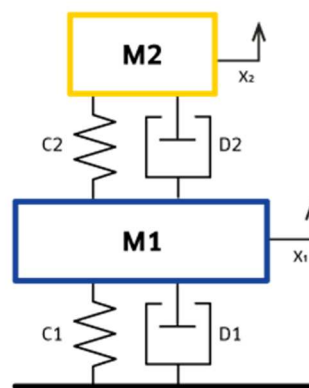
(а) добиена со Robotics Toolbox [9]



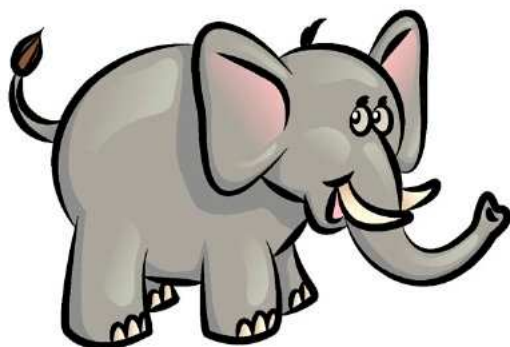
(б) добиена со Robotics Toolbox [9]



(в)



(г)



(д)



(е)

Слика 1.28. Илустрација кон задачата 1.1

Да се претпостави дека сите краци се крути, освен ако тоа не е поинаку зададено. Да се претпостави дека механизмите можат да се движат во тридимензионален простор, освен ако не се заземјени. За слонот да се претпостави дека е круто тело, освен сурлата која може да заземе облик на произволна мазна крива линија со одредена должина. Извршните елементи не се вклучени во степените слобода на движење на механизмите.

1.2. Набљудувајте роботска рака со три степени слобода на движење долж x , y и z оската. Дали таа е во состојба да постави и ориентира објект во просторот? Објаснете.

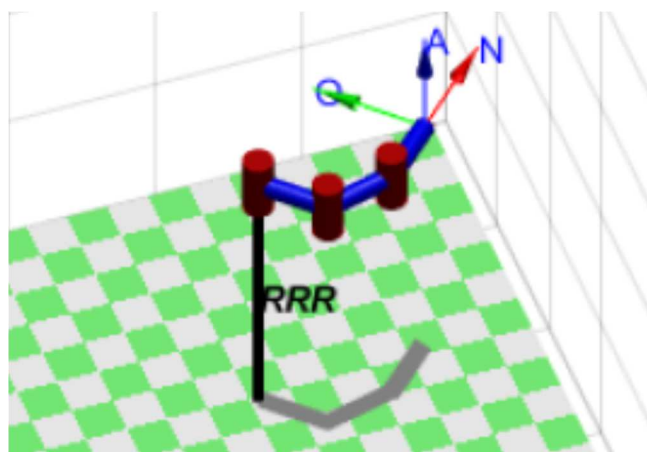
1.3. Набљудувајте роботска рака со пет степени слобода на движење - ротација околу трите оски и движење долж x и y оската. Дали таа е во состојба да постави и ориентира објект во просторот? Објаснете.

1.4. Набљудувајте роботска рака со седум степени слобода на движење. Дали таа е во состојба да постави и ориентира објект во просторот? Објаснете.

1.5. Колку степени слобода на движење има роботска рака поставена на количка или подвижна лента?

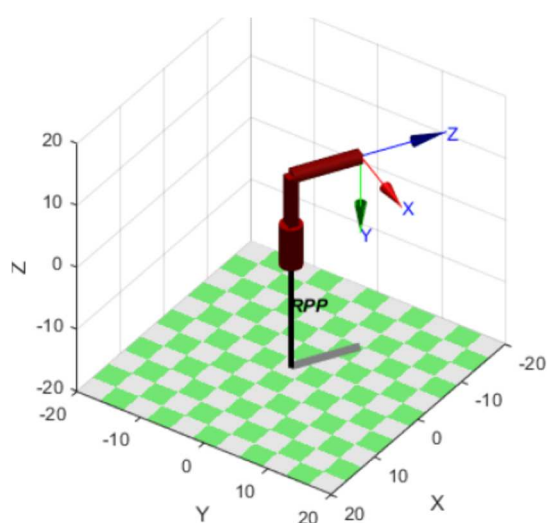
1.6. Колку степени слобода на движење има човечката рака? Објаснете.

1.7. Да се скицира работниот простор на роботската рака од слика 1.29.



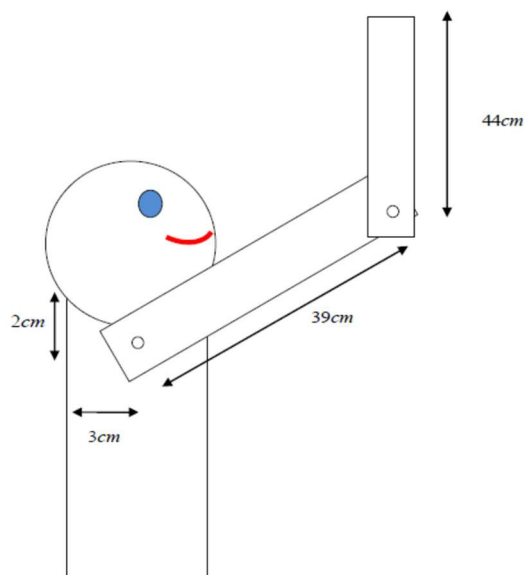
Слика 1.29. Илустрација кон задачата 1.7 добиена со Robotics Toolbox [9]

1.8. Да се скицира работниот простор на роботската рака од слика 1.30.



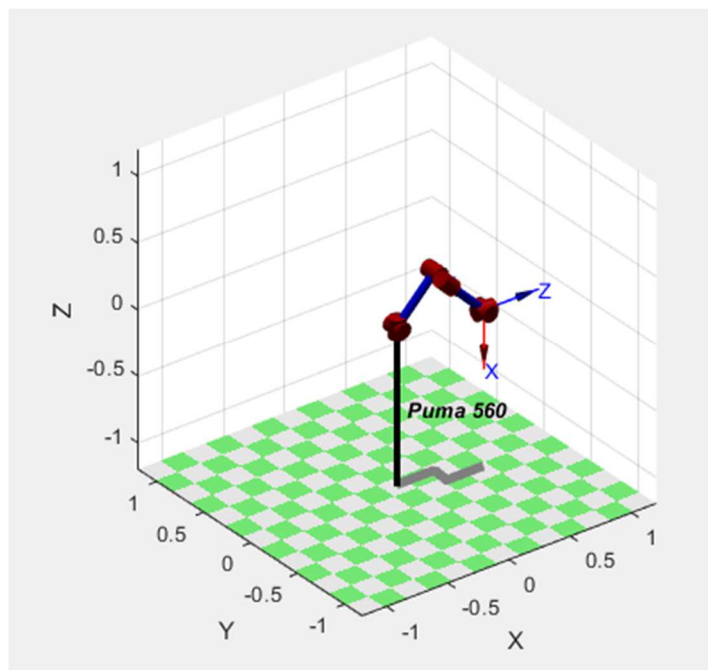
Слика 1.30. Илустрација кон задачата 1.8 добиена со Robotics Toolbox [9]

1.9. Човеколик робот има рака со два зглоба и два крака, како што е прикажано на сликата 1.31. Должината на кракот од рамото до лактот е 39 сантиметри, а должината на кракот од лактот до дланката е 44 сантиметри. Растојанието од зглобот на рамото до грбот од роботот е 3 сантиметри, а до врвот од грбот 2 сантиметри. Под претпоставка дека нема ограничување во движењето на зглобовите од раката, да се утврди дали роботот може со раката да го достигне зглобот од рамото. Исто така да се одреди највисоката точка од грбот што роботот може да ја достигне со раката.



Слика 1.31. Илустрација кон задачата 1.9

1.10. Со помош на MATLAB да се нацрта работниот простор на роботската рака од сликата 1.32, која претставува антропоморфен робот со 6 степени слобода на движење.



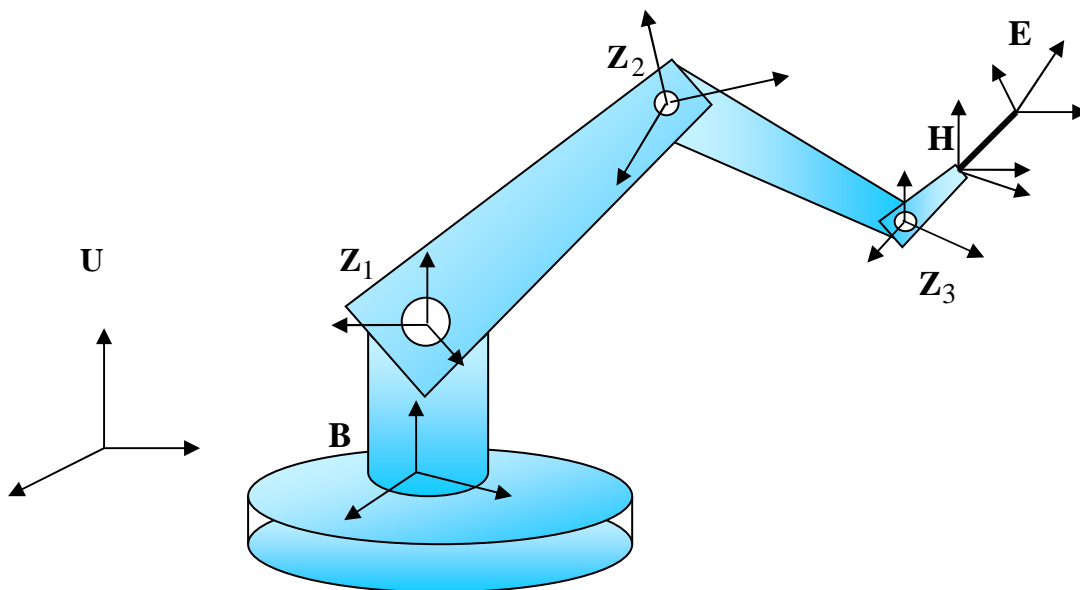
Слика 1.32. Илустрација кон задачата 1.10 добиена со Robotics Toolbox [9]

ГЛАВА 2. КИНЕМАТИКА

2.1. ВОВЕД

Од механичка гледна точка, една роботска рака може да се набљудува како кинематски ланец од крути тела - краци, поврзани меѓусебно со зглобови. Следствено, роботските раце се тридимензионални ланчани кинематски механизми со повеќе степени слобода на движење. Дводимензионални роботски раце со повеќе степени слобода на движење се можни, но не се така вообичаени.

Едниот крај на раката е прицврстен за основа, а на другиот крај од раката е поставен извршен елемент, чија конкретна реализација зависи од работата што треба да ја извршува раката – дупчалка, пиштол за прскање боја, штипка за фаќање и сл. Вкупното движење на раката претставува збир од соодветните движења на нејзините зглобови. Притоа, движењето на секој еден зглоб од раката се одредува во однос на претходниот зглоб. На слика 2.1 е прикажана една роботска рака со одреден број зглобови. Кон секој зглоб од раката е придружен соодветен координатен систем Z_i . Координатниот систем придружен со основата од роботската рака е означен со B , координатниот систем придружен со крајот од роботската рака е означен со H , додека координатниот систем придружен со извршниот елемент е означен со E . Референтниот координатен систем, кој секогаш е фиксен односно неподвижен, на сликата е означен со U .

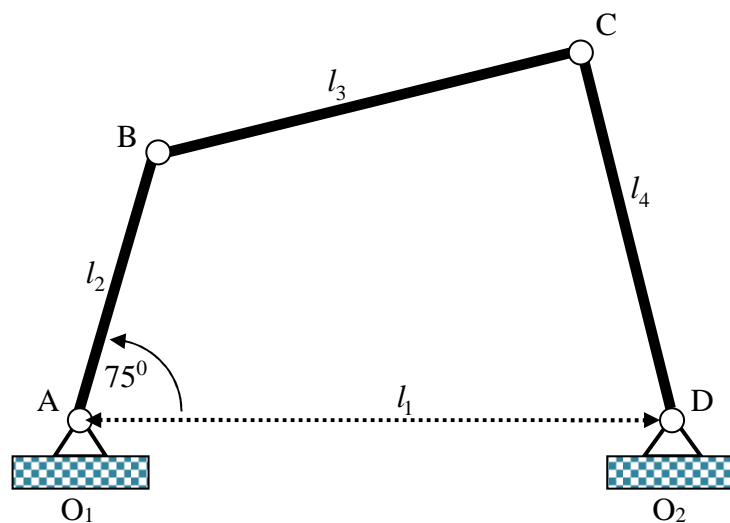


Слика 2.1. Роботска рака

За да може роботската рака да извршува одредена задача, нејзината положба во просторот мора постојано да биде позната, а за да може да се определи положбата на роботската рака во просторот, мора да бидат познати сите променливи на зглобовите од роботската рака. Имено, роботските раце се отворени системи, што значи дека и најмалото поместување на некој зглоб или крак од раката ќе ја

промени положбата на сите следни краци без повратна информација. Затоа, дури и кога сите променливи на зглобовите се поставени на саканите вредности, не значи дека роботската рака сигурно ќе биде во саканата положба. Поради тоа мора постојано да се мерат сите параметри и да се пресметуваат сите променливи на зглобовите и краците или мора постојано да се набљудува положбата на крајниот зглоб од роботската рака.

На слика 2.2 за споредба е прикажан еден затворен кинематски систем. Кога една променлива на системот е поставена на одредена вредност, овој механизам е целосно дефиниран, што значи дека сите негови останати променливи се одредени и познати. Така, ако првиот крак од механизмот на слика 2.2 се постави под агол од 75° , ќе бидат одредени и аглите на останатите два крака. Следствено, механизмот поседува само еден степен слобода на движење, што се должи на фактот дека тој претставува затворен систем.



Слика 2.2. Приказ на механизам со еден степен слобода на движење

2.2. МАТРИЧНО ПРЕТСТАВУВАЊЕ ВО ПРОСТОРОТ НА ОДРЕДЕНИ КИНЕМАТСКИ ЕЛЕМЕНТИ

За претставување точки, вектори, координатни системи и цврсти тела во просторот, во роботиката се користат матрици. Со помош на матрици се претставуваат и движењата на овие кинематски елементи во просторот. Тие движења се состојат од елементарни транслации и ротации, но сите со едно име се нарекуваат **трансформации**. Оттаму, соодветните матрици кои ги опишуваат ваквите движења во роботиката се нарекуваат **трансформационски матрици**.

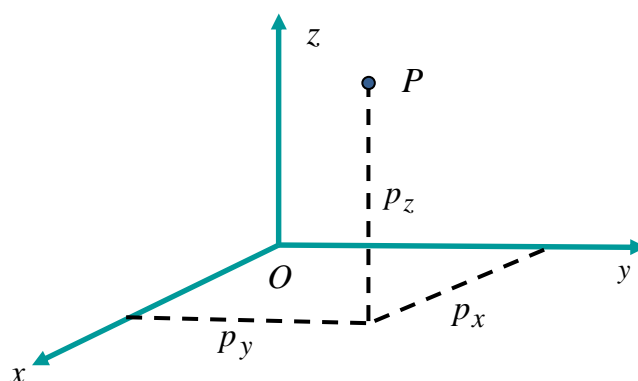
2.2.1. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ТОЧКА ВО ПРОСТОРОТ

Положбата на една точка P во просторот се претставува во однос на одбран референтен координатен систем. Така, нека x , y и z се координатните оски на даден референтен координатен систем, додека O е неговиот координатен почеток.

Тогаш референтниот координатен систем може да се означи како $O(x, y, z)$ или, едноставно како $\{O\}$. Нека \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} се единични вектори на правец на координатните оски на референтниот координатен систем. Тогаш, важи: $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ и $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. За вака дефиниран референтен координатен систем, положбата на една точка P во просторот може да се претстави на следниот начин:

$$P = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k} \quad (2.1)$$

каде што p_x, p_y, p_z се координати на точката P во одбраниот референтен координатен систем. Положбата на една точка во просторот може да се претстави и со помош на други координатни системи.



Слика 2.3. Претставување точка во просторот

2.2.2. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ВЕКТОР ВО ПРОСТОРОТ

Еден вектор \mathbf{p} во просторот може да се претстави преку координатите на неговиот почеток и врв. Така, ако векторот \mathbf{p} започнува во точката $O(o_x, o_y, o_z)$ и завршува во точката $P(p_x, p_y, p_z)$, тој ќе биде претставен на следниот начин:

$$\mathbf{p} = (p_x - o_x) \mathbf{i} + (p_y - o_y) \mathbf{j} + (p_z - o_z) \mathbf{k} \quad (2.2)$$

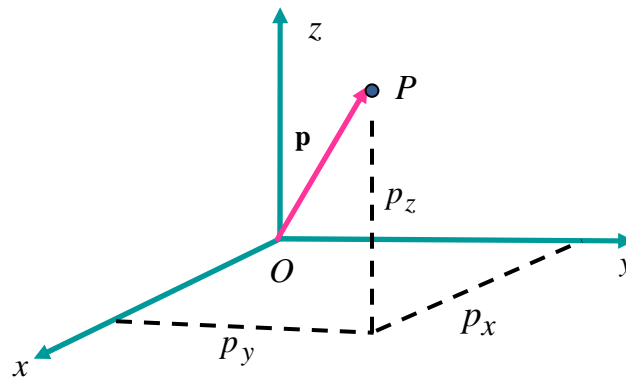
Ако векторот започнува во координатниот почеток, равенката (2.2) добива облик:

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k} \quad (2.3)$$

каде што p_x, p_y, p_z се координати на векторот \mathbf{p} во одбраниот референтен координатен систем. Равенката (2.3) е идентична со равенката (2.1) затоа што секоја точка во просторот може да се претстави со вектор, чиј почеток се наоѓа во координатниот почеток од одбраниот координатен систем, слика 2.4.

Трите компоненти на векторот \mathbf{p} можат да се претстават во матричен облик на следниот начин:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$



Слика 2.4. Претставување вектор во просторот

или, во малку модифициран облик:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

каде што w претставува нормирачки фактор таков што:

$$p_x = \frac{x}{w}, p_y = \frac{y}{w}, p_z = \frac{z}{w} \quad (2.6)$$

Променливата w може да биде произволен број и со неговата измена се менува големината на самиот вектор. Ако w е поголемо од единица, сите координати на векторот се зголемуваат; ако w е помало од единица, координатите на векторот се намалуваат; кога w е еднаков на единица, елементите на векторот остануваат непроменети. Специјален случај е кога w е еднаков на нула. Тогаш елементите на векторот стануваат бесконечно големи и тој станува вектор со бесконечна должина, но со ист правец. Затоа факторот $w=0$ се користи за претставување **вектор на правец**.

Пример 2.1. Векторот:

$$\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \quad (2.7)$$

да се претстави во матричен облик: а) со нормирачки фактор $w=3$ и б) како единичен вектор на правец.

Решение: а) Соодветната матрица-колона за претставување на векторот (2.7) со нормирачки фактор $w = 3$ е:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 21 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

б) Соодветната матрица-колона за претставување на векторот (2.7) како вектор на правец е:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Меѓутоа, за да биде тој единичен вектор на правец, потребно е да се нормализираат неговите координати, така што должината на векторот ќе биде единица. За таа цел, елементите на векторот (2.9) се делат со квадратен корен од збирот на квадратите на трите координати p_x, p_y, p_z :

$$\sqrt{4^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{101} \approx 10 \quad (2.10)$$

Тогаш, новите координати на векторот (2.9) како единичен вектор на правец ќе бидат:

$$x = \frac{4}{10} = 0.4, \quad y = \frac{6}{10} = 0.6, \quad z = \frac{7}{10} = 0.7 \quad (2.11)$$

и тој е претставен со матрицата-колона:

$$\mathbf{p}_{edin} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Лесно може да се провери дека должината на овој вектор навистина е единица:

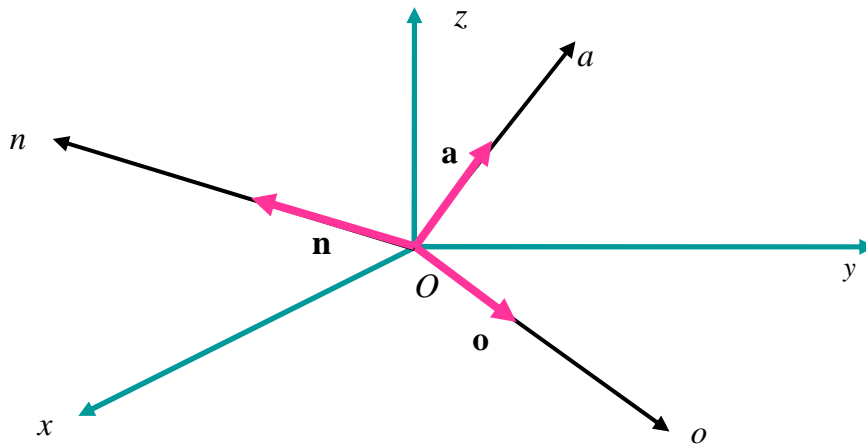
$$\lambda = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0.4^2 + 0.6^2 + 0.7^2} = \sqrt{1.01} \approx 1 \quad (2.13)$$

2.2.3. ПРЕТСТАВУВАЊЕ КООРДИНАТЕН СИСТЕМ ВО ПРОСТОРОТ

Нека е даден произволен координатен систем \mathbf{F} со координатни оски n, o, a , чии единични вектори на правец се $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}$ соодветно. Под претпоставка, координатниот почеток на произволниот координатен систем \mathbf{F} се наоѓа во координатниот почеток од зададениот референтен координатен систем $O(x, y, z)$. Секој од единичните вектори $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}$ е претставен со своите три координати во избраниот референтен координатен систем:

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z), \quad \mathbf{o} = (o_x, o_y, o_z), \quad \mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad (2.14)$$

и тие ја опишуваат положбата на набљудуваниот произволен координатен систем во просторот, како што е покажано на слика 2.5.



Слика 2.5. Претставување произволен координатен систем во просторот

Следствено, еден произволен координатен систем \mathbf{F} , чиј координатен почеток се поклопува со координатниот почеток на референтниот координатен систем, може да се претстави со следната матрица:

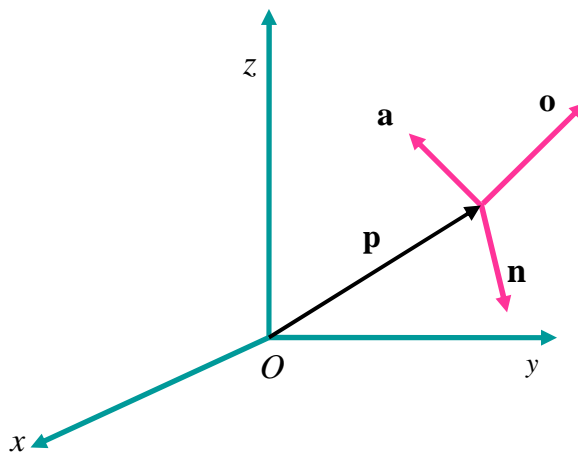
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Доколку набљудуваниот координатен систем не е сместен во координатниот почеток од референтниот координатен систем, како што е прикажано на слика 2.6, потребно е да се определи и положбата на координатниот почеток од произволниот координатен систем во однос на референтниот координатен систем. За таа цел се одредува вектор \mathbf{p} помеѓу координатните почетоци од двата координатни системи:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Тогаш набљудуваниот произволен координатен систем може да се претстави со матрицата:

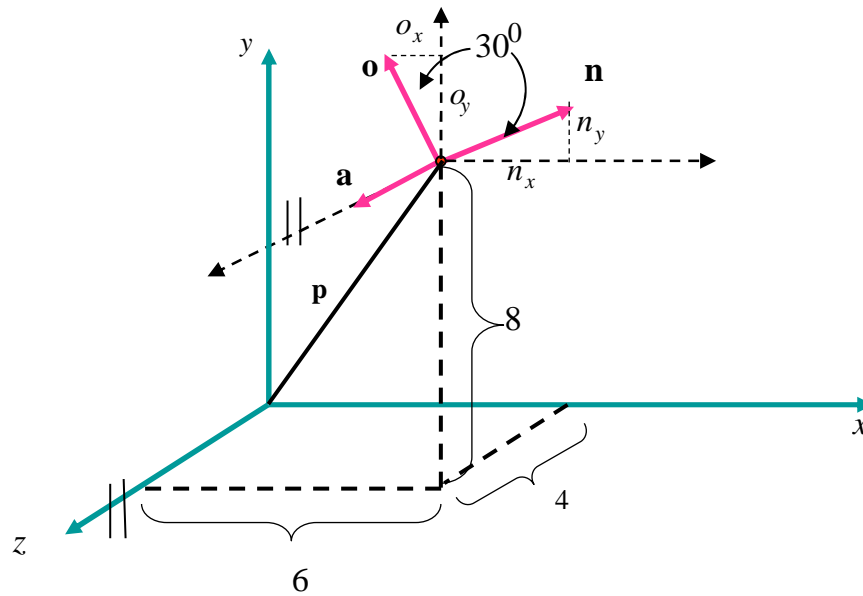
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$



Слика 2.6. Претставување произволен координатен систем во просторот

каде што првите три колони се вектори на правец со $w=0$, кои го претставуваат правецот на единичните вектори \mathbf{n} , \mathbf{o} , \mathbf{a} од произволниот координатен систем \mathbf{F} , додека четвртата колона е вектор со $w=1$, кој ја претставува положбата на координатниот почеток од произволниот координатен систем во однос на референтниот координатен систем.

Пример 2.2. Да се опише положбата на координатниот систем $\mathbf{F}(n,o,a)$, прикажан на слика 2.7, во однос на референтниот координатен систем $\mathbf{U}(x,y,z)$. Оската a од координатниот систем \mathbf{F} е паралелна со z -оската на референтниот координатен систем, додека неговата n -оска зафаќа агол од 30° со x -оската од референтниот координатен систем, исто како и неговата o -оска, која зафаќа агол од 30° со y -оската од референтниот координатен систем. Координатниот почеток на координатниот систем \mathbf{F} има координати $(6,8,4)$.



Слика 2.7. Произволен координатен систем во просторот од примерот 2.2

Решение: Координатниот систем \mathbf{F} може да се опише со матрицата:

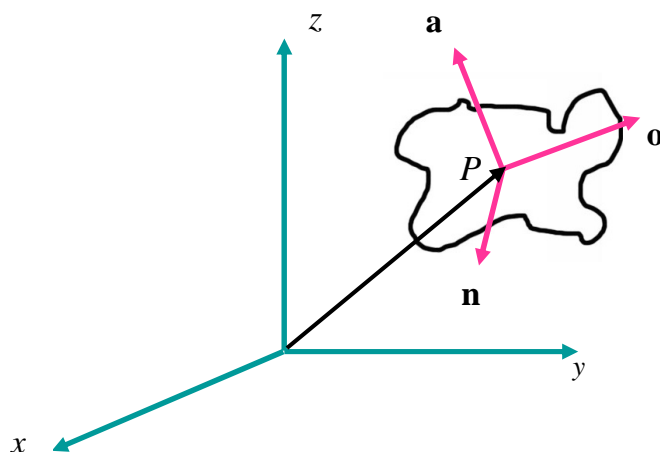
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 & 6 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

2.2.4. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ЦВРСТО ТЕЛО ВО ПРОСТОРОТ

Произволен објект во просторот може да се претстави на тој начин што ќе му се придружи координатен систем и потоа тој координатен систем ќе се претстави во просторот, слика 2.8. Позицијата и ориентацијата на објектот во однос на придружениот координатен систем се секогаш познати. Оттаму, сè додека координатниот систем придружен со објектот може да се претстави во просторот, ќе биде позната и позицијата и ориентацијата на објектот во однос на референтниот координатен систем.

Како што е претходно покажано, координатниот систем придружен со набљудуваниот објект во просторот е опишан со следната матрица:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$



Слика 2.8. Претставување цврсто тело во просторот

Една точка во просторот има само три степени слобода на движење – таа може да се движи само долж x -оската, y -оската и z -оската од референтниот координатен систем. Едно цврсто тело во просторот има 6 степени слобода на движење - тоа не само што може да се движи долж координатните оски од референтниот координатен систем, туку може и да ротира околу нив. Следствено, едно цврсто тело да биде целосно опишано во просторот, потребни се 6 информации. Меѓутоа, во матрицата (2.19) се содржани 12 информации – 9 за ориентација и 3 за позиција. Тоа значи дека се потребни дополнителни услови кои бројот информации ќе го ограничат на 6. Овие ограничувања се добиваат од познатите карактеристики на координатниот систем придружен со цврстото тело: трите единични вектори \mathbf{n} , \mathbf{o} , \mathbf{a} се заемно нормални и должината на единичниот вектор е еднаква на единица, што резултира во следните равенства:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{o} = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{o} = 0$$

$$|\mathbf{n}| = 1$$

$$|\mathbf{a}| = 1$$

$$|\mathbf{o}| = 1 \tag{2.20}$$

Пример 2.3. Да се пополнат испуштените елементи од матрицата:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} ? & 0 & ? & 7 \\ 1/2 & ? & ? & 4 \\ ? & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

така што таа ќе претставува трансформацииска матрица.

Решение: Елементите од последната колона на матрицата ја дефинираат положбата на координатниот почеток од дадениот координатен систем во однос на референтниот. Останатите колони ги дефинираат трите вектори на правец за дадениот координатен систем, а познати се само четири елементи од овие колони. Од равенствата (2.20) непосредно следува:

$$\begin{aligned} n_x o_x + n_y o_y + n_z o_z &= 0 \Rightarrow n_x \cdot 0 + 0.5 o_y + n_z \cdot 1 = 0 \\ n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z &= 0 \Rightarrow n_x a_x + 0.5 a_y + n_z \cdot 0 = 0 \\ a_x o_x + a_y o_y + a_z o_z &= 0 \Rightarrow a_x \cdot 0 + a_y o_y + 0 \cdot 1 = 0 \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= 1 \Rightarrow n_x^2 + 0.25 + n_z^2 = 1 \\ o_x^2 + o_y^2 + o_z^2 &= 1 \Rightarrow 0^2 + o_y^2 + 1^2 = 1 \\ a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 &= 1 \Rightarrow a_x^2 + a_y^2 + 0^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Оттука се добива следниот систем равенки:

$$\begin{aligned} 0.5 o_y + n_z &= 0 \\ n_x a_x + 0.5 a_y &= 0 \\ a_y o_y &= 0 \\ n_x^2 + n_z^2 &= 0.75 \\ o_y^2 &= 0 \\ a_x^2 + a_y^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.23)$$

чие решение е:

$$n_x = \pm\sqrt{3}/2, \quad n_z = 0, \quad o_y = 0, \quad a_x = \pm 1/2, \quad a_y = -\sqrt{3}/2 \quad (2.24)$$

Треба да се забележи дека n_x и a_x мора да имаат ист знак. Следствено, бараната матрица е:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & 7 \\ 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

или:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 & 7 \\ 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Причината за повеќекратно решение лежи во фактот дека за дадените параметри секогаш можат да се дефинираат две тројки заемно нормални вектори со спротивни насоки.

2.3. ХОМОГЕНИ ТРАНСФОРМАЦИСКИ МАТРИЦИ

Математичката операција множење матрици бара матриците множители да бидат димензиски соодветни, што значи дека бројот колони од првата матрица множител мора да одговара на бројот редици од втората матрица множител. Со други зборови, множењето на матриците $\mathbf{M}_1 (r_1 \times c_1)$ и $\mathbf{M}_2 (r_2 \times c_2)$ е можно само доколку $c_1 = r_2$. Тогаш матрицата производ ќе биде:

$$\mathbf{M}_{(r \times c)} = (\mathbf{M}_1)_{(r_1 \times c_1)} (\mathbf{M}_2)_{(r_2 \times c_2)} = \mathbf{M}_{(r_1 \times c_2)} \quad (2.27)$$

Од горното следува дека множењето квадратни матрици е поедноставно од множењето правоаголни матрици. Така, ако квадратните матрици \mathbf{A} и \mathbf{B} имаат иста димензија, можно е множењето и на матрицата \mathbf{A} со \mathbf{B} , и на матрицата \mathbf{B} со \mathbf{A} , што не е случај кај правоаголните матрици. Имено, ако се дадени матриците $\mathbf{A} (m \times p)$ и $\mathbf{B} (p \times n)$ со соодветните димензии, јасно е дека множењето $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ е можно, додека множењето $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ не е можно.

Од наведените причини, при составувањето на матрицата \mathbf{F} за позицијата и ориентацијата на едно цврсто тело во просторот, се внимава таа да биде квадратна со димензија (3×3) или (4×4) , соодветно. Ако матрицата \mathbf{F} ја претставува и позицијата и ориентацијата на цврстото тело во просторот, тогаш во последната редица од матрицата се внесува соодветниот нормирачки фактор w , за димензијата на матрицата да биде (4×4) . Доколку матрицата \mathbf{F} ја претставува само ориентацијата на цврстото тело во просторот, или се испушта нормирачкиот фактор w , за димензијата на матрицата да биде (3×3) , или се додава четврта колона со првите три нулеви елементи за димензијата на матрицата да биде 4×4 . Ваквите матрици се нарекуваат **хомогени матрици** и нивниот општ облик е:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

2.4. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ТРАНСФОРМАЦИИТЕ

Трансформацијата се дефинира како движење во просторот. Движењето на еден подвижен координатен систем во просторот во однос на одбран референтен координатен систем може да се претстави на сличен начин како што се претставува и самиот координатен систем во просторот. Ова произлегува од фактот дека движењето односно трансформацијата сама по себе претставува промена на состојбата на координатниот систем изразена преку промена на неговата позиција и ориентација, па, следствено, може да биде прикажана исто како еден координатен систем.

Трансформацијата може да биде:

- чиста транслација
- чиста ротација
- комбинација од транслација и ротација

Секое од овие движења (трансформации) се претставува на соодветен начин.

2.4.1. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ЧИСТА ТРАНСЛАЦИЈА

Трансформацијата се нарекува **чиста транслација** доколку координатниот систем, кој може да претставува произволно цврсто тело, се движи во просторот без да ја менува својата ориентација, слика 2.9. Во тој случај единичните вектори на ориентација го задржуваат својот правец и не се менуваат. Се менува само положбата на координатниот почеток од набљудуваниот подвижен координатен систем во однос на референтниот координатен систем. Новата положба на координатниот почеток од подвижниот координатен систем во однос на референтниот може да се определи како збир од векторот кој го претставува движењето $\mathbf{d}(d_x, d_y, d_z)$ и векторот на почетната положба \mathbf{p} .

Бидејќи набљудуваната трансформација претставува чиста транслација при која векторите на правец не се менуваат, матрицата на трансформација **Trans** го има следниот едноставен облик:

$$\mathbf{Trans} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

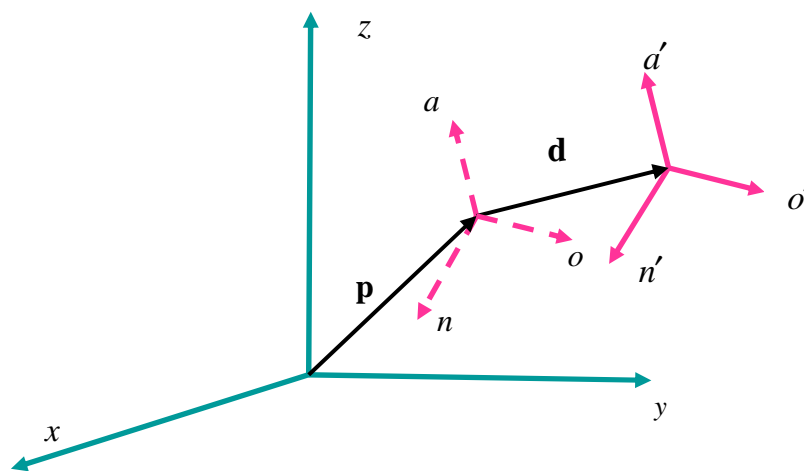
каде што d_x, d_y, d_z се трите компоненти од векторот на транслација \mathbf{d} во однос на референтниот координатен систем.

Во матричен облик, новата положба на подвижниот координатен систем по чистата транслација е претставена со производот од матрицата на трансформацијата и матрицата на оригиналната положба:

$$\mathbf{F}_{nova} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x + d_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y + d_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z + d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Равенката (2.30) може да се запише на следниот симболичен начин:

$$\mathbf{F}_{nova} = \mathbf{Trans}(d_x, d_y, d_z) \cdot \mathbf{F}_{stara} \quad (2.31)$$



Слика 2.9. Претставување чиста транслација во просторот

Пример 2.4. Да се определи новата положба во просторот на координатниот систем:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

ако тој се придвижи 5 единици долж x -оската, 7 единици долж y -оската и 4 единици долж z -оската.

Решение: Равенството (2.31) во конкретниот случај станува:

$$\mathbf{F}_{nova} = \mathbf{Trans}(d_x, d_y, d_z) \cdot \mathbf{F}_{stara} = \mathbf{Trans}(5, 7, 4) \cdot \mathbf{F}_{stara} \quad (2.33)$$

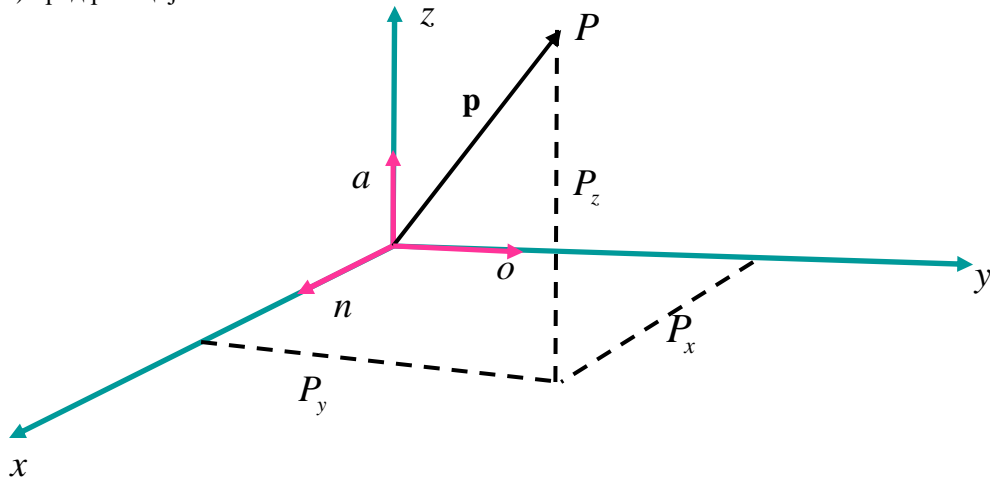
од каде следува:

$$\mathbf{F}_{nova} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

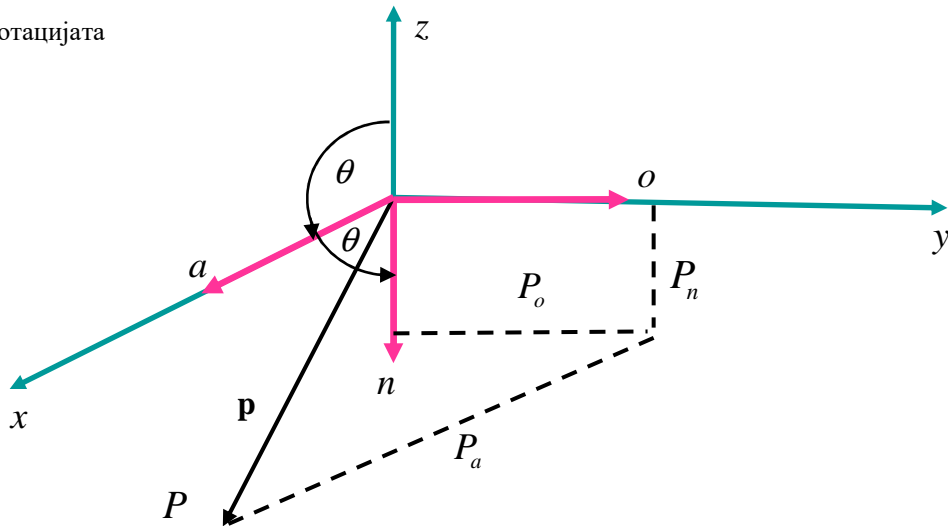
2.4.2. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ЧИСТА РОТАЦИЈА ОКОЛУ КООРДИНАТНИТЕ ОСКИ

Заради поголема едноставност на пресметките и изведувањата, најнапред се набљудува координатен систем кој е сместен во координатниот почеток од референтниот координатен систем и е паралелен со него, слика 2.10 а). Добиените резултати потоа без проблем можат да се прошират и на најопштиот случај.

а) пред ротацијата



б) по ротацијата



Слика 2.10. Претставување чиста ротација во просторот

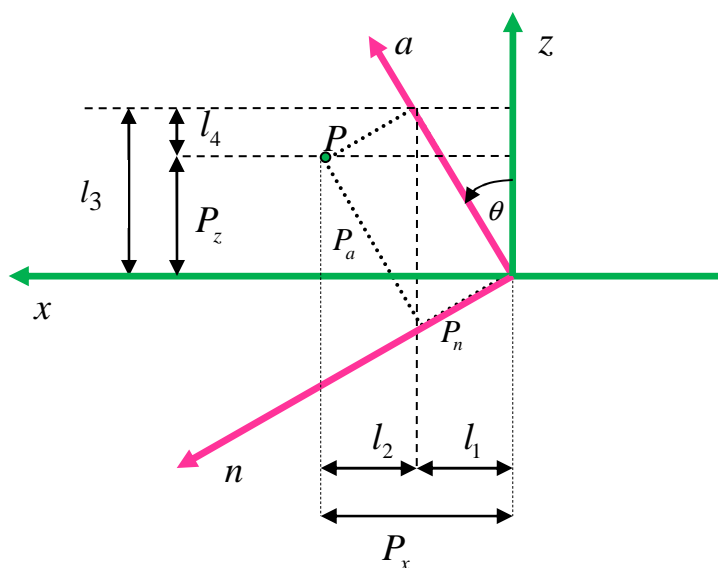
Нека, под претпоставка, набљудуваниот координатен систем (n, o, a) се заврти за агол θ околу y -оската од референтниот координатен систем и нека кон него е придружена точката P со координати (P_x, P_y, P_z) во однос на референтниот координатен систем и координати (P_n, P_o, P_a) во однос на подвижниот координатен систем, слика 2.10 б). Кога набљудуваниот координатен систем ротира околу y -оската од референтниот координатен систем, со него ротира и точката P . Пред ротацијата, точката P има исти координати во двата координатни системи. По ротацијата, координатите (P_n, P_o, P_a) на точката P во подвижниот координатен систем остануваат исти (затоа што точката P ротира заедно со него), а се менуваат нејзините координати (P_x, P_y, P_z) во референтниот координатен систем.

За да се определат новите координати на точката P во однос на референтниот координатен систем, истата ќе ја набљудуваме во дводимензионален простор, односно во (x, z) -рамнината, слика 2.11. Кога подвижниот координатен систем ротира околу y -оската, координатата P_y не се менува, но се менуваат останатите две координати P_x и P_z . Притоа, важи:

$$P_y = P_o \quad (2.35)$$

$$P_x = l_1 + l_2 = P_n \cos \theta + P_a \sin \theta \quad (2.36)$$

$$P_z = l_3 - l_4 = P_a \cos \theta - P_n \sin \theta \quad (2.37)$$



Слика 2.11. Координатите на точката P во однос на референтниот координатен систем и ротирачкиот координатен систем гледано од страната на y -оската

Равенствата (2.35) – (2.37) можат да се запишат во матричен облик на следниот начин:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_n \\ P_o \\ P_a \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

или, симболично:

$$\mathbf{P}_{xyz} = \mathbf{R}(y, \theta) \cdot \mathbf{P}_{noa} \quad (2.39)$$

Врз основа на досега кажаното произлегува дека координатите (P_x, P_y, P_z) на точката P во однос на референтниот координатен систем, кога точката ротира заедно со подвижниот координатен систем (n, o, a) околу y -оската од референтниот координатен систем (x, y, z) , се одредуваат како производ од матрицата на ротација $\mathbf{R}(y, \theta)$ и координатите на точката P во однос на ротирачкиот координатен систем (n, o, a) . На сличен начин се дефинира ротацијата околу x – оската:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_n \\ P_o \\ P_a \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

односно симболично:

$$\mathbf{P}_{xyz} = \mathbf{R}(x, \theta) \cdot \mathbf{P}_{noa} \quad (2.41)$$

и z – оската:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_n \\ P_o \\ P_a \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

односно симболично:

$$\mathbf{P}_{xyz} = \mathbf{R}(z, \theta) \cdot \mathbf{P}_{noa} \quad (2.43)$$

Следствено, чистата ротација околу координатните оски на референтниот координатен систем е опишана со трансформациските матрици:

$$\mathbf{R}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ – матрица на ротација околу } x \text{ – оската} \quad (2.44)$$

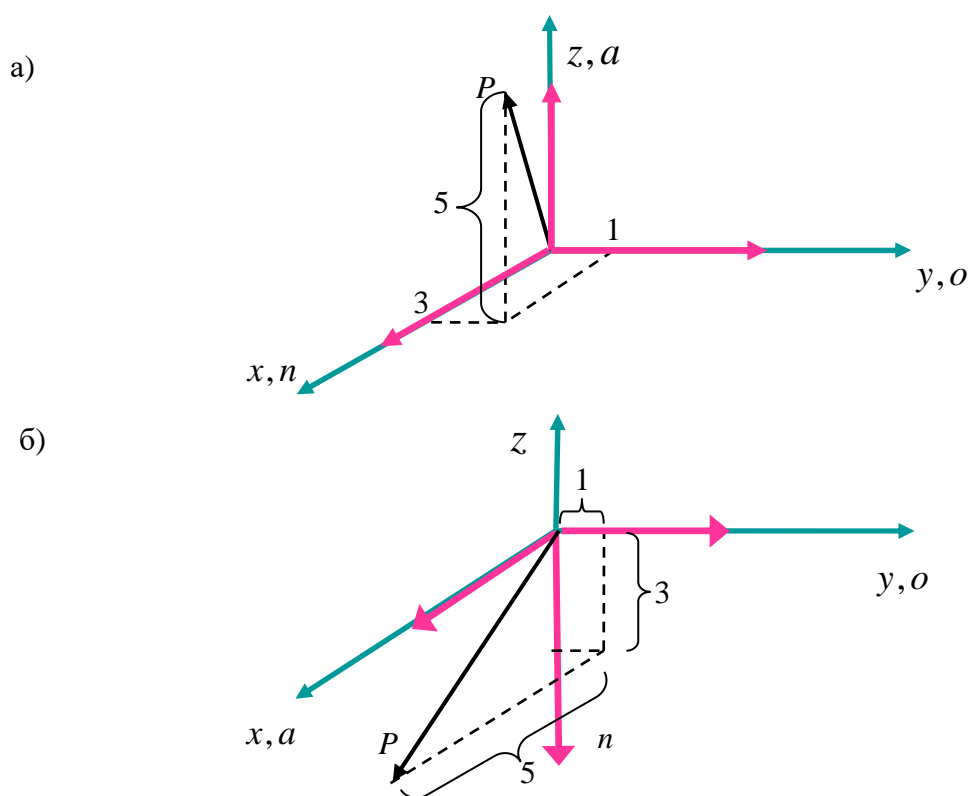
$$\mathbf{R}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ – матрица на ротација околу } y \text{ – оската} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{R}(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{матрица на ротација околу } z\text{-оската} \quad (2.46)$$

Треба да се истакне дека колоната $[1 \ 0 \ 0]^T$ во матрицата на ротација околу x -оската означува дека x -координатите не се менуваат. Аналогно, колоната $[0 \ 1 \ 0]^T$ во матрицата на ротација околу y -оската и колоната $[0 \ 0 \ 1]^T$ во матрицата на ротација околу z -оската означува дека y -координатите односно z -координатите не се менуваат.

Пример 2.5. Точката $P(3,1,5)$ е закачена за ротирачки координатен систем, кој се завртува за $\pi/2$ околу y -оската од референтниот координатен систем. Да се определат координатите на точката во однос на референтниот координатен систем по ротацијата и резултатот да се потврди графички.

Решение: Решението (2.47) е прикажано графички на слика 2.12.



Слика 2.12. Набљудуваниот подвижен систем од пример 2.5: а) пред ротацијата и б) по ротацијата

Бидејќи точката $P(3,1,5)$ е закачена за ротирачкиот координатен систем, нејзините координати во однос на него остануваат исти и по ротацијата. Координатите на оваа точка во однос на референтниот координатен систем по ротацијата се:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_n \\ P_o \\ P_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

2.4.3. РОТАЦИЈА ОКОЛУ ПРОИЗВОЛНА ОСКА \mathbf{k}

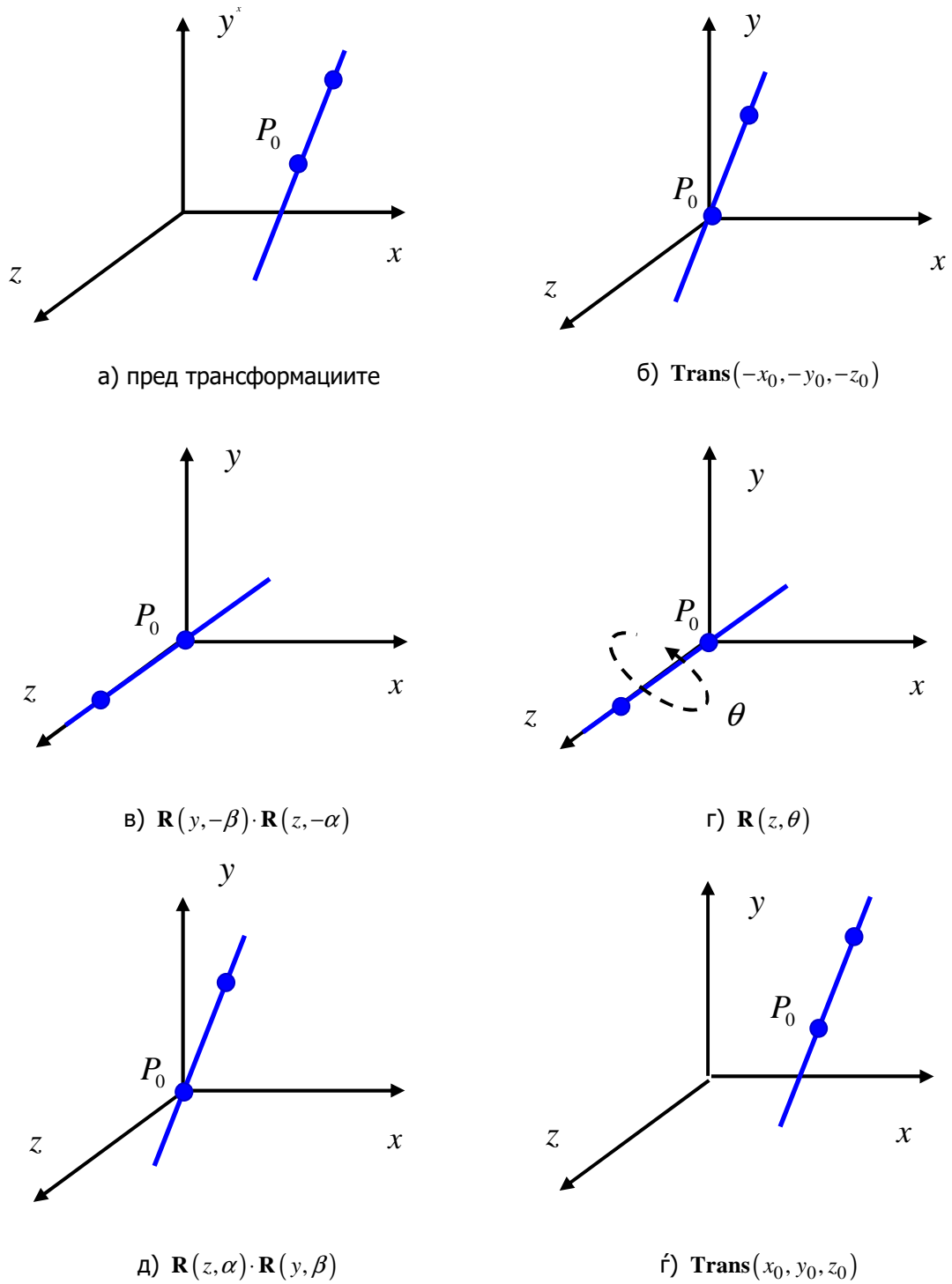
Во најопшт случај, произволната оска \mathbf{k} ќе биде поставена сосема произволно во однос на референтниот координатен систем, како што е прикажано на сликата 2.13 а). Тоа значи дека нема да минува низ координатниот почеток од референтниот координатен систем и ќе биде поставена под одредени агли во однос на координатните оски од истиот. Тогаш, ротацијата околу оваа оска за произволен агол θ се определува на следниот начин.

1. Најнапред оската \mathbf{k} се поместува за да помине низ координатниот почеток од референтниот координатен систем, слика 2.13 б). Тоа се остварува со translација на точката P_0 , која лежи на оската \mathbf{k} , за векторот $\mathbf{d} = (-x_0, -y_0, -z_0)$, каде што (x_0, y_0, z_0) се координати на точката P_0 во однос на референтниот координатен систем.
2. Потоа оската \mathbf{k} се ротира до поклопување со која и да било оска од референтниот координатен систем. Нека, на пример, одбереме оската \mathbf{k} да се поклопи со z -оската од референтниот координатен систем. Тогаш, поклопувањето на произволната оска \mathbf{k} со z -оската може да се постигне со ротација на произволната оска \mathbf{k} за агол $-\alpha$ околу z -оската од референтниот координатен систем, со која произволната оска \mathbf{k} ќе се смести во (x, z) -рамнината, и ротација на произволната оска \mathbf{k} за агол $-\beta$ околу y -оската од референтниот координатен систем, со која оската \mathbf{k} конечно ќе се поклопи со z -оската од референтниот координатен систем, слика 2.13 в).
3. Во следниот чекор се врши ротација околу z -оската за зададениот агол θ , слика 2.13 г).
4. На крајот се врши „одротирање“ на оската \mathbf{k} и враќање во нејзината првобитна ориентација, слика 2.13 д).
5. Исто така, оската \mathbf{k} мора да се врати и во првобитната позиција, што се постига со translација на точката P_0 во нејзината првобитна положба, слика 2.13 е).

Имајќи на ум дека елементарните движења односно трансформации наведени во дадените чекори се опишани со следните трансформационски матрици:

$\mathbf{Trans}(-x_0, -y_0, -z_0)$ translација во координатниот почеток

$\mathbf{R}(z, -\alpha)$ ротација околу z -оската за агол $-\alpha$



Слика 2.13. Ротација околу произволна оска

$\mathbf{R}(y, -\beta)$ ротација околу y – оската за агол $-\beta$

$\mathbf{R}(z, \theta)$ ротација околу z – оската за агол θ

$\mathbf{R}(y, \beta)$ одротирање околу y – оската за агол β

$\mathbf{R}(z, \alpha)$ одротирање околу x – оската за агол α

$\mathbf{Trans}(x_0, y_0, z_0)$ транслација во првобитната позиција (2.48)

Вкупната извршена трансформација е дадена со изразот:

$$\mathbf{T}(\mathbf{k}, \theta) = \mathbf{Trans}(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{k}, \theta) \cdot \mathbf{Trans}(-x_0, -y_0, -z_0) \quad (2.49)$$

каде што $\mathbf{R}(\mathbf{k}, \theta)$ е матрицата на ротација околу \mathbf{k} - оската за произволен агол θ :

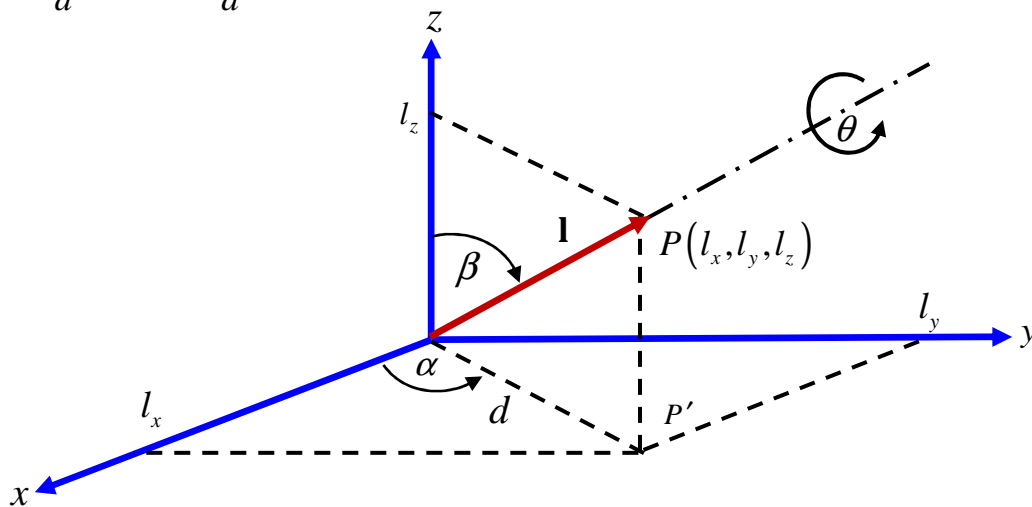
$$\mathbf{R}(\mathbf{k}, \theta) = \mathbf{R}(z, \alpha) \cdot \mathbf{R}(y, \beta) \cdot \mathbf{R}(z, \theta) \cdot \mathbf{R}(y, -\beta) \cdot \mathbf{R}(z, -\alpha) \quad (2.50)$$

Доколку произволната оска \mathbf{k} веќе минува низ координатниот почеток од референтниот координатен систем, нема потреба од транслацијата во првиот чекор и потоа детранслацијата во последниот чекор. Доколку, пак, произволната оска \mathbf{k} веќе се поклопува со некоја координатна оска од референтниот координатен систем, на пример z –оската, како што е разгледувано овде, нема потреба од чекорите 2 и 4.

Во продолжение ќе го набљудуваме поедноставниот случај, кога оската на ротација \mathbf{k} минува низ координатниот почеток од референтниот координатен систем, и ќе ја пресметаме матрицата на вкупната ротација околу оваа оска за даден агол θ .

Правецот на произволната оска \mathbf{k} е претставен со единичниот вектор на правец $\mathbf{l} = [l_x \ l_y \ l_z]^T$. Тогаш, од слика 2.14 следува дека:

$$\sin \alpha = \frac{l_y}{d}, \quad \cos \alpha = \frac{l_x}{d} \quad (2.51)$$



Слика 2.14. Ротација околу z –оската

каде што:

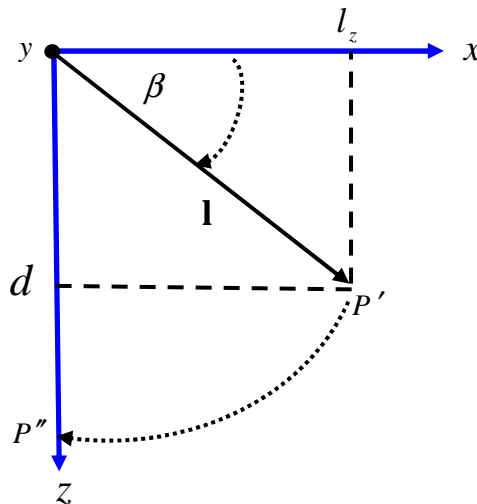
$$d = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} \quad (2.52)$$

па, ротацијата на оската \mathbf{k} за агол $-\alpha$ околу z -оската ќе биде:

$$\mathbf{R}(z, -\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_x}{d} & \frac{l_y}{d} & 0 \\ -\frac{l_y}{d} & \frac{l_x}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

додека нејзината инверзна матрица потребна во чекорот 4 е:

$$\mathbf{R}^{-1}(z, -\alpha) = \begin{bmatrix} \frac{l_x}{d} & -\frac{l_y}{d} & 0 \\ \frac{l_y}{d} & \frac{l_x}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}(z, \alpha) \quad (2.54)$$



Слика 2.15. Ротација околу y -оската

Во продолжение, од слика 2.15 следува:

$$\sin \beta = d, \quad \cos \beta = l_z, \quad l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} = 1 \quad (2.55)$$

па, ротацијата на оската \mathbf{k} за агол β околу y -оската ќе биде во негативна насока:

$$\mathbf{R}(y, -\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_z & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & l_z \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Нејзината инверзна матрица, потребна за одротирање, е дадена со изразот:

$$\mathbf{R}^{-1}(y, -\beta) = \begin{bmatrix} l_z & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ -d & 0 & l_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}(y, \beta) \quad (2.57)$$

Конечно, ротацијата на оската \mathbf{k} околу z -оската за агол θ е опишана со матрицата:

$$\mathbf{R}(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

па, за матрицата $\mathbf{R}(\mathbf{k}, \theta)$ се добива:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{k}, \theta) &= \mathbf{R}(z, \alpha) \cdot \mathbf{R}(y, \beta) \cdot \mathbf{R}(z, \theta) \cdot \mathbf{R}(y, -\beta) \cdot \mathbf{R}(z, -\alpha) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{l_x}{d} & -\frac{l_y}{d} & 0 \\ \frac{l_y}{d} & \frac{l_x}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_z & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ -d & 0 & l_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_z & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & l_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l_x}{d} & \frac{l_y}{d} & 0 \\ -\frac{l_y}{d} & \frac{l_x}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} l_x^2(1-C\theta)+C\theta & l_x l_y(1-C\theta)-l_z S\theta & l_x l_z(1-C\theta)+l_y S\theta \\ l_x l_y(1-C\theta)+l_z S\theta & l_y^2(1-C\theta)+C\theta & l_y l_z(1-C\theta)-l_x S\theta \\ l_x l_z(1-C\theta)-l_y S\theta & l_y l_z(1-C\theta)+l_x S\theta & l_z^2(1-C\theta)+C\theta \end{bmatrix} \quad (2.59) \end{aligned}$$

Ако е дадена ротациската матрица \mathbf{R} , векторот \mathbf{l} и аголот θ можат да се пресметаат на следниот начин:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{\text{Trag}\mathbf{R} - 1}{2}\right) \quad (2.61)$$

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

со ограничување:

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1 \quad (2.63)$$

Тоа значи дека дадена ротација \mathbf{R} може да се оствари со ротација за агол θ околу оската \mathbf{k} определена со (2.61) и (2.62).

Пример 2.6. Да се определи соодветната оска \mathbf{k} и аголот на ротација θ со кои може да се оствари ротацијата опишана со матрицата:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.8 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.48 & 0.64 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Решение:

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) = \arccos(0.28) = 73.7^\circ \vee -73.7^\circ \quad (2.65)$$

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Дадената ротација може да се оствари со ротација за агол од 74° односно агол од -74° околу оската \mathbf{k} со единичен вектор $\mathbf{l} = (1/3, -2/3, -2/3)$ односно единичен вектор $\mathbf{l} = (-1/3, 2/3, 2/3)$, соодветно.

2.4.4. ПРЕТСТАВУВАЊЕ КОМБИНИРАНО ДВИЖЕЊЕ ВО ПРОСТОРОТ

Комбинираното движење на еден произволен координатен систем се состои од одреден број последователни транслации и ротации, било околу координатните оски од усвоениот референтен координатен систем, било околу сопствените оски. Секое движење (трансформација) може да се разложи на одреден број транслациски и ротацициски движења во одреден редослед. Овој редослед е многу битен, зашто со промената на редоследот на две последователни трансформации се менува и крајниот резултат (резултантната трансформација).

Нека, под претпоставка, координатниот систем (n, o, a) , кој е сместен во координатниот почеток од избраниот референтен координатен систем (x, y, z) и е паралелен со него, е подложен на следните последователни трансформации во однос на референтниот координатен систем по наведениот редослед:

- ротација за агол α околу x -оската
- транслација дефинирана со векторот $[l_1 \ l_2 \ l_3]^T$
- ротација за агол β околу y -оската

Движењето на набљудуваниот координатен систем во просторот се опишува преку движењето на точката P придружена кон него. Кога набљудуваниот координатен систем ротира или се придвижува транслациски во однос на референтниот координатен систем, заедно со него се придвижува и точката P , при што нејзините координати во однос на подвижниот координатен систем остануваат непроменети, а се менуваат само нејзините координати во однос на референтниот координатен систем.

По првата трансформација дефинирана погоре, координатите на точката P во однос на референтниот координатен систем се определуваат по формулата:

$$\mathbf{P}_{1,xyz} = \mathbf{R}(x, \alpha) \cdot \mathbf{P}_{noa} \quad (2.67)$$

каде што $\mathbf{P}_{1,xyz}$ се координатите на точката P во однос на референтниот координатен систем по првата трансформација.

По втората трансформација, која претставува транслација дефинирана со векторот $[l_1 \ l_2 \ l_3]^T$, координатите на точката P во однос на референтниот координатен систем ќе бидат:

$$\mathbf{P}_{2,xyz} = \mathbf{Trans}(l_1, l_2, l_3) \cdot \mathbf{P}_{1,xyz} = \mathbf{Trans}(l_1, l_2, l_3) \cdot \mathbf{R}(x, \alpha) \cdot \mathbf{P}_{noa} \quad (2.68)$$

Конечно, по третата трансформација, за координатите на точката P во однос на референтниот координатен систем се добива:

$$\mathbf{P}_{xyz} = \mathbf{P}_{3,xyz} = \mathbf{R}(y, \beta) \cdot \mathbf{P}_{2,xyz} = \mathbf{R}(y, \beta) \cdot \mathbf{Trans}(l_1, l_2, l_3) \cdot \mathbf{R}(x, \alpha) \cdot \mathbf{P}_{noa} \quad (2.69)$$

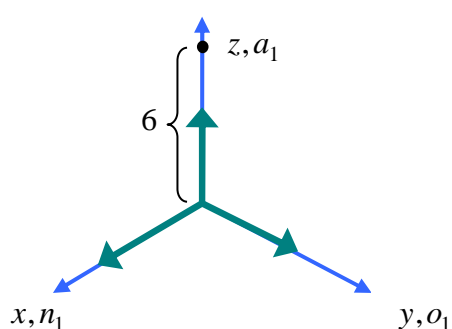
Како што може да се забележи од (2.69), координатите на точката P во однос на референтниот координатен систем по секоја трансформација се добиваат со множење на нејзините тековни координати и матрицата на соодветната трансформација. Се разбира, редоследот на матриците множители во (2.69) не може да се промени, зашто во општ случај операцијата множење матрици не е комутативна. Исто така треба да се забележи дека за секоја трансформација множењето со матрицата на трансформацијата се врши од лево, што не е сеедно и се должи на истите причини. Така редоследот на матриците на соодветните трансформации во (2.69) е обратен од редоследот на самите извршени трансформации.

Пример 2.7. Точката $P(4, 2, 6)$ е придружена кон подвижниот координатен систем (n, o, a) , сместен во координатниот почеток од избраниот референтен координатен систем (x, y, z) и паралелен со него, кој ги извршува следните последователни трансформации:

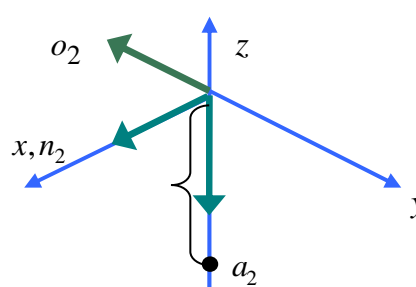
- транслација дефинирана со векторот $[-4 \ -2 \ 0]^T$ долж координатните оски x, y, z
- ротација од 180^0 околу x -оската
- ротација од 90^0 околу y -оската.

Да се определат координатите на точката P во однос на референтниот координатен систем на крајот од наведените последователни трансформации.

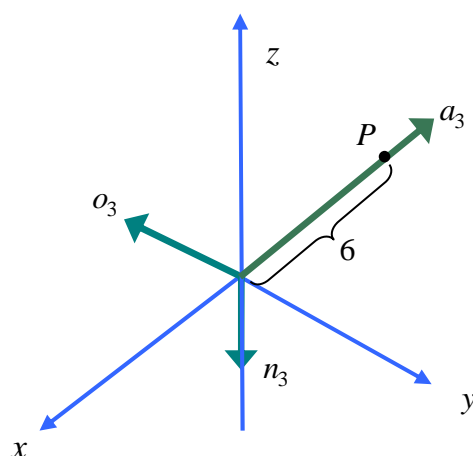
Решение: Графичкото решение на поставениот проблем е прикажано на слика 2.16.



а) по првата трансформација



б) по втората трансформација



в) по третата трансформација

Слика 2.16. Илустрација кон примерот 2.7

Движењето на точката P во просторот е претставено со матричната равенка:

$$\mathbf{P}_{xyz} = \mathbf{Rot}(y, 90^0) \cdot \mathbf{R}(x, 180^0) \cdot \mathbf{Trans}(-4, -2, 0) \cdot \mathbf{P}_{noa} =$$

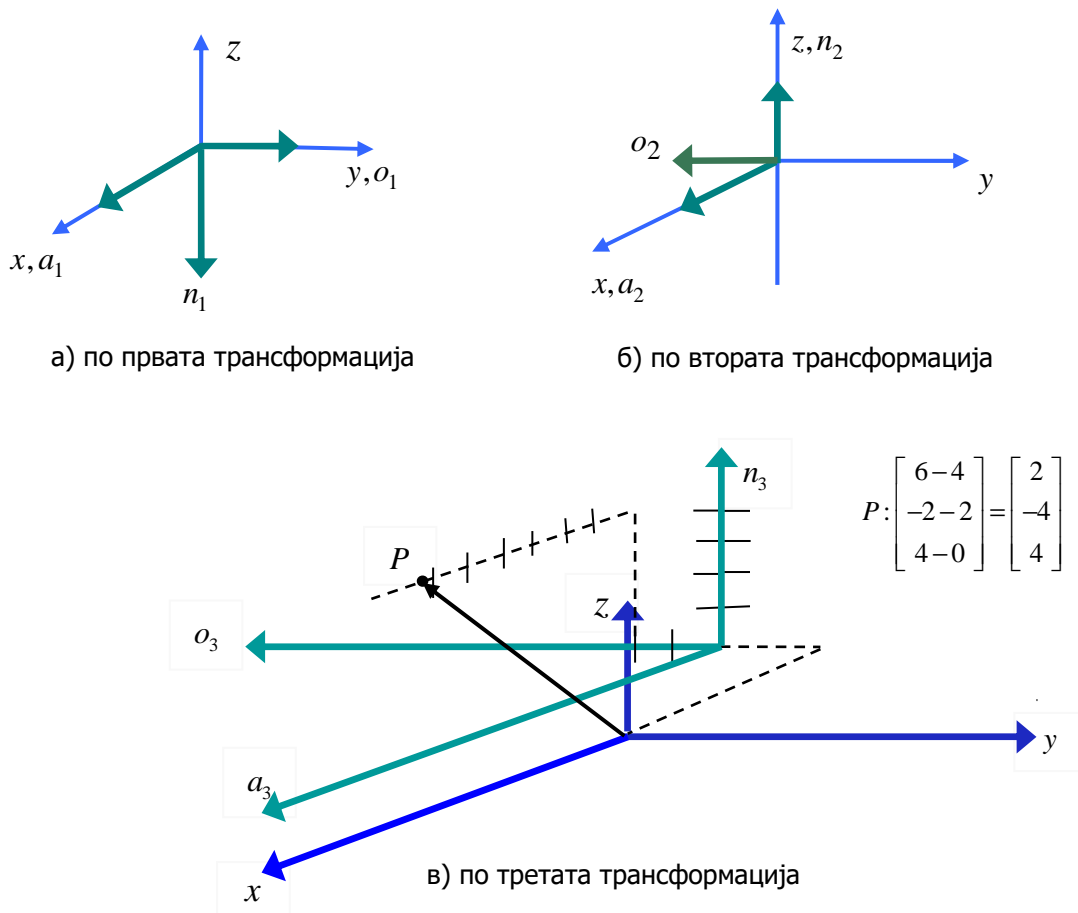
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Пример 2.8. Нека точката $P(4, 2, 6)$ од примерот 2.7, придружена кон подвижниот координатен систем (n, o, a) , ги извршува истите трансформации како во примерот 2.7, само по поинаков редослед:

- ротација од 90° околу y -оската
- ротација од 180° околу x -оската
- транслација дефинирана со векторот $[-4 \ -2 \ 0]^T$ долж координатните оски x, y, z

Да се определат координатите на точката P во однос на референтниот координатен систем на крајот од наведените последователни трансформации.

Решение: Движењето на точката P во просторот во овој случај е прикажано на слика 2.17, а е опишано со следната матрична равенка:



Слика 2.17. Илустрација кон примерот 2.8

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{xyz} &= \mathbf{Trans}(-4, -2, 0) \cdot \mathbf{R}(x, 180^0) \cdot \mathbf{R}(y, 90^0) \cdot \mathbf{P}_{noa} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.71}
 \end{aligned}$$

Како што може да се забележи со споредба на (2.70) и (2.71), иако се работи за исти трансформации, координатите на точката P се разликуваат во двата случаи, бидејќи редоследот на трансформациите е променет.

2.5. ТРАНСФОРМАЦИИ ВО ОДНОС НА ПОДВИЖЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

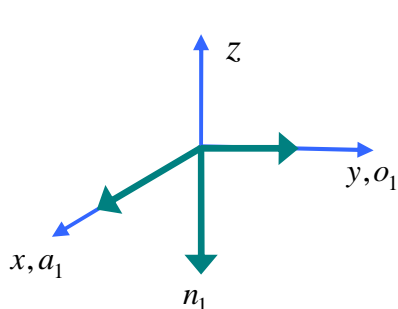
Сите досега набљудувани трансформации беа вршени во однос на фиксен референтен координатен систем. Тоа значи дека сите транслации, ротации и растојанија беа одредувани во однос на координатните оски од референтниот координатен систем. Во продолжение ќе бидат разгледани трансформации во однос на подвижниот координатен систем. Така, на пример, наместо ротација околу x -оската од фиксниот референтен систем, може да се набљудува ротација околу n -оската од подвижниот координатен систем. Во овој случај, за да се определат координатите од точката P која е придружена кон подвижниот координатен систем во однос на референтниот координатен систем, трансформационските матрици се множат оддесно.

Пример 2.9. Нека, под претпоставка, точката од примерот 2.8 е изложена на истите трансформации по наведениот редослед, само сега во однос на подвижниот координатен систем, наместо во однос на референтниот координатен систем. Треба да се определат координатите од точката P во однос на референтниот координатен систем по завршувањето на сите дефинирани последователни трансформации:

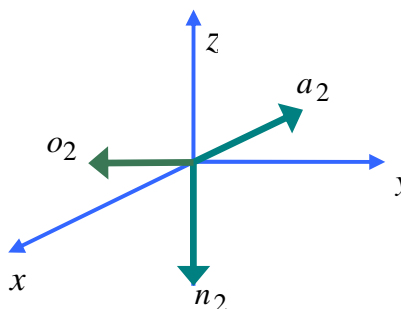
- ротација за агол од 90^0 околу o -оската
- ротација за агол од 180^0 околу n -оската
- транслација дефинирана со векторот $[-4 \quad -2 \quad 0]^T$ долж координатните оски n, o, a

Решение: Решението е илустрирано на слика 2.18. Во овој случај, координатите (P_x, P_y, P_z) на точката P во однос на референтниот координатен систем, по завршувањето на сите дефинирани последователни трансформации во наведениот редослед, се дадени со матричната равенка:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{xyz} &= \mathbf{R}(o, 90^0) \cdot \mathbf{R}(n, 180^0) \cdot \mathbf{Trans}(-4, -2, 0) \cdot \mathbf{P}_{noa} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.72)
 \end{aligned}$$

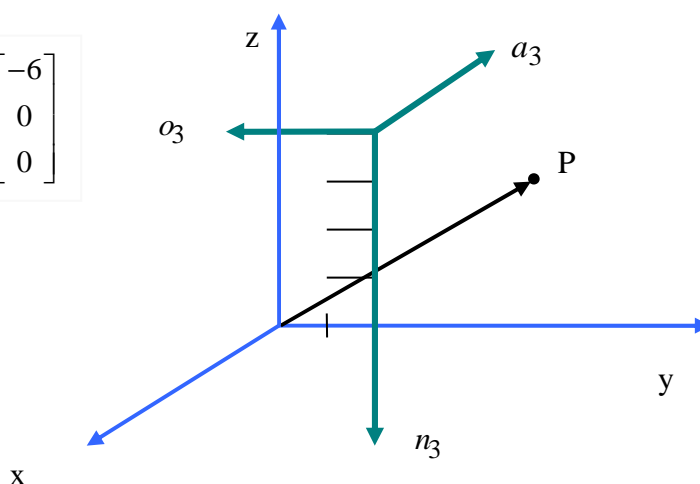


а) по првата трансформација



б) по втората трансформација

$$P: \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



в) по третата трансформација

Слика 2.18. Трансформации во однос на подвижен координатен систем

Како што можеше и да се очекува, резултатот (2.72) во целост се разликува од резултатот (2.71), затоа што сега трансформациите се извршени во однос на подвижниот координатен систем наместо во однос на референтниот. Што се однесува до резултатот (2.70), може да се забележи дека е идентичен со резултатот (2.72). Во општ случај, овие два резултати би биле различни. Меѓутоа ова е специјален случај кога се извршени исти трансформации во однос на подвижниот координатен систем, како и трансформациите во однос на референтниот систем, но во обратен редослед. Тогаш генерално важи следниот заклучок:

$$\mathbf{R}(x, \alpha) \cdot \mathbf{R}(y, \beta) \cdot \mathbf{R}(z, \gamma) = \mathbf{R}(a, \gamma) \cdot \mathbf{R}(o, \beta) \cdot \mathbf{R}(n, \alpha)$$

$$\mathbf{R}(x, \alpha) \cdot \mathbf{Trans}(x, y, z) = \mathbf{Trans}(n, o, a) \cdot \mathbf{R}(n, \alpha) \quad (2.73)$$

Многу често, наместо конвенционалните ознаки за соодветните трансформации, се користат следните: ${}^U\mathbf{T}_H$ - што значи трансформација на координатниот систем \mathbf{H} во однос на координатниот систем \mathbf{U} . Аналогно, координатите \mathbf{P}_{noa} се означуваат со ${}^H\mathbf{P}$, а координатите \mathbf{P}_{xyz} со ${}^U\mathbf{P}$, што значи координати на точката P во однос на координатниот систем \mathbf{H} односно координатниот систем \mathbf{U} , соодветно. Овие ознаки алтернативно ќе се користат во продолжение.

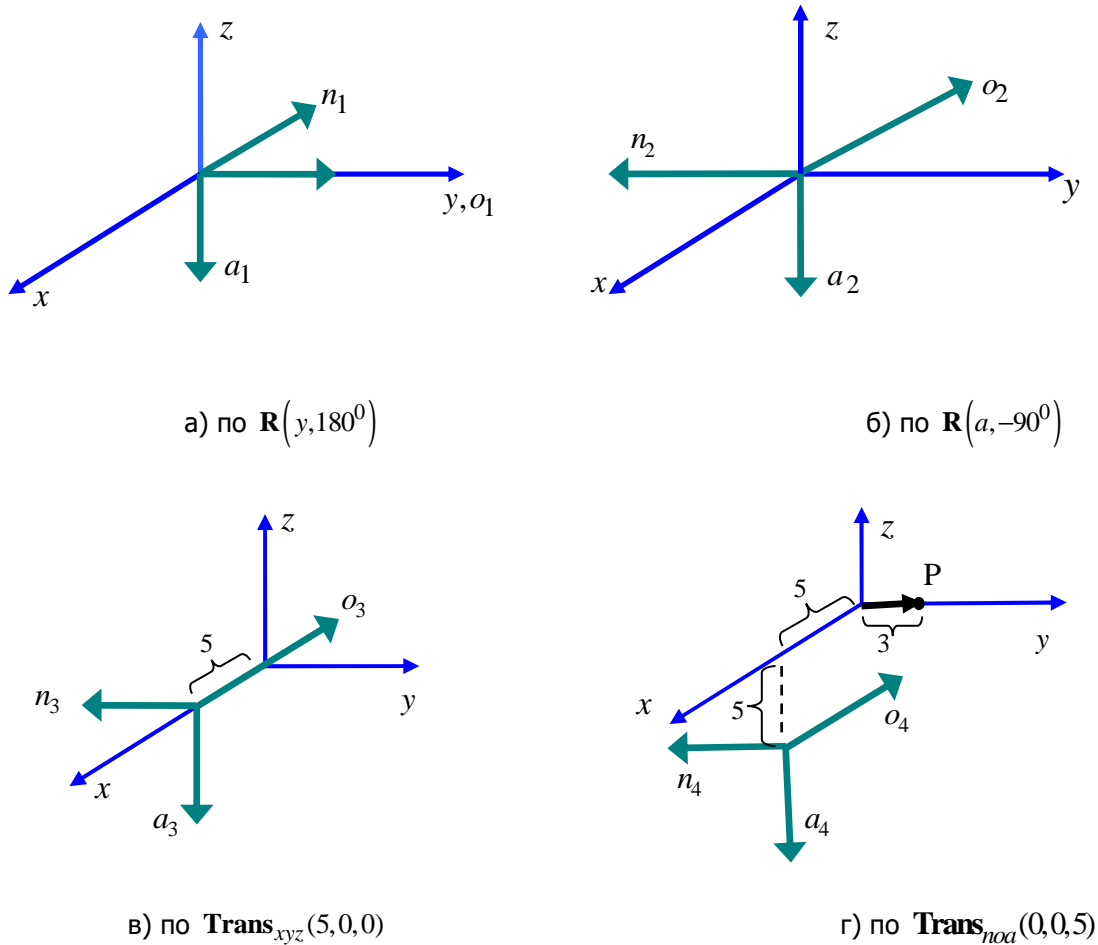
Пример 2.10. Нека, под претпоставка, координатниот систем $\mathbf{B}(n, o, a)$, кој првобитно се поклопува со референтниот координатен систем $\mathbf{U}(x, y, z)$, најнапред ротира за агол π околу y -оската на референтниот координатен систем. Нека потоа ротира за агол од $-\pi/2$ околу a -оската на подвижниот координатен систем, пред да се придвижи долж x -оската на референтниот координатен систем за 5 единици. Конечно, нека се придвижи за 5 единици долж a -оската на подвижниот координатен систем. а) Да се состави математичкиот модел на движењето од набљудуваниот координатен систем. б) Да се определат координатите од точката $P(-3, 5, -5)$ придружена кон подвижниот координатен систем, во однос на референтниот координатен систем.

Решение: Решението е прикажано графички на слика 2.19. Матрицата која ги опишува наведените трансформации на координатниот систем \mathbf{B} има облик:

$${}^U\mathbf{T}_B = \mathbf{Trans}(5, 0, 0) \cdot \mathbf{R}(y, 180^\circ) \cdot \mathbf{R}(a, -90^\circ) \cdot \mathbf{Trans}(0, 0, 5) \quad (2.74)$$

Матричната равенка која го опишува движењето на точката $P(-3, 5, -5)$ е следната:

$$\begin{aligned} {}^U\mathbf{P} = {}^U\mathbf{T}_B \cdot {}^B\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.75) \end{aligned}$$

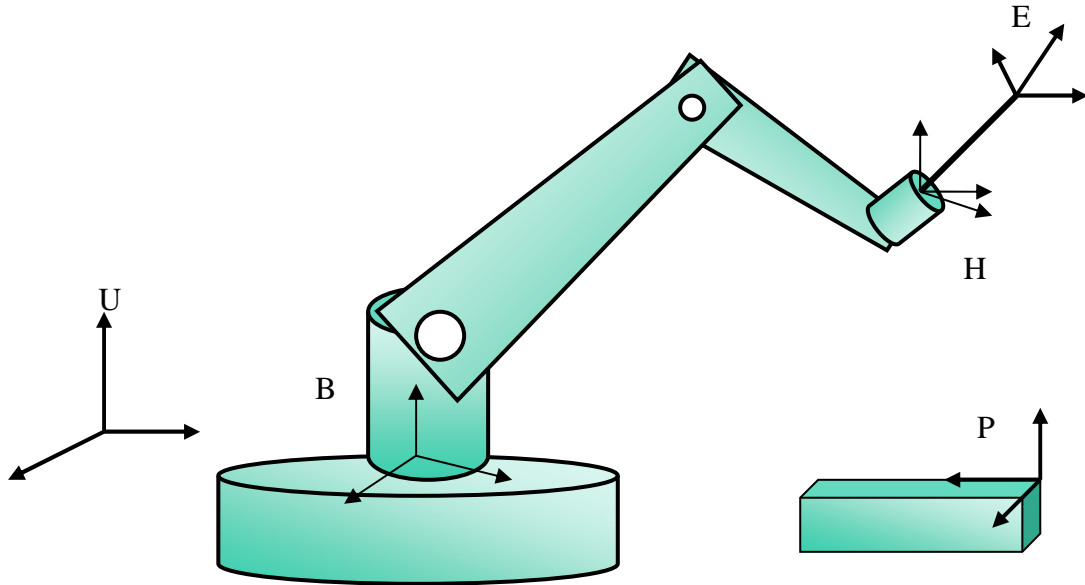


Слика 2.19. Решение на примерот 2.10

2.6. ИНВЕРЗНИ МАТРИЦИ ОД ТРАНСФОРМАЦИСКИТЕ МАТРИЦИ

Во роботиката многу често се појавува потреба од одредување инверзни матрици кон трансформациските матрици. За илустрација може да послужи следниот пример. Нека роботската рака претставена на слика 2.20 треба да се придвижи кон делот P со цел да издупчи дупка во него. Положбата од основата на роботската рака во однос на референтниот координатен систем U е опишана со координатниот систем B придружен кон неа. Положбата на крајот од роботската рака е опишана со координатниот систем H , додека положбата на извршниот елемент, на пример, врвот од дупчалката, е опишана со координатниот систем E . Положбата на плочата што се дупчи исто така е опишана со соодветен придружен координатен систем P . Положбата на точката во која се дупчи дупка во однос на референтниот координатен систем може да биде дадена на два начина – или директно, како ${}^U T_P$, или индиректно преку роботската рака како:

$${}^U T_P = {}^U T_B \cdot {}^B T_H \cdot {}^H T_E \cdot {}^E T_P \quad (2.76)$$



Слика 2.20. Референтен координатен систем и координатните системи на роботската рака, основата, извршниот елемент од раката и делот за обработка

Во стварноста трансформацијата ${}^U\mathbf{T}_B$ (трансформацијата на координатниот систем B во однос на референтниот U) е позната, бидејќи е позната положбата на основата на роботската рака. Дури и кога роботската рака е подвижна, или поставена на подвижна лента, положбата на нејзината основа е позната, зашто управувачкиот елемент мора постојано да го следи движењето на роботската рака. Трансформацијата ${}^H\mathbf{T}_E$ (трансформацијата на извршниот елемент во однос на роботската рака) исто така е позната во стварност, бидејќи секој алат употребен како извршен елемент е познат, а со тоа се познати и неговите димензии и конфигурација. Трансформацијата ${}^U\mathbf{T}_P$ (трансформацијата на делот во однос на референтниот координатен систем) исто така е позната, бидејќи мора да биде познато каде се наоѓа делот во кој треба да се издупчи дупка. Конечно, и трансформацијата ${}^P\mathbf{T}_E$ е позната, зашто мора да биде познато каде ќе се буши дупката. Така, единствено е непозната трансформацијата ${}^B\mathbf{T}_H$, или трансформацијата на роботската рака во однос на основата. За да се определи оваа трансформација, равенката (2.76) треба да се реши во однос на непознатата ${}^B\mathbf{T}_H$:

$$\left({}^U\mathbf{T}_B\right)^{-1} \cdot {}^U\mathbf{T}_P = {}^B\mathbf{T}_H \cdot {}^H\mathbf{T}_E \cdot {}^E\mathbf{T}_P \quad (2.77)$$

$$\left({}^U\mathbf{T}_B\right)^{-1} \cdot {}^U\mathbf{T}_P \left({}^H\mathbf{T}_E \cdot {}^E\mathbf{T}_P\right)^{-1} = {}^B\mathbf{T}_H \quad (2.78)$$

$${}^B\mathbf{T}_H = \left({}^U\mathbf{T}_B\right)^{-1} \cdot {}^U\mathbf{T}_P \cdot \left({}^E\mathbf{T}_P\right)^{-1} \cdot \left({}^H\mathbf{T}_E\right)^{-1} = \left({}^U\mathbf{T}_B\right)^{-1} \cdot {}^U\mathbf{T}_P \cdot {}^P\mathbf{T}_E \cdot \left({}^H\mathbf{T}_E\right)^{-1} \quad (2.79)$$

Од (2.79) е очигледно дека е неопходно пресметувањето инверзни матрици кон матриците ${}^U\mathbf{T}_B$ и ${}^H\mathbf{T}_E$.

Во продолжение се одредени инверзните матрици кон основните трансформациони матрици. Имајќи на ум дека детерминантите на ротациските матрици се еднакви на единица, а адјунгованите матрици кон транспонираниите ротациски матрици се еднакви на самите транспонирани матрици, за инверзните матрици кон ротациските матрици се добива:

$$[\mathbf{R}(x, \theta)]^{-1} = \frac{\text{Adj}[\mathbf{R}(x, \theta)]}{\det[\mathbf{R}(x, \theta)]} = \frac{[\mathbf{R}(x, \theta)]^T}{1} = [\mathbf{R}(x, \theta)]^T \quad (2.80)$$

$$[\mathbf{R}(y, \theta)]^{-1} = \frac{\text{Adj}[\mathbf{R}(y, \theta)]}{\det[\mathbf{R}(y, \theta)]} = \frac{[\mathbf{R}(y, \theta)]^T}{1} = [\mathbf{R}(y, \theta)]^T \quad (2.81)$$

$$[\mathbf{R}(z, \theta)]^{-1} = \frac{\text{Adj}[\mathbf{R}(z, \theta)]}{\det[\mathbf{R}(z, \theta)]} = \frac{[\mathbf{R}(z, \theta)]^T}{1} = [\mathbf{R}(z, \theta)]^T \quad (2.82)$$

Треба да се забележи дека ова важи само за едноставните (3×3) – димензиски ротациски матрици. Во случајот на хомогените (4×4) – димензиски трансформациони матрици, за да се определат соодветните инверзни матрици, хомогената матрица се дели на два дела: првите три редици и колони го чинат т.н. ротациски дел, а првите три елементи од последната колона го чинат т.н. позициски дел. Тогаш, инверзната матрица кон дадената хомогена трансформациона матрица се одредува така што ротацискиот дел се заменува со неговиот соодветен транспониран пар, позицискиот дел се заменува со скаларните производи на векторот \mathbf{P} со елементарните вектори $(\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a})$, а последната редица со нормирачките фактори не се менува:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\mathbf{P} \cdot \mathbf{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

каде што:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = p_x \cdot n_x + p_y \cdot n_y + p_z \cdot n_z$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{o} = p_x \cdot o_x + p_y \cdot o_y + p_z \cdot o_z$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = p_x \cdot a_x + p_y \cdot a_y + p_z \cdot a_z \quad (2.84)$$

Пример 2.11. Да се определи инверзната матрица кон ротациската матрица:

$$\mathbf{R}(x, 30^0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Решение: Бидејќи позицискиот вектор \mathbf{P} на матрицата (2.85) е нулев, скаларните производи $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{o}$, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}$ се сите нулеви, па бараната инверзна матрица е:

$$\mathbf{R}(x, 30^0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Читателот може да се обиде инверзната матрица (2.86) да ја определи и на класичен начин, уверувајќи се дека тоа е долготраен и макотрпен процес.

Пример 2.12. Да се определи инверзната матрица од следната трансформациона матрица:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0.707 & -0.707 & 5 \\ 0 & 0.707 & 0.707 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Решение: Бараната инверзна матрица е:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4(1) - 5(0) - 7(0) \\ 0 & 0.707 & 0.707 & -4(0) - 5(0.707) - 7(0.707) \\ 0 & -0.707 & 0.707 & -4(0) - 5(-0.707) - 7(0.707) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

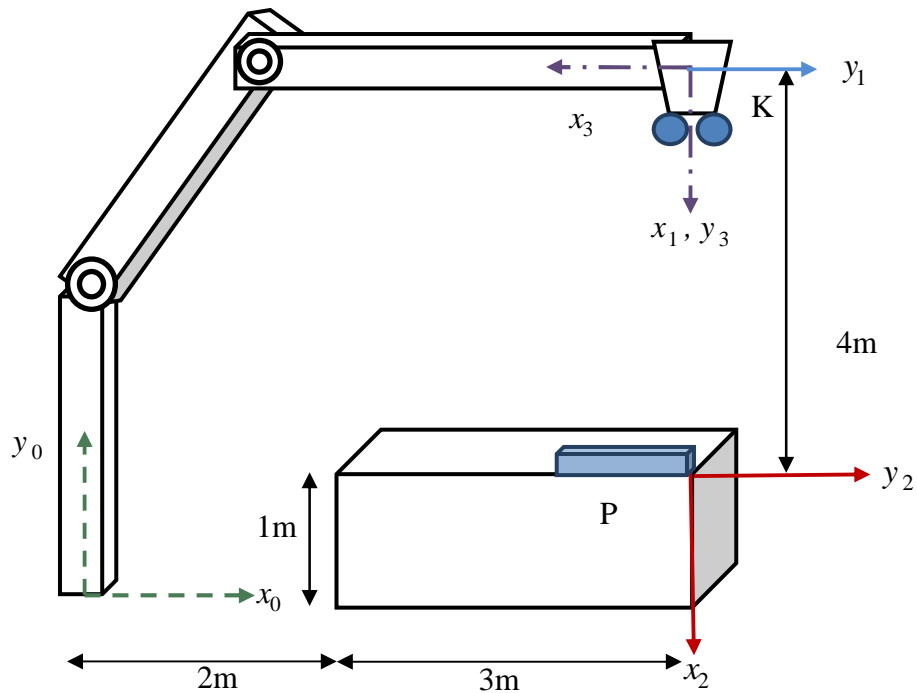
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0.707 & 0.707 & -8.5 \\ 0 & -0.707 & 0.707 & -1.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Резултатот може да се провери така што ќе се покаже дека:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I} \quad (2.89)$$

Пример 2.13. Дадена е роботската рака составена од три крака, прикажана на слика 2.21. На крајот од раката, наместо извршен елемент, е прикачена камера, со помош на која може да се одреди положбата на објектот во однос на роботската

рака. Да се определи положбата на роботската рака 0T_H во однос на референтниот координатен систем $\{0\}$.



Слика 2.21. Илустрација кон примерот 2.13

Решение: Положбата ${}^P T_K$ на камерата K во однос на објектот P , положбата ${}^H T_K$ на камерата K во однос на раката H , како и положбата ${}^0 T_K$ на камерата K и положбата ${}^0 T_P$ на предметот P во однос на референтниот координатен систем $\{0\}$ можат да се определат врз основа на сликата 2.21. Имајќи на ум дека сите елементи лежат во иста рамнина:

$${}^0R_K = {}^0R_3 = R(z, 180^\circ) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0P_K = {}^0P_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}^0T_K = \begin{bmatrix} {}^0R_K & {}^0P_K \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

$${}^0R_P = {}^0R_2 = R(z, -90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0P_P = {}^0P_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}^0\mathbf{T}_P = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_P & {}^0\mathbf{P}_P \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

$${}^P\mathbf{R}_K = {}^2\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}(z, -90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^P\mathbf{P}_K = {}^2\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}^P\mathbf{T}_K = \begin{bmatrix} {}^P\mathbf{R}_K & {}^P\mathbf{P}_K \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

$${}^H\mathbf{R}_K = {}^1\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}(z, -90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^H\mathbf{P}_K = {}^1\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}^H\mathbf{T}_K = \begin{bmatrix} {}^H\mathbf{R}_K & {}^H\mathbf{P}_K \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Врз основа на равенката (2.76), за конкретниот случај може да се напише:

$${}^0\mathbf{T}_P = {}^0\mathbf{T}_K \cdot {}^K\mathbf{T}_P = {}^0\mathbf{T}_H \cdot {}^H\mathbf{T}_K \cdot {}^K\mathbf{T}_P \Rightarrow {}^0\mathbf{T}_H = {}^0\mathbf{T}_P \cdot ({}^K\mathbf{T}_P)^{-1} \cdot ({}^H\mathbf{T}_K)^{-1} \quad (2.94)$$

па, оттука, бараната положба на роботската рака ${}^0\mathbf{T}_H$ ќе биде:

$${}^0\mathbf{T}_H = {}^0\mathbf{T}_P \cdot ({}^K\mathbf{T}_P)^{-1} \cdot ({}^H\mathbf{T}_K)^{-1} = {}^0\mathbf{T}_P \cdot {}^P\mathbf{T}_K \cdot ({}^H\mathbf{T}_K)^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Со инспекција на сликата 2.21 може лесно да се утврди дека резултатот (2.95) е точен:

$${}^0\mathbf{R}_H = {}^0\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}(z, -90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{P}_H = {}^0\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}^0T_H = \begin{bmatrix} {}^0R_H & {}^0P_H \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

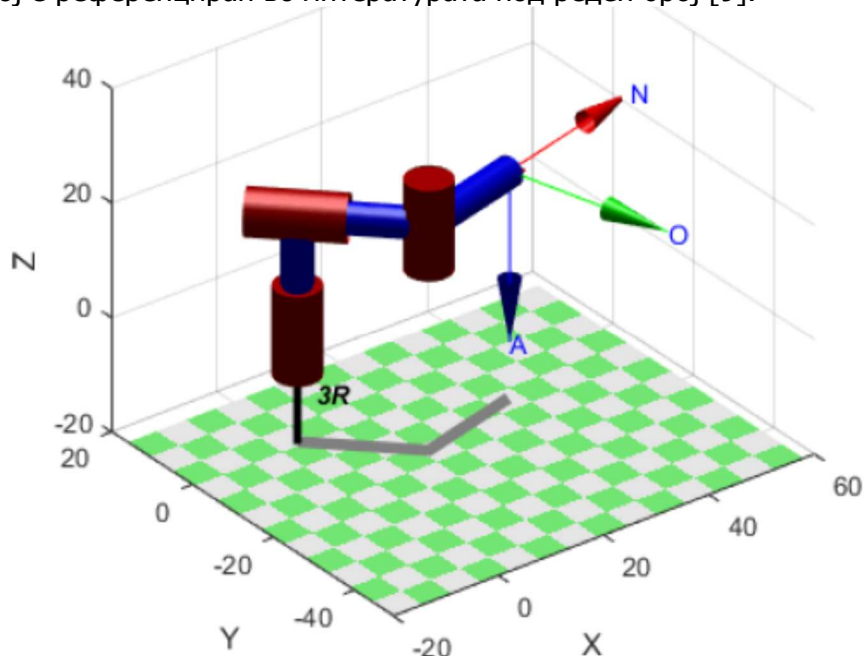
2.7. ДИРЕКТНА И ИНВЕРЗНА КИНЕМАТИКА НА РОБОТСКАТА РАКА

Конфигурацијата на една роботска рака по правило соодветствува на координатниот систем во кој е дефинирана. Така, роботската рака дефинирана во правоаголен координатен систем ќе се состои од три трансляциски зглобови (3P), додека роботска рака дефинирана во цилиндричен координатен систем ќе се состои од два трансляциски и еден ротациски зглоб (R2P). Аналогно, роботска рака со сферни координати (дефинирана во сферен координатен систем) ќе се состои од еден трансляциски и два ротациски зглоба (2RP) и, конечно, една антропоморфна роботска рака ќе има три ротациски зглоба (3R).

Нека, под претпоставка, е позната конфигурацијата на роботската рака. Тоа значи дека се познати должините на сите краци и вредностите на променливите на сите зглобови од раката. Одредувањето на позицијата и ориентацијата на раката во просторот се нарекува **директна кинематика** на роботската рака. Ако се познати сите променливи на зглобовите од роботската рака, со помош на директната кинематика може да се определи положбата на раката во просторот во произволен временски миг. Обратната задача, која се состои во одредување на потребното движење на роботската рака за таа да се најде во саканата позиција и ориентација, се нарекува **инверзна кинематика** на роботската рака. Со други зборови, ако роботската рака треба да се најде во одредена позиција и со одредена ориентација во просторот, потребно е да се определи колку треба да изнесуваат поместувањата на трансляциските зглобови и аглиите на ротациските зглобови од раката. При директната кинематика на роботската рака, во соодветните кинематски равенки се внесуваат конкретните вредности за познатите променливи на раката, додека при инверзната кинематика се одредуваат инверзните равенки кон споменатите кинематски равенки. Во пракса многу поважна е инверзната кинематика, бидејќи ѝ овозможува на раката да извршува работи.

Како што веќе е покажано во досегашното излагање, позицијата и ориентацијата на цврсто тело во просторот се определуваат на тој начин што, најнапред, кон телото се придружува соодветен координатен систем и потоа се определува положбата на координатниот почеток и ориентацијата на координатните оски од тој координатен систем. За таа цел се потребни шест степени слобода на движење, што значи дека позицијата и ориентацијата на цврсто тело во просторот ќе бидат целосно определени само ако се обезбедат споменатите шест вида информации. На сличен начин се определуваат и позицијата и ориентацијата на една роботска рака во просторот. За да се определи позицијата и ориентацијата на роботската рака во просторот, најнапред кон неа се придружува соодветен координатен систем и потоа се определува позицијата и ориентацијата на тој координатен систем во просторот. Соодветните равенки кои ја дефинираат позицијата и ориентацијата на една роботска рака во просторот се наречени **директни кинематски равенки** и

нивниот изглед зависи од конфигурацијата на раката. На слика 2.22 е прикажана роботска рака, координатниот систем придружен кон неа, референтниот координатен систем и нивната релативна позиција и ориентација. Врската помеѓу двата координатни системи зависи од конфигурацијата на раката, односно координатниот систем во кој таа е изведена. Сликата 2.22, како и сите останати слики означени со *, е генерирана со помош на програмскиот пакет Robotics Toolbox, кој е референциран во литературата под реден број [9].



Слика 2.22. Графички приказ на координатен систем на роботска рака во однос на избран референтен координатен систем *

За поголема едноставност на пресметките, во продолжение најнапред ќе бидат изведени кинематските равенки на роботската рака за позиција, а потоа и за ротација. На крај ќе бидат изведени кинематските равенки и за позиција и за ротација.

2.7.1. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА ПОЗИЦИЈА НА РОБОТСКАТА РАКА

Положбата на координатниот почеток од координатниот систем придружен со роботската рака има три степени слобода на движење, што значи дека целосно е дефинирана со три вида информации и може да биде прикажана во произволни координати. Вообичаено, позицијата на роботска рака во просторот се прикажува во правоаголни, цилиндрични, сферни и антропоморфни координати. Така ќе бидат прикажани и соодветните кинематски равенки на позиција.

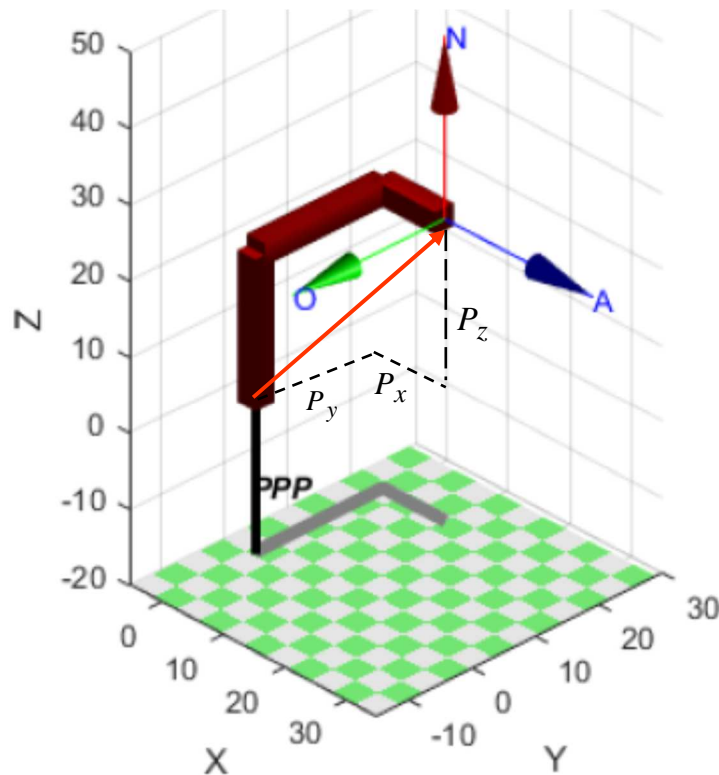
2.7.1.1. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА ПОЗИЦИЈА ВО ПРАВОАГОЛНИ КООРДИНАТИ

Роботска рака дефинирана со правоаголни координати остварува произволна положба во просторот преку линеарни движења во однос на x , y и z -оската од

референтниот координатен систем U . Бидејќи во случајот нема никаква ротација, трансформационата матрица што го претставува ова движење е едноставна матрица на translација:

$${}^U T_P = T_{pr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

при што ${}^U T_P$ ја означува матрицата на трансформација помеѓу референтниот координатен систем U и координатниот почеток P на координатниот систем придружен со роботската рака (односно положбата на точката P во однос на референтниот координатен систем U), а T_{pr} означува дека набљудуваната трансформација (движење) е прикажано со правоаголни координати.



Слика 2.23. Графички приказ на положбата на роботска рака во правоаголни координати *

Пример 2.14. Дадена роботска рака треба да се постави во положба одредена со координатите на точката $P(4,8,5)$. Да се определи движењето што треба да го изврши набљудуваната роботска рака за да се најде во саканата положба и да се прикаже во правоаголни координати.

Решение: За да се определи положбата на роботската рака во просторот кон неа се придружува координатен систем со координатен почеток P . Движењето на

раката е претставено со матрицата на трансформација (2.97), која во конкретниот случај има изглед:

$${}^U\mathbf{T}_P = \mathbf{T}_{pr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

Оттука, $p_x = 4$, $p_y = 8$ и $p_z = 5$, што значи дека набљудуваната роботска рака ќе се најде во саканата положба во просторот по следните последователни движења: транслација за 4 единици долж x -оската, транслација за 8 единици долж y -оската и транслација за 5 единици долж z -оската.

2.7.1.2. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА ПОЗИЦИЈА ВО ЦИЛИНДРИЧНИ КООРДИНАТИ

Роботска рака дефинирана со цилиндрични координати остварува произволна позиција во просторот преку две транслациски движења и едно ротациско. Тоа се следните последователни движења: транслација за r единици долж x -оската, ротација за агол α околу z -оската и транслација за l единици долж z -оската, како што е покажано на слика 2.24. Матрицата на трансформација која ја дефинира положбата на координатниот почеток P од координатниот систем придружен со роботската рака во однос на референтниот координатен систем претставува производ од матриците на одделните движења во обратен редослед:

$$\begin{aligned} {}^U\mathbf{T}_P &= \mathbf{T}_{cyl}(r, \alpha, l) = \mathbf{Trans}(0, 0, l) \cdot \mathbf{R}(z, \alpha) \cdot \mathbf{Trans}(r, 0, 0) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & rC\alpha \\ S\alpha & C\alpha & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.99) \end{aligned}$$

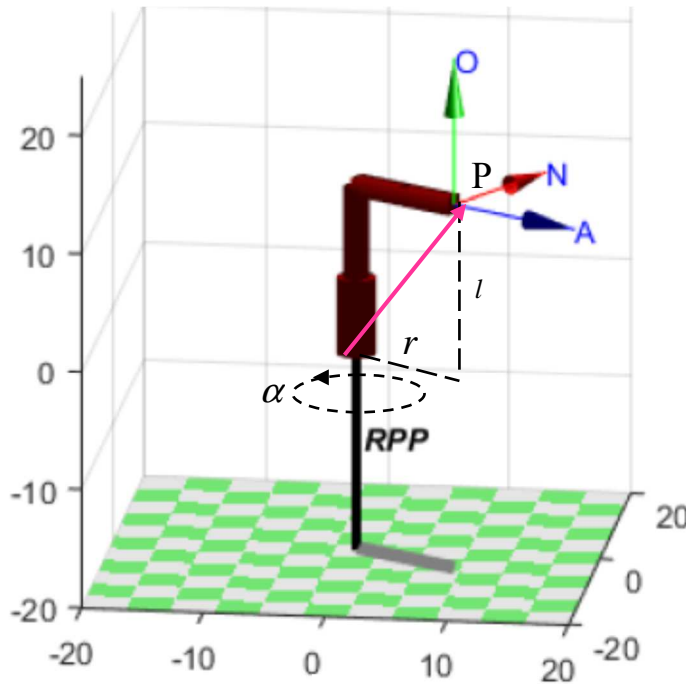
Првите три колони во (2.99) ја претставуваат ориентацијата на роботската рака (односно координатниот систем придружен со неа) во просторот, а последната колона ја претставува положбата на координатниот почеток од координатниот систем придружен со роботската рака (следствено и позицијата на самата роботска рака во просторот). Очигледно, ориентацијата на координатниот систем придружен со роботската рака се менува како резултат од ротацијата околу z -оската, меѓутоа за ова ќе стане збор подоцна.

Координатниот систем придружен со роботската рака може повторно да се врати во првобитната ориентација паралелно со референтниот координатен систем (да се „одротира“), ако се ротира околу a -оската за агол $-\alpha$. Соодветната матрица на трансформација која го прикажува ова движење се определува на следниот начин:

$$\mathbf{T}_{cyl}(r, \alpha, l) \cdot \mathbf{R}(a, -\alpha) =$$

$$= \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & rC\alpha \\ S\alpha & C\alpha & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C(-\alpha) & -S(-\alpha) & 0 & 0 \\ S(-\alpha) & C(-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rC\alpha \\ 0 & 1 & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

Како што се гледа од (2.100), положбата на координатниот почеток од координатниот систем на роботската рака е непроменета, што е постигнато со ротација на подвижниот координатен систем околу локалната a -оска.



Слика 2.24. Графички приказ на позицијата на роботска рака во цилиндрични координати *

Пример 2.15. Дадена роботска рака треба да се постави во позиција одредена со координатите на точката $P(4,8,5)$. Да се определи движењето што треба да го изврши набљудуваната роботска рака за да се најде во саканата позиција и тоа да се прикаже во цилиндрични координати.

Решение: По извршеното „одротирање“ на матрицата на положба во цилиндрични координати T_{cyl} во согласност со (2.100), таа ќе има изглед:

$$T_{cyl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rC\alpha \\ 0 & 1 & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

од каде што непосредно следува:

$$l = 5, r \cos \alpha = 4, r \sin \alpha = 8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \alpha = 63.4^\circ \text{ или } 243.4^\circ$$

$$r = 8.93 \tag{2.102}$$

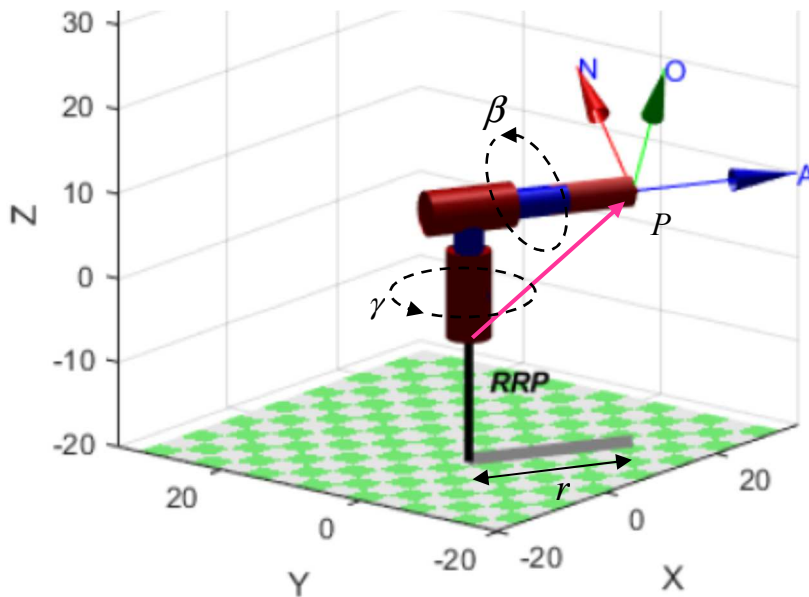
Тоа значи дека набљудуваната роботска рака изведена во цилиндрични координати може да се доведе на позиција одредена со координатите на точката $P(4, 8, 5)$ со translација од 5 единици долж x -оската, ротација за агол од 63.4° околу z -оската и translација за 8.93 единици долж z -оската. На крајот треба да се истакне дека при пресметувањето агли во роботската кинематика многу е битно точно да се определи во кој квадрант се наоѓа аголот. Во конкретниот случај, имајќи на ум дека r , $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ се позитивни, се заклучува дека аголот α припаѓа на првиот квадрант, значи $\alpha = 63.4^\circ$

2.7.1.3. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА ПОЗИЦИЈА ВО СФЕРНИ КООРДИНАТИ

Роботска рака дефинирана во сферен координатен систем остварува произволна позиција во просторот преку две ротациски движења и едно translациско. Тоа се следните последователни движења: translација за r единици долж z -оската, ротација за агол β околу y -оската и ротација за агол γ околу z -оската, како што е покажано на слика 2.25. Матрицата на трансформација која ја дефинира положбата на координатниот почеток P од координатниот систем придружен со роботската рака во однос на референтниот координатен систем претставува производ од матриците на одделните движења во обратен редослед:

$$\begin{aligned} {}^R \mathbf{T}_P &= \mathbf{T}_{\text{sph}}(r, \beta, \gamma) = \mathbf{R}(z, \gamma) \cdot \mathbf{R}(y, \beta) \cdot \mathbf{Trans}(0, 0, r) = \\ &= \begin{bmatrix} C\gamma & -S\gamma & 0 & 0 \\ S\gamma & C\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C\beta \cdot C\gamma & -S\gamma & S\beta \cdot C\gamma & rS\beta \cdot C\gamma \\ C\beta \cdot S\gamma & C\gamma & S\beta \cdot S\gamma & rS\beta \cdot S\gamma \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.103} \end{aligned}$$

Првите три колони во (2.103) ја претставуваат ориентацијата на роботската рака (односно координатниот систем придружен со неа) во просторот, а последната колона ја претставува положбата на координатниот почеток од координатниот систем придружен со роботската рака (следствено и позицијата на самата роботска рака во просторот). Очигледно, ориентацијата на координатниот систем придружен со роботската рака се менува како резултат од ротацијата околу y -оската и z -оската, меѓутоа за ова ќе стане збор подоцна.



Слика 2.25. Графички приказ на позицијата на роботска рака во сферни координати *

Координатниот систем придружен со роботската рака може повторно да се врати во првобитната ориентација паралелно со референтниот координатен систем (да се „одротира“), што е прикажано со матрицата на трансформација:

$$\mathbf{T}_{\text{sph}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rS\beta \cdot C\gamma \\ 0 & 1 & 0 & rS\beta \cdot S\gamma \\ 0 & 0 & 1 & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Тоа се постигнува со ротација на подвижниот координатен систем за агол $-\beta$ околу локалната o -оска и ротација за агол $-\gamma$ околу локалната a -оска, во наведениот редослед.

Пример 2.16. Да се определи во сферни координати движењето што треба да го изврши една роботска рака за да се најде во позиција одредена со координатите на точката $P(4,8,5)$.

Решение: Матрицата на положба во сферни координати по „одротирањето“ ќе има изглед:

$$\mathbf{T}_{\text{sph}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rS\beta \cdot C\gamma \\ 0 & 1 & 0 & rS\beta \cdot S\gamma \\ 0 & 0 & 1 & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

од каде што непосредно следува:

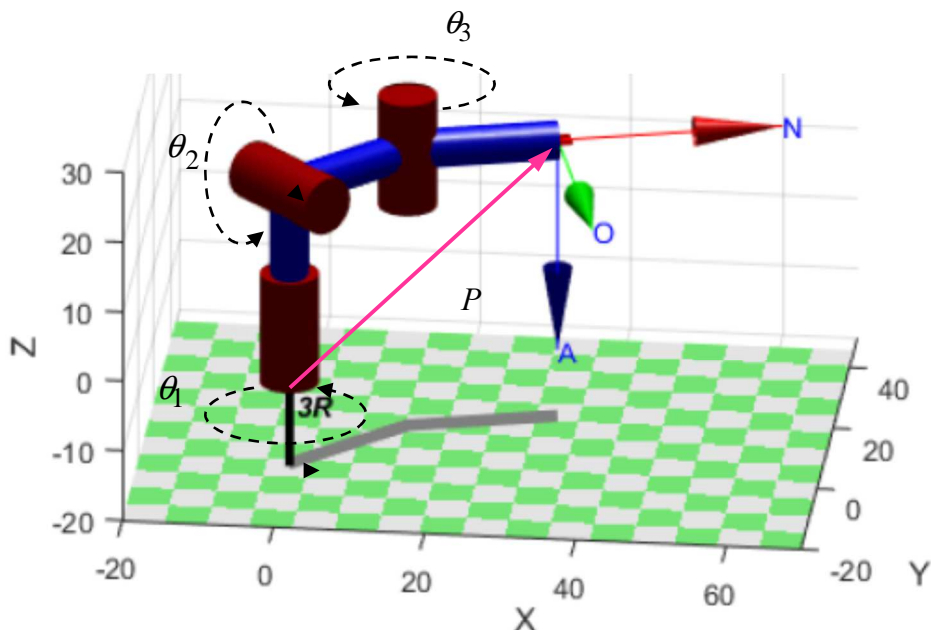
$$\left. \begin{aligned} r \sin \beta \cos \gamma &= 4 \\ r \sin \beta \sin \gamma &= 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \gamma = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \gamma &= 63.4^\circ \Rightarrow \sin \gamma = 0.89, \cos \gamma = 0.447 \\ \gamma &= 243.4^\circ \Rightarrow \sin \gamma = -0.89, \cos \gamma = -0.447 \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} r \sin \beta &= \frac{4}{0.447} = 8.95 \\ r \cos \beta &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta = 60.8^\circ, \quad \left. \begin{aligned} r \sin \beta &= -8.95 \\ r \cos \beta &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta = -60.8^\circ$$

$$r = 10.25 \tag{2.106}$$

Тоа значи дека поставената задача има две решенија: $T_{\text{sph}}(10.25; 60.8^\circ; 63.4^\circ)$ и $T_{\text{sph}}(10.25; -60.8^\circ; 243.4^\circ)$. И двете дефинираат иста позиција на набљудуваната роботска рака во просторот. Разликата се огледува само во нејзината ориентација во просторот. Бидејќи за роботска рака со три степени слобода на движење не може да се дефинира никаква ориентација, следува дека не постои начин да се определи кое решение одговара на стварната ориентација на раката во просторот.

2.7.1.4. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА ПОЗИЦИЈА ВО АНТРОПОМОРФНИ КООРДИНАТИ



Слика 2.26. Антропоморфна роботска рака *

Роботска рака дефинирана во антропоморфни координати се одликува со три ротационски движења, како што е покажано на слика 2.26. Соодветната матрица на трансформација ќе биде изведена подоцна.

2.7.2. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА РОТАЦИЈА

Едно круто тело има најмногу 3 степени слобода на ротациско движење, па, оттука, за да се дефинира неговата ориентација во просторот доволни се 3 величини. Меѓутоа, ротациските матрици \mathbf{R} со кои досега ја претставувавме ориентацијата на една роботска рака во просторот имаат 9 елементи:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

Ова не претставува никаква противречност со претходното тврдење, затоа што нивните елементи не се независни величини, туку се ограничени со фактот дека колоните на овие ротациски матрици се единични и заемно нормални вектори. Тие ограничувања водат кон шест независни равенки:

$$\sum_{i=1}^3 R_{ij}^2 = 1; \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.108)$$

$$R_{1i}R_{1j} + R_{2i}R_{2j} + R_{3i}R_{3j} = 0; \quad i \neq j \quad (2.109)$$

што значи дека постојат 3 слободни променливи. Во продолжение се прикажани 3 начини за претставување произволна ориентација на една роботска рака во просторот преку 3 независни величини: Ојлеровите агли, аглие на валање, подигање и скршнување и единичните кватерниони. Ојлеровите агли се најчесто применувани ротациски координати. Наспроти ротациските матрици од типот на $\mathbf{R}(x, \alpha)$, $\mathbf{R}(y, \beta)$ итн., кои претставуваат неминимален опис на ориентацијата на едно цврсто тело, Ојлеровите агли претставуваат минимален опис, бидејќи моделот користи само три агли, кои опишуваат низа од три последователни ротации.

2.7.2.1. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА РОТАЦИЈА СО ОЈЛЕРОВИ АГЛИ

Ојлеровите агли се три агли, воведени од страна на Леонард Ојлер (Leonhard Euler), со помош на кои се опишува ориентацијата на едно круто тело во тридимензионалниот Евклидов простор. Бидејќи ориентацијата на едно круто тело се одредува преку ориентацијата на координатен систем придружен со него, слободно може да се каже дека Ојлеровите агли служат за претставување на ориентацијата на еден координатен систем во однос на друг. Во основа, Ојлеровите агли претставуваат три елементарни и последователни ротации во одреден редослед, со помош на кои може да се претстави просторната ориентација на кој и да било координатен систем во однос на даден референтен координатен систем. Овие елементарни ротации можат да бидат било во однос на оските на неподвижниот референтен координатен систем, било во однос на оските на самиот подвижен координатен систем, чија ориентација се одредува. Тоа се должи на фактот дека секоја ориентација остварена преку три последователни елементарни ротации околу оските на референтниот координатен систем е идентична со ориентацијата постигната со истите елементарни ротации околу оските на

подвижниот координатен систем само во обратен редослед. Вообичаено, Ојлеровите агли се означуваат со ϕ , θ и ψ .

Општо земено, постојат голем број тројки агли кои опишуваат иста ориентација, што значи дека различни комбинации од ротации околу координатните оски на одбраниот координатен систем водат кон различни тројки Ојлерови агли. Такви се, на пример, ZXZ, ZYZ, XYZ-Ојлеровите агли итн. Постојат вкупно 12 можни комбинации од по 3 елементарни ротации претставени со Ојлеровите агли, со помош на кои може да се постигне произволна ориентација во просторот:

- ZXZ, XYX, YZY, ZYZ, XZX, YXY
- XYZ, YZX, ZXY, XZY, ZYX, YXZ

Првите се нарекуваат уште вистински или класични Ојлерови агли, додека вторите се нарекуваат и Тејт-Брајанови (Tait-Bryan) агли (наутички, Карданови или RPY-агли). Како што може да се забележи, кај класичните Ојлерови агли првата и третата елементарна ротација се секогаш околу иста оска, додека кај Брајановите агли елементарните ротации секогаш се околу 3 различни оски. При изборот на Ојлеровите агли, треба да се внимава две последователни ротации да не бидат околу иста оска, на пр. ZZХ, ZZУ итн. затоа што тогаш се губи степен слобода на движење. Така, од вкупниот број можни комбинации на последователни ротации околу координатните оски, само 12 се применливи за претставување на произволна ориентација во просторот, па, следствено, постојат 12 тројки Ојлерови агли. Исто така, при дефинирањето на Ојлеровите агли треба да се ограничи нивниот опсег, за да се избегне различни тројки агли да претставуваат иста ориентација. На пример, во случајот на ZYZ-Ојлеровите агли, првата ротација околу подвижната z -оска треба да биде во опсег $(-\pi, \pi)$, следната ротација околу подвижната y -оска треба да биде ограничена на опсег $(-\pi/2, \pi/2)$ и последната ротација околу подвижната z -оска треба да биде во опсег $(-\pi, \pi)$. Најчесто користени се ZXZ и XYZ-Ојлеровите агли.

Во продолжение ќе биде претставено одредувањето на ориентацијата на една роботска рака со помош на ZYZ-Ојлерови агли, при што елементарните ротации ќе бидат околу оските на подвижниот координатен систем. Ова се прави со цел да не се промени позицијата на роботската рака. Нека се набљудува подвижниот координатен систем (n, o, a) , придружен со крајниот зглоб од роботската рака, во однос на даден неподвижен референтен координатен систем (x, y, z) . Роботската рака може да ја оствари саканата ориентација во просторот и со следните три последователни ротации околу оските на подвижниот координатен систем (n, o, a) придружен кон неа, во наведениот редослед:

- ротација за агол ϕ околу a -оската
- ротација за агол θ околу o -оската
- ротација за агол ψ околу a -оската

Притоа, под претпоставка, подвижниот координатен систем придружен кон роботската рака бил паралелен со референтниот координатен систем пред споменатите ротации.

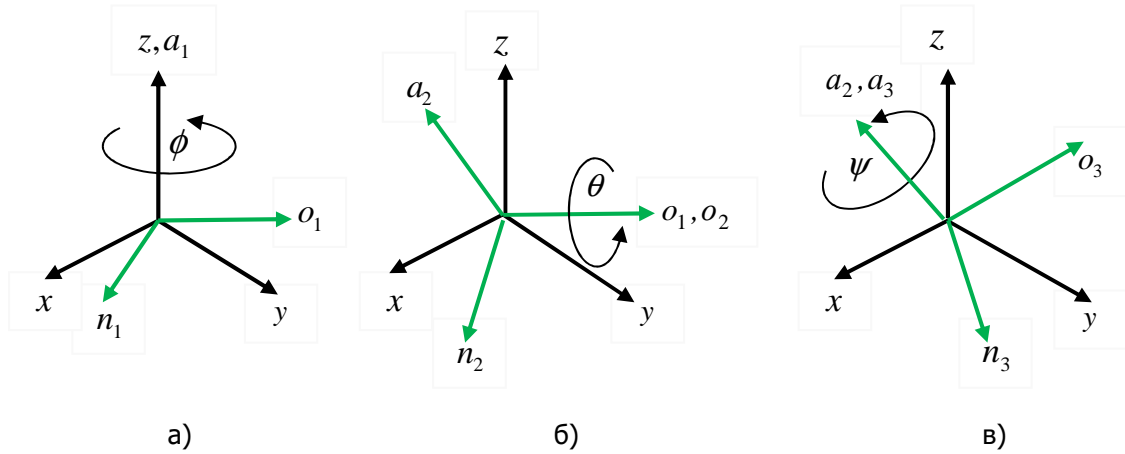
Дефинираните елементарни ротации се прикажани на сликата 2.27. Резултантната ротациска трансформација претставува производ од елементарните и, бидејќи елементарните ротации се околу z -оската, y -оската и повторно z -оската на подвижниот координатен систем, оваа матрица се означува како \mathbf{R}_{ZYZ} матрица:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ZYZ}(\phi, \theta, \psi) &= \mathbf{R}(a, \phi) \cdot \mathbf{R}(o, \theta) \cdot \mathbf{R}(a, \psi) \Rightarrow \\ &= \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C\phi \cdot C\theta & -S\phi & C\phi \cdot S\theta & 0 \\ S\phi \cdot C\theta & C\phi & S\phi \cdot C\theta & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C\phi \cdot C\theta \cdot C\psi - S\phi \cdot S\psi & -C\phi \cdot C\theta \cdot S\psi - S\phi \cdot C\psi & C\phi \cdot S\theta & 0 \\ S\phi \cdot C\theta \cdot C\psi + C\phi \cdot S\psi & -S\phi \cdot C\theta \cdot S\psi + C\phi \cdot C\psi & S\phi \cdot S\theta & 0 \\ -S\theta \cdot C\psi & S\theta \cdot S\psi & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.110) \end{aligned}$$

Решението на инверзната кинематска задача се добива откако најнапред матричната равенка (2.110) се помножи од лево со матрицата $\mathbf{R}^{-1}(a, \phi)$. На овој начин се елиминира непознатата ϕ на десната страна и се добива:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1}(a, \phi) \cdot \mathbf{R}_{ZYZ}(\phi, \theta, \psi) &= \mathbf{R}(o, \theta) \cdot \mathbf{R}(n, \psi) \Rightarrow \\ &= \begin{bmatrix} C\phi & S\phi & 0 & 0 \\ -S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta \cdot C\psi & -C\theta \cdot S\psi & S\theta & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 & 0 \\ -S\theta \cdot C\psi & S\theta \cdot S\psi & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &= \begin{bmatrix} n_x C\phi + n_y S\phi & o_x C\phi + o_y S\phi & a_x C\phi + a_y S\phi & 0 \\ -n_x S\phi + n_y C\phi & -o_x S\phi + o_y C\phi & -a_x S\phi + a_y C\phi & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta \cdot C\psi & -S\theta \cdot S\psi & S\theta & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 & 0 \\ -S\theta \cdot C\psi & C\theta \cdot S\psi & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.111)$$



Слика 2.27. Ротација а) околу a -оската, б) околу o -оската и в) повторно околу a -оската на подвижниот координатен систем придружен кон набљудуваната роботска рака дефинирана со ZYZ-Ојлеровите агли

Со изедначување на елементите на матриците од двете страни на равенката (2.111) се добиваат следните решенија:

$$0 = -a_x S\phi + a_y C\phi \Rightarrow \phi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{S\phi}{C\phi} = \operatorname{arctg} \frac{a_y}{a_x} \\ \operatorname{arctg} \frac{S(-\phi)}{C(-\phi)} = \operatorname{arctg} \frac{(-a_y)}{(-a_x)} \end{cases}$$

$$S\psi = -n_x S\phi + n_y C\phi$$

$$C\psi = -o_x S\phi + o_y C\phi \Rightarrow \psi = \operatorname{arctg} \frac{S\psi}{C\psi} = \operatorname{arctg} \frac{-n_x S\phi + n_y C\phi}{-o_x S\phi + o_y C\phi}$$

$$S\theta = a_x C\phi + a_y S\phi$$

$$C\theta = a_z \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} \frac{S\theta}{C\theta} = \operatorname{arctg} \left(\frac{a_x C\phi + a_y S\phi}{a_z} \right) \quad (2.112)$$

Пример 2.17. Дадена е саканата положба на една Декартова–Ојлерова роботска рака. Тоа значи дека нејзината крајна позиција е одредена со трансформациската матрица на позиција во правоаголни координати, а нејзината крајна ориентација – со трансформациската матрица на ротација со Ојлерови агли. Да се определат

потребните движења кои роботската рака ќе ја доведат во саканата положба во просторот:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{T}_H} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1268 & -0.78 & 0.6124 & 4 \\ 0.9268 & 0.1268 & 0.3535 & 8 \\ -0.3535 & 0.6124 & 0.7071 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

Решение: Врз основа на резултатите (2.112), за конкретниот пример се добива:

$$\phi = \arctg \frac{a_y}{a_x} = \arctg \frac{0.3535}{0.6124} = \begin{cases} 30^\circ \\ 210^\circ \end{cases}$$

$$\psi = \arctg \frac{-n_x S\phi + n_y C\phi}{-o_x S\phi + o_y C\phi} = \arctg \frac{1.73}{1} = \begin{cases} 60^\circ \\ 240^\circ \end{cases}$$

$$\theta = \arctg \frac{a_x C\phi + a_y S\phi}{a_z} = \arctg(1) = \begin{cases} 45^\circ \\ 225^\circ \end{cases} \quad (2.114)$$

Пример 2.18. Да се реши инверзната кинематска задача за роботска рака, чија ориентација е зададена со матрицата \mathbf{R}_{ZXZ} .

Решение: Трансформациската матрица која ја претставува промената на ориентацијата во просторот на една роботска рака изразена преку ZXZ – Ојлеровите агли е следната:

$$\mathbf{R}_{ZXZ}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{R}(a, \phi) \cdot \mathbf{R}(n, \theta) \cdot \mathbf{R}(a, \psi) \Rightarrow$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi \cdot C\theta & S\phi \cdot S\theta & 0 \\ S\phi & C\phi \cdot C\theta & -C\phi \cdot S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi \cdot C\psi - S\phi \cdot C\theta \cdot S\psi & -C\phi \cdot S\psi - S\phi \cdot C\theta \cdot C\psi & S\phi \cdot S\theta & 0 \\ S\phi \cdot S\psi + C\phi \cdot C\theta \cdot S\psi & -S\phi \cdot S\psi + C\phi \cdot C\theta \cdot C\psi & -C\phi \cdot S\theta & 0 \\ S\theta \cdot S\psi & S\theta \cdot C\psi & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Решението на инверзната кинематска задача се добива од условот:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi \cdot C\psi - S\phi \cdot C\theta \cdot S\psi & -C\phi \cdot S\psi - S\phi \cdot C\theta \cdot C\psi & S\phi \cdot S\theta \\ S\phi \cdot S\psi + C\phi \cdot C\theta \cdot S\psi & -S\phi \cdot S\psi + C\phi \cdot C\theta \cdot C\psi & -C\phi \cdot S\theta \\ S\theta \cdot S\psi & S\theta \cdot C\psi & C\theta \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

Оттука:

$$S\phi \cdot S\theta = r_{13}$$

$$-C\phi \cdot S\theta = r_{23}$$

$$\frac{S\phi \cdot S\theta}{-C\phi \cdot S\theta} = \frac{r_{13}}{r_{23}}$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{S\phi}{C\phi} = \frac{r_{13}}{-r_{23}} \quad (2.117)$$

$$S\theta \cdot S\psi = r_{31}$$

$$S\theta \cdot C\psi = r_{32}$$

$$\frac{S\theta \cdot S\psi}{S\theta \cdot C\psi} = \frac{r_{31}}{r_{32}}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{S\psi}{C\psi} = \frac{r_{31}}{r_{32}} \quad (2.118)$$

$$S\phi \cdot S\theta = r_{13} / S\phi$$

$$S^2 \phi \cdot S\theta = r_{13} \cdot S\phi$$

$$-C\phi \cdot S\theta = r_{23} / (-C\phi)$$

$$C^2 \phi \cdot S\theta = -r_{23} \cdot C\phi$$

$$S^2 \phi \cdot S\theta + C^2 \phi \cdot S\theta = r_{13} \cdot S\phi - r_{23} \cdot C\phi$$

$$S\theta = r_{13} \cdot S\phi - r_{23} \cdot C\phi$$

$$C\theta = r_{33}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{S\theta}{C\theta} = \frac{r_{13} \cdot S\phi - r_{23} \cdot C\phi}{r_{33}} \quad (2.119)$$

па, Ојлеровите агли со кои се постига зададената ориентација се:

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{S\phi}{C\phi}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{r_{13}}{-r_{23}}\right) = \operatorname{atan2}(r_{13}, -r_{23}) \quad (2.120)$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{S\theta}{C\theta}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{r_{13} \cdot S\phi - r_{23} \cdot C\phi}{r_{33}}\right) = \operatorname{atan2}(r_{13} \cdot S\phi - r_{23} \cdot C\phi, r_{33}) \quad (2.121)$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{r_{31}}{r_{32}}\right) = \operatorname{atan2}\left(\frac{r_{31}}{r_{32}}\right) \quad (2.122)$$

Битно е да се воочи дека кај секој од моделите со Ојлерови агли постои суштински проблем познат како проблем на сингуларитет на координатите, кој не се јавува кај неминималниот опис со ротациски матрици. Во конкретниот пример сингуларитет постои за $\theta = 0$, бидејќи за оваа вредност на аголот θ доаѓа до поклопување на првата и последната оска на ротација на роботската рака и се губат два степени слобода на движење. Од математичка гледна точка, за многу мали вредности на θ равенствата за ϕ и ψ стануваат недефинирани, а од физичка гледна точка многу мали ротации околу o -оската бараат невозможно големи ротации околу a -оската. Појавата на сингуларитети е присутна кај сите минимални модели на ориентацијата на една роботска рака.

На крајот треба да се истакне дека матрицата $\mathbf{R}_{ZZZ}(\phi, \theta, \psi)$ ја претставува промената на ориентацијата на една роботска рака изразена преку Ојлеровите агли само доколку подвижниот координатен систем придружен со раката првобитно бил паралелен со референтниот координатен систем. Ако пред почетокот на ротациите подвижниот координатен систем на роботската рака, чија ориентација во просторот се одредува, не се поклопува со референтниот координатен систем, крајната ориентација на роботската рака во просторот се одредува како производ на матрицата од претходната ротација и $\mathbf{R}_{ZZZ}(\phi, \theta, \psi)$ матрицата на тековните ротации. Притоа, множењето со матрицата $\mathbf{R}_{ZZZ}(\phi, \theta, \psi)$ се врши оддесно, ако конкретните ротации се извршуваат околу оските на подвижниот координатен систем, со цел да не се промени позицијата на набљудуваната роботска рака. Исто така, матрицата $\mathbf{R}_{ZZZ}(\phi, \theta, \psi)$ ја претставува само промената на ориентацијата на набљудуваната роботска рака, додека нејзината комплетна положба - позицијата и конечната ориентација во однос на референтниот координатен систем, се добива како производ од матрицата на позиција во соодветните координати и матрицата на ориентација $\mathbf{R}_{ZZZ}(\phi, \theta, \psi)$. Се разбира, кажаното важи за ориентација дефинирана со која и да било тројка Ојлерови агли.

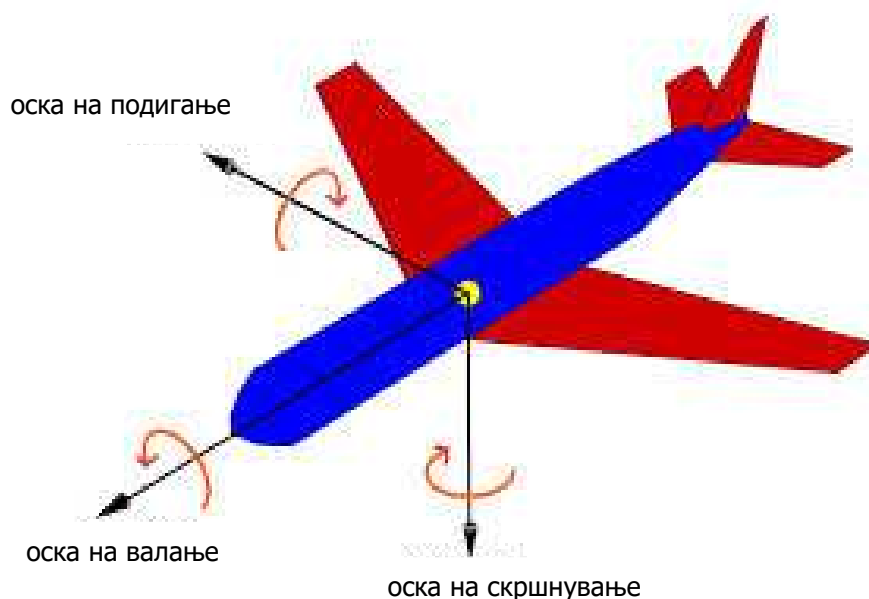
2.7.2.2. RPY (Roll Pitch Yaw) АГЛИ

Една роботска рака може да ја оствари саканата ориентација во просторот и со следните три последователни ротации околу оските на подвижниот координатен систем придружен кон неа (n, o, a) , во дадениот редослед:

- ротација за агол ϕ околу a -оската наречен **агол на скршнување** (Yaw)

- ротација за агол ϑ околу o –оската наречен **агол на подигање** (Pitch)
- ротација за агол η околу n –оската наречен **агол на валање** (Roll)

Притоа, претпоставка е дека подвижниот координатен систем на роботската рака бил паралелен со референтниот координатен систем пред споменатите ротации. Во спротивно, конечната ориентација на роботската рака се добива кога матрицата на претходната ориентација се помножи оддесно со матрицата од тековната ориентација. Битно е да се забележи дека саканата ориентација на роботската рака се постига со последователни ротации околу оските од подвижниот, а не референтниот координатен систем, бидејќи само во тој случај позицијата на роботската рака ќе остане непроменета. Следствено, при одредувањето на ориентацијата на роботската рака во просторот сите ротациски матрици се множат оддесно. Аглиите φ , ϑ и η го добиле своето име од науката за движењето и управувањето на летала, слика 2.28.



Слика 2.28. Дефинирање на RPY-аглиите кај авион (en.wikipedia.org)

На слика 2.29 е прикажано одредувањето на ориентацијата на една роботска рака со помош на RPY-аглиите, а матрицата која ја претставува оваа ориентација е:

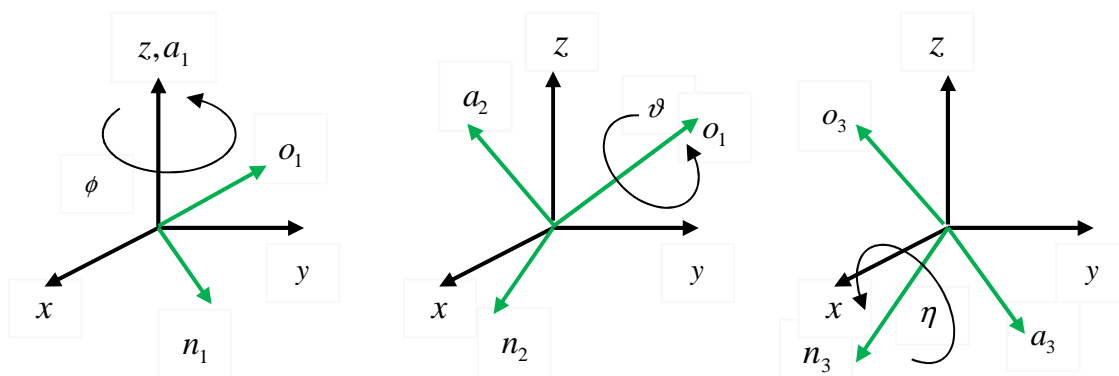
$$\mathbf{R}_{\text{RPY}}(\varphi, \vartheta, \eta) = \mathbf{R}(a, \varphi) \cdot \mathbf{R}(o, \vartheta) \cdot \mathbf{R}(n, \eta) =$$

$$= \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\vartheta & C\varphi \cdot S\vartheta \cdot S\eta - S\varphi \cdot C\eta & C\varphi \cdot S\vartheta \cdot C\eta + S\varphi \cdot S\eta & 0 \\ S\varphi \cdot C\vartheta & S\varphi \cdot S\vartheta \cdot S\eta + C\varphi \cdot C\eta & S\varphi \cdot S\vartheta \cdot C\eta - C\varphi \cdot S\eta & 0 \\ -S\vartheta & C\vartheta \cdot S\eta & C\vartheta \cdot C\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

Матрицата (2.123) ја претставува само промената на ориентацијата на набљудуваната роботска рака. Резултантното движење на роботската рака составено од промената на нејзината позиција и ориентација е дадено со

производот од соодветната матрица на позиција и RPY-матрицата, слика 2.30. Нека, на пример, промената на позицијата на една роботска рака е дадена во сферни координати со трансформационската матрица T_{sph} , а промената на нејзината ориентација е одредена со матрицата (2.123). Тогаш движењето на набљудуваната роботска рака може да се претстави на следниот начин:

$${}^R T_H = T_{\text{sph}}(r, \beta, \gamma) \cdot R_{\text{RPY}}(\varphi, \vartheta, \eta) \quad (2.124)$$



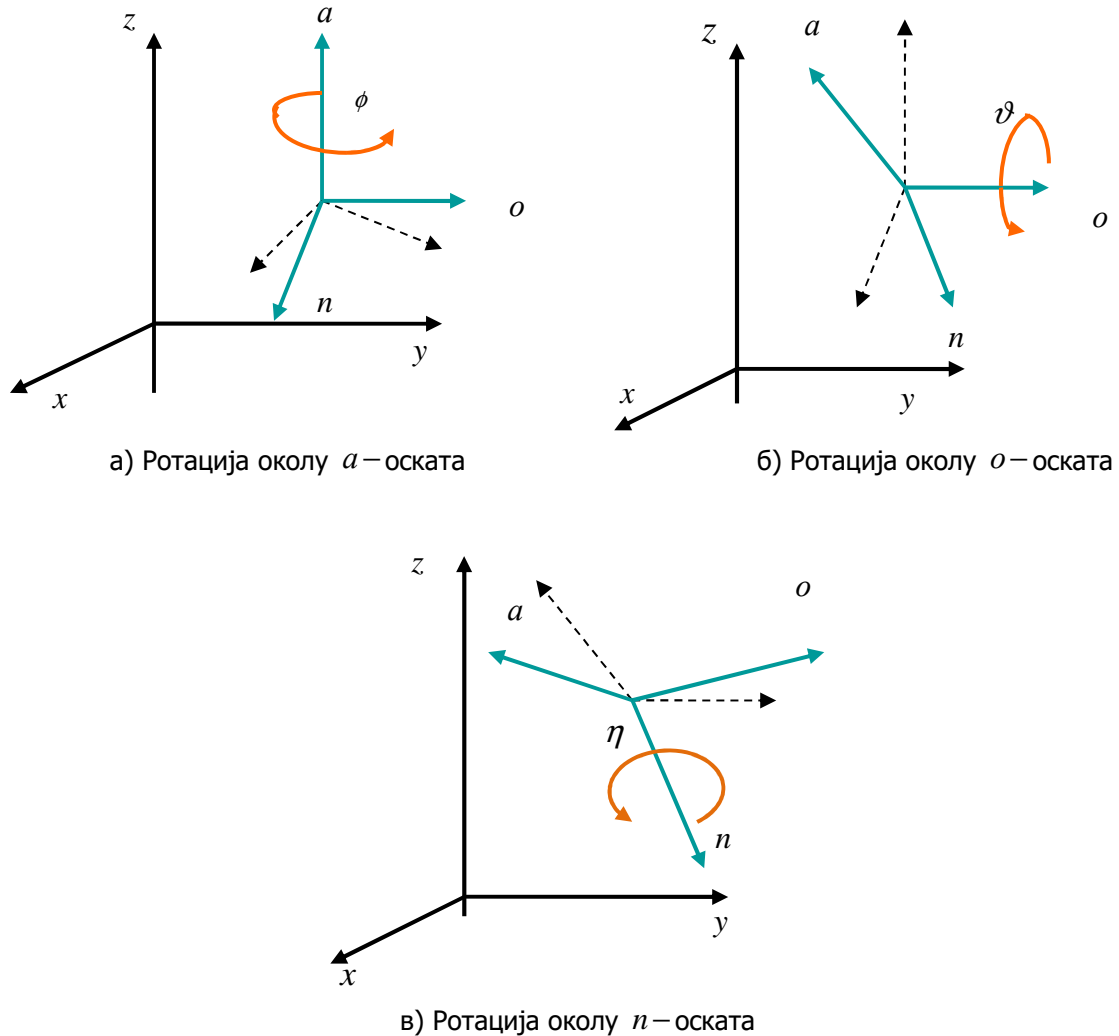
Слика 2.29. Ротација околу координатните оски на подвижниот координатен систем придружен кон набљудуваната роботска рака дефинирана со RPY-аглите

При изучувањето на кинематиката на една роботска рака секогаш од поголем интерес е нејзината инверзна кинематика, односно одредувањето на потребните движења на роботската рака со цел таа да ја достигне саканата позиција и ориентација. Тогаш координатите на позицијата и ориентацијата на роботската рака се познати, а треба да се определат променливите на роботската рака. Во случајот на матрицата (2.123), ова значи дека се познати елементите на матрицата $R_{\text{RPY}}(\varphi, \vartheta, \eta)$, а треба да се определат RPY-аглите φ, ϑ, η . Меѓутоа, решавањето на равенката:

$$R_{\text{RPY}}(\varphi, \vartheta, \eta) = R(a, \varphi) \cdot R(o, \vartheta) \cdot R(n, \eta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\vartheta & C\varphi \cdot S\vartheta \cdot S\eta - S\varphi \cdot C\eta & C\varphi \cdot S\vartheta \cdot C\eta + S\varphi \cdot S\eta & 0 \\ S\varphi \cdot C\vartheta & S\varphi \cdot S\vartheta \cdot S\eta + C\varphi \cdot C\eta & S\varphi \cdot S\vartheta \cdot C\eta - C\varphi \cdot S\eta & 0 \\ -S\vartheta & C\vartheta \cdot S\eta & C\vartheta \cdot C\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

во однос на променливите φ , ϑ , η не е баш едноставна работа. За да се упростат соодветните равенки во кои изворно фигурираат производи од $\sin(\cdot)$ и $\cos(\cdot)$ од овие агли, равенката (2.125) најнапред се множи од лево со матрицата $\mathbf{R}(a, \varphi)^{-1}$:



Слика 2.30. Одредување на положбата на роботска рака постигната со ротација со RPY-аглите околу координатните оски на подвижниот координатен систем придружен со раката

$$\mathbf{R}(a, \varphi)^{-1} \cdot \mathbf{R}_{\text{RPY}}(\varphi, \vartheta, \eta) = \mathbf{R}(o, \vartheta) \cdot \mathbf{R}(n, \eta) \quad (2.126)$$

при што се добива:

$$\begin{bmatrix} C\varphi & S\varphi & 0 & 0 \\ -S\varphi & C\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\vartheta & S\vartheta \cdot S\eta & S\vartheta \cdot C\eta & 0 \\ 0 & C\eta & -S\eta & 0 \\ -S\vartheta & C\vartheta \cdot S\eta & C\vartheta \cdot C\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} n_x C\varphi + n_y S\varphi & o_x C\varphi + o_y S\varphi & a_x C\varphi + a_y S\varphi & 0 \\ -n_x S\varphi + n_y C\varphi & -o_x S\varphi + o_y C\varphi & -a_x S\varphi + a_y C\varphi & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\vartheta & S\vartheta \cdot S\eta & S\vartheta \cdot C\eta & 0 \\ 0 & C\eta & -S\eta & 0 \\ -S\vartheta & C\vartheta \cdot S\eta & C\vartheta \cdot C\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

Равенката (2.127) се решава во однос на непознатите агли φ , ϑ , η , додека (n, o, a) компонентите ја претставуваат саканата ориентација и тие, под претпоставка, се познати или зададени. Следствено, со изедначување на елементите на матриците од левата и десната страна во (2.127), се добиваат следните потребни релации:

$$\begin{aligned} -n_x S\varphi + n_y C\varphi = 0 &\Rightarrow \varphi = \arctg \frac{S\varphi}{C\varphi} = \frac{n_y}{n_x} \quad \text{и} \quad \varphi = \arctg \frac{S(-\varphi)}{C(-\varphi)} \\ -S\vartheta &= n_z \\ C\vartheta = n_x C\varphi + n_y S\varphi &\Rightarrow \vartheta = \arctg \frac{S\vartheta}{C\vartheta} = \arctg \frac{-n_z}{n_x C\varphi + n_y S\varphi} \\ \left. \begin{aligned} -S\eta &= -a_x S\varphi + a_y C\varphi \\ C\eta &= -o_x S\varphi + o_y C\varphi \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \eta = \arctg \frac{S\eta}{C\eta} = \arctg \frac{a_x S\varphi - a_y C\varphi}{-o_x S\varphi + o_y C\varphi} \end{aligned} \quad (2.128)$$

Пример 2.19. Нека, под претпоставка, е позната положбата на една Декартова-RPY роботска рака. Да се определат соодветните трансляциски и ротациски движења со кои е постигната зададената положба на набљудуваната роботска рака:

$${}^R \mathbf{T}_P = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1268 & -0.78 & 0.6124 & 4 \\ 0.9268 & 0.1268 & 0.3535 & 8 \\ -0.3535 & 0.6124 & 0.7071 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

Решение: Терминот Декартова – RPY роботска рака значи дека позицијата на роботската рака е изразена во правоаголни (Декартови) координати, додека нејзината ориентација е дефинирана преку соодветни RPY-агли. Следствено, равенката на движење на набљудуваната роботска рака е:

$${}^R \mathbf{T}_H = \mathbf{T}_{pr}(P_x, P_y, P_z) \cdot \mathbf{R}_{RPY}(\varphi, \vartheta, \eta) \quad (2.130)$$

каде што матрицата на позиција во Декартови координати $\mathbf{T}_{pr}(P_x, P_y, P_z)$ е одредена со (2.97). Врз основа на резултатите (2.128), за бараните RPY-агли се добива:

$$\varphi = \arctg \frac{S\varphi}{C\varphi} = \arctg \frac{n_y}{n_x} = \arctg \frac{0.9268}{-0.1268} = \begin{cases} -36.2^0 \\ 143.8^0 \end{cases}$$

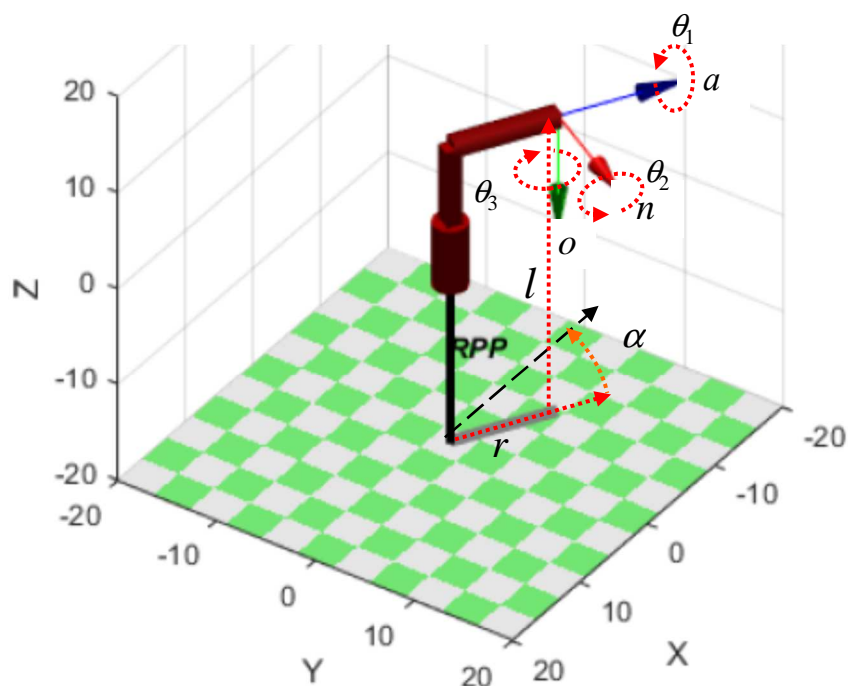
$$\vartheta = \arctg \frac{S\vartheta}{C\vartheta} = \arctg \frac{-n_z}{n_x C\varphi + n_y S\varphi} = \arctg \frac{0.3535}{-0.648} = \begin{cases} -28.6^0 \\ 151.4^0 \end{cases}$$

$$\eta = \arctg \frac{S\eta}{C\eta} = \arctg \frac{a_x S\varphi - a_y C\varphi}{-o_x S\varphi + o_y C\varphi} = \arctg \frac{0.644}{0.359} = \begin{cases} 60^0 \\ 240^0 \end{cases} \quad (2.131)$$

додека за (P_x, P_y, P_z) координатите се добива:

$$P_x = 4; P_y = 8; P_z = 5 \quad (2.132)$$

Пример 2.20. Дадена е саканата положба на една цилиндрична роботска рака, чија ориентација е претставена со Тејт-Брајановите агли θ_1 , θ_2 и θ_3 . Притоа θ_1 претставува агол на ротација околу a -оската, θ_2 претставува агол на ротација околу n -оската и θ_3 претставува агол на ротација околу o -оската на подвижниот координатен систем.



Слика 2.31. Графички приказ на позицијата во цилиндрични координати и RPY – ориентација на роботската рака од примерот 2.20 *

Да се пресметаат вредностите на променливите на зглобовите од роботската рака, со помош на кои ќе се оствари нејзината сакана положба во просторот, зададена со трансформационската матрица:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.233 & 0.255 & 0.939 & 4.24 \\ 0.113 & 0.951 & -0.287 & 2.65 \\ -0.966 & 0.173 & 0.192 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

Што ќе се случи ако $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$?

Решение: Положбата на набљудуваната роботска рака во овој случај е опишана со следната трансформациона матрица:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.233 & 0.255 & 0.939 & 4.24 \\ 0.113 & 0.951 & -0.287 & 2.65 \\ -0.966 & 0.173 & 0.192 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\text{cyl}}(r, \alpha, l) \cdot \mathbf{R}_{\text{ZXY}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (2.134)$$

каде што матрицата на позиција во цилиндрични координати $\mathbf{T}_{\text{cyl}}(r, \alpha, l)$ е одредена со (2.99), а матрицата на ориентација $\mathbf{R}_{\text{ZXY}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ е:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{ZXY}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \mathbf{R}(z, \theta_1) \cdot \mathbf{R}(x, \theta_2) \cdot \mathbf{R}(y, \theta_3) = \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & -S_2 & 0 \\ 0 & S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_3 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_1 C_3 - S_1 S_2 S_3 & -S_1 C_2 & C_1 S_3 + S_1 S_2 C_3 & 0 \\ S_1 C_3 + C_1 S_2 S_3 & C_1 C_2 & S_1 S_3 - C_1 S_2 C_3 & 0 \\ -C_2 S_3 & S_2 & C_2 C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.135) \end{aligned}$$

Оттука:

$$\mathbf{T}_{\text{cyl}}(r, \alpha, l) \cdot \mathbf{R}_{\text{ZXY}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{bmatrix} C'_1 C_3 - S'_1 S_2 S_3 & -S'_1 C_2 & C'_1 S_3 + S'_1 S_2 C_3 & r C \alpha \\ S'_1 C_3 + C'_1 S_2 S_3 & C'_1 C_2 & S'_1 S_3 - C'_1 S_2 C_3 & r S \alpha \\ -C_2 S_3 & S_2 & C_2 C_3 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.136)$$

каде што $S'_1 = \sin(\theta_1 + \alpha) = \sin \theta'_1$ и $C'_1 = \cos(\theta_1 + \alpha) = \cos \theta'_1$.

Од условот за еднаквост на матриците:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\text{cyl}}(r, \alpha, l) \cdot \mathbf{R}_{\text{ZXY}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.233 & 0.255 & 0.939 & 4.24 \\ 0.113 & 0.951 & -0.287 & 2.65 \\ -0.966 & 0.173 & 0.192 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1' C_3 - S_1' S_2 S_3 & -S_1' C_2 & C_1' S_3 + S_1' S_2 C_3 & r C \alpha \\ S_1' C_3 + C_1' S_2 S_3 & C_1' C_2 & S_1' S_3 - C_1' S_2 C_3 & r S \alpha \\ -C_2 S_3 & S_2 & C_2 C_3 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.137)$$

следува:

$$l = 6$$

$$r C \alpha = 4.24, \quad r S \alpha = 2.65 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{arctg} \frac{2.65}{4.24} = 32^\circ$$

$$r S \alpha = 2.65 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2.65}{S \alpha} = \frac{2.65}{0.53} = 5$$

$$\theta_3 = \text{arctg} \frac{-r_{31}}{r_{33}} = \text{arctg} \frac{0.966}{0.192} = 78.76^\circ$$

$$S_2 = r_{32} = 0.173 \Rightarrow \theta_2 = \arcsin(0.173) = 10^\circ$$

$$\theta_1' = \text{arctg} \frac{-r_{21}}{r_{22}} = \text{arctg} \frac{-0.255}{0.951} = -15^\circ = \theta_1 + \alpha = \theta_1 + 32 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = -47^\circ \quad (2.138)$$

Ако наместо аглите $\alpha + \theta_1 = -15^\circ$ и $\theta_3 = 78.76^\circ$ се усвојат вторите решенија $\alpha + \theta_1 = 165^\circ$ и $\theta_3 = 258.76^\circ$, ќе се добијат вторите решенија за примерот 2.20.

За $\cos \theta_2 = 0$, матрицата $\mathbf{R}_{\text{ZXY}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ станува:

$$\mathbf{R}_{\text{ZXY}}\left(\theta_1, \frac{\pi}{2}, \theta_3\right) = \begin{bmatrix} C_1 C_3 - S_1 S_3 & 0 & C_1 S_3 + S_1 C_3 & 0 \\ S_1 C_3 + C_1 S_3 & 0 & S_1 S_3 - C_1 C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{13} & 0 & S_{13} & 0 \\ S_{13} & 0 & -C_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

каде што $S_{13} = \sin(\theta_1 + \theta_3)$ и $C_{13} = \cos(\theta_1 + \theta_3)$, па, оттука, може да се пресмета само збирот од аглите θ_1 и θ_3 . Со други зборови, настанува т.н. проблем на сингуларитет на координатите.

2.7.2.3. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ОРИЕНТАЦИЈА СО ЕДИНИЧНИ КВАТЕРНИОНИ

Единичните кватерниони, кои уште се нарекуваат **версори**, претставуваат многу практичен начин за опишување на ротацијата и ориентацијата на едно круто тело во просторот. Во споредба со Ојлеровите агли, тие се добиваат многу поедноставно и кај нив не се јавува проблемот со сингуларитети како кај Ојлеровите агли. Кога се користат за претставување ротација, често се нарекуваат и **ротациски кватерниони**, а кога се користат за претставување ориентација, се нарекуваат и **ориентациски кватерниони**.

Кватернионите за првпат ги вовел ирскиот математичар Вилијам Хамилтон во 1843 година и ги применил во механиката. Тие општо се претставуваат на следниот начин:

$$\mathbf{q} = a + bi + cj + dk \quad (2.140)$$

каде што a, b, c и d се реални броеви, додека i, j и k се комплексни броеви и основни елементи на кватернионот. Множеството кватерниони претставува 4-димензионален векторски простор над множеството реални броеви, за кој важи:

$$(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3) \quad (2.141)$$

$$(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3 \quad (2.142)$$

$$\mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) = \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_3 \quad (2.143)$$

$$\alpha (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) = \alpha \mathbf{q}_1 + \alpha \mathbf{q}_2, \alpha - \text{скалар} \quad (2.144)$$

$$(\alpha \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_2 = \alpha (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) = \mathbf{q}_1 (\alpha \mathbf{q}_2), \alpha - \text{скалар} \quad (2.145)$$

Меѓутоа, операцијата множење кватерниони не е комутативна:

$$\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \neq \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1 \quad (2.146)$$

Во продолжение, кватернионите ги поседуваат следните својства:

- норма

$$\|\mathbf{q}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (2.147)$$

- конјугирано-комплексен кватернион

$$\bar{\mathbf{q}} = a - bi - cj - dk \quad (2.148)$$

- инверзен кватернион

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2} \quad (2.149)$$

- единичен кватернион

$$\|\mathbf{q}\| = 1 \quad (2.150)$$

- инверзен единичен кватернион

$$\mathbf{q}^{-1} = \bar{\mathbf{q}} \quad (2.151)$$

Множењето на основните елементи на кватернионите е засновано врз релациите:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (2.152)$$

$$ij = k, \quad ji = -k \quad (2.153)$$

$$jk = i, \quad kj = -i \quad (2.154)$$

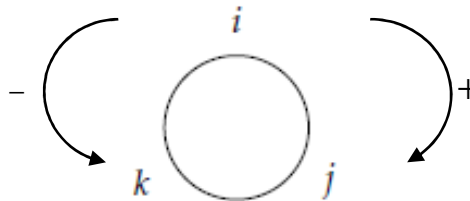
$$ki = j, \quad ik = -j \quad (2.155)$$

и е прикажано во таблицата 2.1.

Таблица 2.1. Множење на основните елементи на кватернионите

×	1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
1	1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	-1	<i>k</i>	- <i>j</i>
<i>j</i>	<i>j</i>	- <i>k</i>	-1	<i>i</i>
<i>k</i>	<i>k</i>	<i>j</i>	- <i>i</i>	-1

Знакот на производот од основните елементи на кватернионите може лесно да се запамети ако елементите се подредат како на сликата 2.32. Тогаш, ако елементите што се множат се придружени во насока на стрелката од часовникот, знакот е +, во спротивно знакот е -.



Слика 2.32. Множење на основните елементи на еден кватернион

Единичен кватернион е кватернион со единична норма. Кога еден ненулев кватернион се подели со неговата норма, се добива единичен кватернион наречен версор:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \quad (2.156)$$

Денес кватернионите главно се користат за претставување ротации и ориентации во просторот, бидејќи се покомпактни и полесно се пресметуваат од соодветните ротациски матрици, и не поседуваат сингуларитети како, на пример, Ојлеровите агли. Оттаму, тие имаат широка примена во компјутерската графика, компјутерската визија, роботиката, управувањето односно автоматиката, процесирањето сигнали, физиката, биоинформатиката, молекуларната динамика, компјутерските симулации итн.

Еден вектор (x, y, z) во тридимензионалниот простор може да се претстави со кватернион без реален дел:

$$\mathbf{q} = 0 + xi + yj + zk \quad (2.157)$$

додека неговата ротација се претставува со единичниот кватернион:

$$\mathbf{q}_R = a + bi + cj + dk$$

$$\|\mathbf{q}_R\| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \quad (2.158)$$

Новата положба \mathbf{q}_B на векторот \mathbf{q} , претставен во координатниот систем \mathbf{A} со \mathbf{q}_A , по ротацијата \mathbf{q}_R е дадена со следниот израз:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_B &= \mathbf{q}_R \mathbf{q}_A \bar{\mathbf{q}}_R = \\ &= (a + bi + cj + dk)(xi + yj + zk)(a - bi - cj - dk) = \\ &= [x(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + 2y(bc - ad) + 2z(ac + bd)]i + \\ &+ [2x(ad + bc) + y(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + 2z(cd - ab)]j + \\ &+ [2x(bd - ac) + 2y(ab + cd) + z(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)]k \end{aligned} \quad (2.159)$$

или, во матричен облик:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(ad + bc) & (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(ab + cd) & (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

Имајќи на ум дека $\|\mathbf{q}_R\| = 1$, се добиваат следните релации:

$$\begin{aligned} -c^2 - d^2 &= a^2 + b^2 - 1 \\ -b^2 - d^2 &= a^2 + c^2 - 1 \\ -b^2 - c^2 &= a^2 + d^2 - 1 \end{aligned} \tag{2.161}$$

па матрицата \mathbf{R} може да се упрости на следниот начин:

$$\mathbf{R} = 2 \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - 0.5 & bc - ad & ac + bd \\ ad + bc & a^2 + c^2 - 0.5 & cd - ab \\ bd - ac & ab + cd & a^2 + d^2 - 0.5 \end{bmatrix} \tag{2.162}$$

За дадена ротациска матрица \mathbf{R} , може да се пресмета кватернионот кој ја претставува истата ротација. За таа цел најнапред се одредува трагот на ротациската матрица \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} \text{Trag}(\mathbf{R}) &= R_{11} + R_{22} + R_{33} = 2(3a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 1.5) = \\ &= 2[3a^2 + (1 - a^2) - 1.5] = 2(2a^2 - 0.5) = 4a^2 - 1 \end{aligned} \tag{2.163}$$

Оттука, за a се добива:

$$|a| = \sqrt{\frac{\text{Trag}(\mathbf{R}) + 1}{4}} \tag{2.164}$$

Останатите елементи на кватернионот се пресметуваат на следниот начин:

$$R_{11} = 2(a^2 + b^2 - 0.5) = 2\left(\frac{\text{Trag}(\mathbf{R}) + 1}{4} + b^2 - 0.5\right) \Rightarrow$$

$$|b| = \sqrt{\frac{R_{11}}{2} + \frac{1 - \text{Trag}(\mathbf{R})}{4}} \tag{2.165}$$

$$|c| = \sqrt{\frac{R_{22}}{2} + \frac{1 - \text{Trag}(\mathbf{R})}{4}} \tag{2.166}$$

$$|d| = \sqrt{\frac{R_{33}}{2} + \frac{1 - \text{Trag}(\mathbf{R})}{4}} \tag{2.167}$$

Нека е дадена ротација ϕ околу x -оската:

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{Rot}(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.168)$$

Тогаш, имајќи на ум дека:

$$\text{Trag}(\mathbf{R}_x) = R_{11} + R_{22} + R_{33} = 1 + 2 \cos \phi \quad (2.169)$$

За елементите на кватернионот со кој е претставена оваа ротација се добива:

$$\begin{aligned} |a| &= \sqrt{\frac{\text{Trag}(\mathbf{R}_x) + 1}{4}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \phi}{2}} = \cos \frac{\phi}{2} \\ |b| &= \sqrt{\frac{R_{11} + \frac{1 - \text{Trag}(\mathbf{R}_x)}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{2}} = \frac{\sin \phi}{2} \\ |c| &= \sqrt{\frac{R_{22} + \frac{1 - \text{Trag}(\mathbf{R}_x)}{4}}{2}} = 0 \\ |d| &= \sqrt{\frac{R_{33} + \frac{1 - \text{Trag}(\mathbf{R}_x)}{4}}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (2.170)$$

Оттука:

$$q_\phi = \cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \quad (2.171)$$

На сличен начин можат да се пресметаат кватернионите кои одговараат на ротација за агол θ околу y -оската и за агол ψ околу z -оската:

$$q_\theta = \cos \frac{\theta}{2} + j \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.172)$$

$$q_\psi = \cos \frac{\psi}{2} + k \sin \frac{\psi}{2} \quad (2.173)$$

Тогаш, ротацијата $\mathbf{R}_{ZYX}(\phi, \theta, \psi)$ околу локалниот координатен систем изразена во Ојлерови агли може да се претстави со кватерниони на следниот начин:

$$\mathbf{R}_{ZYX}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{R}(a, \phi) \cdot \mathbf{R}(o, \theta) \cdot \mathbf{R}(a, \psi) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{z,\phi} \mathbf{q}_{y,\theta} \mathbf{q}_{z,\psi} &= \left(\cos \frac{\phi}{2} + k \sin \frac{\phi}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} + j \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\psi}{2} + k \sin \frac{\psi}{2} \right) = \\ &= \left(\cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + k \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + j \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} + kj \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\psi}{2} + k \sin \frac{\psi}{2} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + k \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + j \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\psi}{2} + k \sin \frac{\psi}{2} \right) = \\
 &= \left(\cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + k \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + j \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - i \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right) + \\
 &+ \left(k \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} + k^2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} + jk \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - ik \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \right) = \\
 &= \left(\cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + k \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + j \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - i \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right) + \\
 &+ \left(k \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} + i \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} + j \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \right) \Rightarrow \\
 a &= \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
 b &= -\sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} = \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \phi}{2} \\
 c &= \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \phi}{2} \\
 d &= \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \phi}{2} \tag{2.174}
 \end{aligned}$$

На сличен начин, ротацијата $\mathbf{R}_{XYZ}(\phi, \theta, \psi)$ околу референтниот координатен систем изразена во Ојлерови агли може да се претстави со кватерниони на следниот начин:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{XYZ}(\phi, \theta, \psi) &= \mathbf{R}(z, \psi) \cdot \mathbf{R}(y, \theta) \cdot \mathbf{R}(x, \phi) \Rightarrow \\
 \mathbf{q}_{z,\psi} \mathbf{q}_{y,\theta} \mathbf{q}_{x,\phi} &= \left(\cos \frac{\psi}{2} + k \sin \frac{\psi}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} + j \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \right) = \\
 &= \left(\cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + k \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + j \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} + kj \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \right) = \\
 &= \left(\cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + k \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + j \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \right) = \\
 &= \left(\cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + k \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + j \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} - i \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left(i \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} + ki \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} + ji \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} - i^2 \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \right) = \\
 &= \left(\cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + k \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + j \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} - i \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \right) + \\
 &+ \left(i \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} + j \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} - k \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \right) \Rightarrow \\
 a &= \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
 b &= -\cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \\
 c &= \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
 d &= \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \tag{2.175}
 \end{aligned}$$

Обратно, Ојлеровите агли можат да се добијат од кватернион на следниот начин:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{atan2} \left[2(ab + cd), 1 - 2(b^2 + c^2) \right] \\ \operatorname{asin} \left[2(ac - db) \right] \\ \operatorname{atan2} \left[2(ad + bc), 1 - 2(c^2 + d^2) \right] \end{bmatrix} \tag{2.176}$$

Пример 2.21. Нека се набљудува ротација на точката $(1,0,0)$ за агол од 90^0 околу z -оската. Како резултат на оваа ротација, точката $(1,0,0)$ ќе се најде во новата положба $(0,1,0)$. Соодветната ротациска матрица со која е претставена оваа трансформација е:

$$R(z, 90^0) = \begin{bmatrix} \cos 90^0 & -\sin 90^0 & 0 \\ \sin 90^0 & \cos 90^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.177}$$

односно:

$$P_{nova} = R(z, 90^0) P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.178}$$

Задачата да се реши со кватерниони.

Решение: Кватернионот со кој е претставена ротацијата (2.177) може да се пресмета од изразот (2.173):

$$q = \cos 45^\circ + k \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + k \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.179)$$

Од друга страна, точката $(1, 0, 0)$ може да се претстави со следниот кватернион:

$$q_P = 0 + i + 0j + 0k = i \quad (2.180)$$

па нејзината нова положба изразена со кватерниони се пресметува според релацијата:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_R \mathbf{q}_P \bar{\mathbf{q}}_R &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + k \frac{\sqrt{2}}{2} \right) i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - k \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} i + k i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - k \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} i \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i k \frac{\sqrt{2}}{2} - j k \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} i + \frac{1}{2} j + \frac{1}{2} j - \frac{1}{2} i \right) = j \end{aligned} \quad (2.181)$$

Тоа е точката $(0, 1, 0)$, како што можеше и да се очекува.

Трансформацијата на еден подвижен координатен систем во однос на даден референтен систем може да се претстави преку ротација за агол θ околу единичен вектор \mathbf{u} . Овој агол и единичен вектор можат да се претстават со кватернион на следниот начин:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} = (a, \mathbf{u}) &= a + bi + cj + dk = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{u} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \\ &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), u_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), u_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), u_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \end{aligned} \quad (2.182)$$

(На ова место треба да се забележи дека иста ротација ќе се оствари и со ротација за агол $2\pi - \theta$ околу оската $-\mathbf{u}$.)

Нека \mathbf{v} е вектор претставен во координати на референтниот координатен систем, а \mathbf{v}' е вектор претставен во координати од локалниот координатен систем. Тогаш важат следните релации:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}(\mathbf{q}) \mathbf{v} \quad (2.183)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}^T(\mathbf{q}) \mathbf{v}' \quad (2.184)$$

каде што трансформациската ротациска матрица \mathbf{R} изразена преку елементите на кватернионот \mathbf{q} гласи:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2bc - 2ad & 2bd + 2ac \\ 2bc + 2ad & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ 2bd - 2ac & 2cd + 2ab & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{bmatrix} \quad (2.185)$$

2.7.2.4. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА РОТАЦИЈА КАЈ АНТРОПОМОРФНА РОБОТСКА РАКА

За одредувањето на ориентацијата на една антропоморфна роботска рака ќе стане збор во делот посветен на Денавит-Хартенберговиот модел на роботските раце.

2.7.3. КИНЕМАТСКИ РАВЕНКИ НА ПОЛОЖБА НА РОБОТСКАТА РАКА

Трансформациската матрица која ја претставува конечната положба во просторот на една роботска рака е производ од соодветната матрица на позиција и матрица на ориентација, кои зависат од конфигурацијата на раката. Нека, на пример, една роботска рака се состои од Декартови и RPY-зглобови. Нејзината положба во просторот е одредена со матрицата:

$$\mathbf{T}_H = \mathbf{T}_{pr}(p_x, p_y, p_z) \cdot \mathbf{R}_{RPY}(\varphi, \vartheta, \eta) \quad (2.186)$$

Доколку конфигурацијата на роботската рака е заснована врз сферен координатен систем за позиција и Ојлеровите агли за ориентација, нејзината крајна положба ќе биде одредена со матрицата:

$$\mathbf{T}_H = \mathbf{T}_{sph}(r, \beta, \gamma) \cdot \mathbf{R}_{Euler}(\phi, \theta, \psi) \quad (2.187)$$

Во овој случај крајната позиција на роботската рака е дефинирана со сферните координати, а нејзината крајна ориентација зависи како од аглите во сферните координати, така и од Ојлеровите агли.

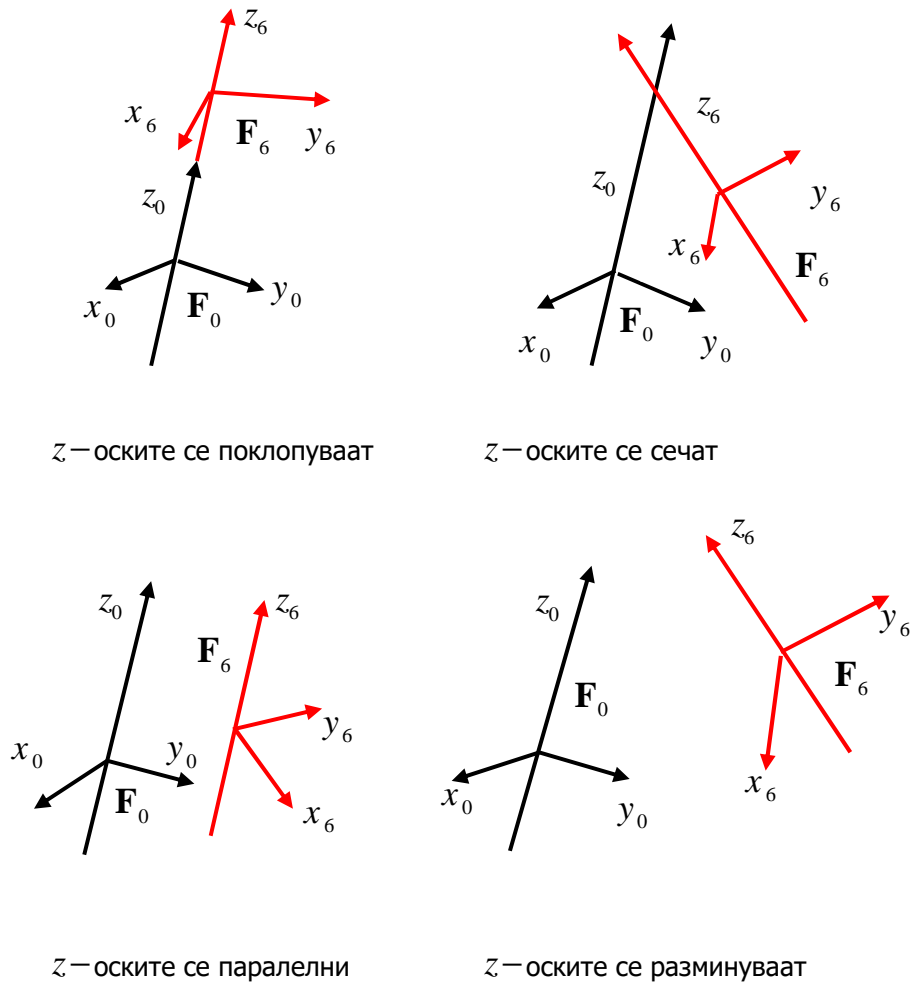
Овде не се прикажани сите можни комбинации на координати за позиција и ориентација и, следствено, не се изведени соодветните равенки на директната и инверзната кинематика, заради нивната сложеност. Секогаш кога станува збор за сложени конфигурации, препорачливо е да се користи Денавит-Хартенберговиот модел на една роботска рака.

2.8. DENAVIT-HARTENBERG МОДЕЛ НА ДИРЕКТНАТА КИНЕМАТИКА НА РОБОТСКАТА РАКА

Во 1955 година Denavit и Hartenberg објавиле труд кој подоцна станал основа за моделирање роботски манипулатори и изведување на нивните равенки на движење. Постапката на Denavit и Hartenberg е многу едноставен начин за

моделирање на зглобовите и краците на една роботска рака и може да се примени за каква и да било роботска конфигурација, без оглед на нејзината сложеност. Исто така Denavit-Hartenberg моделот може да се користи за претставување движење во кои и да било координати: правоаголни, цилиндрични, сферни, Ојлерови, RPY, како и за моделирање антропоморфни роботски манипулатори, SCARA-роботски манипулатори и секоја можна комбинација зглобови и краци. Иако претходно изложените постапки за моделирање работи се побрзи и подиректни, Denavit-Hartenberg моделот ја има дополнителната предност што го користат многу постапки за анализа на динамиката на една роботска рака. Идејата зад Denavit-Hartenberg конвенцијата е прикажана во продолжение.

Нека се дадени координатните системи F_0 и F_6 . Општо гледано, можни се четири случаи на нивна меѓусебна положба во просторот: кога z -оските на F_0 и F_6 се поклопуваат, кога се сечат, кога се паралелни и кога се разминуваат, како што е прикажано на слика 2.33. Во продолжение е разгледан последниот најопшт случај, слика 2.34, со тоа што на останатите специјални случаи ќе им биде посветено внимание кога ќе биде потребно.



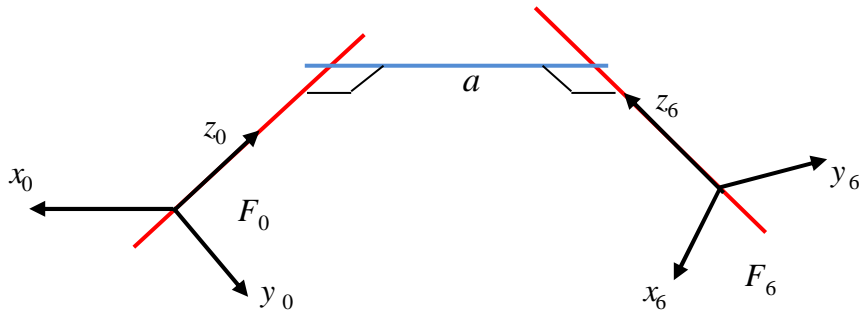
Слика 2.33. Можни положби на координатните системи F_0 и F_6 во просторот



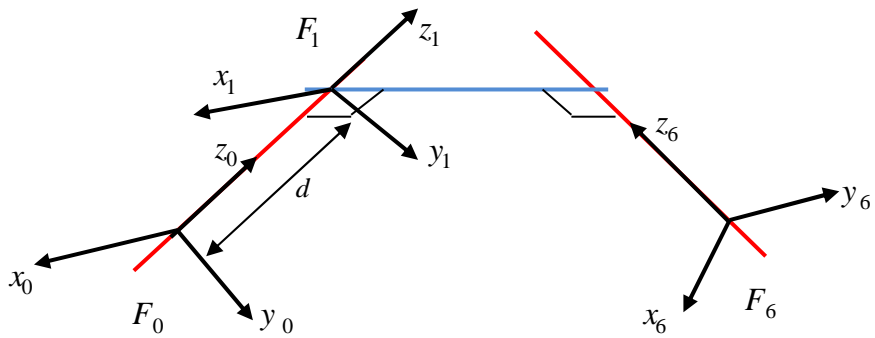
Слика 2.34. Координатни системи со разминувачки z -оски

За да се опише трансформацијата од координатниот систем F_0 во координатниот систем F_6 , потребни се 6 параметри и, следствено, 6 елементарни трансформации на координатниот систем F_0 дефинирани со овие параметри – три транслации и три ротации. Оваа задача има бесконечно многу решенија, но целта е да се најде еднозначно решение со минимален број параметри. Бидејќи z -оските на двата координатни системи се разминувачки прави, од математиката е познато дека постои нивна заедничка нормала \mathbf{n} , која го дефинира најкусото растојание помеѓу нив a , слика 2.35. Тогаш, координатниот систем F_0 ќе се поклопи со координатниот систем F_6 со следните последователни елементарни движења:

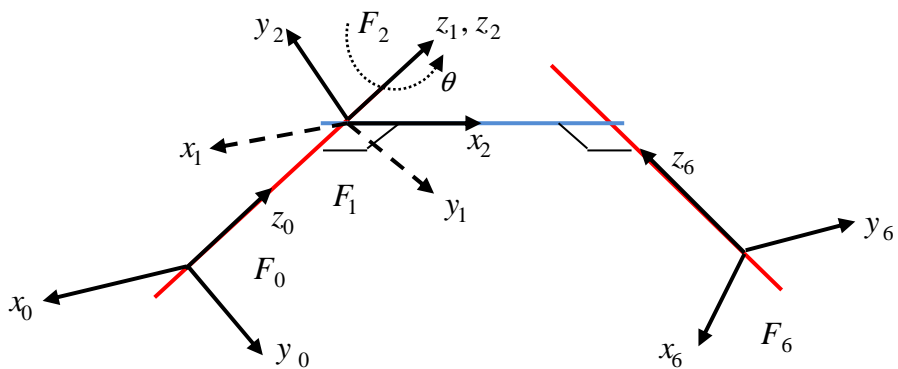
- Транслација на координатниот систем F_0 долж z_0 -оската за растојание d ; се добива координатниот систем F_1 (слика 2.36)
- Ротација на координатниот систем F_1 во позитивна насока околу z_1 -оската за агол θ додека x_1 -оската не се поклопи со нормалата \mathbf{n} ; се добива координатниот систем F_2 (слика 2.37)
- Транслација на координатниот систем F_2 долж x_2 -оската за растојание a ; се добива координатниот систем F_3 , чиј координатен почеток е на z_6 -оската (слика 2.38)
- Ротација на координатниот систем F_3 во позитивна насока околу x_3 -оската за агол α додека z_3 -оската не се поклопи со z_6 -оската; се добива координатниот систем F_4 (слика 2.39)
- Транслација на координатниот систем F_4 долж z_4 -оската за растојание b додека координатниот почеток на F_4 не се поклопи со координатниот почеток на F_6 ; се добива координатниот систем F_5 (слика 2.40)
- Ротација на координатниот систем F_5 во позитивна насока околу z_5 -оската за агол ϕ додека F_5 не се поклопи со F_6 (слика 2.41)



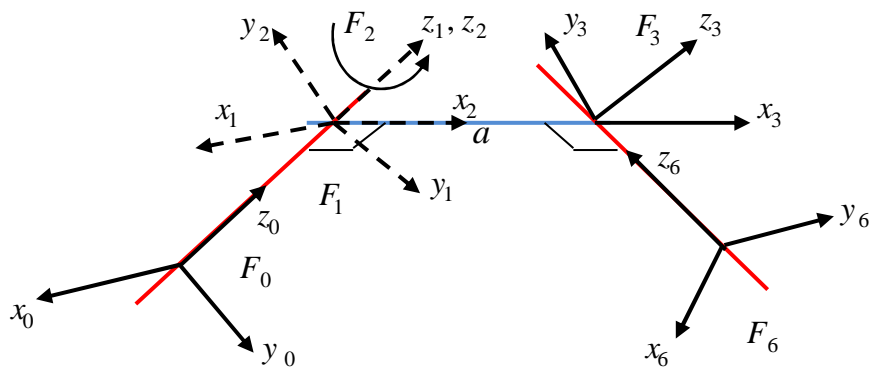
Слика 2.35. Нормала на разминувачките прави z_0 и z_6



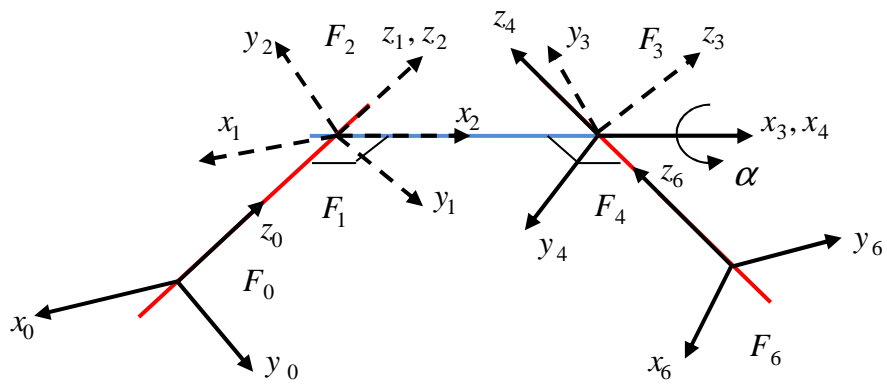
Слика 2.36. Трансформација на координатниот систем F_0 во F_1



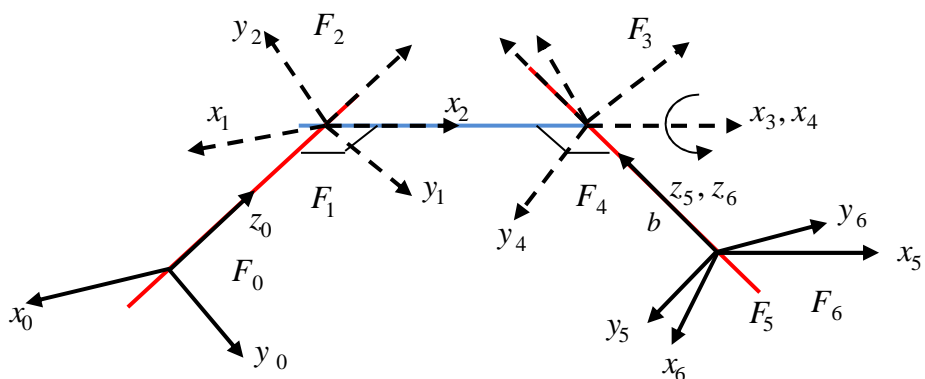
Слика 2.37. Трансформација на координатниот систем F_1 во F_2



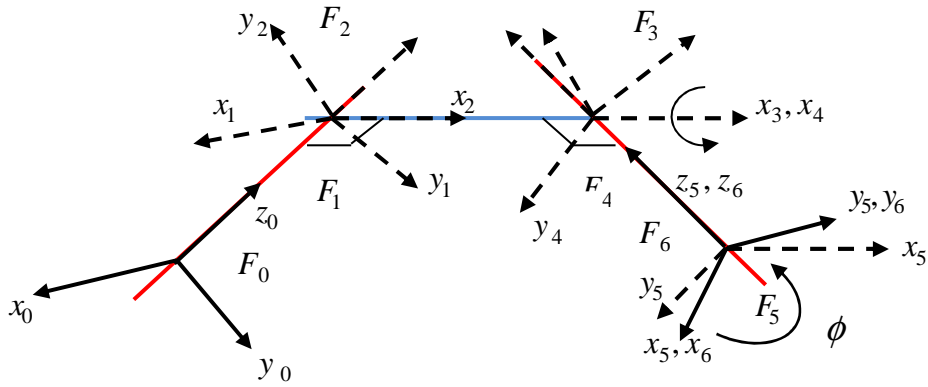
Слика 2.38. Трансформација на координатниот систем F_2 во F_3



Слика 2.39. Трансформација на координатниот систем F_3 во F_4



Слика 2.40. Трансформација на координатниот систем F_4 во F_5



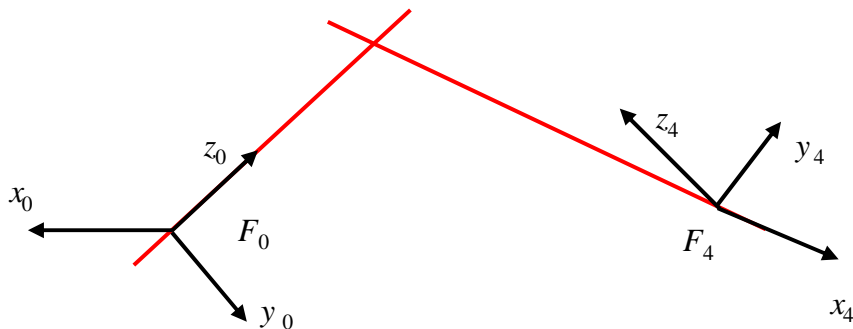
Слика 2.41. Трансформација на координатниот систем F_5 во F_6

Извршената вкупна трансформација на координатниот систем F_0 во F_6 може да се претстави со следната трансформациона матрица:

$${}^0T_6 = \mathbf{Trans}(z_0, d) \cdot \mathbf{R}(z_1, \theta) \cdot \mathbf{Trans}(x_2, a) \cdot \mathbf{R}(x_3, \alpha) \cdot \mathbf{Trans}(z_4, b) \cdot \mathbf{R}(z_5, \phi) \quad (2.188)$$

при што може да се забележи дека $z_0 = z_1$ и $x_2 = x_3$. Следствено, 6-те параметри кои ја дефинираат оваа трансформација се $d, \theta, a, \alpha, b, \phi$. Меѓутоа, во специјален случај, бројот на овие параметри може да се сведе на четири, слика 2.42, а тоа е кога:

- x_6 – оската ја сече z_0 – оската
- x_6 – оската е нормална на z_0 – оската

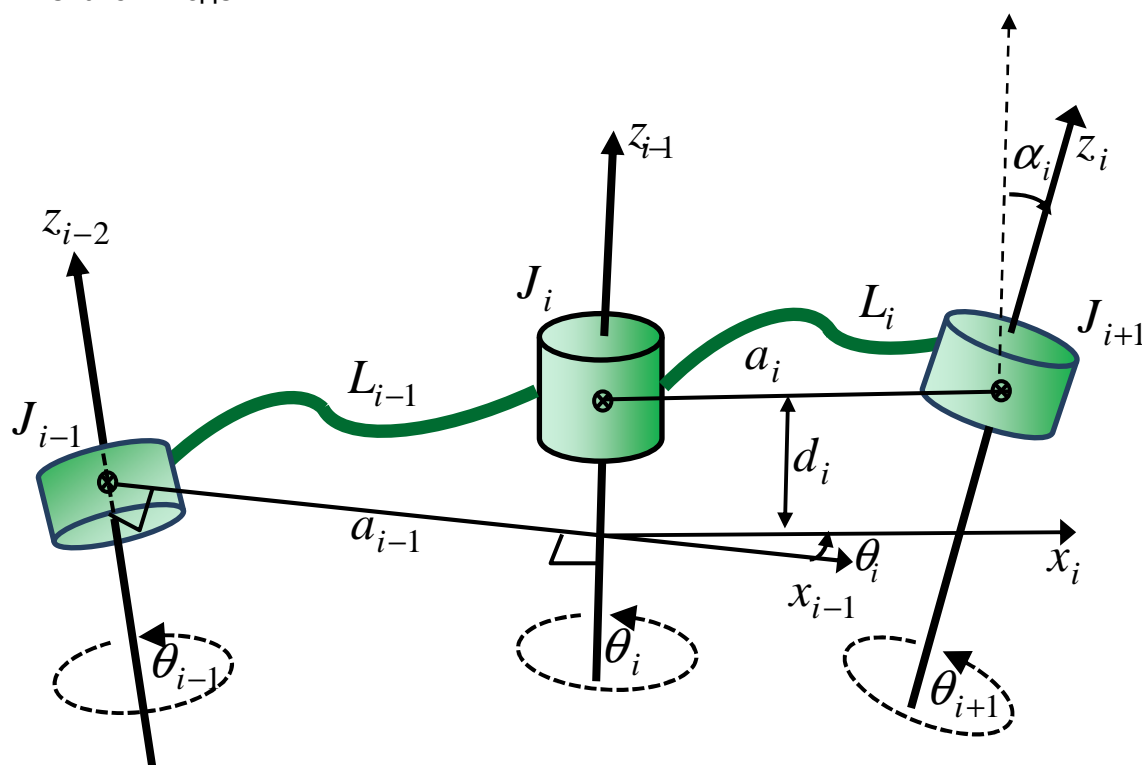


Слика 2.42. Случај кога се доволни четири параметри за опис на трансформацијата на еден координатен систем во друг

Тогаш набљудуваната трансформација може да се опише само со параметрите d, θ, a, α и тоа се т.н. **Denavit–Hartenberg параметри**. Во продолжение е прикажана идејата зад Denavit–Hartenberg конвенцијата за изведување на

кинематскиот модел на една роботска рака со помош на Denavit – Hartenberg параметрите. За таа цел се набљудува произволна роботска рака која се состои од низа зглобови и краци. Зглобовите можат да бидат призматични (транслациски) или ротациски, можат да бидат произволно распоредени и можат да се наоѓаат во произволна рамнина. Краците исто така можат да имаат произволна должина, да бидат завртени или превиткани и да се наоѓаат во произволна рамнина. Со други зборови, роботската рака што се моделира се состои од произволен број зглобови и краци со произволен облик. Дел од таква роботска рака е прикажан на слика 2.43. Иако прикажаните зглобови и краци не наликуваат на реалните зглобови и краци на една роботска рака, тие се многу општи и лесно можат да претставуваат зглобови и краци на некој реален роботски манипулатор.

На слика 2.43 се прикажани три последователни зглоба и два крака. Иако реалните работи по правило имаат зглобови само со еден степен слобода на движење, прикажаните зглобови на сликата можат да имаат еден или два степени слобода на движење. За да се моделира движењето на зглобовите од слика 2.43, кон секој зглоб се придружува соодветен координатен систем. Поконкретно, се придружува z -оската и x -оската; y -оската нема потреба посебно да се одредува, затоа што таа секогаш е нормална на останатите две оски, а покрај тоа Denavit-Hartenberg моделот никогаш не ја користи оваа оска. Овие координатни системи се поставуваат така што ќе се минимизира бројот параметри на составуваниот кинематски модел.



Слика 2.43. Denavit-Hartenberg модел на една роботска рака

Нека првиот зглоб на слика 2.43 е означен со J_{i-1} , вториот со J_i и третиот со J_{i+1} . Пред и по овие зглобови може да има и други зглобови. Краците кои ги поврзуваат зглобовите исто така се означени соодветно: со L_{i-1} е означен кракот

помеѓу зглобот J_{i-1} и зглобот J_i , а со L_i е означен кракот помеѓу зглобот J_i и зглобот J_{i+1} . Придружувањето на локалните координатни системи кон овие зглобови се врши на следниот начин:

- Сите зглобови, без исклучок, се претставени со z -оската. Ако зглобот е ротациски, z -оската се поставува во правец на ротацијата според правилото на десната рака, а доколку зглобот е трансляциски, z -оската се поставува во правец на трансляциското движење. Со z_{i-2} е означена z -оската придружена кон зглобот J_{i-1} , со z_{i-1} е означена z -оската придружена кон зглобот J_i , а со z_i е означена z -оската придружена кон зглобот J_{i+1} . На овој начин се придружуваат z -оските и кон сите останати зглобови во една роботска конфигурација. Доколку зглобот е ротациски, негова променлива ќе биде аголот на завртување θ околу неговата z -оска, а доколку зглобот е трансляциски, негова променлива ќе биде должината на кракот долж z -оската означена со d .
- Во општ случај оските на зглобовите не мора да бидат ниту паралелни, ниту да се сечат. Како последица, нивните z -оски во општ случај се разминувачки прави. Од геометријата е познато дека за две прави што се разминуваат, секогаш постои права што е нормална на нив и го претставува најкусото растојание меѓу двете разминувачки прави. Оваа нормала се нарекува заедничка нормала на разминувачките прави и x -оската на еден зглоб секогаш се поставува во правец на заедничката нормала на неговата z -оска и z -оската на претходниот зглоб. Следствено, ако a_{i-1} е заедничката нормала помеѓу z_{i-2} и z_{i-1} -оската, правецот на x_{i-1} -оската ќе биде долж a_{i-1} . На сличен начин, ако a_i е заедничката нормала помеѓу z_{i-1} и z_i -оската, правецот на x_i -оската ќе биде долж a_i .
- Ако две соседни z -оски се паралелни, тие имаат бесконечен број заеднички нормали. Во таков случај се одбира заедничката нормала која е колинеарна со заедничката нормала на претходниот зглоб.
- Доколку две соседни z -оски се сечат, тие немаат заедничка нормала. Тогаш x -оската се поставува во правец на нормалата на рамнината што ја формираат двете z -оски.
- Бидејќи во општ случај заедничките нормали на две соседни z -оски не мора да се сечат или да бидат колинеарни, координатните почетоци на два соседни локални координатни системи исто така се наоѓаат во различни точки. Координатниот почеток на локалниот координатен систем придружен со зглобот J_{i+1} се поставува во пресекот на оската z_i со заедничката нормала a_i помеѓу оските z_{i-1} и z_i . Ако не постои заедничка нормала ($a_i = 0$), координатниот почеток на локалниот координатен систем придружен со зглобот J_{i+1} се поставува на оската z_{i-1} од претходниот зглоб. Притоа, ако координатните оски z_{i-1} и z_i се сечат, координатниот почеток се поставува во тој пресек; ако координатните оски z_{i-1} и z_i се поклопуваат, тогаш и нивните координатни почетоци ќе се поклопуваат.

На слика 2.43 со θ е означена ротацијата околу z -оската, со d растојанието помеѓу две соседни заеднички нормали, со a должината на секоја заедничка нормала (исто така наречена офсет на зглобот) и со α е означен аголот помеѓу две соседни z -оски (наречен уште завртување на зглобот). По правило само θ и d се сметаат за променливи на зглобовите и тоа на следниот начин: ако се работи за транслациски зглоб, негова променлива е d , додека θ е константа; ако се работи за ротациски зглоб, негова променлива е θ , додека d е константа.

Следниот чекор се состои во одредување на потребните движења со кои еден локален координатен систем се трансформира во следниот. Комбинацијата на сите трансформации од основата на роботската рака до првиот зглоб, од првиот зглоб до вториот итн. ја дава комплетната трансформацииска матрица на раката. Нека се набљудува локалниот координатен систем $x_{i-1} - z_{i-1}$. Тој се трансформира во следниот координатен систем $x_i - z_i$ со четири стандардни движења, прикажани на слика 2.44:

- Ротација околу z_{i-1} -оската за агол θ_i , слика 2.44 а) и слика 2.44 б). Бидејќи a_{i-1} и a_i се нормални на z_{i-1} , со ротацијата околу z_{i-1} за агол θ_i тие ќе станат паралелни. Следствено, и x_{i-1} и x_i -оските, кои се во правец на овие заеднички нормали, ќе станат паралелни.
- Транслација долж z_{i-1} -оската за растојание d_i , слика 2.44 б) и слика 2.44 в). Бидејќи веќе x_{i-1} и x_i -оските се паралелни помеѓу себе и нормални на z_{i-1} -оската, поместувањето долж z_{i-1} -оската за растојание d_i ќе ги направи колинеарни (тие ќе се поклопат помеѓу себе).
- Транслација долж x_{i-1} -оската за растојание a_i , слика 2.44 в) и слика 2.44 г). По ова движење, координатните почетоци на двата соседни локални координатни системи $x_{i-1} - z_{i-1}$ и $x_i - z_i$ ќе се поклопат.
- Ротација на z_{i-1} -оската околу x_i -оската за агол α_i , слика 2.44 д) и слика 2.44 ё). Со ова движење z_{i-1} и z_i -оските се доведуваат до поклопување. Како резултат, координатните системи $x_{i-1} - z_{i-1}$ и $x_i - z_i$ се идентични, што значи дека координатниот систем $x_{i-1} - z_{i-1}$ е трансформиран во координатниот систем $x_i - z_i$.

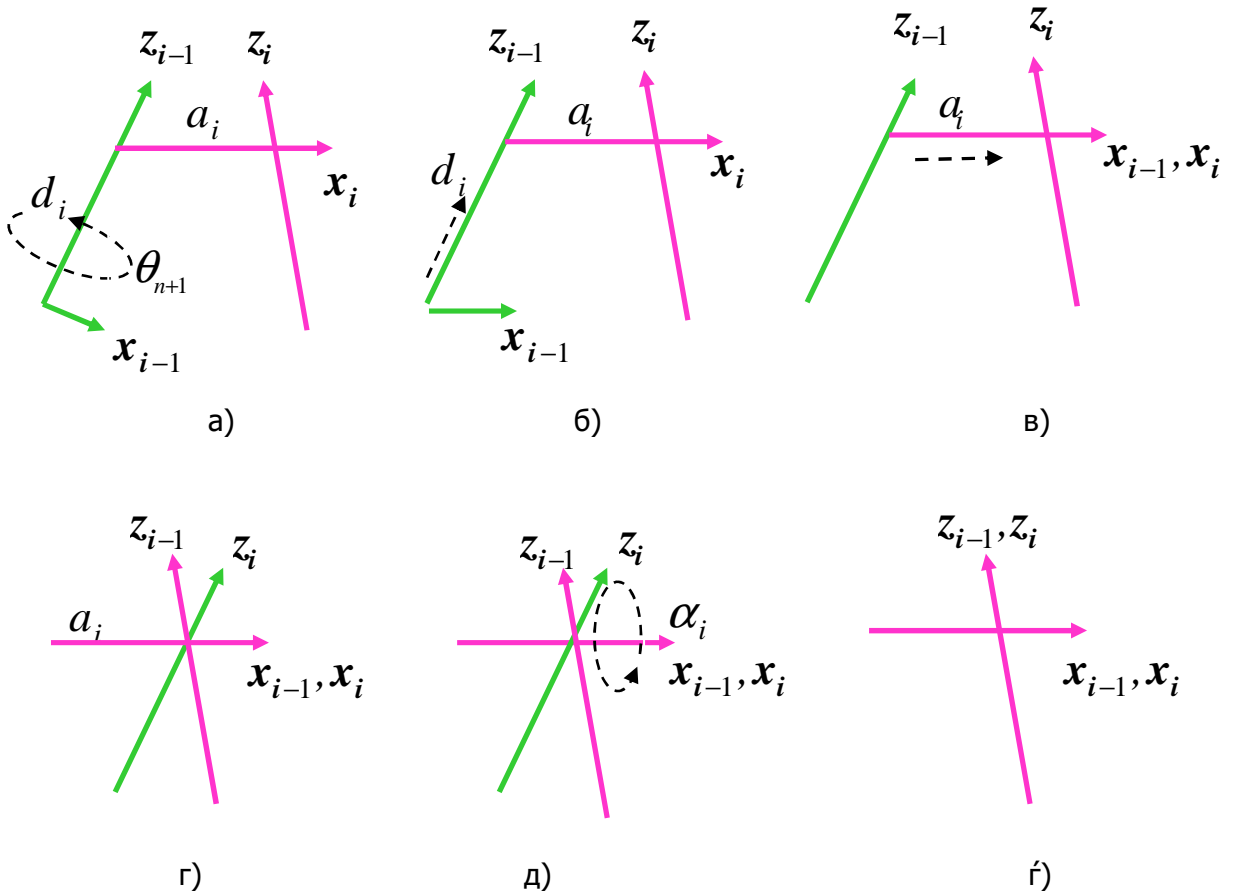
Со повторување на изложената постапка, се врши трансформација помеѓу секои два соседни координатни системи врзани за зглобовите на една произволна роботска конфигурација. Така, ако се појде од референтниот координатен систем и се одреди трансформацијата до основата на раката, па трансформацијата до првиот зглоб од раката итн. сè до последниот зглоб и извршниот елемент, ќе се одреди вкупното движење на набљудуваната роботска конфигурација.

Матрицата A_i со која е опишана трансформацијата од еден во друг соседен локален координатен систем се добива како производ од трансформацииските матрици кои ги претставуваат погоренаведените елементарни движења:

- ротација околу z_{i-1} – оската за агол θ_i
- транслација долж z_{i-1} – оската за растојание d_i
- транслација долж x_{i-1} – оската за растојание a_i
- ротација на z_{i-1} – оската околу x_i – оската за агол α_i

и е дадена со изразот:

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}\mathbf{T}_i &= \mathbf{A}_i = \mathbf{R}(z, \theta_i) \cdot \mathbf{Trans}(0, 0, d_i) \cdot \mathbf{Trans}(a_i, 0, 0) \cdot \mathbf{R}(x, \alpha_i) = \\
 &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.189}
 \end{aligned}$$



Слика 2.44. Denavit-Hartenberg модел на произволна роботска конфигурација

Матрицата \mathbf{A}_i уште се нарекува **каноничка трансформација**. Бидејќи сите движења се во однос на локален координатен систем, матриците во (2.189) се множат оддесно.

Вкупната трансформација помеѓу основата на роботската рака и нејзиниот последен зглоб е претставена со:

$${}^R\mathbf{T}_H = {}^R\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 \cdots {}^{n-1}\mathbf{T}_n = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{A}_n \quad (2.190)$$

каде што n е редниот број на соодветниот зглоб. За робот со 6 степени слобода на движење, ќе има шест \mathbf{A}_i матрици. Бидејќи секоја матрица \mathbf{A}_i е функција од променливата на i – тиот зглоб која може да се означи со q_i , може да се запише:

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(q_i) \quad (2.191)$$

каде што $q_i = d_i$ за транслациски зглоб и $q_i = \theta_i$ за ротациски зглоб. Тогаш равенката (2.190) добива облик:

$${}^R\mathbf{T}_H = {}^R\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 \cdots {}^{n-1}\mathbf{T}_n = \mathbf{A}_1(q_1) \mathbf{A}_2(q_2) \mathbf{A}_3(q_3) \cdots \mathbf{A}_n(q_n) \quad (2.192)$$

и таа ја опишува положбата (позицијата и ориентацијата) на последниот зглоб од роботската рака во однос на основата, со што претставува нејзин **D-H кинематски модел**. Ако сите променливи на ротациските зглобови се нулеви, $\theta_i = 0$, а сите променливи на транслациските зглобови се поставени на својата минимална вредност, $d_j = \min(d_j)$ при $\theta_j = 0$, се добива т.н. **референтна конфигурација** за набљудуваната роботска рака. Тука треба да се истакне дека референтната конфигурација не мора секогаш да биде физички остварлива од страна на роботската рака. Имено, кај транслациските зглобови вредноста θ_j не мора да биде нулева, што зависи од структурата на раката.

Кај референтната конфигурација, матриците \mathbf{A}_i стануваат:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.193)$$

за ротациски зглобови, односно:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & \min(d_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.194)$$

за транслациски зглобови. Ротацискиот дел од овие матрици укажува на ротација околу x_i – оските, што значи дека во референтната конфигурација сите x_i – оски

имаат ист правец, односно x_i – оските се изложени само на транслации, додека нивната ориентација останува непроменета.

Denavit–Hartenberg конвенцијата не ги дефинира еднозначно координатните системи придружени со зглобовите. Во некои случаи тие можат да се доделат и произволно до одреден степен како, на пример:

- Кога две соседни z –оски се паралелни, бидејќи тогаш нивната заедничка нормала не е еднозначно определена
- Кога две соседни z –оски се сечат, бидејќи тогаш нивната заедничка нормала е 0 , па x –оската не е дефинирана
- Кај координатниот систем $O_0(x_0, y_0, z_0)$, бидејќи само правецот на z_0 – оската е еднозначно определен, додека положбата на координатниот почеток O_0 и правецот на x_0 – оската не се зададени
- Кај координатниот систем $O_n(x_n, y_n, z_n)$ придружен со крајниот зглоб од роботската рака, бидејќи не постои следен зглоб, не можат да се дефинираат неговите елементи освен правецот на x –оската, која мора да биде нормална на z –оската од претходниот зглоб
- Кај призматичните зглобови, бидејќи е дефинирана само z –оската

Во сите тие случаи, координатните системи се одбираат така да се упрости што е можно повеќе кинематскиот модел на роботската рака. Еден начин е координатните почетоци на координатните системи придружени со соседни зглобови да се постават во иста точка, нивните координатни оски да се постават во ист правец и сл.

Практичната примена на Denavit–Hartenberg конвенцијата при составувањето на кинематскиот модел на една роботска рака се состои од следните чекори:

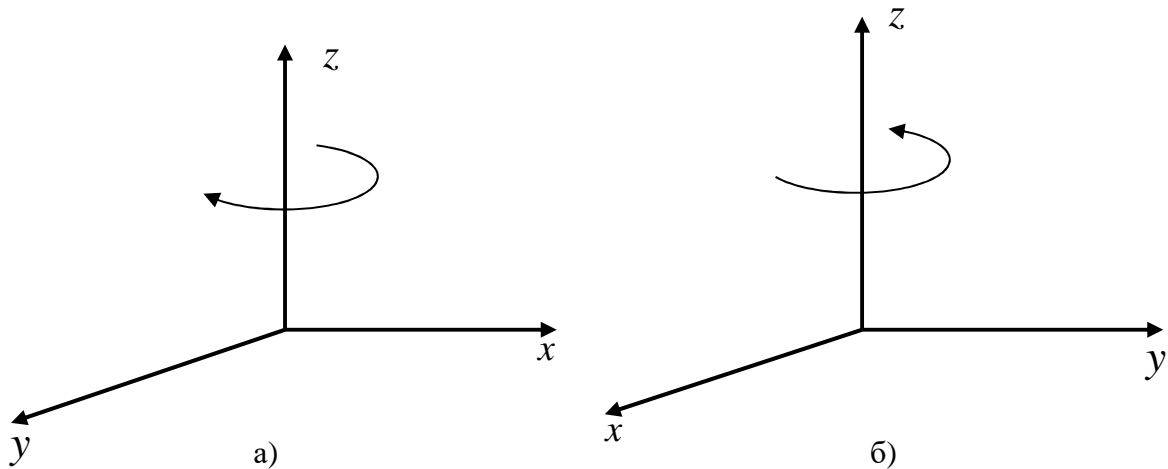
- Сите зглобови се означуваат од 1 до n , каде што n е нивниот број
- Сите краци се означуваат од 0 до n
- Краците L_{i-1} и L_i се соседни и меѓусебно поврзани со зглобот J_i , чија променлива е q_i
- Дефинирање на z_i – оските ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) во согласност со движењето на зглобовите (транслагиско или ротациско); z_0 е оска придружена со зглобот 1, z_1 е оска придружена со зглобот 2 итн.
- Дефинирање на координатниот систем $O_0(x_0, y_0, z_0)$, чиј координатен почеток O_0 се поставува произволно на z_0 – оската, а координатните оски x_0 и y_0 се одбираат да прават десен координатен систем (слика 2.45).
- Дефинирање на координатните системи за $i = 1, 2, \dots, n-1$, при што се можни три случаи: кога z –оските на соседните зглобови се разминуваат, кога се сечат и кога се поклопуваат или се паралелни.

- Ако z -оските на соседните зглобови J_i и J_{i+1} имаат заедничка нормала (се разминуваат), координатниот почеток O_i на координатниот систем $O_i(x_i, y_i, z_i)$ придружен со зглобот J_{i+1} се поставува во пресекот на z_{i-1} -оската со заедничката нормала на оските z_{i-1} и z_i .
- Ако z -оските на соседните зглобови J_i и J_{i+1} немаат заедничка нормала (се сечат), координатниот почеток O_i на координатниот систем $O_i(x_i, y_i, z_i)$ се поставува во таа пресечна точка.
- Ако z -оските на соседните зглобови J_i и J_{i+1} се поклопуваат или се паралелни, а зглобот J_i е ротациски, координатниот почеток O_i се поставува така што $d_i = 0$, додека за транслациски зглоб O_i се поставува на $(d_i)_{\max}$.
- Дефинирање на x_i -оските долж заедничката нормала помеѓу z_{i-1} и z_i , доколку истата постои, со позитивна насока од зглобот J_i кон J_{i+1} , или во правец на заедничката нормала на претходниот зглоб, ако оските z_{i-1} и z_i се паралелни. Конечно, ако оските z_{i-1} и z_i се сечат, x_i -оската се поставува во правец на нормалата на рамнината што ја формираат двете z -оски.
- Соодветно поставување на y_i -оските (десен правоаголен координатен систем).
- Координатниот почеток O_n на последниот координатен систем $O_n(x_n, y_n, z_n)$ се поставува да се поклопува со координатниот почеток O_{n-1} .
- Координатната оска x_n се поставува нормално на координатната оска z_{n-1} .
- Координатната оска z_n се поставува паралелно со координатната оска z_{n-1} , ако зглобот n е ротациски, или се одбира произволно ако зглобот n е транслациски.
- Оската y_n се поставува соодветно за десен правоаголен координатен систем.
- Откако еднаш се дефинираат сите координатни системи $O_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), се определуваат D-H параметрите $\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$
- Се пресметуваат хомогените трансформационски матрици A_i
- Се одредува кинематскиот модел на набљудуваната роботска рака

$${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 \cdots {}^{n-1}\mathbf{T}_n = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{A}_n \quad (2.195)$$

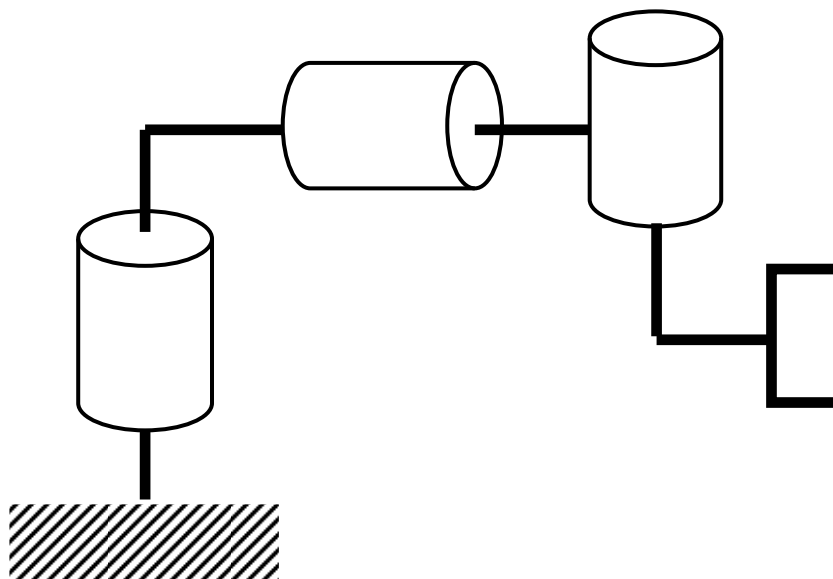
Треба да се истакне дека положбата на извршниот елемент е произволна, поради што координатниот систем $O_e(x_e, y_e, z_e)$ придружен со него во општ случај се

разликува од координатниот систем $O_n(x_n, y_n, z_n)$ придружен со крајот од раката, па тогаш е потребно да се дефинира дополнителна хомогена трансформациона матрица, која ќе ја земе предвид таа разлика.



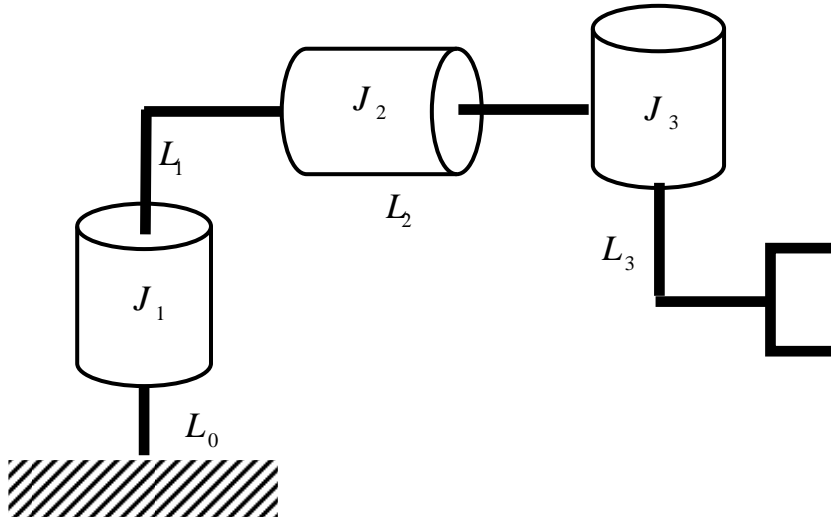
Слика 2.45. а) лев и б) десен Декартов координатен систем

Пример 2.22. Со помош на D–H конвенцијата, да се состави кинематски модел на роботската рака со три степени слобода на движење од сликата 2.46.

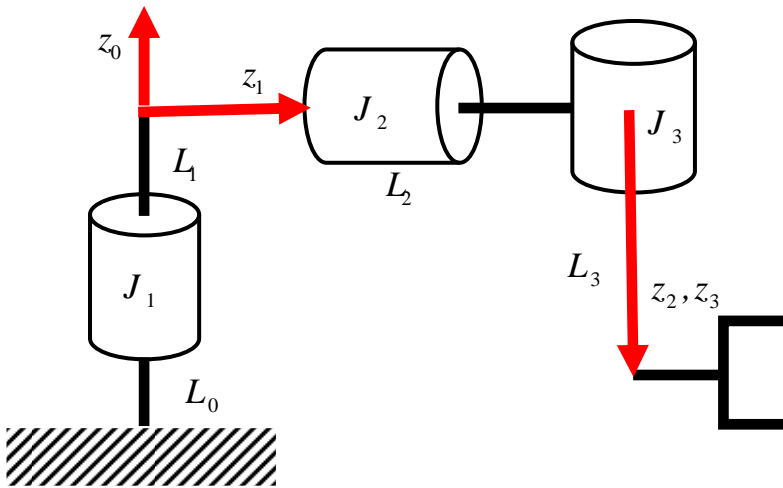


Слика 2.46. RRR-роботска рака од примерот 2.22

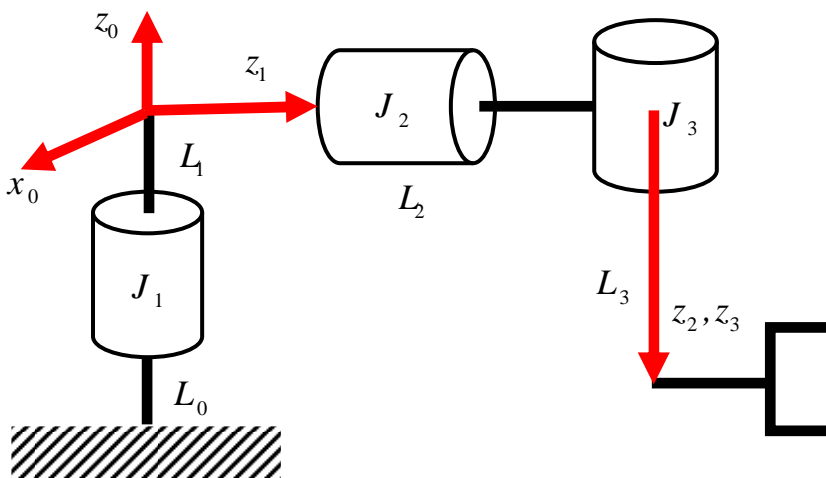
Решение: Во согласност со изложената процедура, трите зглоба на зададената роботска рака се означени со J_1 , J_2 и J_3 , додека L_0 , L_1 , L_2 и L_3 се нејзините краци, како што е прикажано на слика 2.47.



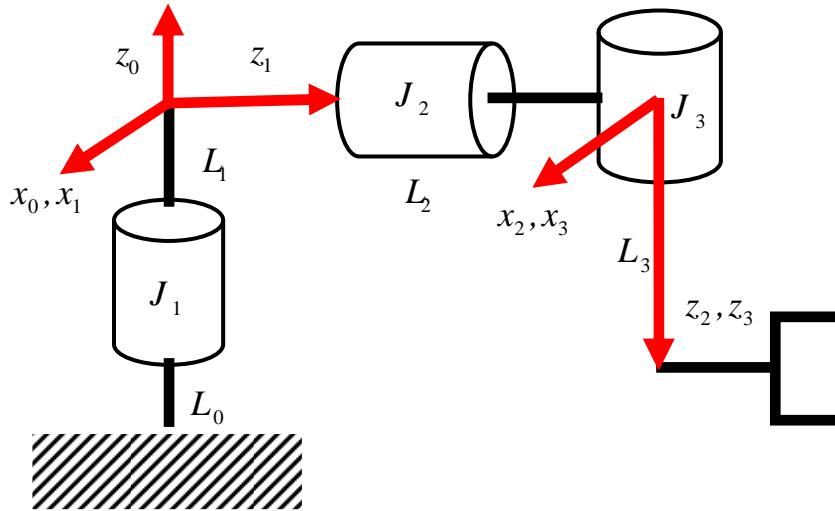
Слика 2.47. Означување на зглобовите и краците на RRR-роботската рака од сликата 2.46



Слика 2.48. Придружување на z -оските кон набљудуваната роботска рака

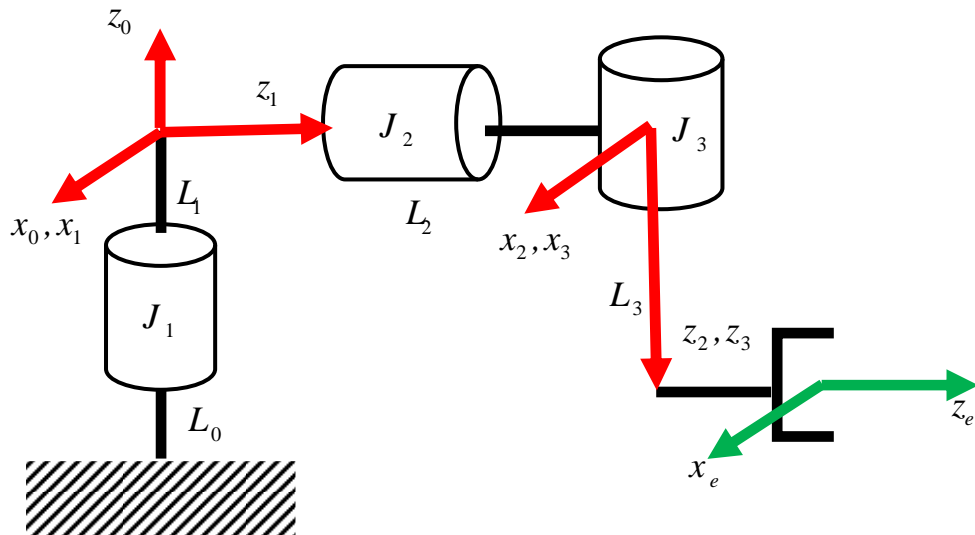


Слика 2.49. Избор на координатниот систем $O_0(x_0, y_0, z_0)$



Слика 2.50. Сите координатни системи на набљудуваната роботска рака од сликата 2.46

На следната слика 2.48 се прикажани координатните оски z_i ($i=0,1,2,3$) кои се придружуваат кон зглобовите J_1 , J_2 и J_3 и крајот на набљудуваната роботска рака, додека на слика 2.49 е прикажан изборот на координатниот систем $O_0(x_0, y_0, z_0)$. Бидејќи координатен почеток O_0 се поставува произволно на z_0 – оската, а оските z_0 и z_1 се сечат, во овој случај тој е поставен токму во пресекот на z_0 и z_1 . Координатните оски x_0 и y_0 се одбираат исто така произволно во согласност со дефиницијата на десен координатен систем. Доделувањето на останатите координатни системи е прикажано на слика 2.50.



Слика 2.51. Дефинирање на координатниот систем на извршниот елемент (не е задолжително)

Бараните D–H параметри се дадени во таблицата 2.2, каде со * се означени променливите на зглобовите. Сите други параметри во таблицата се константи.

Таблица 2.2. D–H параметри на роботската рака од примерот 2.22

Крак	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	0	0	-90°
2	θ_2^*	0	L_2	-90°
3	θ_3^*	0	0	0

Врз основа на параметрите од таблицата 2.2 се пресметуваат трансформациските матрици:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & L_2 C_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & L_2 S_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.196}
 \end{aligned}$$

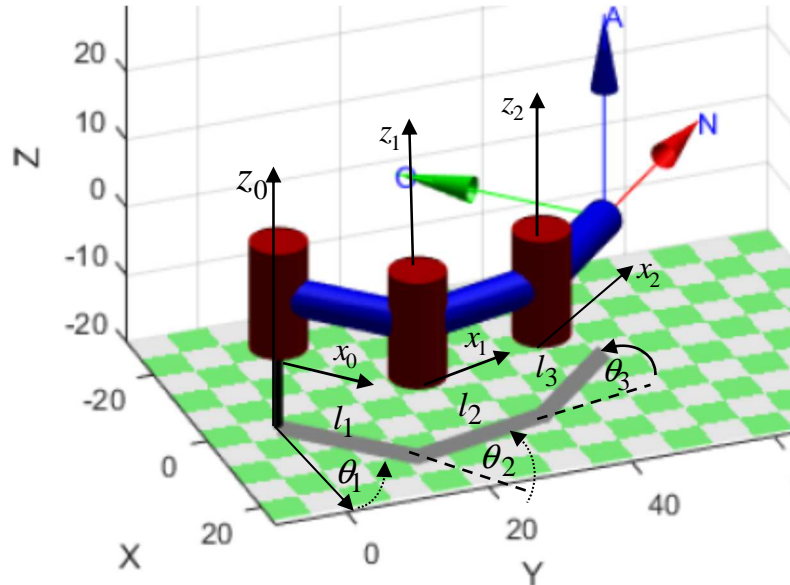
па за бараниот D–H модел се добива:

$${}^0\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3 & -C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3 & -C_1 S_2 & L_2 C_1 C_2 \\ S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3 & -S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3 & -S_1 S_2 & L_2 S_1 C_2 \\ -S_2 C_3 & S_2 S_3 & -C_2 & -L_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.197}$$

Пример 2.23. Да се определат D–H параметрите и соодветниот модел за роботската рака од слика 2.52.

Решение: Кај сферната роботска рака од слика 2.52 сите z –оски се паралелни, па наједноставен начин да се постават соодветните x –оски е во правец на соодветните краци од роботската рака. Притоа изборот на x_0 –оската е произволен. Со ваков избор на координатните оски придружени со зглобовите од

набљудуваната роботска рака се постига сите растојанија d_i да бидат нулеви, а аглие помеѓу соодветните x -оски се претставени со самите променливи на зглобовите. Оттука, бараните D–H параметри се како во таблицата 2.3, каде со * се означени променливите на зглобовите. Сите други параметри во таблицата се константи.



Слика 2.52. Илустрација кон примерот 2.23 *

Таблица 2.3. D–H параметри на роботската рака од сликата 2.52

Крак	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	0	l_1	0
2	θ_2^*	0	l_2	0
3	θ_3^*	0	l_3	0

Врз основа на параметрите од таблицата 2.3 се пресметуваат трансформациските матрици:

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

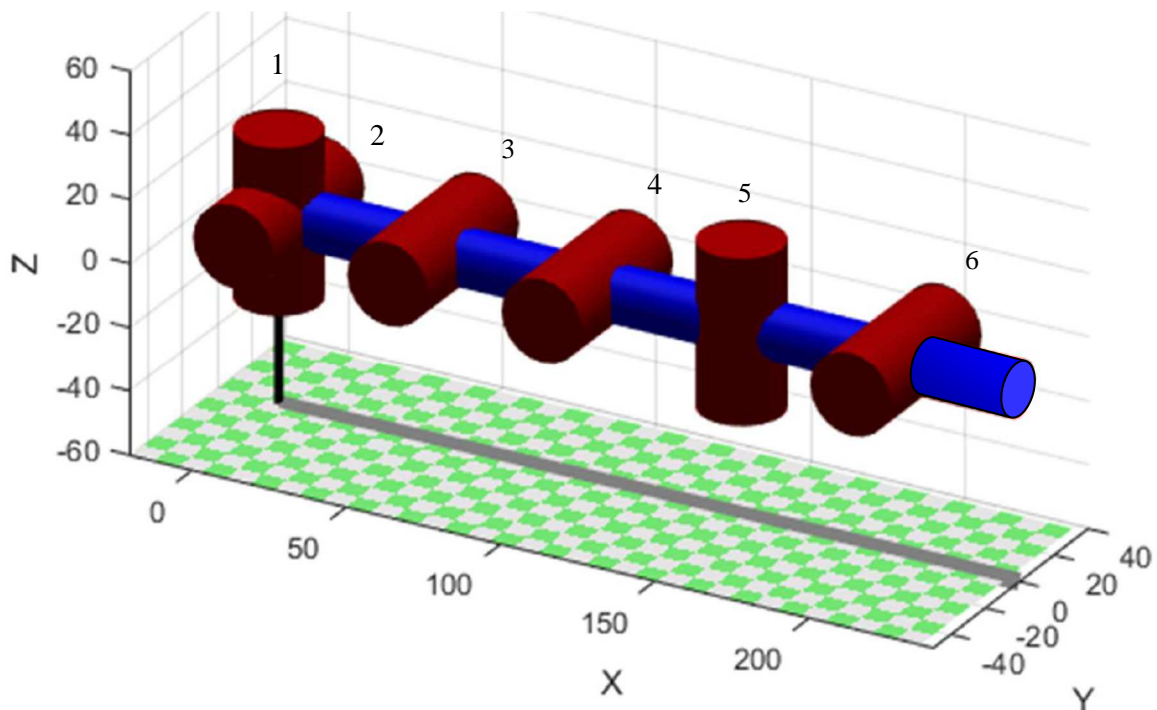
$$A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & l_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.198)$$

па за бараниот D–H модел се добива:

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & l_1 S_1 + l_2 S_{12} + l_3 S_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.199)$$

Матрицата 0T_3 ја опишува директната кинематика на набљудуваната роботска рака од слика 2.52.

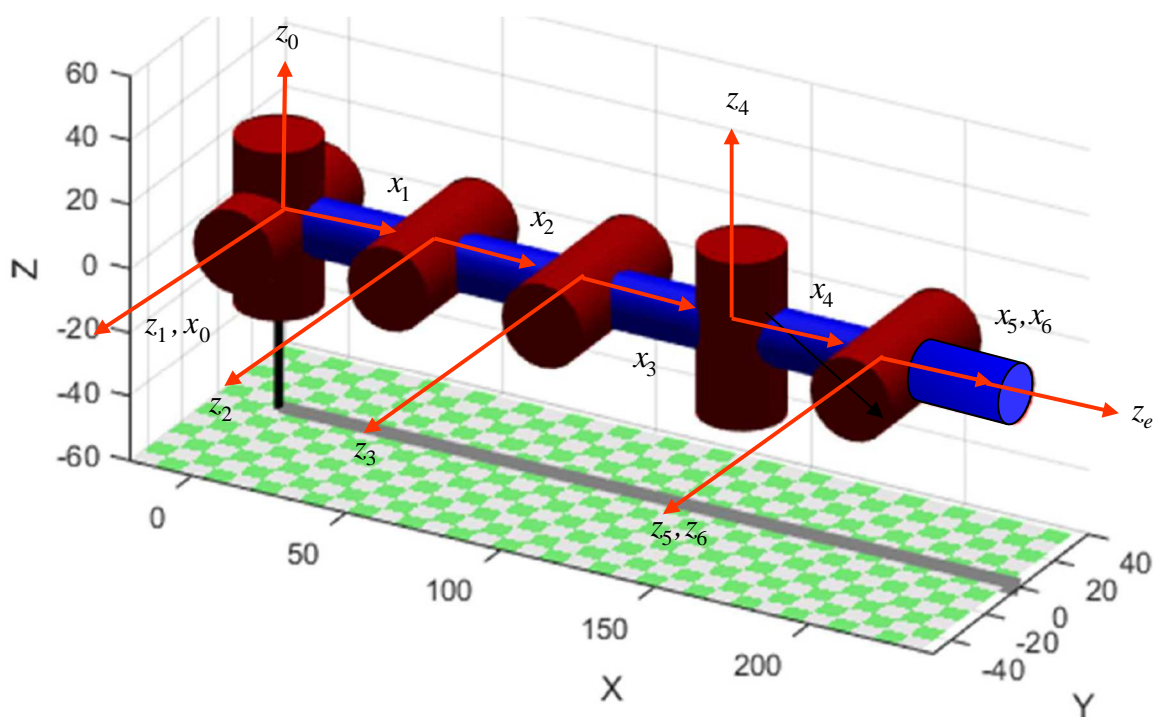
Пример 2.24. Дадена е роботската рака од сликата 2.53. Да се состави соодветен Denavit-Hartenberg модел на оваа роботска рака, така што кон зглобовите од раката ќе се придружат соодветни координатни системи и ќе се определат параметрите на моделот.



Слика 2.53. Роботска рака со 6 степени слобода на движење *

Решение: Зададената роботска рака има 6 степени слобода на движење и сите нејзини зглобови се ротациски. За поголема едноставност на пресметките, може да се претпостави дека зглобовите 2, 3 и 4 се наоѓаат во иста рамнина. Следствено, соодветните d_i вредности ќе бидат еднакви на нула. Кон секој зглоб се

придружува соодветен координатен систем, односно се придружуваат z и x -оските, во согласност со веќе наведените правила. Движењето на првиот зглоб се врши околу $x_0 - z_0$ оските. Заради поголема удобност, x_0 - оската е одбрана во правец на x -оската на референтниот координатен систем. Во продолжение се одредува z_1 -оската. Бидејќи оските z_0 и z_1 се сечат, оската x_1 ќе биде нормална на нив. Оската x_2 е во правец на заедничката нормала помеѓу оските z_1 и z_2 , оската x_3 е во правец на заедничката нормала помеѓу оските z_2 и z_3 , а оската x_4 е во правец на заедничката нормала помеѓу оските z_3 и z_4 . Конечно, оските z_5 и z_6 се паралелни и колинеарни, при што z_5 го претставува движењето на последниот зглоб 6, додека z_6 го претставува координатниот систем придружен со крајот од роботската рака. Овој координатен систем овозможува трансформација на координатниот систем $x_5 - z_5$. Треба да се истакне дека координатниот систем $x_6 - z_6$ не се совпаѓа со координатниот систем придружен со извршниот елемент $x_e - z_e$, бидејќи во конкретниот случај оската z_e се поклопува со оската x_6 , а не со оската z_6 . Оттука, под претпоставка дека координатните почетоци на двата координатни системи се поклопуваат, потребно е добиената трансформациона матрица 0T_6 на крајот да се помножи со константната матрица ${}^6T_e = \mathbf{R}(y, 90^\circ)$. Координатните системи придружени со зглобовите на раката од примерот 2.24 се прикажани на слика 2.54.



Слика 2.54. Координатни системи придружени со зглобовите на едноставна ротациона роботска рака со 6 степени слобода на движење *

Првиот и последниот координатен систем на слика 2.54 ја одредуваат вкупната трансформација на набљудуваната роботска рака. Координатните системи помеѓу првиот и последниот координатен систем можат да се придружат и на поинаков начин, меѓутоа сè додека првиот и последниот координатен систем останат непроменети, вкупната трансформација на раката ќе остане иста.

За поедноставно пресметување на A матриците, параметрите на Denavit-Hartenberg моделот се сместуваат во таблицата 2.4. Таблицата се пополнува врз основа на дефинираните координатни системи придружени со зглобовите од роботската рака. Така, поаѓајќи од координатниот систем $x_0 - z_0$, со ротација за агол θ_1 околу оската z_0 , оската x_0 се поклопува со оската x_1 , што ги прави непотребни транслациите долж z_1 и x_1 . Конечно, со ротација за агол α_1 околу x_1 -оската, се поклопуваат оските z_0 и z_1 . Оските x_1 и x_2 се доведуваат до поклопување со ротација за агол θ_2 околу оската z_1 , а координатните почетоци на двата координатни системи се доведуваат до поклопување со транслација долж x_1 -оската за растојание a_2 . Бидејќи z -оските на двата координатни системи се паралелни, нема потреба од ротација околу x_2 -оската. На сличен начин се одредуваат и останатите параметри на Denavit-Hartenberg моделот на раката од сликата 2.53 односно сликата 2.54. За поголема едноставност на пресметките усвоено е $a_5 = 0$.

Таблица 2.4. Параметри на Denavit-Hartenberg моделот на роботската рака од слика 2.54

#	θ	d	a	α
1	θ_1	0	0	90°
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	0	a_3	0
4	θ_4	0	a_4	-90°
5	θ_5	0	a_5	90°
6	θ_6	0	0	0

Трансформацијата помеѓу два соседни зглоба се одредува со едноставно внесување на соодветните параметри од таблицата 2.4 во соодветната матрица A . Така се добива:

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_4 &= \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & a_4 C_4 \\ S_4 & 0 & C_4 & a_4 S_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_5 &= \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_6 &= \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.200}$$

Вкупната трансформација помеѓу основата и последниот зглоб од роботската рака е дадена со матрицата:

$${}^0\mathbf{T}_6 = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.201}$$

каде што:

$$n_x = C_1 (C_{234} C_5 C_6 - S_{234} S_6) - S_1 S_5 C_6$$

$$n_y = S_1 (C_{234} C_5 C_6 - S_{234} S_6) + C_1 S_5 C_6$$

$$n_z = S_{234} C_5 C_6 + C_{234} S_6$$

$$o_x = C_1 (-C_{234} C_5 S_6 - S_{234} C_6) + S_1 S_5 S_6$$

$$o_y = S_1 (-C_{234} C_5 S_6 - S_{234} C_6) - C_1 S_5 S_6$$

$$o_z = -S_{234} C_5 S_6 + C_{234} C_6$$

$$a_x = C_1 C_{234} S_5 + S_1 C_5$$

$$a_y = S_1 C_{234} S_5 - C_1 C_5$$

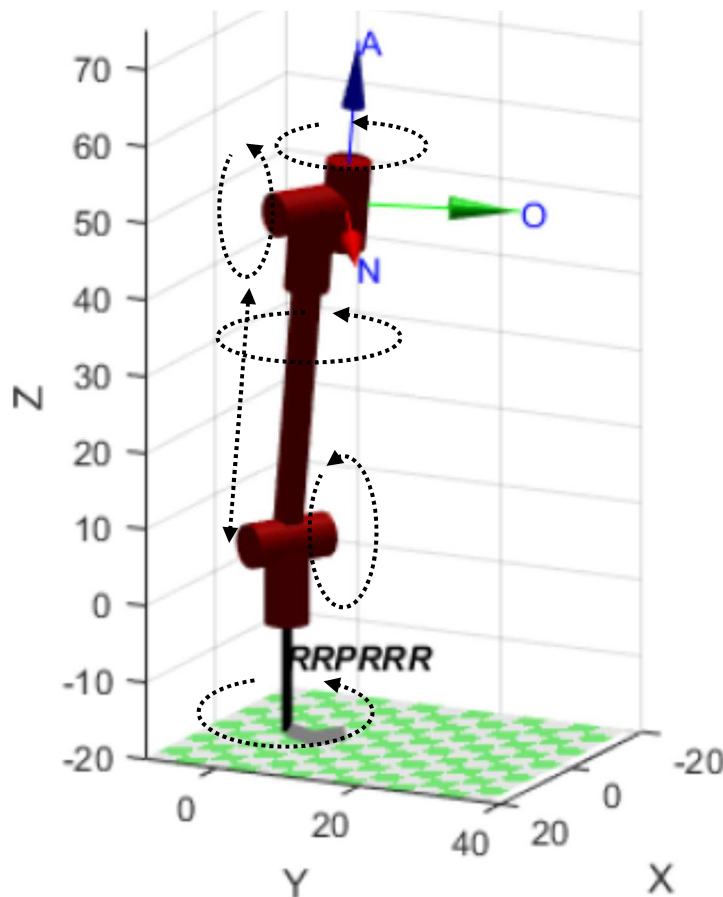
$$a_z = S_{234} S_5$$

$$p_x = C_1 (a_2 C_2 + a_3 C_{23} + a_4 C_{234})$$

$$p_y = S_1 (a_2 C_2 + a_3 C_{23} + a_4 C_{234})$$

$$p_z = a_2 S_2 + a_3 S_{23} + a_4 S_{234} \tag{2.202}$$

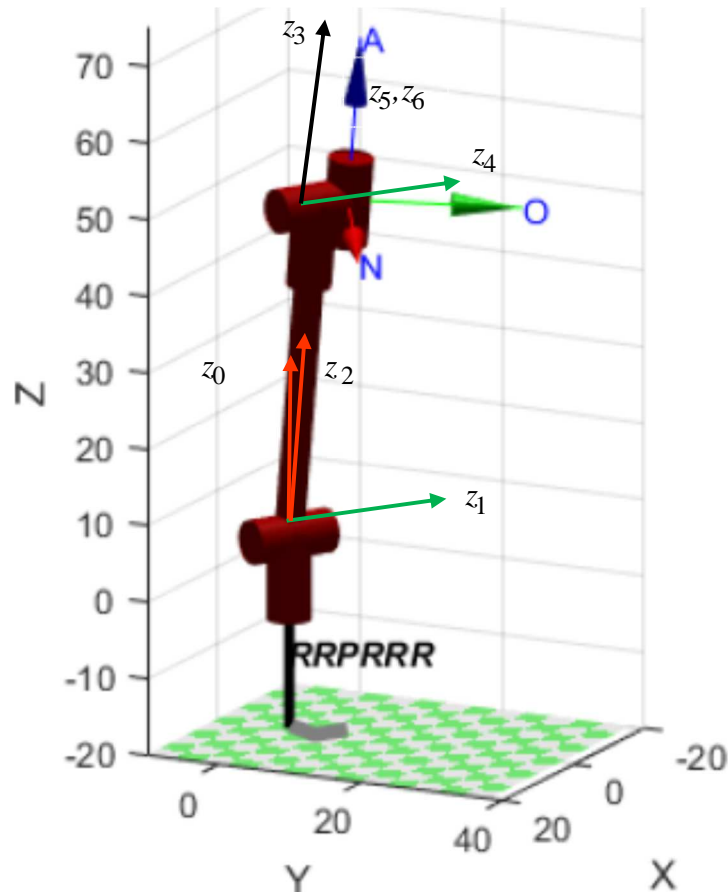
Пример 2.25. На слика 2.55 е прикажана една Стенфордска роботска рака.



Слика 2.55. Приказ на една Стенфордска роботска рака *

Со зглобовите на раката да се придружат координатни системи и да се определат параметрите на нејзиниот Denavit-Hartenberg модел. Стенфордската роботска рака е проектирана во сферни координати, што значи дека нејзините први два зглоба се ротациски, а третиот е призматичен. Последните три зглоба се ротациски.

Решение: Решението е прикажано на слика 2.56, а параметрите на соодветниот Denavit-Hartenberg модел се дадени во таблицата 2.5.



Слика 2.56. Координатните системи придружени со раката од сликата 2.55 *

Трансформациската матрица на Стенфордската роботската рака е добиена како производ од матриците $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6$:

$${}^0\mathbf{T}_6 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{A}_5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.203)$$

каде што:

$$\begin{aligned}
 n_x &= C_1[C_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_2S_5C_6] - S_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) \\
 n_y &= S_1[C_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_2S_5C_6] + C_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) \\
 n_z &= -S_2(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - C_2S_5C_6 \\
 o_x &= C_1[-C_2(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_2S_5S_6] - S_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6) \\
 o_y &= S_1[-C_2(C_4C_5C_6 + S_4C_6) + S_2S_5S_6] + C_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6) \\
 o_z &= S_2(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + C_2S_5S_6 \\
 a_x &= C_1(C_2C_4S_5 + S_2C_5) - S_1S_4S_5 \\
 a_y &= S_1(C_2C_4S_5 + S_2C_5) + C_1S_4S_5 \\
 a_z &= -S_2C_4S_5 + C_2C_5 \\
 p_x &= C_1S_2d_3 - S_1d_2 \\
 p_y &= S_1S_2d_3 + C_1d_2 \\
 p_z &= C_2d_3
 \end{aligned} \tag{2.204}$$

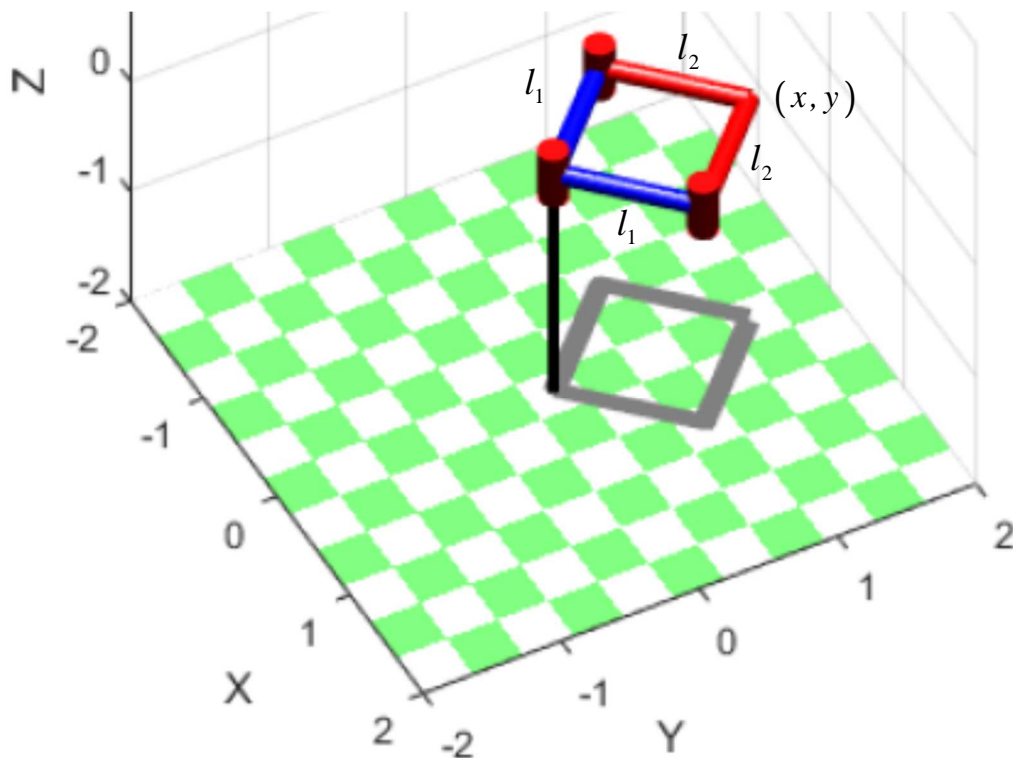
Таблица 2.5. Параметри на Denavit-Hartenberg моделот на роботската рака од сликата 2.55

#	θ	d	a	α
1	θ_1	0	0	-90^0
2	θ_2	d_2	0	90^0
3	0	d_3	0	0
4	θ_4	0	0	-90^0
5	θ_5	0	0	90^0
6	θ_6	0	0	0

2.9. ИНВЕРЗНА КИНЕМАТИКА НА D-H РОБОТСКА РАКА

Одредувањето на инверзната кинематика на една роботска рака е многу посложена задача од одредувањето на директната кинематика. Пред сè, задачата на инверзната кинематика е нелинеарен проблем, затоа што подразбира решавање на симултани нелинеарни равенки од тригонометриски функции, како што тоа можеше

да се насети во примерот 2.15, примерот 2.16, примерот 2.17 и посебно во примерот 2.18. Во продолжение, задачата на инверзната кинематика на една роботска рака може да има повеќе решенија, како што е тоа посочено во примерот 2.15, примерот 2.16 и примерот 2.18. Тоа се должи на фактот дека иста позиција во просторот роботската рака може да оствари со различни ориентации на краците, како што може да се види од слика 2.57, за едноставна рамнинска рака со два ротациски зглобови. Од друга страна, постоењето повеќе решенија на задачата на инверзната кинематика за една роботска рака ѝ овозможува на раката дополнителен степен на флексибилност, затоа што во случајот на повеќекратно решение, роботот секогаш може да го одбере она решение коешто е најсоодветно во дадениот случај, на пример ако тој треба да избегне препреки на патот.

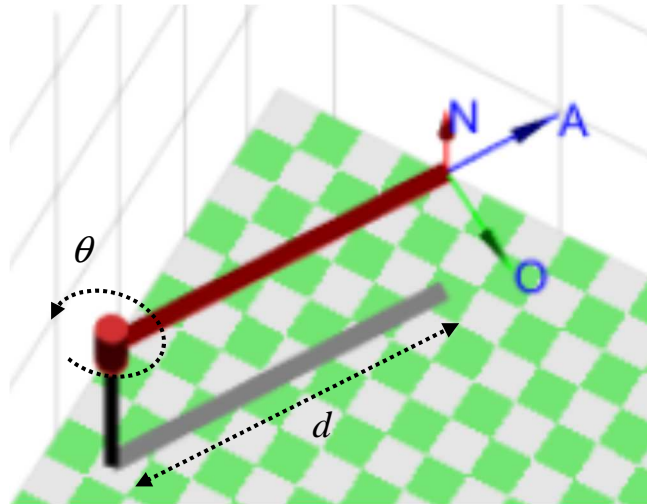


Слика 2.57. Две решенија на инверзната кинематика на рамнинска рака со 2 ротациски зглобови *

Задачата на инверзната кинематика може и да нема решение за дадена положба на извршниот елемент од роботската рака и дадена конфигурација на раката. Имено, секоја задача на инверзната кинематика мора да ги задоволи ограничувањата на аглите на ротациските зглобови и издолжувањата на трансляциските зглобови. Конечно, решението на задачата на инверзната кинематика понекогаш не може да се добие во затворен аналитички облик, и кога соодветните равенки не можат да се решат аналитички, се користат соодветни нумерички методи.

Постојат повеќе начини на кои може да се реши задачата на инверзната кинематика на една роботска рака. Наједноставен е т.н. геометриски приод, кој е многу соодветен кај едноставни роботски раце. Овој приод е илустриран со следните два примери.

Пример 2.26. Да се реши инверзната кинематика на едноставната рамнинска роботска рака од слика 2.58, која поседува еден ротациски и еден транслациски зглоб.



Слика 2.58. Едноставна роботска рака со RP-конфигурација *

Решение: Со оглед на нејзината конфигурација, променливите на зглобовите од раката се аголот θ за ротацискиот зглоб и поместувањето d на транслацискиот зглоб и истите треба да се определат за дадена положба на раката (x, y) во просторот. Во конкретниот случај тоа е многу едноставна задача, затоа што од геометријата на проблемот непосредно следува дека:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \operatorname{atan} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (2.205)$$

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.206)$$

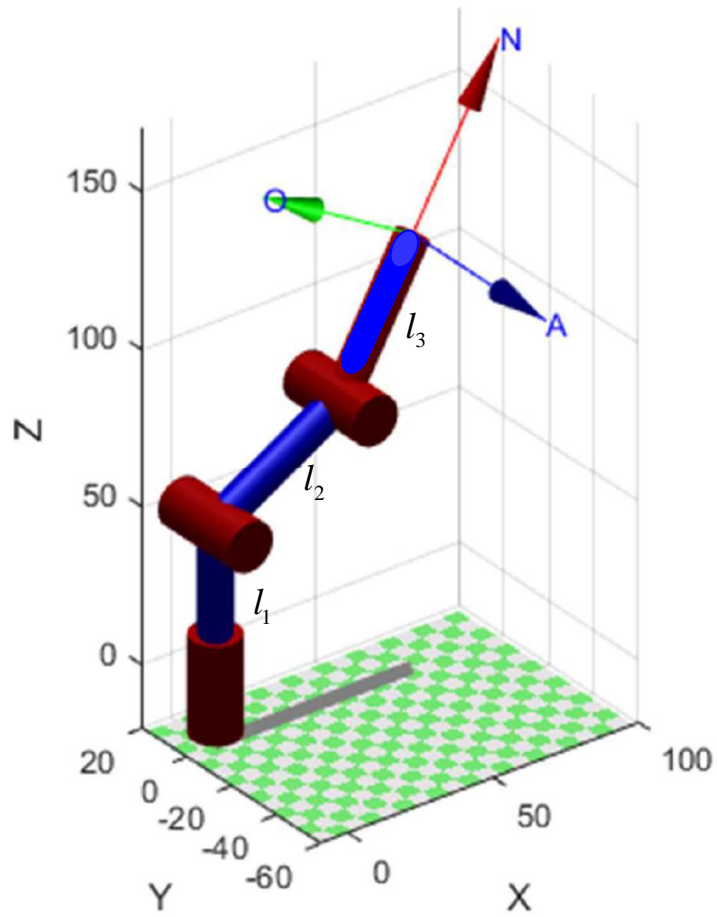
Меѓутоа, функцијата $\operatorname{atan}(y, x)$ не може со сигурност да определи во кој квадрант се наоѓа аголот θ , бидејќи дава решение само во првиот и четвртиот квадрант. Затоа наместо функцијата $\operatorname{atan}(y, x)$ треба да се користи функцијата $\operatorname{atan2}(y, x)$ која го одредува точно квадрантот во кој се наоѓа аголот θ , затоа што ги зема предвид знаците и на y и на x .

Пример 2.27. Да се реши инверзната кинематика на просторната роботска рака од слика 2.59, која поседува три ротациски зглобови.

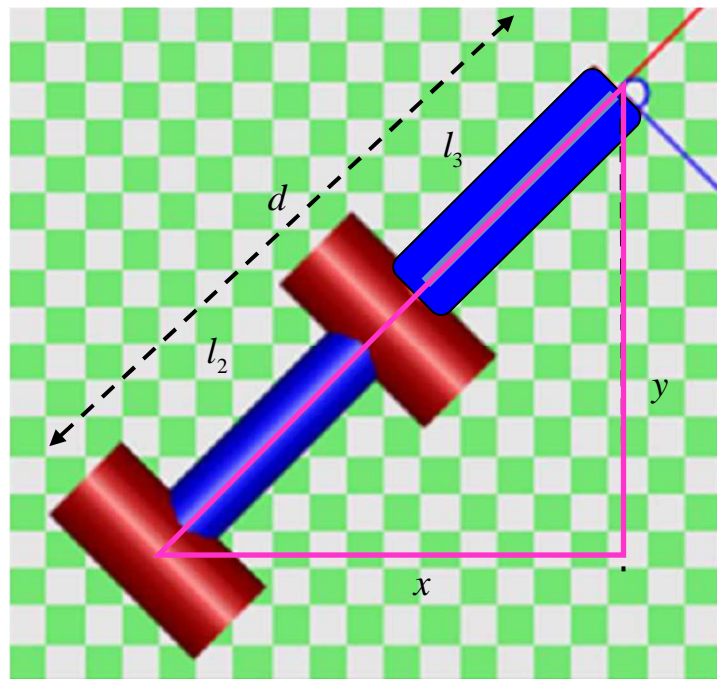
Решение: На сликата 6.60 е прикажан поглед на дадената роботска рака од горе, а на сликата 2.61 поглед од страна. Од сликата 2.60 непосредно произлегува:

$$C_1 = \frac{x}{r}, S_1 = \frac{y}{r} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{S_1}{C_1} = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (2.207)$$

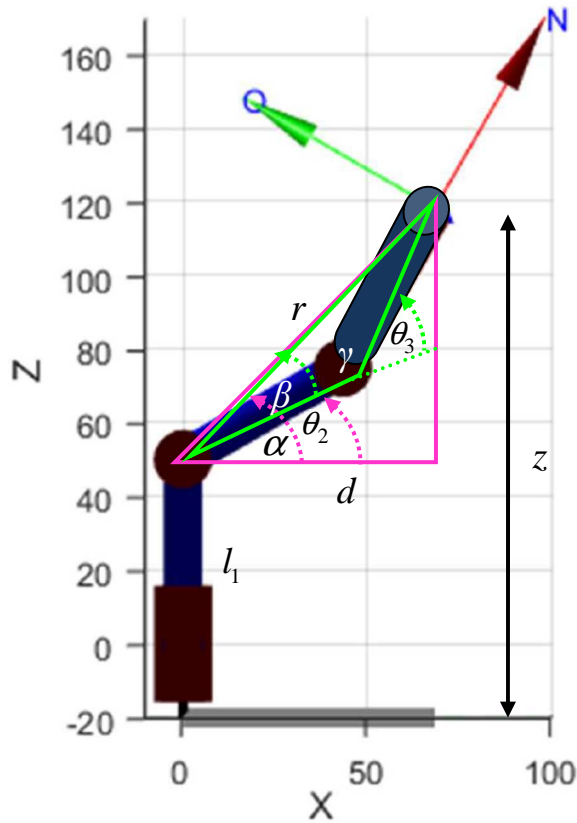
$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.208)$$



Слика 2.59. Просторна роботска рака со 3R-конфигурација *



Слика 2.60. Поглед на роботската рака од сликата 2.59 од горе *



Слика 2.61. Поглед на роботската рака од сликата 2.59 од страна *

додека од сликата 2.61 се добива:

$$r^2 = d^2 + (z - l_1)^2 = x^2 + y^2 + (z - l_1)^2$$

$$\theta_2 = \alpha - \beta$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{z - l_1}{d}\right) = \arctg\left(\frac{z - l_1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$l_3^2 = r^2 + l_2^2 - 2l_2r \cos \beta \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{r^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_2r}\right) \Rightarrow$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 + (z - l_1)^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_2\sqrt{x^2 + y^2 + (z - l_1)^2}}\right)$$

$$\theta_2 = \arctg\left(\frac{z - l_1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 + (z - l_1)^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_2\sqrt{x^2 + y^2 + (z - l_1)^2}}\right) \quad (2.209)$$

$$\theta_3 = 180^\circ - \gamma$$

$$r^2 = l_2^2 + l_3^2 - 2l_2l_3 \cos \gamma \Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{l_2^2 + l_3^2 - r^2}{2l_2l_3}\right) \Rightarrow$$

$$\cos \theta_3 = -\cos \gamma = \frac{r^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \Rightarrow \theta_3 = \arccos\left(\frac{r^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}\right) \Rightarrow$$

$$\theta_3 = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 + (z - l_1)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}\right) \quad (2.210)$$

Како што може да се претпостави, со зголемувањето на бројот степени слобода на движење на роботската рака, решавањето на нејзината инверзна кинематика со геометрискиот приод станува сè посложено. Од тие причини, современите роботски раце се кинематски релативно едноставни, па геометрискиот приод за решавање на нивната инверзна кинематика може без проблем да се користи.

Иако општиот проблем на решавање на инверзната кинематика на една роботска рака е прилично сложен и тежок, се покажува дека за роботски раце со шест степени слобода на движење може да се упрости со т.н. **кинематско раздружување**, доколку оските на нивните три последни зглобови се сечат во една точка, односно раката поседува сферична дланка. Тогаш проблемот на инверзната кинематика на една ваква рака, каква што е, на пример, Стенфордската роботска рака, може да се сведе на два поедноставни проблеми, познати како **инверзна кинематика на позиција** и **инверзна кинематика на ротација**. Тоа значи дека за роботска рака со шест степени слобода на движење која поседува сферична дланка, најнапред се одредува позицијата на пресечната точка на оските од дланката, наречена **центар на дланката**, а потоа се одредува нејзината ориентација. Решението на инверзната кинематика на роботска рака со шест степени слобода на движење и сферична шака е илустрирана на слика 2.62 и објаснета во продолжение.

Нека оските од трите последни зглоба на набљудуваната роботска рака од сликата 2.62 се сечат во точката o_c . Позицијата и ориентацијата на оваа роботска рака можат да се претстават со следните две релации:

$${}^0\mathbf{P}_6 = {}^0\mathbf{P}_6(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \quad (2.211)$$

$${}^0\mathbf{R}_6 = {}^0\mathbf{R}_6(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \quad (2.212)$$

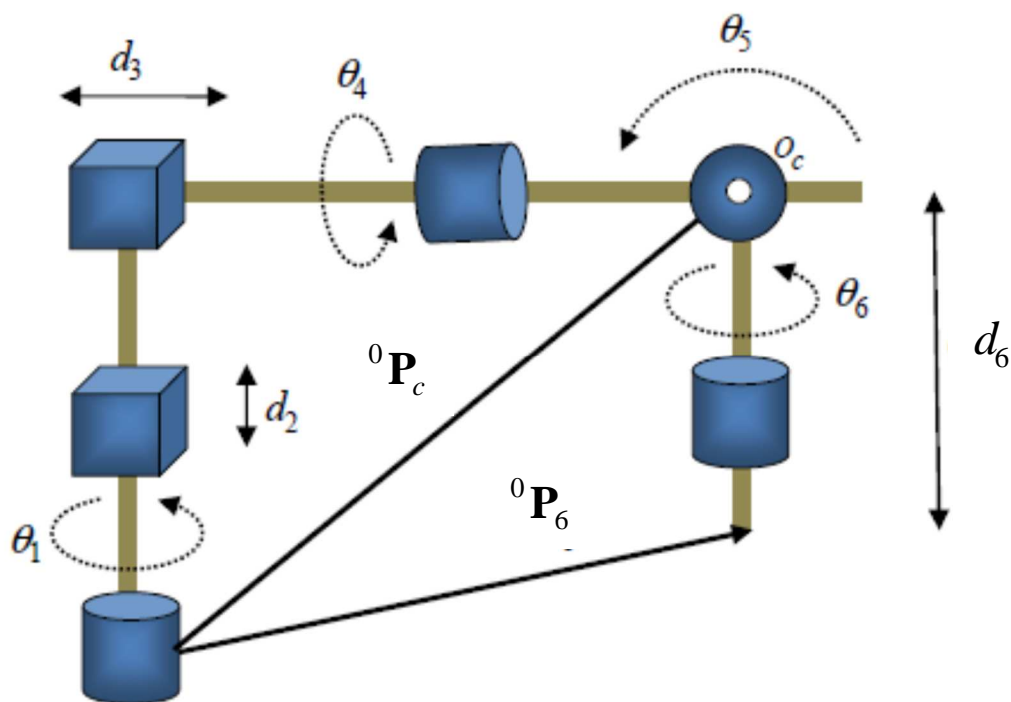
Тогаш задачата на инверзната кинематика на оваа роботска рака може да се формулира на следниот начин:

- 1) Да се определат вредностите на променливите q_1, q_2, q_3 така што положбата на точката o_c е дадена со релацијата:

$${}^0\mathbf{P}_c = {}^0\mathbf{P}_6(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) - d_6 {}^0\mathbf{R}_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.213)$$

- 2) Со помош на променливите q_1, q_2, q_3 определени во претходниот чекор, да се определи ротациската матрица ${}^0\mathbf{R}_3$.
- 3) Да се определат Ојлеровите агли кои одговараат на ориентацијата претставена со ротациската матрица:

$${}^3\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^{-1} {}^0\mathbf{R}_6 \quad (2.214)$$



Слика 2.62. Кинематско раздружување на една роботска рака со шест степени слобода на движење

Пример 2.28. Да се реши инверзната кинематска задача за Стенфордската роботска рака од примерот 2.25.

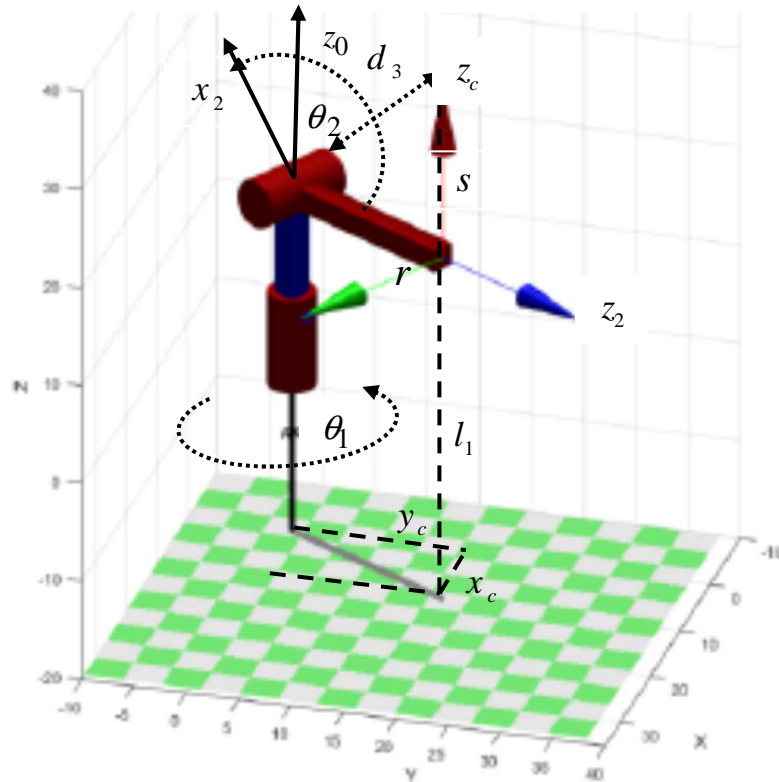
Решение: Од (2.204) се воочува дека позицијата на роботската рака дадена со p_x, p_y и p_z е функција само од променливите q_1, q_2 и q_3 на првите три зглобови од раката. Бидејќи во конкретниот случај е $d_6 = 0$, следува дека ${}^0\mathbf{P}_c = {}^0\mathbf{P}_6(q_1, q_2, q_3)$. Оттука, имајќи на ум дека првите три зглобови на раката се како на слика 2.63, за инверзната кинематика на позиција на Стенфордската рака се добиваат четири решенија (две за θ_1 и две за θ_2):

$$q_1 = \theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x) - \text{atan2} \frac{d_2}{\pm \sqrt{r^2 - d_2^2}}; r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (2.215)$$

$$q_2 = \theta_2 = \text{atan2}(C_1 p_x + S_1 p_y, p_z) \quad (2.216)$$

$$d_3 = S_2 (C_1 p_x + S_1 p_y) + C_2 p_z \quad (2.217)$$

Од друга страна, врз основа на сликата 2.64, за матрицата на ориентација на дланката од раката се добива:



Слика 2.63. Инверзна кинематика на позиција на Стенфордската рака *

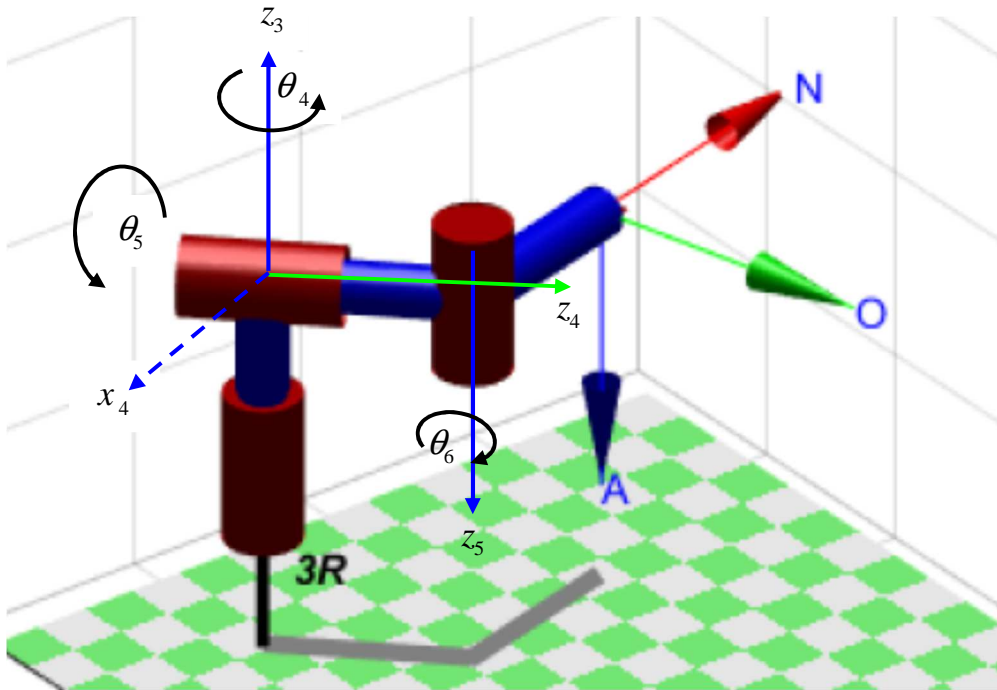
$${}^3\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 \end{bmatrix} \quad (2.218)$$

па, инверзната кинематика на ориентација на раката се добива како решение на равенката (2.214):

$${}^3\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^{-1} {}^0\mathbf{R}_6 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & -S_4C_5S_6 + C_4C_6 & S_4S_5 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & C_1S_2 \\ S_1C_2 & C_1 & S_1S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix}^{-1} {}^0\mathbf{R}_6$$

$$\begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & -S_4C_5S_6 + C_4C_6 & S_4S_5 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.219)$$



Слика 2.64. Сферна дланка *

За $S_5 > 0$ следува:

$$r_{13} = C_4S_5, r_{23} = S_4S_5 \Rightarrow \frac{r_{23}}{r_{13}} = \frac{S_4S_5}{C_4S_5} = \frac{S_4}{C_4} = \text{tg } \theta_4 \Rightarrow \theta_4 = \text{atan2}(r_{23}, r_{13}) \quad (2.220)$$

$$r_{33} = C_5, S_5 = \sqrt{1 - C_5^2} = \sqrt{1 - r_{33}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_5}{C_5} = \frac{\sqrt{1 - r_{33}^2}}{r_{33}} = \text{tg } \theta_5 \Rightarrow \theta_5 = \text{atan2}(\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}) \quad (2.221)$$

$$r_{31} = -S_5C_6, r_{32} = S_5S_6 \Rightarrow \frac{r_{32}}{-r_{31}} = \frac{S_5S_6}{S_5C_6} = \frac{S_6}{C_6} = \text{tg } \theta_6 \Rightarrow \theta_6 = \text{atan2}(r_{32}, -r_{31}) \quad (2.222)$$

додека за $S_5 < 0$ се добива:

$$r_{13} = C_4 S_5, r_{23} = S_4 S_5 \Rightarrow \frac{r_{23}}{r_{13}} = \frac{S_4 S_5}{C_4 S_5} = \frac{S_4}{C_4} = \text{tg } \theta_4 \Rightarrow \theta_4 = \text{atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \quad (2.223)$$

$$r_{33} = C_5, S_5 = -\sqrt{1 - C_5^2} = -\sqrt{1 - r_{33}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_5}{C_5} = \frac{-\sqrt{1 - r_{33}^2}}{r_{33}} = \text{tg } \theta_5 \Rightarrow \theta_5 = \text{atan2}\left(-\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}\right) \quad (2.224)$$

$$r_{31} = -S_5 C_6, r_{32} = S_5 S_6 \Rightarrow \frac{r_{32}}{-r_{31}} = \frac{S_5 S_6}{S_5 C_6} = \frac{S_6}{C_6} = \text{tg } \theta_6 \Rightarrow \theta_6 = \text{atan2}(-r_{32}, r_{31}) \quad (2.225)$$

Конечно, за $S_5 = 0$ матрицата ${}^3\mathbf{R}_6$ се сведува на матрицата:

$${}^3\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 S_6 - S_4 C_6 & 0 \\ S_4 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 S_6 + C_4 C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{4+6} & -C_{4+6} & 0 \\ S_{4+6} & -S_{4+6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.226)$$

од каде може да се определи само сумата $\theta_4 + \theta_6$.

Задачата на инверзна кинематика на една роботска рака може да се реши и со алгебарски приод, како што беше тоа сторено во примерот 2.14, примерот 2.15, примерот 2.16 или примерот 2.17. Во продолжение, алгебарскиот приод ќе биде илустриран на роботската рака од примерот 2.24, која поседува шест степени слобода на движење.

Пример 2.29. Да се реши задачата на инверзна кинематика на роботската рака со шест ротациски зглобови од слика 2.53 со помош на алгебарскиот приод [11].

Решение: Како што може да се забележи од изразите (2.202), директните кинематски равенки содржат членови од обликот $S_2 C_4 S_5$, $C_{234} C_5 C_6$, $S_{234} S_6$, $S_1 S_5 C_6$ итн. За да можат тие да се решат во однос на променливите на роботската рака, матрицата ${}^0\mathbf{T}_6 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \mathbf{A}_6$ се множи од лево со матриците \mathbf{A}_1^{-1} . Така, по множењето на ${}^0\mathbf{T}_6$ со \mathbf{A}_1^{-1} се добива:

$$\mathbf{A}_1^{-1} \cdot {}^0\mathbf{T}_6 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \mathbf{A}_6$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \mathbf{A}_6$$

$$\begin{bmatrix} n_x C_1 + n_y S_1 & o_x C_1 + o_y S_1 & a_x C_1 + a_y S_1 & p_x C_1 + p_y S_1 \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ n_x S_1 - n_y C_1 & o_x S_1 - o_y C_1 & a_x S_1 - a_y C_1 & p_x S_1 - p_y C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{234}C_5C_6 - S_{234}S_6 & -C_{234}C_5C_6 - S_{234}C_6 & C_{234}S_5 & C_{234}a_4 + C_{23}a_3 + C_2a_2 \\ S_{234}C_5C_6 + C_{234}S_6 & -S_{234}C_5C_6 + C_{234}C_6 & S_{234}S_5 & S_{234}a_4 + S_{23}a_3 + S_2a_2 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.227)$$

Од (2.227) непосредно следува:

$$p_x S_1 - p_y C_1 = 0 \Rightarrow \frac{S_1}{C_1} = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \theta_1 = \begin{cases} \arctg \frac{p_y}{p_x} \\ \arctg \frac{p_y}{p_x} + 180^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_x C_1 + p_y S_1 = C_{234}a_4 + C_{23}a_3 + C_2a_2 \\ p_z = S_{234}a_4 + S_{23}a_3 + S_2a_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234}a_4)^2 = (C_{23}a_3 + C_2a_2)^2 \\ (p_z - S_{234}a_4)^2 = (S_{23}a_3 + S_2a_2)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234}a_4)^2 + (p_z - S_{234}a_4)^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3(S_2S_{23} + C_2C_{23}) \Rightarrow$$

$$(S_2S_{23} + C_2C_{23}) = C_3 = \frac{(p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234}a_4)^2 + (p_z - S_{234}a_4)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \quad (2.228)$$

Бидејќи зглобовите 2, 3 и 4 се паралелни, множењето на ${}^0\mathbf{T}_6$ со матриците \mathbf{A}_2^{-1} и \mathbf{A}_3^{-1} нема да даде резултат. Затоа матрицата ${}^0\mathbf{T}_6$ се множи со \mathbf{A}_1^{-1} , \mathbf{A}_2^{-1} , \mathbf{A}_3^{-1} и \mathbf{A}_4^{-1} како што е покажано:

$$\mathbf{A}_4^{-1} \left\{ \mathbf{A}_3^{-1} \left[\mathbf{A}_2^{-1} \left(\mathbf{A}_1^{-1} \cdot {}^0\mathbf{T}_6 \right) \right] \right\} = \mathbf{A}_5 \cdot \mathbf{A}_6 \quad (2.229)$$

Од (2.229) непосредно следува:

$$-S_{234}(C_1a_x + S_1a_y) + C_{234}a_z = 0 \Rightarrow$$

$$\theta_{234} = \begin{cases} \arctg \frac{a_z}{C_1a_x + S_1a_y} \\ \arctg \frac{a_z}{C_1a_x + S_1a_y} + 180^0 \end{cases} \quad (2.230)$$

Определената вредност за θ_{234} ќе послужи за пресметување на θ_3 , дефиниран со (2.228).

Вредноста на θ_2 може исто така да се определи врз основа на (2.229):

$$\begin{cases} p_x C_1 + p_y S_1 = C_{234} a_4 + C_{23} a_3 + C_2 a_2 \\ p_z = S_{234} a_4 + S_{23} a_3 + S_2 a_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4 = (C_2 C_3 - S_2 S_3) a_3 + C_2 a_2 \\ p_z - S_{234} a_4 = (S_2 C_3 + C_2 S_3) a_3 + S_2 a_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} S_2 = \frac{(C_3 a_3 + a_2)(p_z - S_{234} a_4) - S_3 a_3 (p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4)}{(C_3 a_3 + a_2)^2 + S_3^2 a_3^2} \\ C_2 = \frac{(C_3 a_3 + a_2)(p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4) + S_3 a_3 (p_z - S_{234} a_4)}{(C_3 a_3 + a_2)^2 + S_3^2 a_3^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\theta_2 = \arctg \frac{(C_3 a_3 + a_2)(p_z - S_{234} a_4) - S_3 a_3 (p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4)}{(C_3 a_3 + a_2)(p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4) + S_3 a_3 (p_z - S_{234} a_4)} \quad (2.231)$$

Аголот θ_4 се определува со помош на аглите θ_2 и θ_3 според равенката:

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3 \quad (2.232)$$

Бидејќи за θ_{234} постојат две решенија, две решенија ќе има и за θ_4 .

Од равенката (2.229) може да се определи и променливата θ_5 :

$$\begin{cases} S_5 = C_{234}(C_1a_x + S_1a_y) + S_{234}a_z \\ C_5 = -C_1a_y + S_1a_x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\theta_5 = \arctg \frac{C_{234}(C_1a_x + S_1a_y) + S_{234}a_z}{-C_1a_y + S_1a_x} \quad (2.233)$$

За да се определи променливата θ_6 , равенката (2.229) треба од лево да се помножи со \mathbf{A}_5^{-1} . Така се добива:

$$\mathbf{A}_5^{-1} \mathbf{A}_4^{-1} \left\{ \mathbf{A}_3^{-1} \left[\mathbf{A}_2^{-1} \left(\mathbf{A}_1^{-1} \cdot {}^0 \mathbf{T}_6 \right) \right] \right\} = \mathbf{A}_6 \quad (2.234)$$

од каде што непосредно следува:

$$\theta_6 = \arctg \frac{-S_{234} (C_1 n_x + S_1 n_y) + C_{234} n_z}{-S_{234} (C_1 o_x + S_1 o_y) + C_{234} o_z} \quad (2.235)$$

2.10. ЗАДАЧИ

2.1. Положбата на точката P во просторот, во однос на локалниот координатен систем \mathbf{B} придружен со неа, е зададена со векторот ${}^B \mathbf{P} = [3 \ 1 \ 4]^T$. Почетокот од координатниот систем \mathbf{B} е сместен во почетокот од референтниот координатен систем \mathbf{A} и двата системи се паралелни еден на друг. Да се определи и прикаже графички положбата на точката P во однос на референтниот координатен систем \mathbf{A} по следните трансформации (елементарни движења) на подвижниот координатен систем \mathbf{B} :

- ротација за агол од 45° околу x -оската
- ротација за агол од 90° околу локалната z -оска
- translација за 5 единици долж y -оска, за 6 единици долж z -оската и за 2 единици долж x -оската

2.2. Положбата на една роботска рака во просторот е дефинирана во сферен координатен систем. Ако тој сферен координатен систем се „одротира“ со помош на соодветни елементарни трансформации, трансформационата матрица која ја претставува положбата на набљудуваната роботска рака во сферен координатен систем ќе биде:

$$\mathbf{T}_{sph} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.236)$$

а) Да се определат сферните координати (r, β, γ) со кои се остварува дадената положба на роботската рака.

2.3. Положбата на една роботска рака во просторот е опишана со помош на сферен координатен систем. Ако подвижниот координатен систем придружен кон роботската рака се доведе повторно во првобитната ориентација и се направи паралелен со референтниот координатен систем, матрицата \mathbf{T}_{sph} ќе го има следниот изглед:

$$\mathbf{T}_{sph} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.237)$$

а) Да се определат вредностите за r, β, γ со кои се постига дефинираната положба.

б) Да се најдат елементите на оригиналната матрица \mathbf{T}_{sph} пред таа да се „одротира“.

2.4. Нека, под претпоставка, една роботска рака најнапред е доведена во саканата позиција во просторот, а потоа е одредена и нејзината ориентација во просторот, при што позицијата на роботската рака во просторот е дадена во правоаголни координати, а нејзината ориентација во просторот е одредена со RPY-аглиите. Резултантното движење е дефинирано со матрицата:

$$T = \begin{bmatrix} 0.527 & -0.574 & 0.628 & 4 \\ 0.369 & 0.189 & 0.439 & 6 \\ -0.766 & 0 & 0.643 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.238)$$

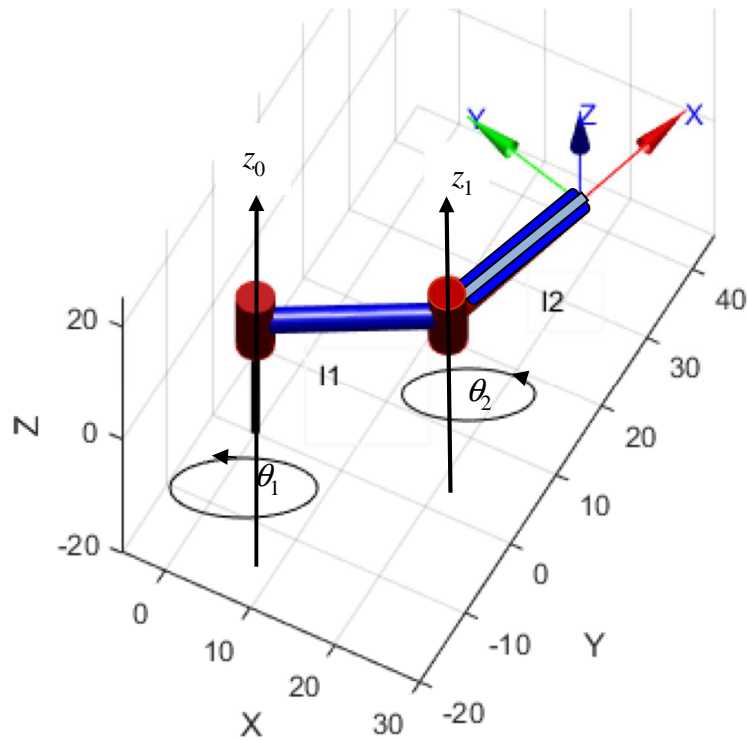
Да се определат RPY-аглиите со кои се постига зададената ориентација на роботската рака во просторот.

2.5. Да се определат Ојлеровите агли со кои се постига ориентацијата на роботската рака дефинирана со матрицата T од претходната задача. (Упатство: Задачата да се реши за правоаголни координати и Ојлерови агли).

2.6. Роботската рака прикажана на слика 2.65 има два степени слобода на движење. Должината на краците на раката е $l_1 = l_2 = 30\text{cm}$, а нејзината трансформациона матрица ${}^0\mathbf{T}_H$ е дадена во општ и конкретен облик:

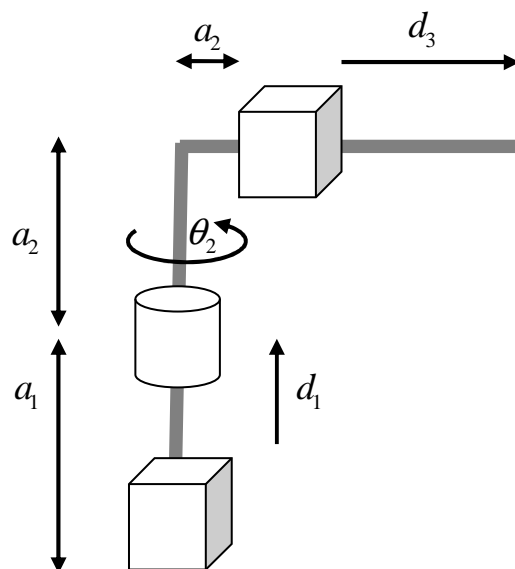
$${}^0\mathbf{T}_H = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2 C_{12} + l_1 C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_2 S_{12} + l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2924 & -0.9563 & 0 & 0.6978 \\ 0.9563 & -0.2924 & 0 & 0.8172 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.239)$$

Да се определат променливите θ_1 и θ_2 на раката во општ и конкретен облик.



Слика 2.65. Илустрација кон задачата 2.6 *

2.7. На слика 2.66 е прикажана една роботска рака со три степени слобода на движење. а) Врз основа на D-Н моделот да се придружат соодветни координатни системи кон зглобовите на роботската рака. б) Да се пополни соодветната таблица параметри на роботската рака. в) Да се определи матрицата ${}^U T_H$.



Слика 2.66. Илустрација кон задачата 2.7

ГЛАВА 3. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА КИНЕМАТИКА

3.1. ВОВЕД

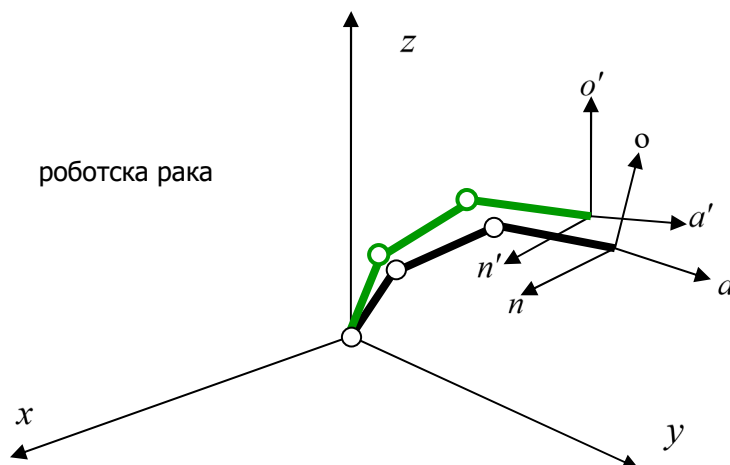
Во глава 2 беше дискутирана директната и инверзната кинематика на една роботска рака. Како што беше покажано, таа ја дефинира врската помеѓу променливите на зглобовите на раката и нејзината положба (директна кинематика) односно обратно (инверзна кинематика). Во оваа глава ќе стане збор за диференцијалната кинематика на една роботска рака (директна и инверзна), која ја дефинира врската помеѓу брзината на зглобовите од раката и брзината на самата рака (нејзиниот извршен елемент). Оваа врска е опишана со матрица која се нарекува геометриски Јакобијан и која зависи од конфигурацијата на раката. Алтернативно, може да се дефинира и аналитички Јакобијан, кој се добива со диференцирање на директните кинематски равенки по сите променливи на зглобовите од раката. Аналитичкиот Јакобијан во општ случај се разликува од геометрискиот. Тие се идентични само за рамнински роботски раце. Во литературата многу често не се истакнува разликата помеѓу аналитичкиот и геометрискиот Јакобијан. По правило, кога се зборува за Јакобијан на роботската рака, се мисли на геометрискиот Јакобијан. Така ќе биде сторено и во овој труд, по воведните излагања.

Јакобијанот е многу битен концепт во роботиката. Тој овозможува одредување на сингуларитетите на една роботска рака, анализа на редуваноста на роботските раце, математички опис на врската помеѓу силите и вртливите моменти кои дејствуваат на крајот од раката (на пример врз нејзиниот извршен елемент) и соодветните сили и вртливи моменти кои дејствуваат врз зглобовите од раката, изведување на динамичкиот модел на роботската рака, проектирање на управувањето со движењето на раката итн.

3.2. ОСНОВНИ ПОИМИ ЗА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ДВИЖЕЊА И БРЗИНИ

Под поимот **диференцијални движења** се подразбираат многу мали движења на еден механизам, во овој случај роботска рака, односно движења за мал интервал на време dt . На слика 3.1 е прикажано диференцијалното движење на координатниот систем придружен со една роботска рака, предизвикано од диференцијалните движења на нејзините зглобови. Кога зглобовите на роботската рака ќе се придвижат за диференцијал од растојание или агол на ротација, координатниот систем придружен со роботската рака исто така ќе се придвижи за соодветна диференцијална вредност. Следствено, движењата на координатниот систем придружен кон роботската рака зависат од диференцијалните движења на зглобовите на раката.

Диференцијалните движења се користат за одредување на брзината на движење на одделните делови од механизмот. Овде ќе стане збор за диференцијалното движење на координатни системи во однос на референтен координатен систем, диференцијалното движење на зглобовите на една роботска рака во однос на референтен координатен систем, Јакобијани и равенките на брзината на движење на одделните компоненти од роботската рака.



Слика 3.1. Диференцијално движење на координатен систем придружен со една роботска рака во зависност од диференцијалните движења на раката

Нека најнапред набљудуваме векторска функција \mathbf{f} која го пресликува просторот дефиниран со променливите \mathbf{q} во просторот дефиниран со променливите \mathbf{x} . Векторите \mathbf{q} и \mathbf{x} во општ случај имаат произволна димензија, на пример n и m , соодветно. Следствено, \mathbf{f} ќе има димензија m .

Споменатото пресликување е опишано со следното множество равенки:

$$x_i = f_i(q_1, q_2, \dots, q_n) ; i = 1, 2, \dots, m \tag{3.1}$$

или, во векторски облик:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ f_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \vdots \\ f_m(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Диференцијалната промена на секоја од променливите x_i заради диференцијалната промена на секоја од променливите q_j е дадена со изразите:

$$dx_1 = \frac{\partial f_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial q_n} dq_n$$

$$dx_2 = \frac{\partial f_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial q_n} dq_n$$

.....

$$dx_m = \frac{\partial f_m}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_m}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial q_n} dq_n \quad (3.3)$$

Равенките (3.3) ја претставуваат врската помеѓу диференцијалите на одделните променливи и соодветните функции и можат да се запишат во матричен облик на следниот начин:

$$[dx_i]_{m \times 1} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right]_{m \times n} \cdot [dq_j]_{n \times 1} \quad (3.4)$$

Односно:

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ dx_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ dq_n \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Матрицата $\mathbf{J} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right]_{m \times n}$ се нарекува **Јакобијан** и се добива со диференцирање на секоја од равенките (3.1) во однос на сите нејзини променливи. Очигледно, Јакобијанот е функција од векторот \mathbf{q} :

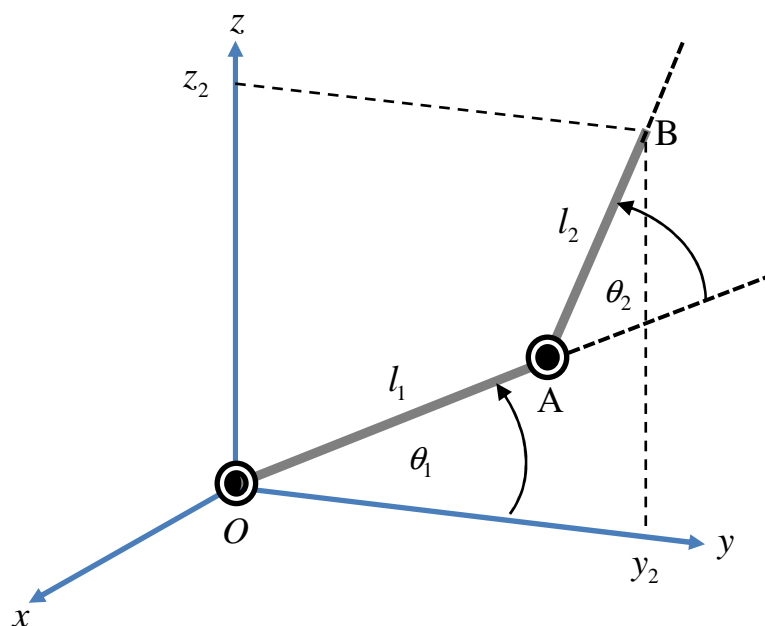
$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.6)$$

Бидејќи диференцијалите претставуваат многу мали поместувања, општо земено, Јакобијанот (3.6) ја дефинира врската помеѓу диференцијалните движења во различни простори. Ако сега двете страни од равенките (3.4) се поделат со многу мал временски интервал dt , ќе се добие врска помеѓу брзините во различните простори:

$$\left[\frac{dx_i}{dt} \right]_{m \times 1} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right]_{m \times n} \cdot \left[\frac{dq_j}{dt} \right]_{n \times 1} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (3.7)$$

На ист начин може да се определи и Јакобијанот на една роботска рака, ако се претпостави дека равенките (3.1) се равенки на положбата на роботската рака во функција од положбата на нејзините зглобови. Тоа е илустрирано со следните два примери.

Пример 3.1. На слика 3.2 е прикажана рамнинска роботска рака со два степени слобода на движење. Должините на краците од раката се l_1 и l_2 , соодветно. Раката се движи во рамнината $y-z$, при што секој крак може независно да ротира. Ротацијата на првиот крак θ_1 се мери во однос на референтниот координатен систем, а ротацијата на вториот крак θ_2 се мери во однос на првиот крак. Да се опише диференцијалното движење и брзината на крајот од роботската рака (точката В) во функција од диференцијалното движење и брзината на двата крака.



Слика 3.2. Роботска рака со два степени слобода на движење

Решение: Положбата на точката В во однос на референтниот координатен систем $O(x, y, z)$ е определена со нејзините координати y_2 и z_2 :

$$y_2 = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.8)$$

$$z_2 = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.9)$$

Со диференцирање на равенките (3.8) – (3.9) во однос на променливите θ_1 и θ_2 се добива:

$$dy_2 = -l_1 \sin(\theta_1) d\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (d\theta_1 + d\theta_2) \quad (3.10)$$

$$dz_2 = l_1 \cos(\theta_1) d\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (d\theta_1 + d\theta_2) \quad (3.11)$$

или, во матричен облик:

$$\begin{bmatrix} dy_2 \\ dz_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Векторот $[dy_2 \ dz_2]^T$ на левата страна од равенката (3.12) го претставува диференцијалното движење на точката В, додека векторот $[d\theta_1 \ d\theta_2]^T$ на десната страна од равенката (3.12) го претставува диференцијалното движење на зглобовите.

Матрицата:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.13)$$

е соодветниот Јакобијан. Ако двете страни од равенките (3.10) – (3.11) се поделат со dt се добиваат равенките на брзината на набљудуваната роботска рака од слика 3.2:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{y2} \\ v_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Векторот $[\dot{y}_2 \ \dot{z}_2]^T$ на левата страна од равенката (3.14) е вектор на брзината на точката В, додека векторот $[\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T$ на десната страна од равенката (3.14) е вектор на аголните брзини на двата крака од роботската рака на слика 3.2. Врската помеѓу овие брзини повторно е дефинирана со Јакобијанот (3.13).

На сличен начин може да се определи врската помеѓу диференцијалното движење на зглобовите на една роботска рака со повеќе степени слобода на движење и диференцијалното движење на самата рака.

Пример 3.2. Да се определи Јакобијанот на роботска рака со 2RP3R конфигурација, кој ја дефинира врската помеѓу брзината на раката (извршниот елемент) и брзината на зглобовите од раката. Со оглед на дадената конфигурација, променливите на зглобовите од раката се $\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5$ и θ_6 , додека нејзината позиција (позицијата на извршниот елемент) е дадена со векторот:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 S_2 d_3 - S_1 d_2 \\ S_1 S_2 d_3 + C_1 d_2 \\ C_2 d_3 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Решение: Со диференцирање на равенките (3.15) во однос на променливите на зглобовите $\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5$ и θ_6 се добиваат следните равенки за извршниот елемент од роботската рака:

$$\dot{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & C_1 C_2 d_3 & C_1 S_2 & 0 & 0 & 0 \\ x & S_1 C_2 d_3 & S_1 S_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_2 d_3 & C_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

или, во матричен облик:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{J}_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.17)$$

каде што:

$$\dot{\mathbf{P}} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{d}_3 \quad \dot{\theta}_4 \quad \dot{\theta}_5 \quad \dot{\theta}_6]^T = \\ &= [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \end{aligned} \quad (3.19)$$

и

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -y & C_1 C_2 d_3 & C_1 S_2 & 0 & 0 & 0 \\ x & S_1 C_2 d_3 & S_1 S_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_2 d_3 & C_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 6} \quad (3.20)$$

е соодветниот Јакобијан, кој се добива со диференцирање на равенките на позиција на набљудуваната роботска рака и може да се нарече **Јакобијан на позиција**. Во конкретниот пример тој претставува 3×6 – димензиска матрица.

Ориентацијата на извршниот елемент од набљудуваната роботска рака може да биде претставена на различен начин – со ротациска матрица, со Ојлерови агли, со кватерниони итн. Ако претпоставиме ротациска матрица за ориентација:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

тогаш, со нејзино диференцирање во однос на променливите на зглобовите од набљудуваната роботска рака, ќе се добијат следните равенки за извршниот елемент од раката:

$$\dot{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \dot{R}_{11} \\ \dot{R}_{12} \\ \dot{R}_{13} \\ \dot{R}_{21} \\ \dot{R}_{22} \\ \dot{R}_{23} \\ \dot{R}_{31} \\ \dot{R}_{32} \\ \dot{R}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial R_{11}}{\partial q_2} & \frac{\partial R_{11}}{\partial q_3} & \frac{\partial R_{11}}{\partial q_4} & \frac{\partial R_{11}}{\partial q_5} & \frac{\partial R_{11}}{\partial q_6} \\ \frac{\partial R_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial R_{12}}{\partial q_2} & \frac{\partial R_{12}}{\partial q_3} & \frac{\partial R_{12}}{\partial q_4} & \frac{\partial R_{12}}{\partial q_5} & \frac{\partial R_{12}}{\partial q_6} \\ \frac{\partial R_{13}}{\partial q_1} & \frac{\partial R_{13}}{\partial q_2} & \frac{\partial R_{13}}{\partial q_3} & \frac{\partial R_{13}}{\partial q_4} & \frac{\partial R_{13}}{\partial q_5} & \frac{\partial R_{13}}{\partial q_6} \\ \frac{\partial R_{21}}{\partial q_1} & \frac{\partial R_{21}}{\partial q_2} & \frac{\partial R_{21}}{\partial q_3} & \frac{\partial R_{21}}{\partial q_4} & \frac{\partial R_{21}}{\partial q_5} & \frac{\partial R_{21}}{\partial q_6} \\ \frac{\partial R_{22}}{\partial q_1} & \frac{\partial R_{22}}{\partial q_2} & \frac{\partial R_{22}}{\partial q_3} & \frac{\partial R_{22}}{\partial q_4} & \frac{\partial R_{22}}{\partial q_5} & \frac{\partial R_{22}}{\partial q_6} \\ \frac{\partial R_{23}}{\partial q_1} & \frac{\partial R_{23}}{\partial q_2} & \frac{\partial R_{23}}{\partial q_3} & \frac{\partial R_{23}}{\partial q_4} & \frac{\partial R_{23}}{\partial q_5} & \frac{\partial R_{23}}{\partial q_6} \\ \frac{\partial R_{31}}{\partial q_1} & \frac{\partial R_{31}}{\partial q_2} & \frac{\partial R_{31}}{\partial q_3} & \frac{\partial R_{31}}{\partial q_4} & \frac{\partial R_{31}}{\partial q_5} & \frac{\partial R_{31}}{\partial q_6} \\ \frac{\partial R_{32}}{\partial q_1} & \frac{\partial R_{32}}{\partial q_2} & \frac{\partial R_{32}}{\partial q_3} & \frac{\partial R_{32}}{\partial q_4} & \frac{\partial R_{32}}{\partial q_5} & \frac{\partial R_{32}}{\partial q_6} \\ \frac{\partial R_{33}}{\partial q_1} & \frac{\partial R_{33}}{\partial q_2} & \frac{\partial R_{33}}{\partial q_3} & \frac{\partial R_{33}}{\partial q_4} & \frac{\partial R_{33}}{\partial q_5} & \frac{\partial R_{33}}{\partial q_6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

или во матричен облик:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{J}_{\mathbf{R}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.23)$$

Јакобијанот $\mathbf{J}_{\mathbf{R}}(\mathbf{q})$ се добива со диференцирање на равенките кои ја дефинираат ориентацијата на набљудуваната роботска рака и може да се нарече **Јакобијан на ориентација**. Бидејќи во конкретниот случај ориентацијата на роботската рака е претставена со соодветна ротациска матрица, тој е 9×6 –димензиска матрица.

Со обединување на равенките (3.17) и (3.23) за Јакобијанот на позиција и Јакобијанот на ориентација на набљудуваната роботска рака се добива:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}} \\ \dot{\mathbf{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_{\mathbf{R}}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^*(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.24)$$

каде што $\mathbf{J}^* = \mathbf{J}^*(\mathbf{q})$ е целосниот Јакобијан на роботската рака. Во суштина, тој е **аналитички Јакобијан** на роботската рака, што значи е добиен со диференцирање на неговите кинематски равенки по време, и не ја дава уникатната врска помеѓу брзините на зглобовите од раката и брзината на самата рака. Бидејќи не се направени никакви ограничувања во поглед на координатните системи во однос на кои се претставени променливите на раката и нејзините зглобови, очигледно е дека добиените равенки ќе важат за секој координатен систем.

Аналитичкиот Јакобијан зависи од начинот на кој е претставена позицијата и ориентацијата на роботската рака. Во конкретниот случај, тој претставува 12×6 –

димензиска матрица. Ако ориентацијата на извршниот елемент од роботската рака е претставена поинаку, ќе се добие различен Јакобијан на ориентација. Така, на пример, за ориентација во Ојлерови агли, соодветниот Јакобијан на ориентација ќе претставува 3×6 – димензиска матрица. Исто така, ако позицијата на роботската рака е претставена, на пример, во цилиндрични или сферни координати, ќе се добие различен Јакобијан на позиција.

Бидејќи кинематските својства на еден механизам не зависат од неговата конфигурација, многу е битно и неговиот кинематски модел да биде независен од конфигурацијата на механизмот. Јакобијанот поврзан со еден таков модел е единствен, се нарекува **геометриски** или **основен Јакобијан $\mathbf{J}(\mathbf{q})$** и во делот 3.7 ќе биде покажано како тој се добива за произволна роботска рака.

За роботска рака со n степени слобода на движење, диференцијалните движења на раката можат да се претстават со следната матрична равенка:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Јакобијан} \\ \text{на} \\ \text{раката} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

односно:

$$\mathbf{D} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{D}_q \quad (3.26)$$

каде што dx, dy, dz во \mathbf{D} го претставуваат диференцијалното движење на раката долж x -, y - и z -оската, соодветно, $\delta x, \delta y, \delta z$ во \mathbf{D} претставуваат диференцијална ротација на раката околу x -, y - и z -оската, соодветно, и \mathbf{D}_q ги претставува диференцијалните движења на зглобовите од раката. Ако векторите \mathbf{D} и \mathbf{D}_q се поделат со dt , наместо одделните диференцијални движења тие ќе ги претставуваат соодветните брзини. Во двата случаи, \mathbf{J} го претставува основниот Јакобијан на роботската рака.

Основниот Јакобијан на една роботска рака ја дефинира врската помеѓу брзините на зглобовите и соодветните (на единствен начин дефинирани) линеарна \mathbf{v} и аголна брзина $\boldsymbol{\omega}$ на извршниот елемент од раката:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.27)$$

каде што n е бројот зглобови на раката. $\mathbf{J}_v(\mathbf{q})$ се нарекува **Јакобијан на линеарната брзина** на раката затоа што ја дефинира врската помеѓу линеарната брзина на раката и брзината на нејзините зглобови:

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_v(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.28)$$

додека $\mathbf{J}_\omega(\mathbf{q})$ се нарекува **Јакобијан на аголната брзина**, затоа што ја дефинира аголната брзина на раката во функција од брзината на нејзините зглобови:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.29)$$

Заедно Јакобијанот на линеарната брзина и Јакобијанот на аголната брзина го чинат основниот Јакобијан на роботската рака:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Роботската рака во општ случај има n зглобови. Бројот зглобови може да биде мал, на пример, $n = 2$, но може да биде и голем, на пример, $n = 100$. Бројот зглобови на раката влијае врз димензијата на Јакобијанот на роботската рака, кој има по една колона за секој зглоб. Така, роботска рака со n зглобови има Јакобијан со n колони. Од друга страна, бројот редици на Јакобијанот одговара на елементите од векторот на брзини на раката. За движење во тридимензиски простор, векторот на брзини има 6 елементи – три за линеарната и 3 за аголната брзина на раката. Оттука Јакобијанот на една роботска рака секогаш претставува $6 \times n$ – димензиска матрица, додека Јакобијаните на линеарната и аголната брзина претставуваат $3 \times n$ – димензиски матрици:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{3 \times 1} \\ \boldsymbol{\omega}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v(\mathbf{q})_{3 \times n} \\ \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q})_{3 \times n} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) \end{bmatrix}_{6 \times n} \dot{\mathbf{q}}_{n \times 1} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.31)$$

Линеарната брзина на роботската рака (нејзиниот извршен елемент) се добива со диференцирање по време на векторот на позиција на раката од нејзиниот кинематски модел. Меѓутоа, тоа не е случај со аголната брзина. Таа не може да се добие со диференцирање на ниедни равенки за ориентација на роботската рака. На пример, ако ориентацијата на роботската рака е претставена со Ојлерови агли (ϕ, θ, ψ) , нивните временски изводи не соодветствуваат на аголната брзина на раката. Всушност, аголната брзина на роботската рака нема примитивна функција, што значи дека ниедна презентација на нејзината ориентација нема изводи по време кои соодветствуваат на аголната брзина.

Пример 3.3. Даден е Јакобијанот на една роботска рака во одреден временски миг:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Да се определат линеарните и ротациските диференцијални движења на координатниот систем придружен со роботската рака, ако се познати диференцијалните движења на одделните нејзини зглобови:

$$\mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Решение: Врз основа на равенката (3.26), во конкретниот случај се добива:

$$\mathbf{D} = \mathbf{J}\mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

што значи раката претрпела диференцијална translација од -0.5 единици во правец на x – и z – оската и диференцијални ротации од 0.1 единици околу y – и z – оската.

Секогаш може да се воспостави врска помеѓу аналитичкиот и геометрискиот Јакобијан на една роботска рака. За таа цел, најнапред ќе ја дефинираме врската помеѓу изводот на позицијата $\dot{\mathbf{P}}$ и нејзината линеарна брзина \mathbf{v} , како и врската помеѓу изводот на ориентацијата $\dot{\mathbf{R}}$ на раката и нејзината аголна брзина $\boldsymbol{\omega}$:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{E}_P(\mathbf{P})\mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{E}_R(\mathbf{R})\boldsymbol{\omega} \quad (3.35)$$

Матриците $\mathbf{E}_P(\mathbf{P})$ и $\mathbf{E}_R(\mathbf{R})$ во (3.35) зависат исклучиво од презентацијата на конкретната позиција односно ориентација на роботската рака и преку нив може да се изрази аналитичкиот Јакобијан на раката во функција од нејзиниот основен Јакобијан.

Со воведување на изразите (3.28) и (3.29) во (3.35) се добива:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}} \\ \dot{\mathbf{R}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_P(\mathbf{P})\mathbf{v} \\ \mathbf{E}_R(\mathbf{R})\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_P(\mathbf{P})\mathbf{J}_v(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{E}_R(\mathbf{R})\mathbf{J}_\omega(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_P(\mathbf{P})\mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \\ \mathbf{E}_R(\mathbf{R})\mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_P(\mathbf{P}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_R(\mathbf{R}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{P}}}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_{\dot{\mathbf{R}}}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

од каде се воспоставува следната општа врска помеѓу аналитичкиот и геометрискиот Јакобијан на една роботска рака:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_R(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_P(\mathbf{P}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_R(\mathbf{R}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Пример 3.4. Да се изведе врската помеѓу аналитичкиот и геометрискиот Јакобијан на роботска рака, чија позиција е дадена во Декартови координати, а ориентацијата е опишана со Ојлерови ZXZ-агли:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Решение: Во конкретниот случај, соодветните матрици $\mathbf{E}_P(\mathbf{P})$ и $\mathbf{E}_R(\mathbf{R})$ ќе бидат:

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_R(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} -\frac{S\phi C\theta}{S\theta} & \frac{C\phi C\theta}{S\theta} & 1 \\ C\phi & S\phi & 0 \\ \frac{S\phi}{S\theta} & -\frac{C\phi}{S\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

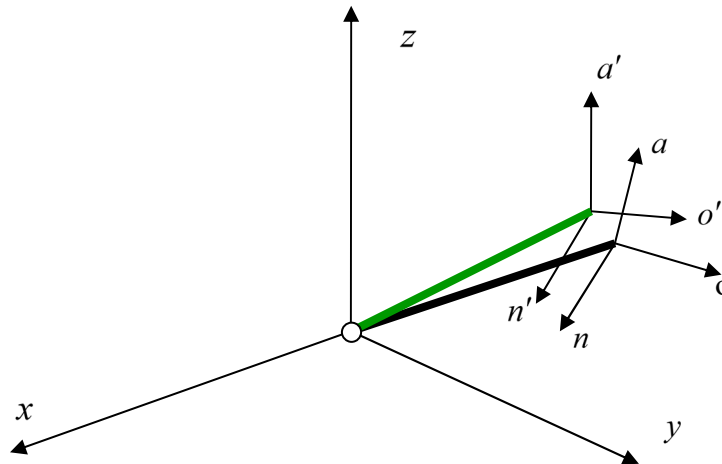
па, врската помеѓу аналитичкиот и геометрискиот Јакобијан на оваа роботска рака е дадена со матрицата:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_P(\mathbf{P}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_R(\mathbf{R}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{S\phi C\theta}{S\theta} & \frac{C\phi C\theta}{S\theta} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & C\phi & S\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{S\phi}{S\theta} & -\frac{C\phi}{S\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Повеќе за матриците $\mathbf{E}_R(\mathbf{R})$ можете да најдете на интернет страницата [10].

3.3. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ДВИЖЕЊА НА КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

На слика 3.3 е прикажано диференцијалното движење на еден координатен систем во однос на одбран референтен координатен систем.



Слика 3.3. Диференцијално движење на координатен систем

Во продолжение најнапред ќе бидат разгледани диференцијалните движења на подвижен координатен систем, потоа ќе бидат разгледани диференцијалните движења на една роботска рака, за на крај да се определи врската меѓу нив.

Диференцијалните движења на еден подвижен координатен систем можат да бидат:

- ❖ диференцијални транслации
- ❖ диференцијални ротации
- ❖ комбинација од диференцијални транслации и ротации (диференцијални трансформации)

3.3.1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ТРАНСЛАЦИИ

Под **диференцијална транслација** на еден координатен систем се подразбира транслациско движење на тој координатен систем долж координатните оски на референтниот координатен систем за многу мали (диференцијални) вредности dx , dy и dz . Ова движење е опишано со матрицата $\mathbf{Trans}(dx, dy, dz)$:

$$\mathbf{Trans}(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

3.3.2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РОТАЦИИ

Под **диференцијална ротација** се подразбира многу мала ротација на подвижниот координатен систем околу некоја од оските на референтниот координатен систем. Во општ случај диференцијалната ротација за агол $d\theta$ околу некоја оска \mathbf{k} се опишува со матрицата $\mathbf{R}(\mathbf{k}, d\theta)$. Конкретно, диференцијалните ротации на еден подвижен координатен систем околу оските на референтниот координатен систем (x, y, z) се означуваат со δx , δy и δz , соодветно, и се дефинирани со следните матрици:

$$\mathbf{R}(x, \delta x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta x) & -\sin(\delta x) & 0 \\ 0 & \sin(\delta x) & \cos(\delta x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{R}(y, \delta y) = \begin{bmatrix} \cos(\delta y) & 0 & \sin(\delta y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\delta y) & 0 & \cos(\delta y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{R}(z, \delta z) = \begin{bmatrix} \cos(\delta z) & -\sin(\delta z) & 0 & 0 \\ \sin(\delta z) & \cos(\delta z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & 0 & 0 \\ \delta z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Бидејќи аглите δx , δy и δz се многу мали, може да се применат следните апроксимации:

$$\sin \delta x \approx \delta x, \quad \sin \delta y \approx \delta y, \quad \sin \delta z \approx \delta z \quad (3.45)$$

и:

$$\cos \delta x \approx 1, \quad \cos \delta y \approx 1, \quad \cos \delta z \approx 1 \quad (3.46)$$

и тоа е сторено во изразите (3.42) – (3.44).

Множењето матрици во општ случај не е комутативно. Затоа редоследот на матриците при одредувањето на нивниот производ е многу битен во анализата на движењето на роботските раце, кое е претставено со соодветни матрици и нивни производи. Така, ако се помножат матриците на диференцијалните ротации (3.42) и (3.44) во различен редослед, ќе се добијат следните два различни резултати:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(x, \delta x) \cdot \mathbf{R}(z, \delta z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & 0 & 0 \\ \delta z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & 0 & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ \delta x \delta z & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.47}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(z, \delta z) \cdot \mathbf{R}(x, \delta x) &= \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & 0 & 0 \\ \delta z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta x \delta z & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

Меѓутоа, диференцијалните вредности се многу мали, па во математиката диференцијалите од повисок ред се сметаат за занемарливо мали величини и како такви можат да се испуштат. Така, со занемарување на производите $\delta x \delta z$ во изразите (3.47) и (3.48), за производите $\mathbf{R}(x, \delta x) \cdot \mathbf{R}(z, \delta z)$ и $\mathbf{R}(z, \delta z) \cdot \mathbf{R}(x, \delta x)$ се добива ист резултат. Тоа значи дека кај диференцијалните ротации редоследот на множење на матриците на диференцијални ротации не е битен.

3.3.3. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РОТАЦИЈА ОКОЛУ ПРОИЗВОЛНА ОСКА \mathbf{k}

Ротацијата околу произволна оска \mathbf{k} може да се претстави како комбинација од диференцијални ротации околу координатните оски (x, y, z) во произволен редослед и таа е опишана со следната матрица:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(\mathbf{k}, d\theta) &= \mathbf{R}(x, \delta x) \cdot \mathbf{R}(y, \delta y) \cdot \mathbf{R}(z, \delta z) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & 0 & 0 \\ \delta z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta x \delta y + \delta z & -\delta x \delta y \delta z + 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y + \delta x \delta z & \delta x + \delta y \delta z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Со занемарување на сите диференцијали од повисок ред, матрицата (3.49) добива облик:

$$\mathbf{R}(\mathbf{k}, d\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Пример 3.5. Да се определи вкупната диференцијална трансформација предизвикана од мали ротации околу координатните оски x , y и z за агли $\delta x = 0.04$, $\delta y = 0.06$ и $\delta z = 0.08$ радијани.

Решение: Со внесување на дадените вредности во (3.50) се добива:

$$\mathbf{R}(\mathbf{k}, d\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.08 & 0.06 & 0 \\ 0.08 & 1 & -0.04 & 0 \\ -0.06 & 0.04 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

3.3.4. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ТРАНСФОРМАЦИЈА И ПОИМ ЗА ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН ОПЕРАТОР

Диференцијалната трансформација на еден координатен систем е комбинација од диференцијални транслации и ротации. Ако оригиналниот координатен систем се означи со \mathbf{T} , а неговата промена како резултат од дадена диференцијална трансформација се означи со $d\mathbf{T}$, тогаш:

$$\mathbf{T} + d\mathbf{T} = \text{Trans}(dx, dy, dz) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{k}, d\theta) \cdot \mathbf{T} \quad (3.52)$$

или:

$$d\mathbf{T} = [\text{Trans}(dx, dy, dz) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{k}, d\theta) - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{T} \quad (3.53)$$

каде што \mathbf{I} е единичната матрица, а $d\mathbf{T}$ ја претставува промената на координатниот систем по диференцијалната трансформација.

Равенката (3.53) може да се запише како:

$$d\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{T} \quad (3.54)$$

каде што:

$$\Delta = \text{Trans}(dx, dy, dz) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{k}, d\theta) - \mathbf{I} \quad (3.55)$$

се нарекува **диференцијален оператор** и се пресметува како разлика од производот на матриците на диференцијални транслации и ротации и единичната матрица \mathbf{I} :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56) \end{aligned}$$

Ако еден координатен систем \mathbf{T} се помножи со диференцијалниот оператор Δ , ќе се добие неговата промена $d\mathbf{T}$ по соодветната диференцијална трансформација.

Треба да се воочи дека диференцијалниот оператор не претставува трансформацииска матрица или координатен систем. Тој е оператор кој предизвикува соодветни промени кај даден координатен систем.

Пример 3.6. Да се состави матрицата на диференцијалниот оператор за следните диференцијални трансформации:

$$dx=0.02, dy=0.06, dz=0.04, \delta x=0.01 \text{ rad}, \delta y=0.05 \text{ rad}, \delta z=0.03 \text{ rad} \quad (3.57)$$

Решение: Со воведување на дадените вредности во (3.56) се добива:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -0.03 & 0.05 & 0.02 \\ 0.03 & 0 & -0.01 & 0.06 \\ -0.05 & 0.01 & 0 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Пример 3.7. Да се определи влијанието на диференцијална ротација за агол од 0.02 радијани околу x -оската проследена со диференцијалната транслација $[0;0.08;0.04]$ врз даден координатен систем:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Решение: Промената во координатниот систем \mathbf{T} може да се определи како производ од диференцијалниот оператор и матрицата на координатниот систем:

$$d\mathbf{T} = \Delta \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 & 0.08 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 & -0.08 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

3.4. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ПРОМЕНА НА КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

Матрицата $d\mathbf{T}$ во равенките (3.52) и (3.53) ги претставува промените кај еден координатен систем предизвикани од диференцијални движења и, накусо, се нарекува **диференцијална промена** на координатниот систем. Елементите на оваа матрица се:

$$d\mathbf{T} = \begin{bmatrix} dn_x & do_x & da_x & dp_x \\ dn_y & do_y & da_y & dp_y \\ dn_z & do_z & da_z & dp_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Секој елемент од матрицата $d\mathbf{T}$ ја претставува промената на соодветниот елемент од координатниот систем. Така, dp_x означува дека координатниот систем е поместен за dp_x единици долж x -оската, додека da_z означува дека има промена од da_z единици во a_z компонентата на векторот \mathbf{a} . Конкретно, елементите на матрицата $d\mathbf{T}$ од претходниот пример дадена со (3.60) означуваат дека координатниот систем \mathbf{T} не претрпел никакво поместување долж x -оската, додека претрпел поместување од -0.08 единици долж y -оската и поместување од 0.12 единици долж z -оската. Исто така, набљудуваниот координатен систем \mathbf{T} е ротиран така што нема никаква промена во векторот \mathbf{n} , има промена од 0.02 единици во o_z компонентата од векторот \mathbf{o} и промена од -0.02 единици во a_y компонентата на векторот \mathbf{a} .

Пример 3.8. Да се определи положбата и ориентацијата на координатниот систем \mathbf{T} од претходниот пример 3.7, по извршените диференцијални движења.

Решение: Новата положба и ориентација на координатниот систем \mathbf{T} може да се добие така што настанатите промени ќе се додадат на оригиналните вредности:

$$\mathbf{T}_{\text{nova}} = \mathbf{T}_{\text{stara}} + d\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 & -0.08 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -0.02 & 3.92 \\ 0 & 0.02 & 1 & 8.12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Може да се забележи дека збирот на елементите по колони во трансформационската матрица (3.62) повеќе не изнесува 1, како што е тоа услов за трансформационските матрици кои претставуваат координатни системи во просторот. Меѓутоа, бидејќи диференцијалните движења се многу мали, и овие отстапувања се исто така многу мали, па се прифатливи. Приближно и понатаму збирот на елементите по колони во трансформационските матрици изнесува 1.

3.5. ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН ОПЕРАТОР ВО ОДНОС НА ПОДВИЖЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

Диференцијалниот оператор Δ во (3.56) е изведен во однос на референтниот координатен систем \mathbf{U} и фактички е ${}^{\mathbf{U}}\Delta$ оператор. Меѓутоа, може да се дефинира и оператор во однос на подвижниот координатен систем ${}^{\mathbf{T}}\Delta$. Тогаш, за да се определат промените во подвижниот координатен систем, неговата матрица \mathbf{T} треба да се помножи оддесно со диференцијалниот оператор ${}^{\mathbf{T}}\Delta$. Бидејќи се работи за исти промени, добиениот резултат е ист како и кога матрицата \mathbf{T} се множи од лево со диференцијалниот оператор ${}^{\mathbf{U}}\Delta = \Delta$:

$$d\mathbf{T} = \Delta \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot {}^{\mathbf{T}}\Delta \quad (3.63)$$

Равенката (3.63) може да се искористи за определување на диференцијалниот оператор ${}^{\mathbf{T}}\Delta$ во однос на подвижниот координатен систем \mathbf{T} :

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot \Delta \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot {}^{\mathbf{T}}\Delta = {}^{\mathbf{T}}\Delta \quad (3.64)$$

$${}^{\mathbf{T}}\Delta = \mathbf{T}^{-1} \cdot \Delta \cdot \mathbf{T} \quad (3.65)$$

Под претпоставка дека подвижниот координатен систем \mathbf{T} е зададен со $\mathbf{n, o, a, p}$ матрицата:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

инверзната матрица \mathbf{T}^{-1} кон матрицата \mathbf{T} е:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

па, за диференцијалниот оператор ${}^T\Delta$ се добива:

$${}^T\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -{}^T\delta_z & {}^T\delta_y & {}^Tdx \\ {}^T\delta_z & 0 & -{}^T\delta_x & {}^Tdy \\ -{}^T\delta_y & {}^T\delta_x & 0 & {}^Tdz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

каде што:

$${}^T\delta_x = \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n}$$

$${}^T\delta_y = \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{o}$$

$${}^T\delta_z = \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{a}$$

$${}^Tdx = \mathbf{n} \cdot [(\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{p}) + \mathbf{d}]$$

$${}^Tdy = \mathbf{o} \cdot [(\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{p}) + \mathbf{d}]$$

$${}^Tdz = \mathbf{a} \cdot [(\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{p}) + \mathbf{d}] \quad (3.69)$$

Со воведувањето на смените (3.69), изразот за диференцијалниот оператор ${}^T\Delta$ е доведен на ист облик како и изразот за диференцијалниот оператор ${}^U\Delta$.

Пример 3.9. Да се определи диференцијалниот оператор ${}^T\Delta$ за примерот 3.7.

Решение: Врз основа на информациите и добиеното решение во примерот 3.7, векторите \mathbf{n} , \mathbf{o} , \mathbf{a} , \mathbf{p} , $\boldsymbol{\delta}$, \mathbf{d} ги имаат следните вредности:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= [1 \ 0 \ 0]^T, \quad \mathbf{o} = [0 \ 1 \ 0]^T, \quad \mathbf{a} = [0 \ 0 \ 1]^T \\ \mathbf{p} &= [6 \ 4 \ 8]^T, \quad \boldsymbol{\delta} = [0.02 \ 0 \ 0]^T, \quad \mathbf{d} = [0 \ 0.08 \ 0.04]^T \end{aligned} \quad (3.70)$$

Оттука:

$$\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.02 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix} = [0 \ -0.16 \ 0.08]^T$$

$$(\delta \times \mathbf{p}) + \mathbf{d} = [0 \quad -0.16 \quad 0.08]^T + [0 \quad 0.08 \quad 0.04]^T = [0 \quad -0.08 \quad 0.12]^T$$

$${}^T dx = \mathbf{n} \cdot [(\delta \times \mathbf{p}) + \mathbf{d}] = 1(0) + 0(-0.08) + 0(0.12) = 0$$

$${}^T dy = \mathbf{o} \cdot [(\delta \times \mathbf{p}) + \mathbf{d}] = 0(0) + 1(-0.08) + 0(0.12) = -0.08$$

$${}^T dz = \mathbf{a} \cdot [(\delta \times \mathbf{p}) + \mathbf{d}] = 0(0) + 0(-0.08) + 1(0.12) = 0.12$$

$${}^T \delta x = \delta \cdot \mathbf{n} = 0.02(1) + 0(0) + 0(0) = 0.02$$

$${}^T \delta y = \delta \cdot \mathbf{o} = 0.02(0) + 0(1) + 0(0) = 0$$

$${}^T \delta z = \delta \cdot \mathbf{a} = 0.02(0) + 0(0) + 0(1) = 0 \quad (3.71)$$

па за диференцијалниот оператор ${}^T \Delta$ се добива:

$${}^T \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 & -0.08 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Како што може да се забележи, вредностите за ${}^T \Delta$ и ${}^U \Delta$ не се еднакви, меѓутоа ако матрицата \mathbf{T} се помножи со ${}^T \Delta$ од десно, ќе се добие истата вредност за $d\mathbf{T}$ како и во примерот 3.7:

$$\begin{aligned} d\mathbf{T} = \Delta \cdot \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 & 0.08 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 & -0.08 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot {}^T \Delta = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 & -0.08 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.73) \end{aligned}$$

Пример 3.10. Да се определи диференцијалниот оператор ${}^T\Delta$ директно од изразот за диференцијалниот оператор Δ од примерот 3.7.

Решение: Бидејќи диференцијалниот оператор Δ , кој ги опишува промените во зададениот координатен систем \mathbf{T} по извршените диференцијални движења е определен во примерот 3.7, со непосредна примена на формулата (3.65) за диференцијалниот оператор ${}^T\Delta$ се добива:

$$\begin{aligned} {}^T\Delta &= \mathbf{T}^{-1} \cdot \Delta \cdot \mathbf{T} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 & 0.08 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 & -0.08 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 & -0.08 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.74) \end{aligned}$$

3.6. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ДВИЖЕЊА НА РОБОТСКАТА РАКА И КООРДИНАТНИОТ СИСТЕМ ПРИДРУЖЕН СО НЕА

Во досегашното излагање беа разгледувани само промените во еден подвижен координатен систем кои настануваат како резултат од движењата на тој систем, независно од механизмот кој ги предизвикува тие движења. Во продолжение ќе биде покажано како движењата на механизмот, кој ги предизвикува промените во набљудуваниот координатен систем, се пресликуваат во тие промени. Во нашиот случај набљудуваниот механизам ќе биде роботска рака, а подвижниот координатен систем придружен со него е координатниот систем \mathbf{H} придружен со роботската рака.

Нека подвижниот координатен систем \mathbf{T} , набљудуван во делот 3.5, е координатниот систем \mathbf{H} придружен со последниот зглоб од роботската рака. Тогаш промените во компонентите на векторите $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{p}$, кои настануваат како резултат од движењата на набљудуваниот координатен систем, се дадени со $d\mathbf{T}$. Бидејќи координатниот систем \mathbf{T} е придружен со роботска рака, треба да се определи како диференцијалните движења на зглобовите од роботската рака се пресликуваат во движењата од координатниот систем \mathbf{T} и, посебно, во промените $d\mathbf{T}$. Се разбира, оваа зависност е функција од конфигурацијата и изведбата на роботската рака, но исто така и функција од мигновената позиција и ориентација на раката. На пример, една едноставна ротациска роботска рака од една страна, и Стенфордската роботска рака од друга страна, иста брзина на движење ќе остварат со многу различни брзини во зглобовите, бидејќи нивните изведби се многу различни. Истото важи и за позицијата и ориентацијата на двата типа роботски раце во време – ротациската роботска рака и Стенфордската роботска рака ќе остварат иста брзина на движење со различна позиција и ориентација во времето. Врската меѓу движењата во

зглобовите од една роботска рака и движењата на самата рака е опишана со Јакобијанот на роботската рака, како што е дадено со (3.25) односно (3.26).

3.7. ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ЈАКОБИЈАНОТ НА РОБОТСКАТА РАКА

Нека набљудуваната роботска рака има n краци и нека со q_1, q_2, \dots, q_n се означени променливите на зглобовите од роботската рака. Ако i е транслациски зглоб, $q_i = d_i$ е растојание; кога i е ротациски зглоб, $q_i = \theta_i$ е агол. Положбата на оваа роботска рака во просторот е одредена со нејзината трансформацииска матрица:

$${}^0\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

каде што $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$ е вектор на променливите на зглобовите од роботската рака, $\{n\}$ е координатниот систем придружен со извршниот елемент од раката, додека $\{0\}$ е координатниот систем придружен со основата од роботската рака. Матрицата ${}^0\mathbf{T}_n$ всушност ја дефинира трансформацијата на координатниот систем $\{n\}$ во координатниот систем $\{0\}$.

Матрицата (3.75) може да се запише и на следниот начин:

$${}^0\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_n(\mathbf{q}) & {}^0\mathbf{P}_n(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

каде што матрицата ${}^0\mathbf{R}_n(\mathbf{q})$ ја дефинира ориентацијата на координатниот систем $\{n\}$ во однос на координатниот систем $\{0\}$, односно ориентацијата на роботската рака во однос на нејзината основа, додека векторот ${}^0\mathbf{P}_n(\mathbf{q})$ ја задава положбата на координатниот почеток P од координатниот систем $\{n\}$ во однос на координатниот систем $\{0\}$, односно позицијата на роботската рака во просторот во однос на нејзината основа. Кога набљудуваната роботска рака се движи во просторот, \mathbf{q} , ${}^0\mathbf{R}_n(\mathbf{q})$ и ${}^0\mathbf{P}_n(\mathbf{q})$ се функции од времето. Со други зборови, при нејзиното движење, позицијата и ориентацијата на роботската рака во просторот се менуваат со текот на времето.

Одредувањето на Јакобијанот на една роботска рака е едноставно, ако е позната директната кинематика на раката, бидејќи сè што е потребно се соодветните трансформациски матрици ${}^0\mathbf{T}_i$; $i = 1, 2, \dots, n$. Во продолжение е прикажано најнапред одредувањето на Јакобијанот на линеарната брзина на раката, а потоа и одредувањето на Јакобијанот на нејзината аголна брзина.

3.7.1. ОДРЕДУВАЊЕ НА ЈАКОБИЈАНОТ НА ЛИНЕАРНАТА БРЗИНА

Јакобијанот на линеарната брзина на раката се добива со диференцирање на векторот ${}^0\mathbf{P}_n(\mathbf{q})$ по времето. Притоа, ако со \mathbf{J}_{v_i} се означат колоните од матрицата \mathbf{J}_v , ќе важи:

$$\mathbf{J}_{v_i} = \frac{\partial {}^0\mathbf{P}_n}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.77)$$

па може да се напише:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{v_1} & \mathbf{J}_{v_2} & \dots & \mathbf{J}_{v_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^0\mathbf{P}_n}{\partial q_1} & \frac{\partial {}^0\mathbf{P}_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial {}^0\mathbf{P}_n}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Пример 3.11. Да се определи Јакобијанот на линеарната брзина на една роботска рака дефинирана во цилиндрични координати.

Решение: Трансформациската матрица на едена цилиндрична роботска рака е:

$$\mathbf{T}_{\text{cyl}}(r, \alpha, l) = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & rC\alpha \\ S\alpha & C\alpha & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

каде што r, α, l се променливи на нејзините зглобови.

Позицијата на набљудуваната роботска рака во просторот е одредена со првите три елементи во последната колона од матрицата (3.79):

$$\begin{aligned} x &= rC\alpha \\ y &= rS\alpha \\ z &= l \end{aligned} \quad (3.80)$$

со чие диференцирање се добиваат компонентите на линеарната брзина на раката во правец на координатните оски x, y и z :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}C\alpha - r\dot{\alpha}S\alpha \\ \dot{y} &= \dot{r}S\alpha + r\dot{\alpha}C\alpha \\ \dot{z} &= \dot{l} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Равенките (3.81) можат да се запишат во матричен облик:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\alpha & -rS\alpha & 0 \\ S\alpha & rC\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{l} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

каде што $[\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ е векторот на линеарната брзина на набљудуваната роботска рака \mathbf{v} , $[\dot{r} \ \dot{\alpha} \ \dot{l}]^T$ е векторот на брзините на зглобовите на роботската рака $\dot{\mathbf{q}}$, додека матрицата:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} C\alpha & -rS\alpha & 0 \\ S\alpha & rC\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

е бараниот Јакобијан на линеарната брзина на цилиндричната роботска рака.

Пример 3.12. Да се определи Јакобијанот на линеарната брзина на роботска рака дефинирана во сферен координатен систем.

Решение: Трансформациската матрица на една сферна роботска рака е:

$$\mathbf{T}_{\text{sph}}(r, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} C\beta C\gamma & -S\gamma & S\beta C\gamma & rS\beta C\gamma \\ C\beta S\gamma & C\gamma & S\beta S\gamma & rS\beta S\gamma \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

каде што r, β, γ се променливи на нејзините зглобови.

Позицијата на набљудуваната роботска рака во просторот е одредена со првите три елементи во последната колона од матрицата (3.84):

$$\begin{aligned} x &= rS\beta C\gamma \\ y &= rS\beta S\gamma \\ z &= rC\beta \end{aligned} \quad (3.85)$$

па, со нивно диференцирање по времето се добиваат компонентите на линеарната брзина на раката во правец на координатните оски x, y и z :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}S\beta C\gamma + r\dot{\beta}C\beta C\gamma - r\dot{\gamma}S\beta S\gamma \\ \dot{y} &= \dot{r}S\beta S\gamma + r\dot{\beta}C\beta S\gamma + r\dot{\gamma}S\beta C\gamma \\ \dot{z} &= \dot{r}C\beta - r\dot{\beta}S\beta \end{aligned} \quad (3.86)$$

или во матричен облик:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S\beta C\gamma & rC\beta C\gamma & -rS\beta S\gamma \\ S\beta S\gamma & rC\beta S\gamma & rS\beta C\gamma \\ C\beta & -rS\beta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Следствено, бараниот Јакобијан на линейната брзина на една роботска рака претставена во сферни координати е:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} S\beta C\gamma & rC\beta C\gamma & -rS\beta S\gamma \\ S\beta S\gamma & rC\beta S\gamma & rS\beta C\gamma \\ C\beta & -rS\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Пример 3.13. Дадени се брзините на зглобовите на сферната роботска рака од претходниот пример 3.12 : $\dot{r} = 0.05 \text{ m/sec}$, $\dot{\beta} = 0.02 \text{ rad/sec}$, $\dot{\gamma} = 0.06 \text{ rad/sec}$. Да се определи линейната брзина на оваа рака, ако $r = 0.25\text{m}$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

Решение: Јакобијанот на линейната брзина на сферната роботска рака од примерот 3.12, за конкретните вредности на неговите променливи изнесува:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.09 & -0.15 \\ 0.61 & 0.15 & 0.09 \\ 0.71 & -0.18 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Следствено:

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_v \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.09 & -0.15 \\ 0.61 & 0.15 & 0.09 \\ 0.71 & -0.18 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.02 \\ 0.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.04 \\ 0.03 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

3.7.2. ОДРЕДУВАЊЕ НА ЈАКОБИЈАНОТ НА АГОЛНАТА БРЗИНА

Одредувањето на Јакобијанот на аголната брзина на една роботска рака \mathbf{J}_ω не е така едноставно како одредувањето на Јакобијанот на линейната брзина \mathbf{J}_v , бидејќи \mathbf{J}_ω не претставува извод од ни една конкретна величина на роботската рака. Затоа, \mathbf{J}_ω се определува на следниот начин.

Имајќи на ум дека аголните брзини, доколку се дефинирани во однос на ист координатен систем, можат да се собираат како слободни вектори, аголната брзина на една роботска рака во однос на нејзината основа може да се претстави како збир од компонентите на аголната брзина предизвикани од ротацијата на секој зглоб одделно:

$${}^o \boldsymbol{\omega}_n = \sum_{i=1}^n {}^o \boldsymbol{\omega}_i \quad (3.91)$$

Ако i -тиот зглоб е ротациски, тогаш неговата променлива $q_i = \theta_i$ е аголот на ротација околу оската \mathbf{z}_{i-1} придружена со тој зглоб, па за аголната брзина ${}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_i$ важи:

$${}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_i = \dot{q}_i {}^{i-1}\mathbf{z}_{i-1} = \dot{q}_i \mathbf{k} \quad (3.92)$$

при што ${}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_i$ е аголната брзина на кракот i предизвикана од ротацијата на зглобот i изразена во однос на координатниот систем $\{i-1\}$, \mathbf{z}_{i-1} е оската на ротација на кракот i , додека \mathbf{k} е единичниот вектор $\mathbf{k} = [0 \ 0 \ 1]^T$.

Ако i -тиот зглоб е транслациски, тогаш неговата променлива е $q_i = d_i$, што значи дека движењето на координатниот систем $\{i\}$ во однос на координатниот систем $\{i-1\}$ претставува чиста транслација, па, во отсуство на какво и да било ротациско движење:

$${}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_i = 0 \quad (3.93)$$

Со други зборови, кога зглобот i е транслациски, аголната брзина на роботската рака не зависи од променливата $q_i = d_i$. Оттука, вкупната аголна брзина на набљудуваната роботска рака (3.91) може да се претстави на следниот начин:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_n = \sum_{i=1}^n {}^0\boldsymbol{\omega}_i = \sum_{i=1}^n \rho_i \dot{q}_i {}^0\mathbf{z}_{i-1} \quad (3.94)$$

каде што коефициентот ρ_i е еднаков на единица за ротациски зглоб и еднаков на нула за транслациски зглоб. Оттука:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_n = \sum_{i=1}^n {}^0\boldsymbol{\omega}_i = \sum_{i=1}^n \rho_i \dot{q}_i {}^0\mathbf{z}_{i-1} = \begin{bmatrix} \rho_1 {}^0\mathbf{z}_0 & \rho_2 {}^0\mathbf{z}_1 & \cdots & \rho_n {}^0\mathbf{z}_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_\omega \dot{\mathbf{q}} \quad (3.95)$$

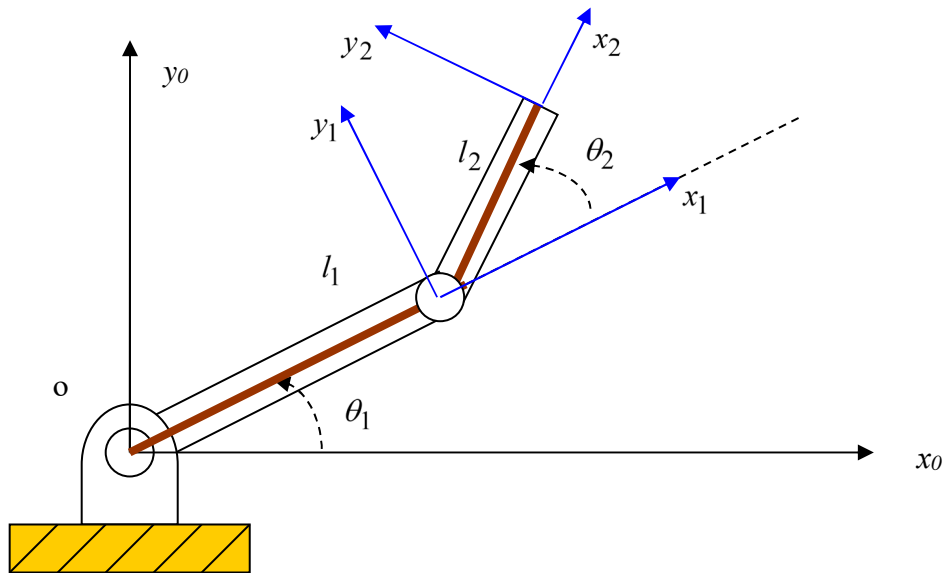
Оските на ротација ${}^0\mathbf{z}_{i-1}$ се дефинирани во однос на координатниот систем $\{0\}$ и можат да се претстават со производот:

$${}^0\mathbf{z}_{i-1} = {}^0\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{k} \quad (3.96)$$

па, од (3.96) е јасно дека за ротациски зглоб векторот ${}^0\mathbf{z}_{i-1}$ го чинат првите три елементи од третата колона на соодветната матрица ${}^0\mathbf{T}_{i-1}$. Следствено, ако со \mathbf{J}_ω се означат колоните од матрицата \mathbf{J}_ω , тогаш може да се запише:

$$\mathbf{J}_\omega = [\mathbf{J}_{\omega_1} \quad \mathbf{J}_{\omega_2} \quad \dots \quad \mathbf{J}_{\omega_n}] = [\rho_1 {}^o\mathbf{R}_o \mathbf{k} \quad \rho_2 {}^o\mathbf{R}_1 \mathbf{k} \quad \dots \quad \rho_n {}^o\mathbf{R}_{n-1} \mathbf{k}] \quad (3.97)$$

Пример 3.14. Дадена е роботската рака од сликата 3.4. Да се определат нејзините Јакобијани \mathbf{J}_v , \mathbf{J}_ω и \mathbf{J} .



Слика 3.4. Илустрација кон примерот 3.14

Решение: D-H параметрите на набљудуваната роботска рака од сликата 3.4 се дадени во таблицата 3.1.

Таблица 3.1. D-H параметри на роботската рака од сликата 3.4

крак	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	l_1	0
2	θ_2	0	l_2	0

Врз основа на овие параметри се определуваат матриците:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

и соодветните трансформационски матрици:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

$${}^0\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

Бидејќи координатите на позиција на набљудуваната роботска рака се:

$$\begin{aligned} x &= l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ y &= l_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ z &= 0 \end{aligned} \quad (3.101)$$

нејзините равенки на линеарна брзина ќе бидат:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -l_1 S_1 \dot{\theta}_1 - l_2 S_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{y} &= l_1 C_1 \dot{\theta}_1 + l_2 C_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.102)$$

Оттука, за Јакобијанот на линеарната брзина се добива:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Јакобијанот на агловата брзина е:

$$\mathbf{J}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

а вкупниот Јакобијан:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

3.8. ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ЈАКОБИЈАНОТ НА РОБОТСКАТА РАКА ВО ОДНОС НА КООРДИНАТНИОТ СИСТЕМ ПРИДРУЖЕН СО ПОСЛЕДНИОТ ЗГЛОБ ОД РАКАТА

Брзината на една роботска рака во однос на последниот координатен систем може да се определи според формулата:

$${}^T_6 \mathbf{D} = {}^T_6 \mathbf{J} \cdot \mathbf{D}_q \quad (3.106)$$

која покажува дека диференцијалните движења ${}^T_6 \mathbf{D}$ на роботската рака во однос на последниот координатен систем T_6 се добиваат кога матрицата на диференцијални движења на зглобовите од роботската рака \mathbf{D}_q се помножи од лево со Јакобијанот ${}^T_6 \mathbf{J}$. Притоа, Јакобијанот ${}^T_6 \mathbf{J}$ кој е дефиниран во однос на координатниот систем T_6 се пресметува со помош на следната едноставна постапка.

Равенките на диференцијалните движења на роботската рака можат да се претстават со формулата:

$$\begin{bmatrix} {}^T_6 dx \\ {}^T_6 dy \\ {}^T_6 dz \\ {}^T_6 \delta x \\ {}^T_6 \delta y \\ {}^T_6 \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^T_6 J_{11} & {}^T_6 J_{12} & {}^T_6 J_{13} & {}^T_6 J_{14} & {}^T_6 J_{15} & {}^T_6 J_{16} \\ {}^T_6 J_{21} & {}^T_6 J_{22} & {}^T_6 J_{23} & {}^T_6 J_{24} & {}^T_6 J_{25} & {}^T_6 J_{26} \\ {}^T_6 J_{31} & {}^T_6 J_{32} & {}^T_6 J_{33} & {}^T_6 J_{34} & {}^T_6 J_{35} & {}^T_6 J_{36} \\ {}^T_6 J_{41} & {}^T_6 J_{42} & {}^T_6 J_{43} & {}^T_6 J_{44} & {}^T_6 J_{45} & {}^T_6 J_{46} \\ {}^T_6 J_{51} & {}^T_6 J_{52} & {}^T_6 J_{53} & {}^T_6 J_{54} & {}^T_6 J_{55} & {}^T_6 J_{56} \\ {}^T_6 J_{61} & {}^T_6 J_{62} & {}^T_6 J_{63} & {}^T_6 J_{64} & {}^T_6 J_{65} & {}^T_6 J_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ dq_5 \\ dq_6 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Ако зглобот i е ротациски зглоб, тогаш елементите на Јакобијанот во (3.107) се пресметуваат на следниот начин [11]:

$${}^T_6 J_{1i} = -n_x p_y - n_y p_x$$

$${}^T_6 J_{2i} = -o_x p_y + o_y p_x$$

$${}^T_6 J_{3i} = -a_x p_y + a_y p_x$$

$${}^T_6 J_{4i} = n_z$$

$$\begin{aligned} T_6 J_{5i} &= o_z \\ T_6 J_{6i} &= a_z \end{aligned} \quad (3.108)$$

Доколку, пак, зглобот i е призматичен зглоб, тогаш елементите на Јакобијанот во (3.107) се пресметуваат според формулите [11]:

$$\begin{aligned} T_6 J_{1i} &= n_z \\ T_6 J_{2i} &= o_z \\ T_6 J_{3i} &= a_z \\ T_6 J_{4i} &= 0 \\ T_6 J_{5i} &= 0 \\ T_6 J_{6i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.109)$$

Во равенките (3.108) и (3.109) за i -тата колона се усвојуваат елементите од матрицата ${}^{i-1}\mathbf{T}_6$:

$$\begin{aligned} i = 1: \quad {}^0\mathbf{T}_6 &= \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{A}_5\mathbf{A}_6 \\ i = 2: \quad {}^1\mathbf{T}_6 &= \mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{A}_5\mathbf{A}_6 \\ i = 3: \quad {}^2\mathbf{T}_6 &= \mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{A}_5\mathbf{A}_6 \\ i = 4: \quad {}^3\mathbf{T}_6 &= \mathbf{A}_4\mathbf{A}_5\mathbf{A}_6 \\ i = 5: \quad {}^4\mathbf{T}_6 &= \mathbf{A}_5\mathbf{A}_6 \\ i = 6: \quad {}^5\mathbf{T}_6 &= \mathbf{A}_6 \end{aligned} \quad (3.110)$$

Општо земено, Јакобијанот на една роботска рака може да се претстави во однос на произволни координатни системи придружени со раката. Тогаш помеѓу Јакобијанот претставен во координатниот систем \mathbf{A} и Јакобијанот претставен во координатниот систем \mathbf{B} важи следната релација:

$$\mathbf{B} \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{R}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \mathbf{R}_A \end{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{J} \quad (3.111)$$

Во пракса се покажува најповолно Јакобијанот на роботската рака да се пресметува во однос на координатен систем придружен со зглоб во средината на раката, затоа што на тој начин се добиваат наједноставни елементи на Јакобијанот. Потоа Јакобијанот во однос на основата од раката, односно координатниот систем $\{0\}$, може да се добие со помош на трансформацијата (3.111).

3.9. ВРСКА ПОМЕЃУ ЈАКОБИЈАНОТ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИОТ ОПЕРАТОР

Нека, под претпоставка, зглобовите на роботската рака се придвижени за диференцијални вредности \mathbf{D}_q . Врз основа на равенката (3.26), доколку е познат Јакобијанот на роботската рака, може да се пресмета матрицата \mathbf{D} , која ги содржи вредностите за диференцијалните движења на раката $dx, dy, dz, \delta x, \delta y, \delta z$. Со воведување на овие вредности во равенката (3.56), се пресметува диференцијалниот оператор на роботот Δ , а со помош на него се пресметува диференцијалната промена $d\mathbf{T}$ на координатниот систем на роботската рака \mathbf{T} , дефинирана со (3.54). Матрицата $d\mathbf{T}$ овозможува да се пресмета новата положба на координатниот систем придружен со раката, предизвикана од диференцијалните движења во нејзините зглобови.

Алтернативно, равенката (3.107) и Јакобијанот можат да се употребат за пресметување на матрицата ${}^T_6\mathbf{D}$, чии елементи се диференцијалните движења на раката во однос на подвижниот координатен систем \mathbf{T}_6 : ${}^T_6dx, {}^T_6dy, {}^T_6dz, {}^T_6\delta x, {}^T_6\delta y, {}^T_6\delta z$. Со помош на овие вредности, според равенката (3.65), се пресметува диференцијалниот оператор ${}^T_6\Delta$, а со помош на него повторно може да се определи матрицата $d\mathbf{T}$.

Пример 3.15. Дадени се трансформационската матрица \mathbf{T}_5 , Јакобијанот \mathbf{J} и векторот на диференцијални движења на зглобовите \mathbf{D}_q на роботска рака со пет степени слобода на движење. Конфигурацијата на роботската рака е 2RP2R. Да се определи новата положба на роботската рака по извршените диференцијални движења:

$$\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

$$\mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ dq_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.08 \\ -0.04 \\ 0.06 \\ 0.15 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Решение: Нека, под претпоставка, роботската рака може да ротира само околу x и y –оската, бидејќи има пет степени слобода на движење. Диференцијалните движења на роботската рака \mathbf{D} , предизвикани од диференцијалните движења на нејзините зглобови \mathbf{D}_q , се определуваат врз основа на равенството (3.26):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.08 \\ -0.04 \\ 0.06 \\ 0.15 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.24 \\ -0.1 \\ -0.16 \\ 0.11 \\ -0.08 \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

Диференцијалниот оператор на набљудуваната роботска рака се пресметува врз основа на изразот (3.56), кога во него ќе се воведат конкретните вредности за dx , dy , dz , δx , δy дадени со (3.115):

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.08 & 0.24 \\ 0 & 0 & -0.11 & -0.1 \\ 0.08 & 0.11 & 0 & -0.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Промената во положбата од роботската рака, која настанала како резултат на извршените диференцијални движења од зглобовите на раката, е дадена со (3.54) и во конкретниот случај изнесува:

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_5 &= \Delta \cdot \mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.08 & 0.24 \\ 0 & 0 & -0.11 & -0.1 \\ 0.08 & 0.11 & 0 & -0.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.08 & -0.16 \\ 0 & 0 & -0.11 & -0.65 \\ 0.11 & -0.08 & 0 & 0.44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.117) \end{aligned}$$

Новата положба на роботската рака во просторот е одредена со изразот (3.27) и таа изнесува:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{5_{\text{nova}}} &= \mathbf{T}_{5_{\text{stara}}} + d\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.08 & -0.16 \\ 0 & 0 & -0.11 & -0.65 \\ 0.11 & -0.08 & 0 & 0.44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -0.08 & 1.84 \\ 1 & 0 & -0.11 & 3.35 \\ 0.11 & -0.08 & 1 & 5.44 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.118)$$

3.10. ИНВЕРЗЕН ЈАКОБИЈАН

За да можат да се определат диференцијалните движења или брзините во зглобовите на роботската рака, кои се неопходни да се постигне саканото диференцијално движење на раката, потребно е да се реши равенката (3.26) во однос на \mathbf{D}_q , што претпоставува одредување на инверзната матрица кон Јакобијанот на роботската рака:

$$\mathbf{D} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{D}_q$$

$$\mathbf{J}^{-1} \mathbf{D} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{D}_q$$

$$\mathbf{D}_q = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{D} \quad (3.119)$$

На сличен начин се добива:

$${}^{T_6} \mathbf{D} = {}^{T_6} \mathbf{J} \cdot \mathbf{D}_q$$

$${}^{T_6} \mathbf{J}^{-1} \cdot {}^{T_6} \mathbf{D} = {}^{T_6} \mathbf{J}^{-1} \cdot {}^{T_6} \mathbf{J} \cdot \mathbf{D}_q$$

$$\mathbf{D}_q = {}^{T_6} \mathbf{J}^{-1} \cdot {}^{T_6} \mathbf{D} \quad (3.120)$$

Постојат два начини за определување на инверзниот Јакобијан на една роботска рака. Еден начин е најнапред да се определи општ израз за инверзниот Јакобијан и, потоа, во него да се воведат конкретните вредности. Втор начин е најнапред да се пресмета самиот Јакобијан и, потоа, да се најде неговата инверзна матрица. И двата се многу сложени, обемни и долготрајни. Заради тоа, брзините на зглобовите на роботската рака се определуваат од кинематските равенки на раката, како што е илустрирано со следниот пример.

Пример 3.16. Да се пресметаат диференцијалните движења на роботската рака од примерот 2.24.

Решение: Диференцијалното движење $d\theta_1$ се добива со диференцирање на равенката:

$$p_x S_1 - p_y C_1 = 0 \Rightarrow \quad (3.121)$$

$$S_1 dp_x + p_x C_1 d\theta_1 = C_1 dp_y - p_y S_1 d\theta_1$$

$$(p_x C_1 + p_y S_1) d\theta_1 = -S_1 dp_x + C_1 dp_y$$

$$d\theta_1 = \frac{-S_1 dp_x + C_1 dp_y}{p_x C_1 + p_y S_1} \quad (3.122)$$

На сличен начин, со диференцирање на равенката:

$$-S_{234}(C_1 a_x + S_1 a_y) + C_{234} a_z = 0 \quad (3.123)$$

се добива збирот од три диференцијални движења $d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4$, како функција од познати вредности, бидејќи da_x , da_y и da_z се елементи на матрицата $d\mathbf{T}$:

$$\begin{aligned} & C_{234}(d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4)(C_1 a_x + S_1 a_y) + \\ & + S_{234} \left[-S_1 a_x d\theta_1 + C_1 da_x + C_1 a_y d\theta_1 + S_1 da_y \right] + \\ & + S_{234} (d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4) a_z - C_{234} da_z = 0 \\ (d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4) &= \frac{S_{234} [S_1 a_x d\theta_1 - C_1 da_x - C_1 a_y d\theta_1 - S_1 da_y] + C_{234} da_z}{C_{234} (C_1 a_x + S_1 a_y) + S_{234} a_z} \end{aligned} \quad (3.124)$$

Диференцијалното движење $d\theta_3$ се добива со диференцирање на равенката:

$$2a_2 a_3 C_3 = (p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4)^2 + (p_z - S_{234} a_4)^2 - a_2^2 - a_3^2 \Rightarrow \quad (3.125)$$

$$-2a_2 a_3 S_3 d\theta_3 = 2(p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4) [C_1 dp_x - p_x S_1 d\theta_1 + S_1 dp_y +$$

$$+ p_y C_1 d\theta_1 + a_4 S_{234} (d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4)] +$$

$$+ 2(p_z - S_{234} a_4) [dp_z - a_4 C_{234} (d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4)] \quad (3.126)$$

која, без оглед на нејзината должина, може да се реши во однос на непознатата $d\theta_3$ зашто сите останати елементи во неа се веќе познати.

Диференцијалното движење $d\theta_4$ се добива со диференцирање на равенката:

$$S_2 [(a_3 C_3 + a_2)^2 + S_3^2 a_3^2] = (C_3 a_3 + a_2) (p_z - S_{234} a_4) -$$

$$-S_3 a_3 (p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4) \Rightarrow \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned} & C_2 d\theta_2 \left[(a_3 C_3 + a_2)^2 + S_3^2 a_3^2 \right] + S_2 \left[2(a_3 C_3 + a_2)(-a_3 S_3 d\theta_3) + 2S_3 C_3 a_3^2 d\theta_3 \right] = \\ & = -a_3 S_3 d\theta_3 (p_z - S_{234} a_4) + (C_3 a_3 + a_2) [dp_z - a_4 C_{234} (d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4)] - \\ & - a_3 C_3 d\theta_3 (p_x C_1 + p_y S_1 - C_{234} a_4) - S_3 a_3 \left[C_1 dp_x - p_x S_1 d\theta_1 + S_1 dp_y + \right. \\ & \left. + p_y C_1 d\theta_1 + a_4 S_{234} (d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4) \right] \end{aligned} \quad (3.128)$$

Диференцијалното движење $d\theta_5$ се определува со диференцирање на равенката:

$$C_5 = -C_1 a_y + S_1 a_x \Rightarrow \quad (3.129)$$

$$-S_5 d\theta_5 = S_1 a_y d\theta_1 - C_1 da_y + C_1 a_x d\theta_1 + S_1 da_x \quad (3.130)$$

и, конечно, диференцијалното движење $d\theta_6$ се добива со диференцирање на равенката:

$$S_6 = -S_{234} (C_1 n_x + S_1 n_y) + C_{234} n_z \Rightarrow \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} C_6 d\theta_6 & = -C_{234} (C_1 n_x + S_1 n_y) (d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4) - \\ & - S_{234} (-S_1 n_x d\theta_1 + C_1 dn_x + C_1 n_y d\theta_1 + S_1 dn_y) - \\ & - S_{234} n_z (d\theta_2 + d\theta_3 + d\theta_4) + C_{234} dn_z \end{aligned} \quad (3.132)$$

Како што може да се забележи, постојат шест диференцијални равенки од кои се пресметуваат диференцијалните движења на зглобовите на набљудуваната роботска рака. Со помош на нив можат да се определат брзините во зглобовите од раката. Во пракса, овие шест диференцијални равенки и нивните решенија се програмираат во роботскиот управувачки дел, со што му е овозможено на управувачкиот орган на роботската рака брзо да ги пресметува потребните брзини на нејзините зглобови и успешно да ја движи раката.

Инверзна матрица кон Јакобијанот може да се најде само доколку Јакобијанот е квадратна матрица. Во продолжение ќе разгледаме што се случува доколку $n \neq 6$. За таа цел, нека набљудуваме роботска рака со само 4 зглобови. Во овој случај Јакобијанот на раката ќе има само 4 колони:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

Оваа матрица не е квадратна, $n < 6$, и не може да се најде нејзина инверзна матрица. Меѓутоа, тоа не мора да претставува проблем. Како што е познато, овој робот не може да ротира околу x - и y -оската, затоа што така е проектиран, па, ако ги избришеме овие елементи од матричната равенка за векторот на просторната брзина на раката (бидејќи не можеме да ја контролираме брзината на раката околу овие оски), ќе добиеме квадратна матрица за нејзиниот Јакобијан:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ \hline J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \\ \hline J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

Матрицата во (3.134) може да се инвертира.

Во продолжение ќе набљудуваме роботска рака со $n = 100$ зглобови. Јакобијанот на оваа роботска рака претставува матрица со димензија 6×100 , која очигледно не е квадратна и не може да се инвертира. Меѓутоа, може да се определи нејзина псевдоинверзна матрица $\mathbf{J}^+(\mathbf{q})$, која се пресметува на следниот начин:

$$\mathbf{J}^+(\mathbf{q}) = [\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})]^{-1} \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \quad (3.135)$$

На прв поглед изгледа едноставно, меѓутоа не е, ако се сетиме дека $[\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})]^{-1}$ е матрица со димензија 100×100 . Како и да е, псевдоинверзната матрица овозможува да се определи брзината на секој од 100-те зглобови за дадена просторна брзина на раката.

3.11. СИНГУЛАРИТЕТИ НА РОБОТСКАТА РАКА

Јакобијанот \mathbf{J} на една роботска рака, кој има димензии $6 \times n$, го дефинира пресликувањето

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (3.136)$$

помеѓу векторот $\dot{\mathbf{q}}$ на брзините на зглобовите и векторот $\boldsymbol{\Omega}$ на брзините на раката. Тоа значи дека брзините на раката претставуваат линеарна комбинација од колоните на нејзиниот Јакобијан:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2 \quad \dots \quad \mathbf{J}_n] \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1 \dot{q}_1 + \mathbf{J}_2 \dot{q}_2 + \dots + \mathbf{J}_n \dot{q}_n \quad (3.137)$$

Бидејќи векторот $\boldsymbol{\Omega}$ има димензија 6×1 , односно $\boldsymbol{\Omega} \in \mathfrak{R}^6$, за роботската рака да може да оствари произволна брзина, потребно е нејзиниот Јакобијан да има шест линеарно независни колони. Од друга страна, рангот на една матрица е еднаков со бројот линеарно независни колони (или редици) на таа матрица. Следствено, една роботска рака може да оствари произволна брзина на движење доколку нејзиниот Јакобијан има ранг еднаков на 6.

Рангот на една матрица не мора секогаш да биде константен. Така, **рангот на Јакобијанот на една роботска рака зависи од нејзината конфигурација \mathbf{q}** . Конфигурациите за кои рангот на матрицата $\mathbf{J}(\mathbf{q})$, каде што $\text{rang} \mathbf{J} \leq \min(6, n)$ за матрица $\mathbf{J} \in \mathfrak{R}^{6 \times n}$, е помал од неговата максимална вредност се нарекуваат **сингуларитети** или **сингуларни конфигурации**.

Сингуларитетите претставуваат конфигурации со кои роботската рака не може да оствари движење во еден или повеќе правци. Со други зборови, сингуларните конфигурации ја ограничуваат можноста на роботската рака да се движи слободно во нејзиниот работен простор. Така, при сингуларна конфигурација, извршниот елемент на раката ја губи можноста да се движи долж одредена оска или да ротира околу неа во Декартовиот координатен систем. Губитокот на степен слобода на движење во сингуларната конфигурација е придружен со способност на раката да „одолеа“ на силите и вртливите моменти кои дејствуваат во правецот во кој е изгубена можноста за движење. Со други зборови, силите и вртливите моменти кои дејствуваат на крајот од раката во сингуларна конфигурација, не предизвикуваат никакви сили и вртливи моменти во зглобовите од раката.

Како пример може да се набљудува рамнинската роботска рака од слика 3.4 со два ротациски зглоба, односно два степени слобода на движење. Нејзини сингуларни конфигурации се кога двата крака се колинеарни. Тогаш извршниот елемент на

раката не може да се движи во правец на поклопените краци. Друг пример е Стенфордската роботска рака која има 2RP3R–конфигурација. Таа има сингуларна конфигурација кога оските 4 и 6 се колинеарни, и тогаш извршниот елемент од раката не е во состојба да ротира околу нормалата на рамнината одредена со оските 4 и 5.

Генерално гледано:

- Во сингуларните конфигурации, извршниот елемент од раката не може да се движи во одреден правец или да ротира околу одредена оска, што значи дека и покрај промената на брзините на зглобовите од раката, резултантната линеарна односно аголна брзина на извршниот елемент од раката ќе биде нулева.
- При сингуларни конфигурации, ограничените по величина брзини на роботската рака можат да соодветствуваат на неограничени по величина брзини на зглобовите од раката.
- При сингуларни конфигурации, ограничени по величина вртливи моменти на зглобовите од роботската рака можат да соодветствуваат на неограничени по величина сили и вртливи моменти на раката.
- Сингуларитетите често соодветствуваат на граничните точки од работниот простор на раката.
- Сингуларитетите соодветствуваат на точки од работниот простор на роботската рака кои при мали отстапувања на параметрите на раката се недостапни.

Постојат повеќе начини за определување на сингуларитетите на Јакобијанот на една роботска рака. Имајќи на ум дека една квадратна матрица е сингуларна кога нејзината детерминанта е еднаква на нула, сингуларитетите на роботската рака можат да се определат од условот:

$$|\mathbf{J}| = \det \mathbf{J} = 0 \quad (3.138)$$

Со други зборови, при сингуларни конфигурации, некои колони во Јакобијанот на раката стануваат линеарно зависни и Јакобијанот губи ранг.

Пример 3.17. Да се пресметаат аналитички сингуларитетите на роботската рака од слика 3.4.

Решение: Јакобијанот на линеарната брзина на набљудуваната роботска рака е пресметан во пример 3.14 и даден со (3.103). Бидејќи роботската рака е рамнинска, таа не може да ротира околу z – оската, па од Јакобијанот ќе ја испуштиме третата редица. Така се добива следниот Јакобијан:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

Оттука:

$$\det(\mathbf{J}_v) = \begin{vmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{vmatrix} =$$

$$= (-l_1 S_1 - l_2 S_{12}) l_2 C_{12} + (l_1 C_1 + l_2 C_{12}) l_2 S_{12} = l_1 l_2 S_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = 0, \theta_2 = \pi \quad (3.140)$$

Добиениот резултат се поклопува со претходната дискусија за сингуларитети на 2R рамнинската роботска рака, затоа што $\theta_2 = 0$ односно $\theta_2 = \pi$ означува поклопување на вториот крак со првиот.

Кога $S_2 = 0$, првата редица од Јакобијанот (3.139) станува нулева и неговиот ранг станува единица:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_1 + l_2 & l_2 \end{bmatrix}, S_2 = 0 \quad (3.141)$$

Треба да се истакне дека детерминантата на Јакобијанот не зависи од координатниот систем во кој Јакобијанот е дефиниран.

3.12. ЗАДАЧИ

3.1. Положбата на една роботска рака во просторот е определена со матрицата:

$${}^R \mathbf{T}_H = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & -2.1213 \\ 0.6124 & 0.6124 & 0.5 & 12.1856 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0.866 & -5.3033 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

Да се определи новата положба на роботската рака како резултат на диференцијална ротација околу x – оската за агол од 0.05 радијани, ротација околу z – оската за агол од 0.02 радијани и диференцијално трансляциско движење опишано со векторот $[0.10 \ 0.15 \ 0.35]^T$, во наведениот редослед.

3.2. Како резултат од низа последователни диференцијални движења, координатниот систем \mathbf{T} зададен со матрицата:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.515 & 0 & 0.857 & 5 \\ -0.857 & 0 & 0.515 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

се променил за:

$$d\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -0.0583 & 0 & 0.00004 & 0.02 \\ 0.00857 & -0.03 & -0.00515 & 0.03 \\ -0.00515 & 0.05 & 0.00857 & 0.09 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

Да се определат направените диференцијални промени $(dx, dy, dz, \delta x, \delta y, \delta z)$ и диференцијалниот оператор во однос на координатниот систем \mathbf{T} .

3.3. Нека, под претпоставка, координатниот систем \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -0.707 & 0.707 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0.707 & 0.707 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

претрпел диференцијална транслација опишана со векторот $\mathbf{d} = [0.08 \ 0.3 \ 0.25]^T$ проследена со диференцијална ротација опишана со векторот $\delta = [0.2 \ 0.1 \ 0.3]^T$.

а) Да се определи диференцијалниот оператор во однос на референтниот координатен систем.

б) Да се определи диференцијалниот оператор во однос на координатниот систем \mathbf{T} .

3.4. Почетната позиција и ориентација на една роботска рака е зададена со матрицата \mathbf{T}_1 , а новата позиција и ориентација по извршеното движење со \mathbf{T}_2 :

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 & 2 \\ 0.866 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866 & 0.05 & 2.4 \\ 0.866 & 0.5 & -0.1 & 0.7 \\ 0.0616 & 0.0933 & 1 & 4.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

а) Да се определи трансформационската матрица \mathbf{Q} која ја дефинира трансформацијата на зададениот координатен систем од \mathbf{T}_1 во \mathbf{T}_2 .

б) Да се определи диференцијалниот оператор Δ со помош на кој ќе се оствари истата промена.

в) Да се определи соодветната диференцијална транслација и диференцијална ротација.

3.5. Дадени се координатниот систем на една SCARA-роботска рака и соодветниот Јакобијан. За дадени диференцијални промени во зглобовите, да се определи промената во координатниот систем на раката, неговата нова положба и соодветниот диференцијален оператор.

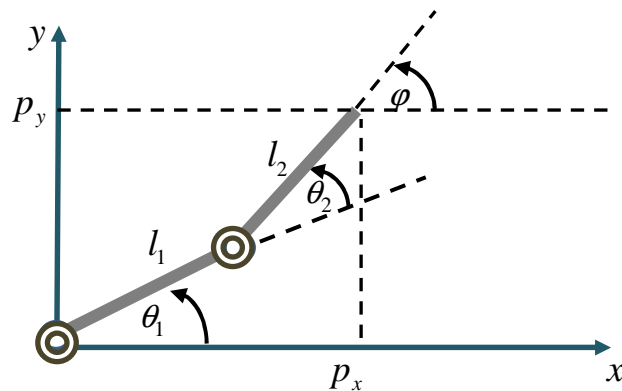
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5\sqrt{3} \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -15 & -5 & 0 & 0 \\ 5\sqrt{3} & 5\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} 0.025 \\ -0.02 \\ 0.235 \\ 0.015 \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

3.6. На сликата 3.5 е дадена рамнинска роботска рака со два ротациски зглобови.

(а) Да се пресмета Јакобијанот на линеарната брзина на раката од слика 3.5.

(б) Да се пресмета инверзниот Јакобијан на Јакобијанот определен под (а).

(в) Да се пресмета линеарната брзина на извршниот елемент од набљудуваната роботска рака ако првиот зглоб ротира со аголна брзина од 1 rad/s , вториот зглоб ротира со аголна брзина од 3 rad/s , должината на краците изнесува $l_1 = 0.5 \text{ m}$ и $l_2 = 0.3 \text{ m}$, соодветно, и $\theta_1 = 167.028^\circ$, а $\theta_2 = -156.44^\circ$.



Слика 3.5. Илустрација кон задачата 3.6

3.7. Дадена е ЗРЗР-роботска рака, опишана со следните трансформационски матрици:

$${}^0\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

$${}^3\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_4 & -C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

$${}^4\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

$${}^5\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_6 & -C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

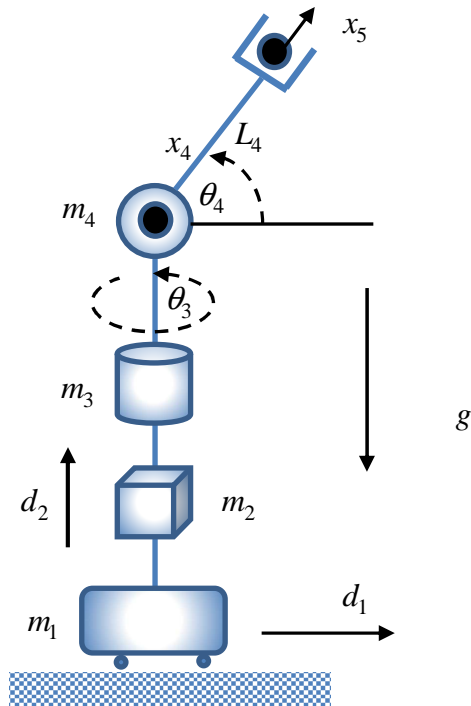
$${}^0\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & -C_4S_5 & d_1 \\ S_5C_6 & -S_5S_6 & C_5 & d_2 \\ -S_4C_5C_6 - C_4S_6 & S_4C_5S_6 - C_4C_6 & S_4S_5 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

Да се определи Јакобијанот на оваа роботска рака, како и нејзините сингуларитети.

3.7. Дадена е 2P2R-роботската рака од слика 3.6. Нејзината задача е да го позиционира извршниот елемент (да го постави во одредена позиција).

а) Да се определи соодветниот Јакобијан на дадената роботска рака во однос на референтниот координатен систем $\{0\}$.

б) Да се определи Јакобијанот на роботската рака во однос на координатниот систем $\{4\}$.



Слика 3.6. Илустрација кон задачата 3.7

ГЛАВА 4. ДИНАМИКА НА РОБОТСКАТА РАКА

4.1. ВОВЕД

Во оваа глава ќе стане збор за динамиката на една роботска рака. За разлика од кинематските равенки на движење на роботската рака, кои го опишуваат нејзиното движење без да ги земат предвид силите и моментите кои го предизвикале тоа движење, динамичките равенки на движењето на роботската рака на експлицитен начин ја опишуваат врската помеѓу силите и моментите кои дејствуваат врз раката и нејзиното движење. Со други зборови, ако се познати силите и моментите што дејствуваат врз роботската рака, со решавање на соодветните динамички равенки може да се определи и нејзиното движење. Оваа задача уште се нарекува задача на **директната динамика** на една роботска рака. Се разбира, постои и инверзната задача – за дадено сакано движење на роботската рака, да се определат потребните сили и вртливи моменти што треба да дејствуваат врз зглобовите од раката за да го остварат саканото движење на раката. Оваа задача се нарекува задача на **инверзната динамика** на една роботска рака. Бидејќи во делот посветен на кинематиката на една роботска рака веќе е опишана позицијата и ориентацијата на роботската рака во просторот, динамичките равенки на роботската рака овде ќе бидат употребени главно за пресметување на силите и моментите кои се потребни да се обезбеди соодветно забрзување на нејзините зглобови и краци.

Општо земено, движењето на еден механизам го определуваат неговите динамички равенки. Како што е познато од физиката, за да се забрза едно трансляциско тело (тело што врши трансляциско движење) потребно е врз него да дејствува некоја сила \mathbf{F} . Слично, за да се забрза едно ротациско тело, потребно е врз него да дејствува соодветен вртлив момент τ . Равенките за движење на трансляциско тело со маса m , односно на ротациско тело со момент на инерција J се:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (4.1)$$

$$\sum \tau = J\alpha \quad (4.2)$$

каде што \mathbf{a} е линеарното забрзување, а α е соодветното аголно забрзување. На сличен начин, за да може да се придвижи една роботска рака, потребно е да се применат доволно големи сили и вртливи моменти врз нејзините зглобови и краци. Таа задача ја имаат актуаторите на роботската рака, кои ја придвижуваат раката во саканата положба со сакана брзина и забрзување. Ако силите и вртливите моменти кои дејствуваат врз зглобовите на роботската рака не се доволно големи, роботската рака нема да ја постигне саканата брзина и со тоа и очекуваната прецизност во позиционирањето. За да може да се определи потребната јачина на секој одделен актуатор, најнапред треба да се определат динамичките закони кои владеат со движењето на роботската рака, односно нејзината динамика. Динамичките равенки на една роботска рака го дефинираат односот сила–маса–забрзување за трансляциските движења и односот вртлив момент – момент на инерција – аголно забрзување за ротациските движења на нејзините зглобови односно краци. Врз основа на овие релации проектантот може да ги проектира актуаторите на роботската рака така што тие во сите услови ќе можат да ги обезбедат потребните сили и вртливи моменти.

Динамичките равенки на една роботска рака исто така се користат за испитување на влијанието на различните оптоварувања врз роботската рака и, следствено, во зависност од саканото забрзување, за одредување на важноста на тоа влијание. На пример, во случајот на роботска рака или некој друг вид робот во вселената, тежината на објектите не е од никаков интерес, зашто објектите во вселената немаат тежина. Меѓутоа, тие и понатаму имаат инерција. Сè додека движењата се доволно бавни, една лесна роботска рака односно некој вид роботски механизам може да придвижува многу тешки објекти во вселенскиот простор со многу мал напор. Тоа е причината што роботските механизми во вселенските програми за истражување се многу лесни (не се масивни и тешки), а сепак придвижуваат многу големи сателити. Динамичките равенки на роботскиот механизам му овозможуваат на проектантот да ја одреди врската помеѓу одделните негови компоненти и да ги проектира и за најголемите можни оптоварувања на најсоодветен начин.

Освен при проектирањето, динамичките равенки на движење на една роботска рака имаат голема важност и при нејзината симулација и управување. Како што е познато, симулацијата е незаменливо средство за испитување на поведението на кој и да било објект, па, така и на роботските раце, посебно ако се работи за скап или недостапен објект, а за целите на управувањето со роботската рака, потребно е да се располага со соодветен математички модел на раката, кој на задоволителен начин ќе ја опише нејзината динамика.

Во принцип, за одредување на движењето на една роботска рака може да се користи Њутновата механика. Меѓутоа, со оглед на фактот дека роботските раце се тридимензиски механизми со повеќе степени слобода на движење и со распределени маси, примената на Њутновата механика се покажува извонредно тешка. Затоа, наместо Њутновата, во пракса се користат други постапки и техники како, на пример, Д'Аламберовиот принцип, Хамилтоновата механика, Лагранжовата механика. **Лагранжовата механика** е заснована само врз појавите и поимите врзани за енергијата и, оттаму, во многу случаи нејзината примена е многу полесна. Во оваа глава накусо ќе се запознаеме со Лагранжовата механика и нејзината примена за изучување на динамиката на роботските раце. Бидејќи изведувањето на равенките на Лагранжовата механика излегува надвор од рамките на овој труд, овде ќе бидат прикажани само одредени резултати и нивната примена во роботиката.

4.2. ДИНАМИЧКИ МОДЕЛ НА РОБОТСКАТА РАКА СО ПОМОШ НА ЛАГРАНЖОВАТА МЕХАНИКА

Лагранжовата механика е заснована врз следната генерализирана равенка:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.3)$$

во која \mathbf{q} е вектор на генерализирани координати q_i со димензија $n \times 1$, $\boldsymbol{\tau}$ е вектор на генерализирани сили τ_i со димензија $n \times 1$ и L е т.н. **Лагранжијан**, кој е дефиниран како разлика помеѓу кинетичката K и потенцијалната енергија P на набљудуваниот систем:

$$L = K - P \quad (4.4)$$

Во нашиот случај, \mathbf{q} е вектор на променливите на зглобовите од набљудуваната роботска рака кои можат да бидат ротациски или трансляциски, па $q_i = \theta_i$ односно $q_i = d_i$, додека $\boldsymbol{\tau}$ е вектор чии компоненти се вртливи моменти за ротациските зглобови и сили за трансляциските зглобови на роботската рака. Оттаму, можеме да ги напишеме следните две генерализирани равенки за движењето на зглобовите на роботската рака – едната за трансляциските зглобови на раката:

$$F_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial d_i} \quad (4.5)$$

и другата за ротациските зглобови на раката:

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \quad (4.6)$$

во кои F_i е збир од сите надворешни сили кои дејствуваат врз i -тиот трансляциски зглоб, τ_i е збир од сите надворешни вртливи моменти кои дејствуваат врз i -тиот ротациски зглоб, d_i го претставува самото линеарно движење (патот, поместувањето) на трансляцискиот зглоб и θ_i го претставува аголот на завртување (аголот на ротација) на соодветниот ротациски зглоб.

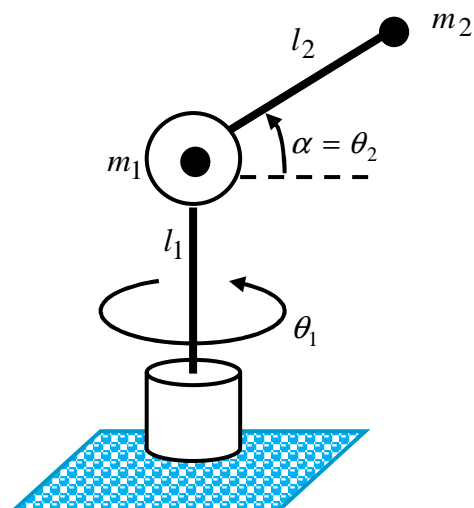
За да се определат равенките на движење на еден роботски механизам, најнапред треба да се определат неговите енергетски равенки и, потоа, да се диференцира Лагранжијанот во согласност со равенката (4.5) односно (4.6). Во едноставните случаи, примената на Лагранжовата механика може да се покаже понеповолна од аспект на времетраењето и обемот на потребните пресметки. Меѓутоа, со зголемувањето на сложеноста на анализираниот роботски механизам, Лагранжовата постапка станува сè поедноставна за примена.

Примерите што следуваат ја илустрираат примената на Лагранжовата механика за одредување на движењето односно динамиката на една роботска рака.

Пример 4.1. На слика 4.1 е прикажана роботска рака со два крака со должини l_1 и l_2 , соодветно, и два зглоба θ_1 и θ_2 , кај која вториот зглоб е фиксиран на положбата $\theta_2 = \alpha$ и не може да се движи. Заради поголема едноставност на аналитичките пресметки, се претпоставува дека масите m_1 и m_2 се концентрирани на краевите од соодветните краци. Бидејќи положбата на вториот крак е фиксна, раката има само еден степен слобода на движење – ротација околу оската z . Да се состави динамички модел на дадената роботска рака.

Решение: Бидејќи се работи за систем со еден степен слобода на движење, неговото движење ќе биде опишано само со една равенка.

Единствената променлива на роботската рака е $\theta_1 = \theta$, придружена со подвижниот зглоб на механизмот, па нејзината кинетичката енергија ќе биде:



Слика 4.1. Роботска рака со еден степен слобода на движење

$$K = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (4.7)$$

при што:

$$J = m_2 l_2^2 \cos^2(\alpha) \quad (4.8)$$

додека нејзината потенцијална енергија изнесува:

$$P = m_1 g l_1 + m_2 g [l_1 + l_2 \sin(\alpha)] \quad (4.9)$$

каде што g е Земјиното забрзување, а за рамнина на нулта потенцијална енергија е усвоена рамнината (x, y) . Може да се забележи дека потенцијалната енергија на дадената роботска рака е константна и не зависи од променливата на зглобот θ .

Лагранжијанот на набљудуваната роботска рака е:

$$L = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \cos^2(\alpha) \dot{\theta}^2 - m_1 g l_1 - m_2 g [l_1 + l_2 \sin(\alpha)] \quad (4.10)$$

па, за да се добие нејзината равенка на движење се пресметуваат следните изводи:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m_2 l_2^2 \cos^2(\alpha) \ddot{\theta} \quad (4.11)$$

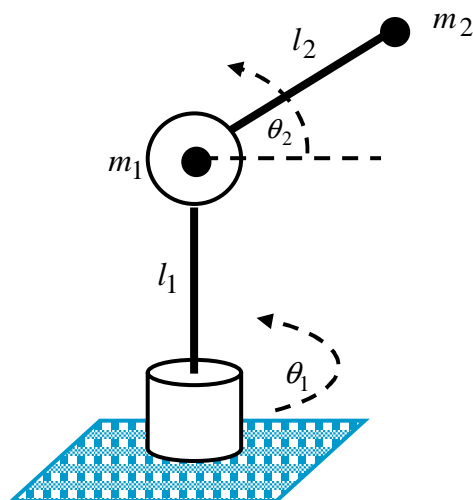
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (4.12)$$

Оттука, динамичкиот модел на раката е:

$$m_2 l_2^2 \cos^2(\alpha) \ddot{\theta} = \tau \quad (4.13)$$

каде што τ е вртливиот момент во зглобот, кој го предизвикува движењето на раката. До истиот резултат и тоа многу побрзо во овој случај се доаѓа со помош на Њутновата механика, кога изразот (4.8) се воведе во равенката (4.2).

Пример 4.2. Во продолжение се изведени равенките на движење на истата роботска рака од слика 4.1, само што сега вториот зглоб на раката не е фиксиран и може слободно да ротира. Во овој случај, раката ќе претставува систем со два степени слобода на движење и нејзиното движење ќе биде опишано со две равенки. Набљудуваната роботска рака е прикажана на слика 4.2.



Слика 4.2. Роботска рака со два степени слобода на движење

Решение: Во конкретниот пример постојат два степени слобода на движење и две координати на движењето θ_1 и θ_2 .

Кинетичката енергија на раката претставува збир од кинетичките енергии на двата крака K_1 и K_2 , кои се дадени со следните изрази:

$$K_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (4.14)$$

и:

$$K_2 = \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (4.15)$$

Оттука, за кинетичката енергија на раката од слика 4.2 се добива:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (4.16)$$

На сличен начин, потенцијалната енергија на раката може да се претстави како збир од потенцијалните енергии на двата крака P_1 и P_2 . Таа се должи исклучиво на гравитацијата (гравитациска потенцијална енергија) и е еднаква на тежината на кракот помножена со висината на која се наоѓа кракот:

$$P_1 = m_1 g l_1 \quad (4.17)$$

$$P_2 = m_2 g [l_1 + l_2 \sin(\theta_2)] \quad (4.18)$$

Оттука, за потенцијалната енергија на раката од слика 4.2 се добива:

$$P = P_1 + P_2 = m_1 g l_1 + m_2 g [l_1 + l_2 \sin(\theta_2)] \quad (4.19)$$

Лагранжијанот на набљудуваната роботска рака од слика 4.2 е:

$$L = K - P = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 - m_1 g l_1 - m_2 g [l_1 + l_2 \sin(\theta_2)] \quad (4.20)$$

а со негово диференцирање во согласност со (4.6) се добива:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = J_1 \dot{\theta}_1 \quad (4.21)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = J_1 \ddot{\theta}_1 \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = J_2 \dot{\theta}_2 \quad (4.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = J_2 \ddot{\theta}_2 \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \cos(\theta_2) \quad (4.26)$$

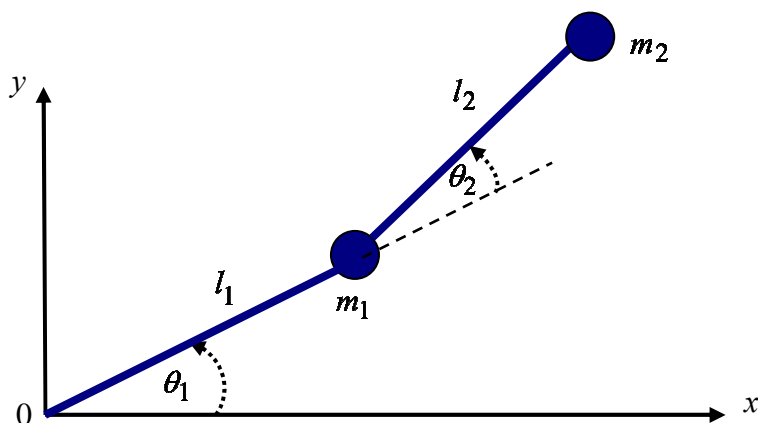
Оттука, бараниот динамички модел на роботската рака од слика 4.2 ќе биде:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= J_1 \ddot{\theta}_1 \\ \tau_2 &= J_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \cos(\theta_2) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Истиот може да се прикаже и во матричен облик, како што е сторено во продолжение:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 g l_2 \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Пример 4.3. На слика 4.3 е прикажана рамнинска роботска рака со два степени слобода на движење. Раката се состои од два лоста (краци), со должини l_1 и l_2 , соодветно, кои меѓу себе се поврзани со зглобови. Под претпоставка, масата на секој лост е концентрирана на крајот од лостот. Аголот на ротација на вториот крак се одредува во однос на правецот од првиот крак.



Слика 4.3. Систем со два степени слобода на движење од примерот 4.3

Решение: Кинетичката енергија на раката е збир од кинетичките енергии на нејзините краци:

$$K = K_1 + K_2 \quad (4.29)$$

каде што:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \left\{ \left[-l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \right]^2 + \left[l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \right]^2 \right\} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (4.30)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \quad (4.31)$$

За да се определи K_2 , треба да се определи $V_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$, па затоа најнапред се определуваат равенките на движењето на кракот m_1 , а потоа истите се диференцираат во однос на времето:

$$x_2 = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.32)$$

$$\dot{x}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.33)$$

Тогаш:

$$\begin{aligned} V_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \left[-l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \right]^2 + \\ &+ \left[l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \right]^2 = \\ &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + 2l_1 l_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos(\theta_2) \end{aligned} \quad (4.34)$$

па за кинетичката енергија (4.31) се добива:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos(\theta_2) \quad (4.35)$$

Вкупната кинетичка енергија на роботската рака од слика 4.3 е дадена со изразот:

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos(\theta_2) = \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$= \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2) \right] \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \left[m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2) \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \quad (4.37)$$

Потенцијалната енергија на роботската рака од слика 4.3 се определува на сличен начин:

$$P = P_1 + P_2 \quad (4.38)$$

$$P_1 = m_1 g l_1 \sin(\theta_1) \quad (4.39)$$

$$P_2 = m_2 g l_1 \sin(\theta_1) + m_2 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.40)$$

$$P = P_1 + P_2 = (m_1 + m_2) g l_1 \sin(\theta_1) + m_2 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.41)$$

при што како линија на нулева потенцијална енергија е усвоена оската на ротација „0“.

Лагранжовиот оператор за роботската рака од слика 4.3 е:

$$\begin{aligned} L &= K - P = \\ &= \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2) \right] \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \left[m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2) \right] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \\ &- (m_1 + m_2) g l_1 \sin(\theta_1) - m_2 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (4.42)$$

па со диференцирање на (4.42) во согласност со (4.6):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \left[(m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) \right] \dot{\theta}_1 + \left[m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) \right] \dot{\theta}_2 \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \left[(m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) \right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) \right] \ddot{\theta}_2 - \\ &- 2m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - m_2l_1l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos(\theta_1) - m_2gl_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.45)$$

за ротациското движење на првиот крак од раката на слика 4.3 се добива:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \left[(m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) \right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) \right] \ddot{\theta}_2 - \\ &- 2m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - m_2l_1l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \cos(\theta_1) + m_2gl_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (4.46)$$

На сличен начин се определува и равенката за ротациското движење на вториот крак на раката од слика 4.3:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) \quad (4.47)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \left[m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) \right] \ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \quad (4.48)$$

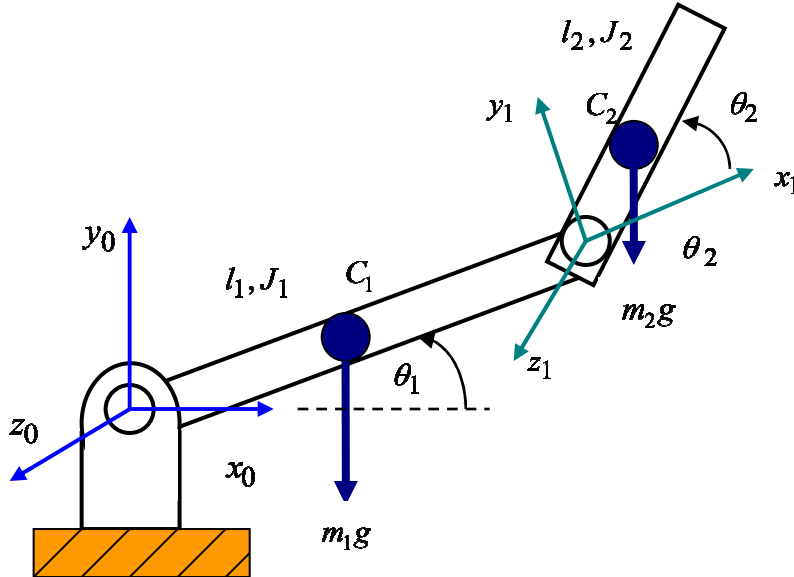
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2l_1l_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \sin(\theta_2) - m_2gl_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.49)$$

$$\tau_2 = \left[m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) \right] \ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2) + m_2gl_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.50)$$

Равенките на движењето на системот од слика 4.3 можат да се претстават во следниот матричен облик:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) & m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) \\ m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -m_2l_1l_2 \sin(\theta_2) \\ m_2l_1l_2 \sin(\theta_2) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2l_1l_2 \sin(\theta_2) & -m_2l_1l_2 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 \cos(\theta_1) + m_2gl_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2gl_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Пример 4.4. Со помош на Лангранжовата постапка да се определат равенките на движење на роботската рака со два степени слобода на движење, прикажана на слика 4.4. Тежиштето на секој од лостовите (краците) е во центарот на соодветниот крак, а нивните моменти на инерција се J_1 и J_2 , соодветно.



Слика 4.4. Роботска рака со два степени слобода на движење

Решение: Решението за роботската рака од слика 4.4 е слично со решението за роботската рака од претходниот пример 4.3, само што овде двата крака имаат распределени маси, па при пресметувањето на кинетичката енергија на раката треба да се земат предвид и нивните моменти на инерција.

Брзината на тежиштето на вториот крак е дадена со релацијата:

$$V_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \quad (4.52)$$

каде што \dot{x}_2 и \dot{y}_2 се пресметуваат со диференцирање на координатите x_2 и y_2 на движењето на вториот крак:

$$x_2 = l_1 \cos(\theta_1) + \frac{1}{2} l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \Rightarrow \dot{x}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - \frac{1}{2} l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.53)$$

$$y_2 = l_1 \sin(\theta_1) + \frac{1}{2} l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \Rightarrow \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + \frac{1}{2} l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.54)$$

Така, за (4.52) се добива:

$$V_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) + \frac{1}{4} l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) +$$

$$\begin{aligned}
 &+l_1l_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1)\sin(\theta_1+\theta_2)+l_1^2\dot{\theta}_1^2\cos^2(\theta_1)+ \\
 &+\frac{1}{4}l_2^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2\cos^2(\theta_1+\theta_2)+l_1l_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\cos(\theta_1)\cos(\theta_1+\theta_2)= \\
 &=\left[l_1^2+\frac{1}{4}l_2^2+l_1l_2\cos(\theta_2)\right]\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{4}l_2^2\dot{\theta}_2^2+\left[\frac{1}{2}l_2^2+l_1l_2\cos(\theta_2)\right]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Кинетичката енергија на целиот систем е збир од кинетичките енергии на двата крака:

$$\begin{aligned}
 K &= K_1 + K_2 = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \left[\frac{1}{2}J_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}m_2V_D^2\right] = \\
 &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1l_1^2\right)\dot{\theta}_1^2\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_2l_2^2\right)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}m_2V_D^2\right] = \\
 &= \left[\frac{1}{6}m_1l_1^2 + \frac{1}{6}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\theta_2)\right]\dot{\theta}_1^2 + \\
 &+ \left(\frac{1}{6}m_2l_2^2\right)\dot{\theta}_2^2 + \left[\frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\theta_2)\right]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Аналогно, потенцијалната енергија на раката, сметана во однос на хоризонталната рамнина (x_0, z_0) , е збир од потенцијалните енергии на нејзините два крака:

$$P = \frac{1}{2}m_1gl_1\sin(\theta_1) + m_2g\left[l_1\sin(\theta_1) + \frac{1}{2}l_2\sin(\theta_1 + \theta_2)\right] \tag{4.57}$$

Оттука, Лагранжијанот за роботската рака со два степени слобода на движење од слика 4.4 е:

$$\begin{aligned}
 L &= K - P = \\
 &= \left[\frac{1}{6}m_1l_1^2 + \frac{1}{6}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\theta_2)\right]\dot{\theta}_1^2 + \\
 &+ \frac{1}{6}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \left[\frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\cos(\theta_2)\right]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \\
 &- \frac{1}{2}m_1gl_1\sin(\theta_1) - m_2g\left[l_1\sin(\theta_1) + \frac{1}{2}l_2\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Со диференцирање на (4.58) во согласност со (4.6) за набљудуваната роботска рака од слика 4.4 се добиваат следните равенки на движење:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 = & \left[\frac{1}{3}m_1l_1^2 + \frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_2l_1^2 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) \right] \ddot{\theta}_1 + \\
 & + \left[\frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) \right] \ddot{\theta}_2 - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \\
 & + \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 \right) gl_1 \cos(\theta_1) + \frac{1}{2}m_2gl_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_2 = & \left[\frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) \right] \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3}m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + \\
 & + \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2gl_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

или, во матричен облик:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1l_1^2 + \frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_2l_1^2 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) & \frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) \\ \frac{1}{3}m_2l_2^2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) & \frac{1}{3}m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -m_2l_1l_2 \sin(\theta_2) \\ m_2l_1l_2 \sin(\theta_2) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} -m_2l_1l_2 \sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (m_1 + 2m_2)gl_1 \cos(\theta_1) + m_2gl_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2gl_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

4.3. ЕЛЕМЕНТИ НА ДИНАМИЧКИОТ МОДЕЛ НА РОБОТСКАТА РАКА

За да се поедностават равенките на движење, равенките (4.28), (4.51) и (4.61) можат да се запишат на симболичен начин како што е покажано во продолжение:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{111} & D_{122} \\ D_{211} & D_{222} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{112} & D_{121} \\ D_{212} & D_{221} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \tag{4.62}$$

Матрицата:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

се нарекува **инерциска матрица**. Таа содржи маси и инерциски моменти. Елементот D_{11} на оваа матрица се нарекува **ефективен момент на инерција** за

јазолот 1 и го опишува вртливиот момент $D_{11}\ddot{\theta}_1$ предизвикан од неговото забрзување $\ddot{\theta}_1$. Елементот D_{22} се нарекува ефективен момент на инерција за јазолот 2 и го претставува вртливиот момент $D_{22}\ddot{\theta}_2$ предизвикан од неговото забрзување $\ddot{\theta}_2$. Елементот D_{12} се нарекува **здружена инерција** помеѓу јазлите 1 и 2 и го претставува вртливиот момент $D_{12}\ddot{\theta}_2$ кој дејствува врз јазолот 1, а е предизвикан од забрзувањето $\ddot{\theta}_2$ на јазолот 2. На сличен начин се дефинира и коефициентот D_{21} како здружена инерција помеѓу јазлите 2 и 1, таква што забрзувањето $\ddot{\theta}_1$ на јазолот 1 предизвикува вртлив момент кој дејствува врз јазолот 2 еднаков на $D_{21}\ddot{\theta}_1$. Инерциската матрица е основна матрица на роботската динамика, исто како што Јакобијанот е основната матрица на роботската кинематика. Таа е симетрична, позитивно дефинитна (определена), несингуларна матрица и нејзината детерминанта е поголема од нула. Од тие причини секогаш може да се определи инверзна матрица кон инерциската матрица.

Матрицата:

$$\mathbf{C}_f(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} D_{111} & D_{122} \\ D_{211} & D_{222} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

е **матрица на центрипетални сили**. Нејзините елементи ги претставуваат центрипеталните сили кои дејствуваат врз некој зглоб како резултат на брзината на друг зглоб. Така, членовите $D_{122}\dot{\theta}_2^2$ ги претставуваат центрипеталните сили во зглобот 1 како резултат од брзината на зглобот 2, додека членовите $D_{211}\dot{\theta}_1^2$ ги претставуваат центрипеталните сили во зглобот 2 како резултат од брзината на зглобот 1. Членовите D_{111} и D_{222} се нулеви.

Матрицата:

$$\mathbf{C}_k(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} D_{112} & D_{121} \\ D_{212} & D_{221} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

е **матрица на Кориолисовите сили**. Таа ги претставува силите во одделните зглобови заради заедничкото движење на два зглоба. Така, членовите со $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$ ги претставуваат т.н. **Кориолисови забрзувања**, кои помножени со соодветните маси ги даваат т.н. **Кориолисови сили**.

Векторот:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

се нарекува **гравитациски вектор**. Елементите D_1 и D_2 на овој вектор ги претставуваат гравитациските сили во зглобовите 1 и 2, соодветно. Гравитацискиот вектор не се јавува во бестежинска состојба.

Матричната равенка (4.62) во развиен облик е дадена за систем со два степени слобода на движење. Се разбира, таа може да се обопшти на случајот на роботска рака со n степени слобода на движење. Стандардниот начин на претставување на равенката на динамиката на една роботска рака со n степени слобода на движење е:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (4.67)$$

каде што $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ е матрицата на инерции, $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ е векторот на центрипеталните и Кориолисовите сили и $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ е гравитацискиот вектор. Елементи на матрицата $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ се елементите на ефективна инерција во еден зглоб i од облик D_{ii} и елементите на здружена инерција помеѓу два зглоба i и j од облик D_{ij} . Елементите на векторот $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ од облик $D_{ij}\dot{q}_j^2$ ги претставуваат центрипеталните сили врз зглобот i како резултат од брзината на зглобот j , додека сите елементи со $\dot{q}_i\dot{q}_j$ се Кориолисови забрзувања, кои помножени со соодветните инерции ги даваат Кориолисовите сили. Елементите на векторот $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ од општ облик D_i ги претставуваат гравитациските сили во i – от зглоб.

4.4. ИЗВЕДУВАЊЕ НА ДИНАМИЧКИТЕ РАВЕНКИ НА РОБОТСКА РАКА ПРЕКУ НЕЈЗИНИОТ D-Н МОДЕЛ

Како што може да се забележи, динамичките равенки за роботска рака со два степени слобода на движење се многу посложени од динамичките равенки за роботска рака со еден степен слобода на движење. Оттука може да се заклучи дека динамичките равенки на роботска рака со повеќе степени слобода на движење ќе бидат многу долги и сложени. Меѓутоа, истите можат да се одредат ако се следи веќе познатата постапка:

- одредување на кинетичката и потенцијалната енергија на краците на набљудуваната роботска рака
- дефинирање на Лагранжијанот за конкретната роботска рака
- диференцирање на Лагранжијанот во однос на променливите на зглобовите

4.4.1. КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА НА РОБОТСКА РАКА ПРЕКУ НЕЈЗИНИОТ D-Н МОДЕЛ

Кинетичката енергија на круто тело може да се претстави како збир од два члена – транслационската кинетичка енергија на телото и неговата ротациска кинетичка енергија. Транслационската кинетичка енергија се добива кога целата маса на телото m се смета концентрирана во неговото тежиште и е дадена со изразот:

$$K_t = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} \quad (4.68)$$

каде што \mathbf{v} е вектор на линеарната брзина на телото. Ротациската кинетичка енергија е кинетичката енергија на ротација на телото околу неговото тежиште и е претставена на следниот начин:

$$K_r = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \quad (4.69)$$

каде што $\boldsymbol{\omega}$ е вектор на агловата брзина на телото, а \mathbf{J} е симетрична матрица со димензија 3×3 наречена **инерциски тензор**. Тогаш, кинетичката енергија на круто тело кое се движи во просторот е дадена со равенката:

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \quad (4.70)$$

додека равенката за кинетичката енергија на цврсто круто тело кое се движи во рамнина има поедноставен облик:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (4.71)$$

каде што v е брзината на тежиштето C од крутото тело, а J е моментот на инерција на телото околу неговото тежиште кое ротира со аголна брзина ω . На овој начин може да се претстави и кинетичката енергија на секој еден крак од дадена роботска рака:

$$K_i = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (4.72)$$

за движење во просторот, односно:

$$K_i = \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} J \omega_i^2; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.73)$$

за движење во рамнина, па, вкупната кинетичка енергија на роботска рака со n степени слобода на движење ќе изнесува:

$$K = \sum_{i=1}^n K_i \quad (4.74)$$

Меѓутоа, кинетичката енергија на една роботска рака во продолжение ќе биде определена на поинаков начин.

Нека со r_i е означена произволна точка од i -тиот крак на една роботска рака, кон кој е придружен координатен систем $\{i\}$. Положбата на точката во однос на референтниот координатен систем може да се определи како производ од трансформациската матрица ${}^0\mathbf{T}_i$, која го претставува координатниот систем $\{i\}$, и векторот на точката r_i кој ја претставува положбата на точката во однос на координатниот систем $\{i\}$:

$$\mathbf{P}_i = ({}^0\mathbf{T}_i) \cdot ({}^i\mathbf{r}_i) \quad (4.75)$$

Очигледно хомогената трансформациона матрица ${}^0\mathbf{T}_i$ е функција од променливите на зглобовите q_1, q_2, \dots, q_i .

Брзината на точката r_i во однос на референтниот координатен систем се добива со диференцирање на равенството (4.75) во однос на сите променливи на зглобовите q_1, q_2, \dots, q_i :

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} [({}^0\mathbf{T}_i) \cdot ({}^i\mathbf{r}_i)] = \sum_{j=1}^i \left(\frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_i)}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} \right) {}^i\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^i (\mathbf{U}_{ij} \dot{q}_j) {}^i\mathbf{r}_i \quad (4.76)$$

и таа е очигледно збир од брзините на сите зглобови $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i$. Изразот \mathbf{U}_{ij} во (4.76) претставува извод од трансформационата матрица ${}^0\mathbf{T}_i$ во однос на променливата q_j :

$$\mathbf{U}_{ij} = \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_i)}{\partial q_j} \quad (4.77)$$

Бидејќи:

$$\mathbf{U}_{ij} = \frac{\partial ({}^0\mathbf{T}_i)}{\partial q_j} = 0, j > i \quad (4.78)$$

горната граница на сумата во (4.76) може да се замени со n , каде што n го означува вкупниот број краци на набљудуваната роботска рака, па равенката (4.76) ќе го добие следниот облик:

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n (\mathbf{U}_{ij} \dot{q}_j) {}^i\mathbf{r}_i \quad (4.79)$$

Кинетичката енергија на елемент со елементарна маса dm_i во точката r_i на кракот i , кој се движи со брзина $\mathbf{v}_i = [\dot{x}_i \quad \dot{y}_i \quad \dot{z}_i]^T$ е:

$$\begin{aligned} dK_i &= \frac{1}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) dm_i = \frac{1}{2} \text{Trag}(\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i) dm_i = \frac{1}{2} \text{Trag}(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T) dm_i = \\ &= \frac{1}{2} \text{Trag} \left[\sum_{j=1}^n (\mathbf{U}_{ij} \dot{q}_j) {}^i\mathbf{r}_i \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^n (\mathbf{U}_{ik} \dot{q}_k) {}^i\mathbf{r}_i \right]^T \cdot dm_i = \\ &= \frac{1}{2} \text{Trag} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{U}_{ij} ({}^i\mathbf{r}_i {}^i\mathbf{r}_i^T dm_i) \mathbf{U}_{ik}^T \right] \dot{q}_j \dot{q}_k \end{aligned} \quad (4.80)$$

каде што индексите j и k претставуваат различни краци. Равенката го зема предвид влијанието на движењето на останатите краци од набљудуваната роботска рака врз конечната брзина на произволна точка што припаѓа на i – тиот крак од раката.

Со интегрирање на (4.80), се определува вкупната кинетичка енергија на i – тиот крак од набљудуваната роботска рака:

$$K_i = \int dK_i = \frac{1}{2} \text{Trag} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{U}_{ij} \left(\int {}^i \mathbf{r}_i {}^i \mathbf{r}_i^T dm_i \right) \mathbf{U}_{ik}^T \right] \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \text{Trag} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{U}_{ij} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ik}^T \right] \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (4.81)$$

Матрицата \mathbf{J}_i во (4.81) е т.н. **псевдоинерциска матрица** на i – тиот крак:

$$\mathbf{J}_i = \int {}^i \mathbf{r}_i {}^i \mathbf{r}_i^T dm_i \quad (4.82)$$

и ако координатите на ${}^i \mathbf{r}_i$ ги претставиме како ${}^i \mathbf{r}_i = [x_i \quad y_i \quad z_i \quad 1]^T$, за псевдоинерциската матрица \mathbf{J}_i од изразот (4.82) се добива:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm_i & \int y_i x_i dm_i & \int z_i x_i dm_i & \int x_i dm_i \\ \int x_i y_i dm_i & \int y_i^2 dm_i & \int z_i y_i dm_i & \int y_i dm_i \\ \int x_i z_i dm_i & \int y_i z_i dm_i & \int z_i^2 dm_i & \int z_i dm_i \\ \int x_i dm_i & \int y_i dm_i & \int z_i dm_i & \int dm_i \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

при што интегрирањето во одделните елементи од матрицата \mathbf{J}_i се врши по волуменот на i – тиот крак. Лесно може да се заклучи дека \mathbf{J}_i е константна матрица, бидејќи не зависи од променливите и од брзините на зглобовите на роботската рака, туку само од геометријата и распределбата на масата на i – тиот крак, и затоа се пресметува само еднаш за секој крак од набљудуваната роботска рака.

Ако во (4.83) се воведат изразите за моментите на инерција на i – тиот крак:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \int (y_i^2 + z_i^2) dm_i \\ J_{yy} &= \int (x_i^2 + z_i^2) dm_i \\ J_{zz} &= \int (x_i^2 + y_i^2) dm_i \end{aligned} \quad (4.84)$$

изразите за вкрстените производи на инерција:

$$J_{xy} = \int x_i y_i dm_i$$

$$J_{xz} = \int x_i z_i dm_i$$

$$J_{yz} = \int y_i z_i dm_i \quad (4.85)$$

и изразите за првите моменти:

$$m_i \bar{x}_i = \int x_i dm_i$$

$$m_i \bar{y}_i = \int y_i dm_i$$

$$m_i \bar{z}_i = \int z_i dm_i \quad (4.86)$$

каде што m_i е вкупната маса на i -тиот крак, а ${}^i \bar{\mathbf{r}}_i = [\bar{x}_i \quad \bar{y}_i \quad \bar{z}_i \quad 1]^T$ се координатите на тежиштето од i -тиот крак, псевдоинерциската матрица \mathbf{J}_i може да се запише во облик:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-J_{xx} + J_{yy} + J_{zz}) & J_{xy} & J_{xz} & m_i \bar{x}_i \\ J_{xy} & \frac{1}{2}(J_{xx} - J_{yy} + J_{zz}) & J_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ J_{xz} & J_{yz} & \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy} - J_{zz}) & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Овие вредности се обично дадени од страна на самиот производител во спецификацијата на конкретната роботска рака или можат да се пресметаат врз основа на дадените податоци во тие спецификации.

Со воведување на изразот (4.87) во изразот (4.81) се добива конечниот облик на равенката за кинетичка енергија на i -тиот крак и на целата роботска рака:

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Trag} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\mathbf{U}_{ij} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ik}^T) \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \quad (4.88)$$

Меѓутоа, бидејќи трагот од збир на матрици е збир од траговите на одделните матрици, знакот за сумирање и операторот за траг на една матрица можат да си ги заменат местата, па равенката (4.88) може да се запише на следниот начин:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Trag} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\mathbf{U}_{ij} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ik}^T) \dot{q}_j \dot{q}_k \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \text{Trag} (\mathbf{U}_{ij} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ik}^T) \dot{q}_j \dot{q}_k = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \text{Trag} (\mathbf{U}_{ij} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ik}^T) \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{jk}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.89)$$

каде што $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ е $n \times n$ инерциската матрица на роботската рака, чии елементи $m_{jk}(\mathbf{q})$ се дефинирани на следниот начин:

$$m_{jk}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \text{Trag}(\mathbf{U}_{ij} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ik}^T) \quad (4.90)$$

Со оглед на (4.78), изразот (4.90) може да се запише на посоодветен начин:

$$m_{jk}(\mathbf{q}) = \sum_{i=\max(j,k)}^n \text{Trag}(\mathbf{U}_{ij} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ik}^T) \quad (4.91)$$

Бидејќи $m_{jk}(\mathbf{q}) = m_{kj}(\mathbf{q})$, инерциската матрица $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ е симетрична, а бидејќи кинетичката енергија е позитивна величина, која е еднаква на нула само доколку генерализираната брзина $\dot{\mathbf{q}}$ е нула, матрицата $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ е исто така и позитивно дефинитна матрица. Единиците на елементите $m_{jk}(\mathbf{q})$ на матрицата $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ кои се однесуваат на ротациските зглобови се $kg \cdot m^2$, додека на елементите кои се однесуваат на транслациски зглобови се kg .

Равенката (4.89) претставува соодветен израз за кинетичката енергија на една роботска рака, изразена преку познати големини и променливите на зглобовите \mathbf{q} . Треба да се забележи дека кинетичката енергија на роботската рака зависи како од променливите на зглобовите \mathbf{q} , така и од нивната брзина $\dot{\mathbf{q}}$.

Во равенката (4.89) може да се додаде и изразот за кинетичката енергија на актуаторите на набљудуваната роботска рака. Под претпоставка дека еден актуатор има инерција $J_{i_{motor}}$, неговата кинетичка енергија ќе биде $\frac{1}{2} J_{i_{motor}} \dot{q}_i^2$, па вкупната кинетичка енергија на една роботска рака, кога се земени предвид и нејзините актуатори, е дадена со равенката:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \text{Trag}(\mathbf{U}_{ij} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ik}^T) \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_{i_{motor}} \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{motor} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.92)$$

Останува уште на крајот од овој дел да се дефинираат изводите \mathbf{U}_{ij} . Брзината на која и да било точка од кракот на роботската рака па, така, и на неговото тежиште, секогаш може да се определи преку изводите од координатите на нејзината положба, а положбата на точка во просторот е определена преку положбата на координатниот систем придружен кон таа точка во однос на координатниот систем придружен кон основата на роботската рака ${}^B \mathbf{T}_H$. Трансформацијата помеѓу координатниот систем на раката H и нејзината основа B може да се изрази преку D-H матриците \mathbf{A} на следниот начин:

$${}^B \mathbf{T}_H = {}^0 \mathbf{T}_n = ({}^0 \mathbf{T}_1) \cdot ({}^1 \mathbf{T}_2) \cdot ({}^2 \mathbf{T}_3) \cdots ({}^{n-1} \mathbf{T}_n) = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{A}_n \quad (4.93)$$

За робот со шест степени слобода на движење, равенката (4.93) ќе има облик:

$${}^0\mathbf{T}_6 = ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) \cdot ({}^2\mathbf{T}_3) \cdots ({}^5\mathbf{T}_6) = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{A}_6 \quad (4.94)$$

Изводот на една матрица \mathbf{A}_i за ротациски зглоб во однос на променливата на зглобот θ_i е:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -S\theta_i & -C\theta_i C\alpha_i & C\theta_i S\alpha_i & -a_i S\theta_i \\ C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.95)$$

и тој може да се претстави како производ од матрицата \mathbf{A}_i и константната матрица $(\mathbf{Q}_i)_{rot}$:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -S\theta_i & -C\theta_i C\alpha_i & C\theta_i S\alpha_i & -a_i S\theta_i \\ C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.96)$$

или:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \theta_i} = (\mathbf{Q}_i)_{rot} \mathbf{A}_i \quad (4.97)$$

На сличен начин, за изводот на една матрица \mathbf{A}_i за транслациски зглоб во однос на променливата на зглобот d_i се пресметува:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial d_i} = \frac{\partial}{\partial d_i} \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}_i \quad (4.98)$$

и тој може да се претстави како производ од матрицата \mathbf{A}_i и една константна матрица $(\mathbf{Q}_i)_{trans}$ на следниот начин:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial d_i} = (\mathbf{Q}_i)_{trans} \mathbf{A}_i \quad (4.99)$$

Како заклучок може да се изведе дека матриците \mathbf{Q}_i се секогаш константни и, за двата вида движење – ротациско и транслациско, се дадени со изразите:

$$(\mathbf{Q}_i)_{rot} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

$$(\mathbf{Q}_i)_{trans} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

Во продолжение променливите на зглобовите на една роботска рака се означени со q_i без оглед на тоа дали се работи за променливи на ротациски зглобови ($\theta_1, \theta_2, \dots$) или за променливи на транслациски зглобови (d_1, d_2, \dots) и горната постапка е применета на матрицата ${}^0\mathbf{T}_i$ од равенката (4.93). Со диференцирање на оваа матрица во однос на променливата q_j се добива:

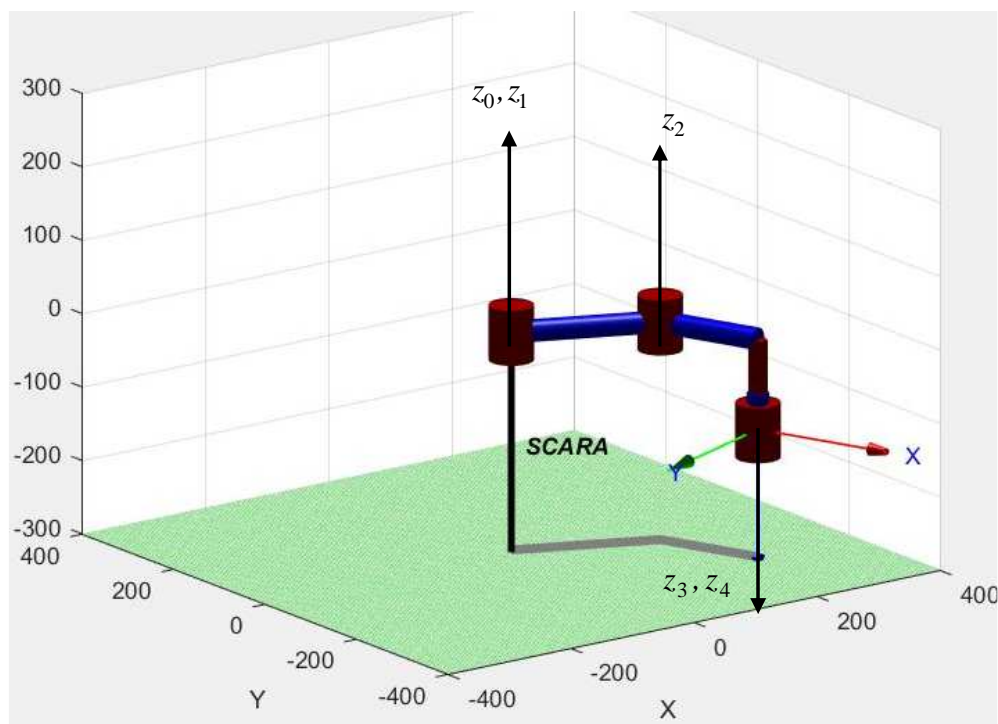
$$\mathbf{U}_{ij} = \frac{\partial {}^0\mathbf{T}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_j \cdots \mathbf{A}_i)}{\partial q_j} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{Q}_j \mathbf{A}_j \cdots \mathbf{A}_i, \quad j \leq i \quad (4.102)$$

Бидејќи матрицата ${}^0\mathbf{T}_i$ секогаш се диференцира само во однос на една променлива q_j , постои само една матрица \mathbf{Q}_j .

Изводите на матрицата ${}^0\mathbf{T}_i$ од повисок ред можат да се дефинираат на сличен начин:

$$\mathbf{U}_{ijk} = \frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial q_k} \quad (4.103)$$

Пример 4.5. Да се определи изводот на трансформационската матрица ${}^0\mathbf{T}_4$ во однос на променливите на третиот и четвртиот зглоб на една SCARA-роботска рака прикажана на слика 4.5.



Слика 4.5. SCARA-роботска рака добиена со Robotics Toolbox [9]

Решение: SCARA-роботската рака е сферен робот со два или, како во овој случај, три ротациски паралелни зглобови и еден транслациски. Оттука, третиот зглоб на раката е транслациски, а четвртиот е ротациски. Матрицата ${}^0\mathbf{T}_4$ ја дефинира положбата на четвртиот крак на набљудуваната роботска рака во однос на основата и е дадена со изразот:

$${}^0\mathbf{T}_4 = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \quad (4.104)$$

Следствено, за бараните изводи се добива:

$$\mathbf{U}_{43} = \frac{\partial {}^0\mathbf{T}_4}{\partial d_3} = \frac{\partial (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4)}{\partial q_3} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_3 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \quad (4.105)$$

$$\mathbf{U}_{44} = \frac{\partial {}^0\mathbf{T}_4}{\partial \theta_4} = \frac{\partial (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4)}{\partial q_4} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{Q}_4 \mathbf{A}_4 \quad (4.106)$$

Матриците \mathbf{Q}_3 и \mathbf{Q}_4 се определени со (4.101) и (4.100), соодветно.

Пример 4.6. Да се определи \mathbf{U}_{434} за SCARA-роботската рака од примерот 4.5.

Решение: Трансформациската матрица ${}^0\mathbf{T}_4$ е дадена со изразот:

$${}^0\mathbf{T}_4 = ({}^0\mathbf{T}_1) \cdot ({}^1\mathbf{T}_2) \cdot ({}^2\mathbf{T}_3) \cdot ({}^3\mathbf{T}_4) = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \quad (4.107)$$

Следствено, за бараниот извод се добива:

$$U_{43} = \frac{\partial {}^0\mathbf{T}_4}{\partial d_3} = \frac{\partial (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4)}{\partial d_3} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{Q}_{trans}\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4 \quad (4.108)$$

$$U_{434} = \frac{\partial U_{43}}{\partial \theta_4} = \frac{\partial (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{Q}_{trans}\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4)}{\partial \theta_4} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{Q}_{trans}\mathbf{A}_3\mathbf{Q}_{rot}\mathbf{A}_4 \quad (4.109)$$

Овие изводи можат да послужат за пресметување на кинетичката енергија на набљудуваната роботска рака.

4.4.2. ПОТЕНЦИЈАЛНА ЕНЕРГИЈА НА РОБОТСКА РАКА ПРЕКУ НЕЈЗИНИОТ D-Н МОДЕЛ

Потенцијалната енергија на i – тиот крак на една роботска рака, кој има маса m_i и тежиште со координати ${}^i\bar{\mathbf{r}}_i = [\bar{x}_i \ \bar{y}_i \ \bar{z}_i \ 1]^T$ пресметани во однос на координатниот систем $\{i\}$ придружен со кракот, е дадена со следниот израз:

$$P_i = -m_i \mathbf{g}^T ({}^0\mathbf{T}_i \cdot {}^i\bar{\mathbf{r}}_i) \quad (4.110)$$

каде што $\mathbf{g} = [g_x \ g_y \ g_z \ 0]^T$ е векторот на Земјиното забрзување. Вредностите на елементите на овој вектор зависат од ориентацијата на референтниот координатен систем.

Вкупната потенцијална енергија на роботската рака претставува збир од потенцијалните енергии на секој крак одделно и може да се претстави во облик:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n [-m_i \mathbf{g}^T ({}^0\mathbf{T}_i \cdot {}^i\bar{\mathbf{r}}_i)] \quad (4.111)$$

Потенцијалната енергија е скаларна величина, додека матрицата - редица $\mathbf{g}^T = [g_x \ g_y \ g_z \ 0]$ е со димензија 1×4 , а векторот на положба $({}^0\mathbf{T}_i \cdot {}^i\bar{\mathbf{r}}_i)$ на тежиштето од i – тиот крак во однос на референтниот координатен систем е со димензија 4×1 . Лесно се забележува дека потенцијалната енергија на роботската рака зависи исклучиво од променливите на зглобовите на раката, но не и од нивната брзина.

Бидејќи членот $m_i {}^i\bar{\mathbf{r}}_i$ одговара на последната колона од псевдоинерциската матрица \mathbf{J}_i на i – тиот крак, за потенцијалната енергија на набљудуваната роботска рака може дефинитивно да се запише:

$$P(\mathbf{q}) = -\sum_{i=1}^n \mathbf{g}^T \cdot {}^0\mathbf{T}_i(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{I}_4 \quad (4.112)$$

Каде што \mathbf{I}_4 е последната четврта колона на единичната матрица \mathbf{I} :

$$\mathbf{I} = [\mathbf{I}_1 \quad \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{I}_3 \quad \mathbf{I}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

4.4.3. ЛАГРАНЖОВ ОПЕРАТОР ЗА РОБОТСКА РАКА ПРЕКУ НЕЈЗИНИОТ D-Н МОДЕЛ

Врз основа на изразите (4.92) и (4.111), за Лагранжијанот на роботската рака со n степени слобода на движење се добива:

$$L = K - P = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \text{Trag}(\mathbf{U}_{ij} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ik}^T) \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_{i_{motor}} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \left[m_i \mathbf{g}^T \left({}^0\mathbf{T}_i \cdot {}^i\bar{\mathbf{r}}_i \right) \right] \quad (4.114)$$

4.4.4. РАВЕНКИ НА ДВИЖЕЊЕ РОБОТСКА РАКА ПРЕКУ НЕЈЗИНИОТ D-Н МОДЕЛ

Динамичките равенки на движење на роботската рака се добиваат со диференцирање на Лагранжијанот (4.114) и го имаат следниот облик:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{q}_j + J_{i_{motor}} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i \quad (4.115)$$

каде што:

$$D_{ij} = \sum_{p=\max(i,j)}^n \text{Trag}(\mathbf{U}_{pj} \mathbf{J}_p \mathbf{U}_{pi}^T) \quad (4.116)$$

$$D_{ijk} = \sum_{p=\max(i,j,k)}^n \text{Trag}(\mathbf{U}_{pj} \mathbf{J}_p \mathbf{U}_{pi}^T) \quad (4.117)$$

$$D_i = \sum_{p=i}^n -m_p \mathbf{g}^T \mathbf{U}_{pi} \mathbf{r}_p \quad (4.118)$$

Првиот дел од равенката (4.115) се членови кои се однесуваат на аголните забрзувања и инерцијата на одделните зглобови, вториот дел е член кој ја претставува инерцијата на актуаторот на i -тиот зглоб, третиот дел се членови кои

претставуваат центрипетални и Кориолисови сили и последниот член е гравитациски.

Пример 4.7. Да се определат равенките на движење за роботската рака од примерот 4.4. Нека, под претпоставка, краците имаат иста должина l .

Решение: D-H параметрите на зглобовите и краците на роботската рака се: $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $a_1 = l$, $a_2 = l$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ па, следствено, за матриците \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 се добива:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & lS_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & lC_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & lS_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

Трансформациската матрица ${}^0\mathbf{T}_2$ на набљудуваната роботска рака е одредена со производот од матриците \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 :

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & lS_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & lC_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & lS_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l(S_{12} + S_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.120)$$

Равенките на движење за роботска рака со два степени слобода на движење имаат општ облик:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{111}\dot{\theta}_1^2 + D_{122}\dot{\theta}_2^2 + 2D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_1 + I_{1(act)}\ddot{\theta}_1 \\ \tau_2 &= D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + D_{211}\dot{\theta}_1^2 + D_{222}\dot{\theta}_2^2 + 2D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_2 + I_{2(act)}\ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (4.121)$$

каде што:

$$D_{11} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{11}\mathbf{J}_1\mathbf{U}_{11}^T) + \text{Trag}(\mathbf{U}_{21}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{21}^T); \quad i = 1; j = 1; p = 1, 2$$

$$D_{12} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{22}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{21}^T); \quad i = 1; j = 2; p = 2$$

$$D_{21} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{21}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{22}^T); \quad i = 2; j = 1; p = 2$$

$$D_{22} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T); i = 2; j = 2; p = 2$$

$$D_{111} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{111} \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_{11}^T) + \text{Trag}(\mathbf{U}_{211} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T); i = 1; j = 1; k = 1; p = 1, 2$$

$$D_{122} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{222} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T); i = 1; j = 2; k = 2; p = 2$$

$$D_{112} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{212} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T); i = 1; j = 1; k = 2; p = 2$$

$$D_{211} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{211} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T); i = 2; j = 1; k = 1; p = 2$$

$$D_{222} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{222} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T); i = 2; j = 2; k = 2; p = 2$$

$$D_{212} = \text{Trag}(\mathbf{U}_{212} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T); i = 2; j = 1; k = 2; p = 2$$

$$D_1 = -m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{U}_{11} \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{U}_{21} \mathbf{r}_2; i = 1; p = 1, 2$$

$$D_2 = -m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{U}_{12} \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{U}_{22} \mathbf{r}_2; i = 2; p = 1, 2 \quad (4.122)$$

Со воведување на изводите \mathbf{U}_{11} , \mathbf{U}_{12} , \mathbf{U}_{21} , \mathbf{U}_{22} , \mathbf{U}_{111} , \mathbf{U}_{112} , \mathbf{U}_{211} , \mathbf{U}_{212} , \mathbf{U}_{221} , \mathbf{U}_{222} :

$$\mathbf{U}_{11} = \mathbf{Q}_{rot} \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & -lS_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{12} = \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\mathbf{U}_{21} = \mathbf{Q}_{rot} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l(S_{12} + S_1) \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{22} = \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_{rot} \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -lS_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & lC_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{111} = \frac{\partial(\mathbf{Q} \mathbf{A}_1)}{\partial \theta_1} = \mathbf{Q} \mathbf{Q} \mathbf{A}_1$$

$$\begin{aligned}
 U_{112} &= \frac{\partial(QA_1)}{\partial\theta_2} = 0 \\
 U_{211} &= \frac{\partial(QA_1A_2)}{\partial\theta_1} = QQA_1A_2 \\
 U_{212} &= \frac{\partial(QA_1A_2)}{\partial\theta_2} = QA_1QA_2 \\
 U_{221} &= \frac{\partial(A_1QA_2)}{\partial\theta_1} = QA_1QA_2 \\
 U_{222} &= \frac{\partial(A_1QA_2)}{\partial\theta_2} = A_1QQA_2
 \end{aligned} \tag{4.123}$$

псевдоинерциските матрици \mathbf{J}_1 и \mathbf{J}_2 :

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1l^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_1l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}m_1l & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_2l^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_2l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}m_2l & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{4.124}$$

и векторите:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.125}$$

во изразите (4.122) се добива:

$$D_{11} = \frac{1}{3}m_1l^2 + \frac{4}{3}m_2l^2 + m_2l^2C_2$$

$$D_{12} = \frac{1}{3}m_2l^2 + \frac{1}{2}m_2l^2C_2 = D_{21}$$

$$D_{22} = \frac{1}{3}m_2l^2$$

$$D_{111} = 0$$

$$D_{112} = -\frac{1}{2}m_2l^2S_2 = D_{121}$$

$$D_{122} = -\frac{1}{2}m_2l^2S_2$$

$$D_{211} = \frac{1}{2}m_2l^2S_2$$

$$D_{212} = 0$$

$$D_{221} = 0$$

$$D_{222} = 0$$

$$D_1 = \frac{1}{2}m_1glC_1 + \frac{1}{2}m_2glC_{12} + m_2glC_1$$

$$D_2 = \frac{1}{2}m_2glC_{12} \quad (4.126)$$

па, равенките на движењето на набљудуваната роботска рака (4.121) ќе имаат конечен облик:

$$T_1 = \left(\frac{1}{3}m_1l^2 + \frac{4}{3}m_2l^2 + m_2l^2C_2\right)\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{3}m_2l^2 + \frac{1}{2}m_2l^2C_2\right)\ddot{\theta}_2 +$$

$$-\frac{1}{2}m_2l^2S_2\dot{\theta}_2^2 - m_2l^2S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_1glC_1 + \frac{1}{2}m_2glC_{12} + m_2glC_1 + I_{1(act)}\ddot{\theta}_1 \quad (4.127)$$

$$T_2 = \left(\frac{1}{3}m_2l^2 + \frac{1}{2}m_2l^2C_2\right)\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3}m_2l^2\ddot{\theta}_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}m_2l^2S_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2glC_{12} + I_{2(act)}\ddot{\theta}_2 \quad (4.128)$$

4.5. СТРУКТУРА И ОСОБИНИ НА ДИНАМИЧКИОТ МОДЕЛ НА РОБОТСКАТА РАКА

Лагранжијанот на роботска рака со n степени слобода на движење може да се запише на следниот начин:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - P(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - P(\mathbf{q}) \quad (4.129)$$

На ова место уште еднаш ќе ги истакнеме следните основни својства – кинетичката енергија $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ е квадратна функција од брзината на зглобовите $\dot{\mathbf{q}}$ на конкретната роботска рака, додека потенцијалната енергија $P(\mathbf{q})$ воопшто не зависи од неа.

Со диференцирање на Лагранжијанот (4.129) во согласност со (4.3) се добива:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \frac{\partial K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] &= \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}]}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.130)$$

па, динамиката на набљудуваната роботска рака ќе биде опишана со следниот израз:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}]}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.131)$$

Членот:

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}]}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.132)$$

во (4.131) го претставува центрипеталниот и Кориолисовиот вектор $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, додека членот:

$$\frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (4.133)$$

е гравитацискиот вектор $\mathbf{G}(\mathbf{q})$, па за динамичкиот модел на роботската рака дефинитивно се добива:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (4.134)$$

кој израз, се разбира, е идентичен со изразот (4.67). Релациите (4.132) и (4.133) покажуваат дека векторот на центрипеталните и Кориолисови сили може да се пресмета со помош на инерциската матрица $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, како што ќе биде покажано во продолжение, додека гравитацискиот вектор се добива со диференцирање на потенцијалната енергија на роботската рака $P(\mathbf{q})$ по променливите на нејзините зглобови \mathbf{q} .

4.5.1. ОСОБИНИ НА ИНЕРЦИСКАТА МАТРИЦА $\mathbf{M}(\mathbf{q})$

За инерциската матрица $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ веќе е констатирано дека е симетрична и позитивно дефинитна матрица. Друго битно својство на инерциската матрица $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ е нејзината ограниченост од двете страни:

$$\mu_1 \mathbf{I} \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \leq \mu_2 \mathbf{I} \quad (4.135)$$

каде што μ_1 и μ_2 се скалари кои можат да се пресметаат за секоја роботска рака. Доколку раката има само ротациски зглобови, μ_1 и μ_2 ќе бидат константи, затоа што во случајот на ротациски зглобови, променливите на зглобовите \mathbf{q} се јавуваат во елементите од инерциската матрица $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ само како соодветни \cos и \sin членови, кои од своја страна се ограничени помеѓу $+1$ и -1 . Ако роботската рака има призматични зглобови, μ_1 и μ_2 ќе бидат скаларни функции од променливите на зглобовите \mathbf{q} .

Фактот дека:

$$\mu_1 \mathbf{I} \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \quad (4.136)$$

Значи дека $\mathbf{M}(\mathbf{q}) - \mu_1 \mathbf{I} \geq 0$ е позитивно дефинитна матрица, што може математички да се искаже на следниот начин:

$$\mathbf{x}^T [\mathbf{M}(\mathbf{q}) - \mu_1 \mathbf{I}] \mathbf{x} \geq 0; \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \quad (4.137)$$

И инверзната матрица кон инерциската матрица $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ е исто така ограничена од двете страни:

$$\frac{1}{\mu_2} \mathbf{I} \leq \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \leq \frac{1}{\mu_1} \mathbf{I} \quad (4.138)$$

Пример 4.8. Да се определат границите на инерциската матрица $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ на роботската рака од примерот 4.3. Нека, под претпоставка:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.139)$$

Решение: Инерциската матрица $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ на набљудуваната роботска рака има облик:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) & m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) \\ m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_2) & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

Раката има исклучиво ротациски зглобови, па границите μ_1 и μ_2 на инерциската матрица $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ ќе бидат константи. Бидејќи од условот на задачата $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$, а $\cos(\cdot)$ е парна функција, следува дека $0 \leq \cos(\theta_2) \leq 1$, па, долната граница на инерциската матрица $\mathbf{M}_1(\mathbf{q})$ ќе биде одредена со најмалата вредност на нејзините елементи:

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 & m_2l_2^2 \\ m_2l_2^2 & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mu_1 = m_2l_2^2 \quad (4.141)$$

а горната граница $\mathbf{M}_2(\mathbf{q})$ со најголемата вредност на нејзините елементи:

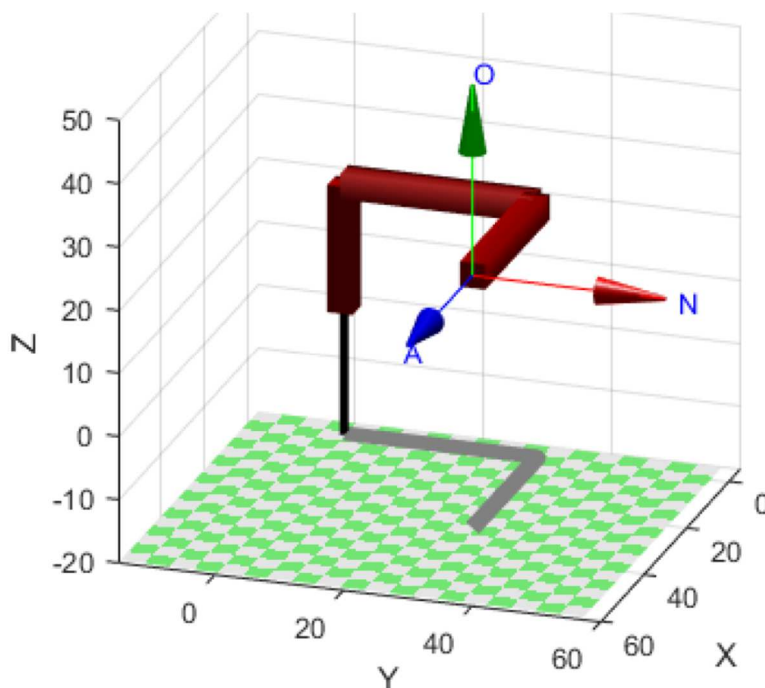
$$\mathbf{M}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1l_1^2 + m_2(l_1 + l_2)^2 & m_2l_2(l_1 + l_2) \\ m_2l_2(l_1 + l_2) & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mu_2 = m_1l_1^2 + m_2(l_1 + l_2)^2 \quad (4.142)$$

Пример 4.9. Да се определи инерциската матрица и нејзините особини за роботската рака од слика 4.6, ако нејзиниот динамички модел гласи:

$$\tau_1 = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + (m_1 + m_2 + m_3)g$$

$$\tau_2 = (m_1 + m_2)\ddot{q}_2$$

$$\tau_3 = m_1\ddot{q}_3 \quad (4.143)$$



Слика 4.6. Роботската рака од примерот 4.9 добиена со Robotics Toolbox [9]

Решение: Инерциската матрица $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ на дадената роботска рака е:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \quad (4.144)$$

Таа е симетрична матрица:

$$\mathbf{M}^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \quad (4.145)$$

позитивно дефинитна:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \cdot \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \\ &= [(m_1 + m_2 + m_3)x_1 \quad (m_1 + m_2)x_2 \quad m_1 x_3] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \\ &= (m_1 + m_2 + m_3)x_1^2 + (m_1 + m_2)x_2^2 + m_1 x_3^2 > 0 \quad \forall \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.146)$$

Инерциската матрица $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ е ограничена и одлево и оддесно:

$$\mu_1 \mathbf{I} \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \leq \mu_2 \mathbf{I} \quad (4.147)$$

при што:

$$\mu_1 = m_1 \quad (4.148)$$

$$\mu_2 = m_1 + m_2 + m_3 \quad (4.149)$$

се нејзината најмала и најголема сопствена вредност.

Инерциската матрица $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ е константна, што може лесно да се види од нејзиниот израз.

4.5.2. ОСОБИНИ НА ЦЕНТРИФУГАЛНАТА И КОРИОЛИСОВА МАТРИЦА $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

Особините на центрифугалната и Кориолисовата матрица $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ се важни при испитувањето на стабилноста на системите за управување со роботските раце. Во продолжение се дадени некои од тие особини. Овде само ќе напоменеме дека некои автори матрицата $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ја нарекуваат матрица на центрипетални и Кориолисови сили, а некои матрица на центрифугални и Кориолисови сили. Двата назива се еквивалентни, бидејќи центрифугалните и центрипеталните сили се исти по вредност, но дејствуваат во спротивни насоки, со таа разлика што центрипеталните сили се реални, додека центрифугалните сили се фиктивни.

- Матрицата $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ има димензија $n \times n$ и нејзините елементи се функции од променливите на зглобовите \mathbf{q} и нивната брзина $\dot{\mathbf{q}}$.
- За дадена роботска рака матрицата $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ не мора да биде единствена, но векторот на центрифугални и Кориолисови сили $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ сигурно е единствен.
- За сите реални вектори $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$ важи:

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \mathbf{q} \in \mathcal{R}^n \quad (4.150)$$

- Врската помеѓу матриците $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ и $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ е дадена со изразот:

$$\mathbf{x}^T \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \quad (4.151)$$

Без оглед како е изведена, матрицата $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ секогаш го задоволува изразот:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{R}^n \quad (4.152)$$

За роботска рака со исклучиво ротациски зглобови, постои позитивен реален број k_{c1} , таков што:

$$\|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\| \leq k_{c1} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2, \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{R}^n \quad (4.153)$$

каде што нормата на векторите во (4.153) е дефинирана на стандарден начин како збир од квадратите на нивните елементи. За да ја определиме оваа константа, најнапред векторот $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ ќе го претставиме во облик:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_1(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_2(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_n(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4.154)$$

каде што $\mathbf{C}_k(\mathbf{q})$ се симетрични матрици со димензија $n \times n$ за $k=1,2,\dots,n$. Елементот $C_{kij}(\mathbf{q})$ на матрицата $\mathbf{C}_k(\mathbf{q})$ одговара на Кристофеловиот симбол $c_{ijk}(\mathbf{q})$ од прв вид дефиниран на следниот начин:

$$c_{ijk}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right] \quad (4.155)$$

при што $M_{ij}(\mathbf{q})$ е ij -тиот елемент на матрицата $\mathbf{M}(\mathbf{q})$. (Изведувањето на овие изрази излегува надвор од рамките на овој труд.)

Конечно, константата k_{c1} се пресметува на следниот начин:

$$k_{c1} = n^2 \max_{i,j,k,\mathbf{q}} |C_{kij}(\mathbf{q})| \quad (4.156)$$

Пример 4.10. Да се определи позитивната константа k_{c1} за роботска рака, чија матрица на центрифугални и Кориолисови сили $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ е од облик:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.157)$$

Решение: Центрифугалниот и Кориолисов вектор за набљудуваната роботска рака ќе изнесува:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

и истиот може да се претстави во облик:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_1(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_2(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4.159)$$

кадешто $\mathbf{C}_1(\mathbf{q})$ и $\mathbf{C}_2(\mathbf{q})$ се симетрични матрици со димензија 2×2 . Оттука:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \\ -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) & -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_1(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_2(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4.160)$$

па, следува:

$$\max_{\mathbf{q}} |C_{111}(\mathbf{q})| = 0$$

$$\max_{\mathbf{q}} |C_{112}(\mathbf{q})| = m_2 l_1 l_{c2}$$

$$\max_{\mathbf{q}} |C_{121}(\mathbf{q})| = m_2 l_1 l_{c2}$$

$$\max_{\mathbf{q}} |C_{122}(\mathbf{q})| = m_2 l_1 l_{c2} \quad (4.161)$$

$$\max_{\mathbf{q}} |C_{211}(\mathbf{q})| = m_2 l_1 l_{c2}$$

$$\max_{\mathbf{q}} |C_{212}(\mathbf{q})| = \max_{\mathbf{q}} |C_{221}(\mathbf{q})| = \max_{\mathbf{q}} |C_{222}(\mathbf{q})| = 0 \quad (4.162)$$

и, следствено:

$$k_{c1} = n^2 \max_{i,j,k,\mathbf{q}} |C_{kij}(\mathbf{q})| = 4m_2 l_1 l_{c2} \quad (4.163)$$

4.5. АНАЛИЗА НА СТАТИЧКИТЕ СИЛИ КАЈ РОБОТСКАТА РАКА

Нека, под претпоставка, роботска рака има задача да направи рез со одредена длабочина на рамна површина односно плоча. Доколку роботската рака следи однапред зададена траекторија, станува збор за управување со движењето на роботската рака, и сè додека површината на која се движи раката е рамна и таа ја следи зададената патека, направениот рез ќе биде рамномерен во поглед на длабочината. Меѓутоа, доколку површината не е сосема рамна, туку поседува и одредени непознати искривувања, роботската рака на одредени места ќе сече подлабоко или поплитко во плочата отколку што е потребно. Овој проблем може да се разреши ако роботската рака прима информации за силата што ја применува врз плочата при нејзиното сечење. Доколку применетата сила е премногу мала или премногу голема, што значи дека роботската рака не сече доволно длабоко односно сече предлабоко на одредено место, роботот може да ја приспособи длабочината на сечење за таа да биде рамномерна. Во овој случај станува збор за управување со силите на роботската рака.

Секогаш кога роботската рака треба да врши одредена работа, нејзиниот управувачки процесор мора да ги придвижи зглобовите на раката со одредена брзина за да ги создаде потребните сили и моменти на крајот од раката. За да се воспостави врска помеѓу силите и вртливите моменти во зглобовите и силите и моментите создадени на крајот од роботската рака се дефинира векторот:

$$\mathbf{F} = [F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z]^T \quad (4.164)$$

каде што F_x, F_y, F_z се силите долж $x-, y-, z$ -оските, а M_x, M_y, M_z се моментите околу $x-, y-, z$ -оските на координатниот систем \mathbf{H} придружен со крајниот зглоб од роботската рака. На сличен начин се дефинира и векторот на силите и моментите во зглобовите од роботската рака:

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4 \quad \tau_5 \quad \tau_6]^T \quad (4.165)$$

каде што $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6$ ги претставуваат вртливите моменти во ротациските, односно силите во призматичните зглобови од роботската рака. Ако со:

$$\mathbf{D} = [dx \quad dy \quad dz \quad \delta x \quad \delta y \quad \delta z]^T \quad (4.166)$$

и:

$$\mathbf{D}_q = [dq_1 \quad dq_2 \quad dq_3 \quad dq_4 \quad dq_5 \quad dq_6]^T \quad (4.167)$$

се означат транслациите и ротациите во однос на $x-, y-, z$ -оските на координатниот систем \mathbf{H} придружен со крајниот зглоб од роботската рака и диференцијалните движења во зглобовите, соодветно, може да се запише:

$$\delta W = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau}^T \cdot \mathbf{D}_q \quad (4.168)$$

при што силите \mathbf{F} и движењата \mathbf{D} мора да бидат дефинирани во однос на ист координатен систем. Равенката (4.168) произлегува од законот за вкупната виртуелна работа во зглобовите, која мора да биде еднаква на вкупната работа на крајот од роботската рака, и кажува дека производот од силите односно моментите и соодветните придвижувања на роботската рака е еднаков со производот од силите или вртливите моменти и придвижувањата на зглобовите од роботската рака. Преку Јакобијанот на роботската рака, таа може да се запише во облик:

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{D}_q = \boldsymbol{\tau}^T \cdot \mathbf{D}_q \quad (4.169)$$

па, оттука, непосредно следува:

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{J} = \boldsymbol{\tau}^T \quad (4.170)$$

или, што е еквивалентно:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{F} \quad (4.171)$$

Равенката (4.171) овозможува силите и вртливите моменти во зглобовите од една роботска рака да се определат преку силите и моментите што дејствуваат на крајот од раката.

Пример 4.11. Даден е Јакобијанот на една сферна RPY-роботска рака (на пример, Стенфордската рака), која има задача да издупчи дупка во некоја плоча. Да се пресметаат неопходните сили и вртливи моменти во зглобовите од роботската рака, кои ќе овозможат на крајот од роботската рака да се развие сила долж z -оската од $10N$ и вртлив момент околу z -оската од $20N \cdot cm$.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.172)$$

Решение: Со воведување на конкретните зададени вредности во (4.171) се добива:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ F_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.173)$$

Интересно е да се забележи дека, со цел да се развие саканата сила и вртлив момент на крајот од набљудуваната роботска рака, потребно е само во првиот, четвртиот и петтиот зглоб од раката да се развијат вртливи моменти од 10 , 20 и $-20 N \cdot cm$, соодветно, додека во третиот зглоб од раката, кој е призматичен, не се развива никаква сила. Ако се промени конфигурацијата на роботската рака, ќе се промени и нејзиниот Јакобијан, па, следствено, ќе се променат и силите и моментите во одделните зглобови од раката, потребни за да се остварат истите сили и вртливи моменти на крајот од раката.

4.6. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА СИЛИТЕ И МОМЕНТИТЕ КАЈ РОБОТСКАТА РАКА ОД ЕДЕН ВО ДРУГ КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

Ако со:

$${}^B \mathbf{F} = \begin{bmatrix} {}^B F_x & {}^B F_y & {}^B F_z & {}^B M_x & {}^B M_y & {}^B M_z \end{bmatrix}^T \quad (4.174)$$

се означат силите и моментите во однос на произволен координатен систем **B**, а со:

$${}^B \mathbf{D} = [{}^B dx \quad {}^B dy \quad {}^B dz \quad {}^B \delta x \quad {}^B \delta y \quad {}^B \delta z]^T \quad (4.175)$$

движењата предизвикани од тие сили и моменти, прикажани исто така во однос на произволниот координатен систем **B**, тогаш, имајќи на ум дека:

$${}^B \mathbf{D} = {}^B \mathbf{J} \cdot \mathbf{D} \quad (4.176)$$

од равенството:

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} = ({}^B \mathbf{F})^T \cdot {}^B \mathbf{D} \quad (4.177)$$

се добива:

$$\mathbf{F}^T = ({}^B \mathbf{F})^T \cdot {}^B \mathbf{J} \quad (4.178)$$

односно:

$$\mathbf{F} = ({}^B \mathbf{J})^T \cdot {}^B \mathbf{F} \quad (4.179)$$

Наместо според (4.179), ${}^B \mathbf{F}$ може да се определи според релациите:

$${}^B F_x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}$$

$${}^B F_y = \mathbf{o} \cdot \mathbf{F}$$

$${}^B F_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}$$

$${}^B M_x = \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{F} \times \mathbf{P}) + \mathbf{M}]$$

$${}^B M_y = \mathbf{o} \cdot [(\mathbf{F} \times \mathbf{P}) + \mathbf{M}]$$

$${}^B M_z = \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{F} \times \mathbf{P}) + \mathbf{M}] \quad (4.180)$$

каде што:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k} \quad (4.181)$$

Пример 4.9. Нека кон едно цврсто тело е придружен координатен систем A :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.182)$$

и нека, под претпоставка, врз телото дејствуваат следните сили и моменти:

$$\mathbf{F} = [15 \ 0 \ 0 \ 0 \ 140 \ 0]^T \quad (4.183)$$

кои се дефинирани во однос на избран референтен координатен систем. Да се определат соодветните сили и моменти кои дејствуваат врз телото во однос на координатниот систем A .

Решение: Врз основа на дадените информации следува:

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = (15, 0, 0)$$

$$\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z) = (0, 140, 0)$$

$$\mathbf{P} = (p_x, p_y, p_z) = (2, 4, 7)$$

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{o} = (o_x, o_y, o_z) = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = (0, 0, 1) \quad (4.184)$$

Оттука:

$$\mathbf{F} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 15 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -105\mathbf{j} + 60\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} \times \mathbf{P} + \mathbf{M} = 35\mathbf{j} + 60\mathbf{k}$$

$${}^A F_x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} = 0$$

$${}^A F_y = \mathbf{o} \cdot \mathbf{F} = 15$$

$${}^A F_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{F} = 0$$

$${}^A M_x = \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{F} \times \mathbf{P}) + \mathbf{M}] = 35$$

$${}^A M_y = \mathbf{o} \cdot [(\mathbf{F} \times \mathbf{P}) + \mathbf{M}] = 0$$

$${}^A M_z = \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{F} \times \mathbf{P}) + \mathbf{M}] = 60 \quad (4.185)$$

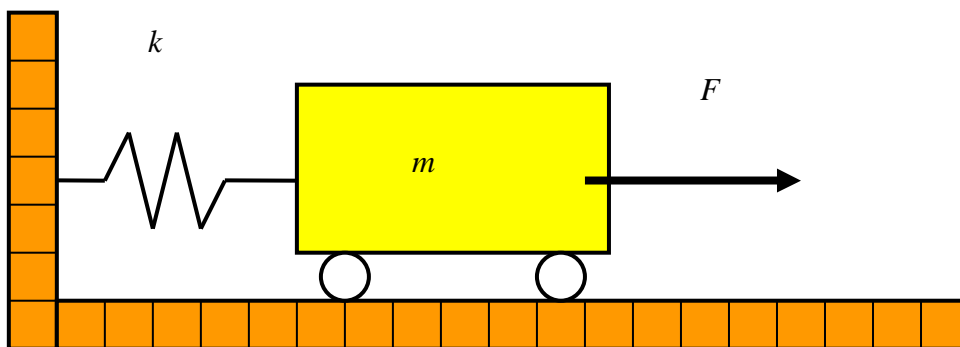
Следствено:

$${}^A \mathbf{F} = [0 \ 15 \ 0 \ 35 \ 0 \ 60]^T \quad (4.186)$$

што значи дека сила од 10 N која дејствува во правец на o -оската, момент од $35 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ што дејствува во правец на n -оската и момент од $60 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ што дејствува во правец на a -оската од подвижниот координатен систем A , ќе имаат исто влијание врз набљудуваното цврсто тело, како и силите и моментите (4.183) дефинирани во однос на референтниот координатен систем.

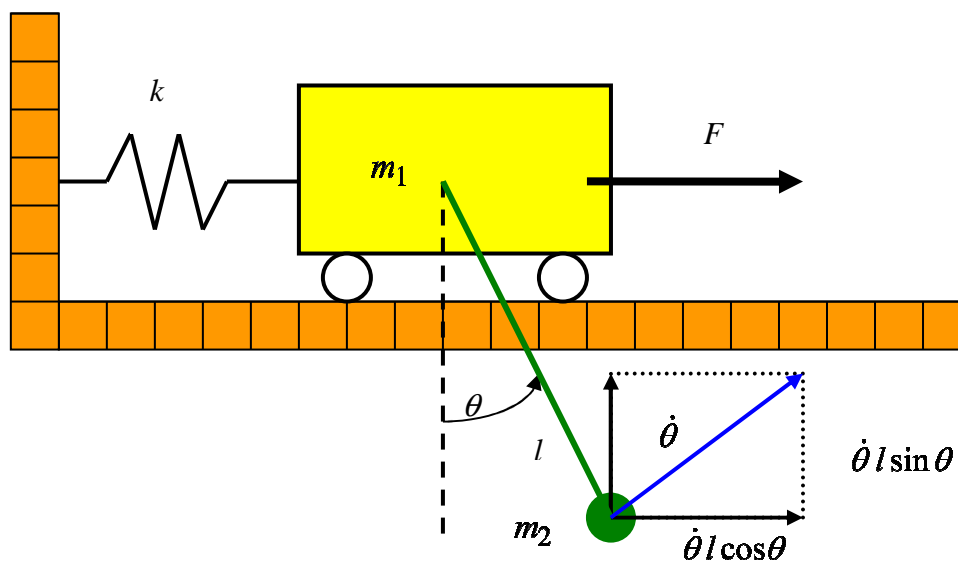
4.7. ЗАДАЧИ

4.1. Даден е системот со еден степен слобода на движење прикажан на слика 4.7. Тој се состои од количка со маса m , која се движи по хоризонтална подлога. Од едната страна количката е прицврстена за вертикален ѕид преку пружина со коефициент на крутост односно еластичност k . Под претпоставка, тркалата на количката имаат занемарлива инерција. Да се состави математички модел на движењето на овој систем.



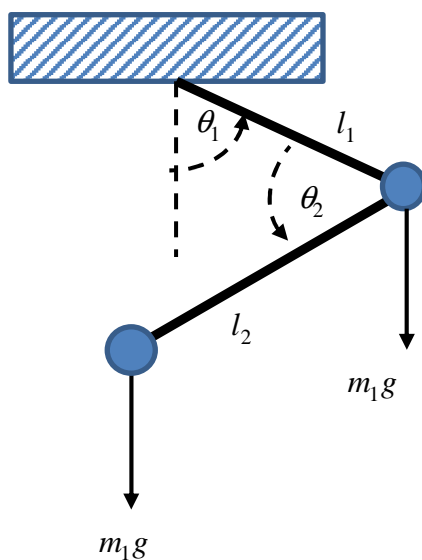
Слика 4.7. Шематски приказ на едноставен систем со еден степен слобода на движење

4.2. Да се опише динамиката на системот со два степени слобода на движење од слика 4.8, кој претставува количка со маса m_1 придвижувана по хоризонтална подлога. Количката од едната страна е прицврстена за вертикална подлога преку пружина со коефициент на крутост (односно еластичност) k , додека за самата количка е закачено нишало со маса m_2 и должина l .



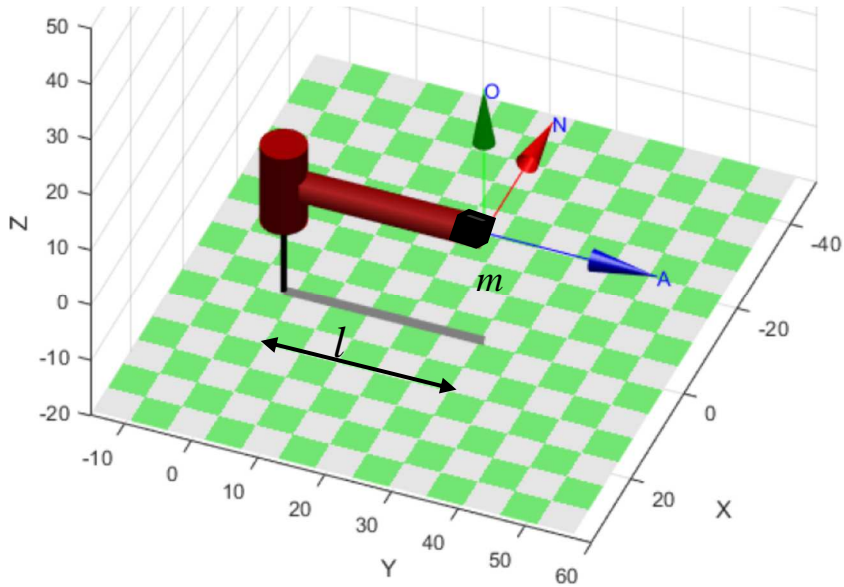
Слика 4.8. Илустрација кон задачата 4.2

4.3. Да се определи динамиката на механичкиот систем од слика 4.9, кој се состои од две маси m_1 и m_2 поврзани помеѓу себе со два крака со должини l_1 и l_2 и два ротациски зглобови. Масите на краците можат да се занемарат во однос на масите m_1 и m_2 .



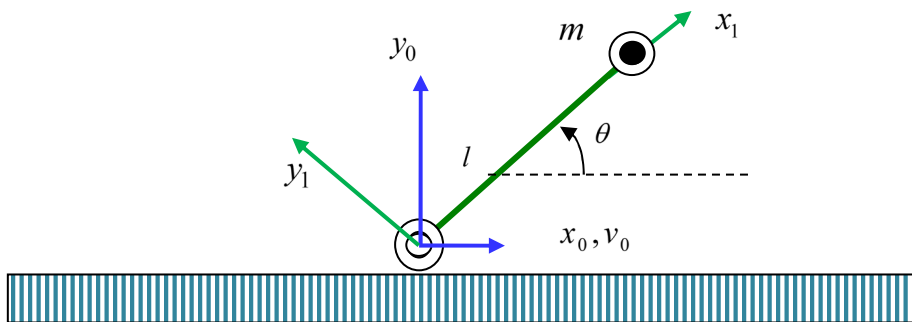
Слика 4.9. Илустрација кон задачата 4.3

4.4. Дадена е роботската рака од слика 4.10. Со помош на Лагранжовата механика да се изведе равенката на нејзината динамика. Под претпоставка, должината на раката е l , а масата на раката m е концентрирана во нејзината крајна точка.



Слика 4.10. Илустрација кон задачата 4.4 добиена со Robotics Toolbox [9]

4.5. Дадена е роботската рака од слика 4.11. Раката има само еден ротациски зглоб, еден крак и се движи по хоризонтална основа со брзина $v_0 = \dot{x}_0$. Со помош на Лагранжовата механика да се изведе и дефинира моделот на нејзината динамика на два начини: без и со примена на D-H конвенцијата. Под претпоставка, должината на раката е l , а масата на раката m е концентрирана во нејзината крајна точка.



Слика 4.11. Илустрација кон задачата 4.5

4.6. Нека кон едно цврсто тело е придружен координатен систем \mathbf{A} :

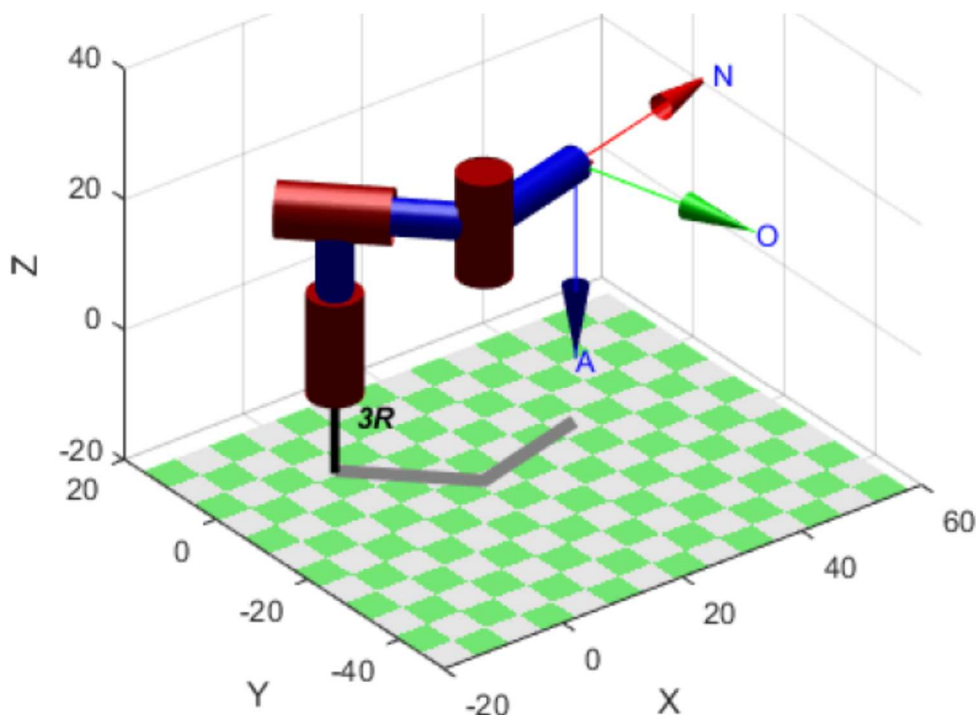
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0.707 & 0.707 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0.707 & 0.707 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.187)$$

и нека, под претпоставка, врз телото дејствуваат следните сили и моменти:

$$[\mathbf{F}] = [10 \ 20 \ 15 \ 20 \ 40 \ 10]^T \quad (4.188)$$

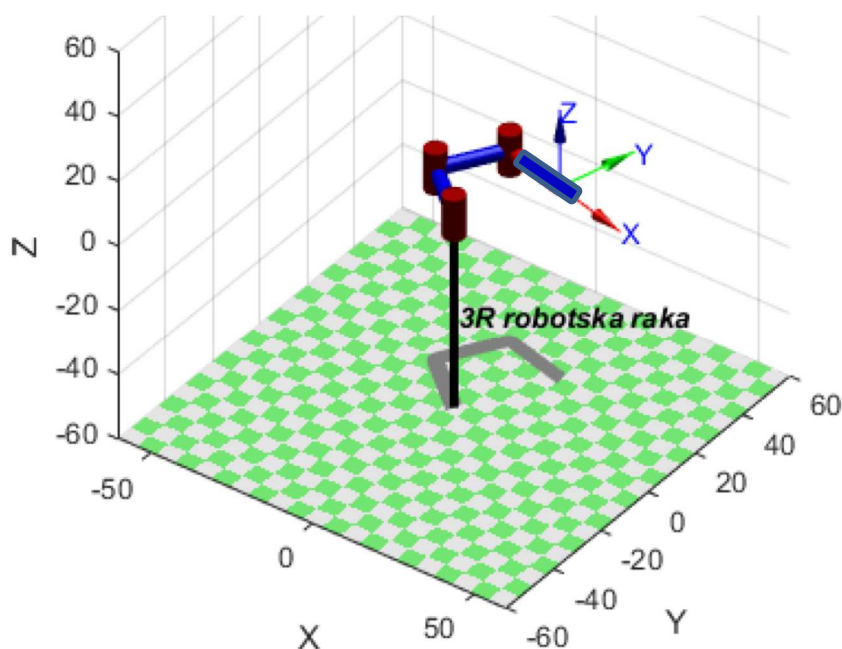
кои се дефинирани во однос на избран референтен координатен систем. Да се определат соодветните сили и моменти кои дејствуваат врз телото во однос на координатниот систем A .

4.7. Да се определи динамиката на роботската рака од слика 4.12.



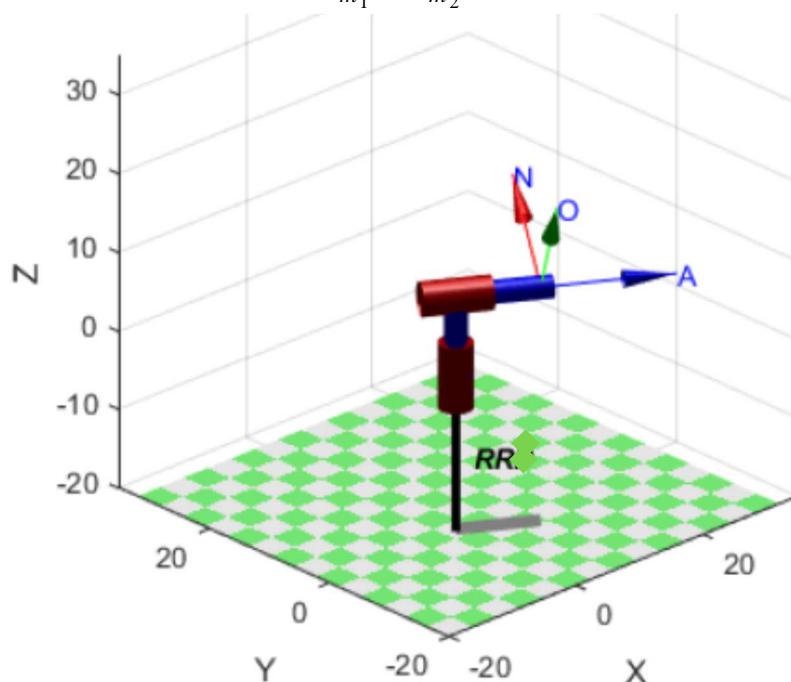
Слика 4.12. Илустрација кон задача 4.7 добиена со Robotics Toolbox [9]

4.8. Дадена е роботската рака со три степени слобода на движење од слика 4.13. Нека θ_1 и l_1 се аголот на завртување на првиот зглоб и должината на првиот крак, соодветно, θ_2 и l_2 се аголот на завртување на вториот зглоб и должината на вториот крак, соодветно, θ_3 и l_3 се аголот на завртување на третиот зглоб и должината на третиот крак, соодветно, додека x_e, y_e, φ_e ја дефинираат позицијата и ориентацијата на извршниот елемент од роботската рака во однос на координатниот систем придружен со основата. Нека $l_1 = 10m.$, $l_2 = 7m.$, $l_3 = 4m.$ а) За $\theta_1 = 135^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$ и $\theta_3 = 225^\circ$, да се определи 2×3 - димензиската Јакобијанова матрица која ја дефинира врската помеѓу позицијата на извршниот елемент и придвижувањето на зглобовите. б) Да се определат соодветните вртливи моменти во зглобовите од набљудуваната роботска рака потребни да се генерира сила од $F_x = 10N$ и $F_y = -2N$ во извршниот елемент од раката.



Слика 4.13. Илустрација кон задачата 4.8 добиена со Robotics Toolbox [9]

4.10. Да се опише динамиката на роботската рака од слика 4.14 и да се определи нејзината матрица на инерции. Нека m_{l_1} и m_{l_2} се масите на краците l_1 и l_2 , соодветно, додека m_{m_1} и m_{m_2} се масите на моторите кои ги придвижуваат зглобовите на роботската рака. Под претпоставка, моторите се поставени во самите зглобови и нивните тежишта се поклопуваат со почетоците на соодветните координатни системи придружени со зглобовите. Соодветните моменти на инерција во однос на оските од моторите се J_{m_1} и J_{m_2} .



Слика 4.14. Илустрација кон задачата 4.10 добиена со Robotics Toolbox [9]

ГЛАВА 5. ПЛАНИРАЊЕ ТРАЕКТОРИИ

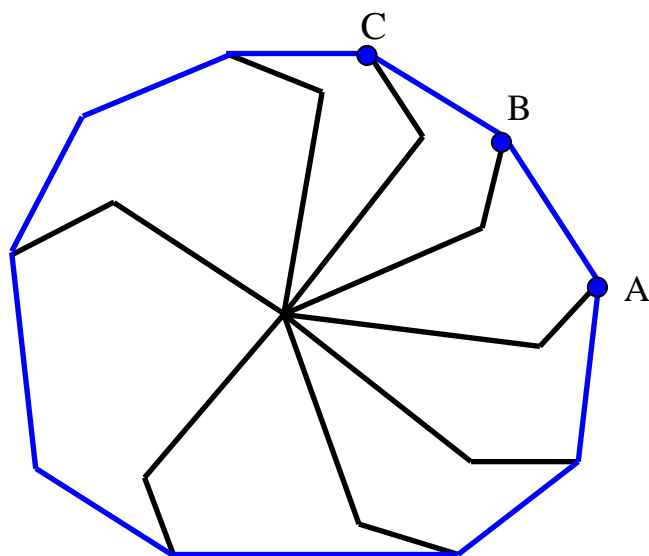
5.1. ВОВЕД

Познавањето на равенките кои ја опишуваат кинематиката и динамиката на роботската рака овозможуваат, кога се познати променливите на зглобовите на раката, да се определи положбата во просторот во која се наоѓа раката – нејзината позиција и ориентација, и обратно, при зададена положба на раката во просторот, да се определат вредностите на променливите на зглобовите на раката потребни раката да се најде во таа положба, како и брзината со која треба да се движат зглобовите на раката за таа да ја постигне саканата положба. Со управуваното движење на роботската рака од една до друга точка во просторот најтесно е поврзано одредувањето на патот и планирањето на траекторијата на движење на роботската рака. За реализацијата на оваа задача неопходно е познавањето и примената како на законите на кинематиката така и на законите на динамиката на роботската рака. Во пракса, барањата за прецизно движење на раката можат да бидат толку големи и строги, што пресметувањето на траекторијата на движење станува екстремно обемно и сложено и бара одредени апроксимации. И покрај тоа, задачата е целосно решлива.

Во оваа глава ќе биде дискутирано планирањето траектории за роботски раце, како фиксни отворени кинематски ланци. Обопштувањето на постапките за случајот на мобилни работи не претставува некој посебен проблем.

5.2. ПАТ И ТРАЕКТОРИЈА НА ДВИЖЕЊЕ НА РОБОТСКАТА РАКА

Многу често термините пат и траекторија се мешаат, затоа што неформално се сметаат за синоними. Меѓутоа, постои одредена суптилна разлика. **Патот на движењето** на една роботска рака се дефинира како подредена низа конфигурации на раката помеѓу две точки во просторот, без оглед на времето поврзано со тие конфигурации. Така, кога една роботска рака се движи од точката А преку точката В до точката С, како што е покажано на слика 5.1, патот на движењето на раката го претставува следот конфигурации помеѓу точките А, В и С. Со други зборови, патот дава чисто геометриски опис на движењето на роботската рака и општо земено, тој се планира глобално, земајќи ги предвид и препреките на патот и сложеноста на просторот во кој раката треба да се движи. **Траекторијата** од друга страна е тесно поврзана со времето во кое треба да се реализираат одредени делови од патот. Едноставно кажано, траекторијата е патот плус брзините и забрзувањата на раката во одделните точки од тој пат. Оттаму, за примерот од слика 5.1 следува дека патот од точката А до точката С преку точката В секогаш е ист, без оглед кога раката ќе се најде во точките В и С, додека траекторијата на движењето на раката зависи од брзината и забрзувањето на нејзиното движење. Така, роботската рака може да се најде во точките В и С во различни временски мигови кои одговараат на различни траектории на движење. Проектирањето на траекториите не бара глобални информации, со што задачата значително се поедноставува. Траекториите се специфицираат и проектираат локално и најчесто за различни делови од патот се проектираат различни траектории.



Слика 5.1. Последователно движење на роботска рака на патот од точката А до точката С преку точката В

Задачата на проектирање на патот на роботската рака се сведува на одредување слободен пат (без препреки) од една до друга конфигурација на раката. Лесно може да се види дека оваа задача во основа претставува тежок алгоритамски проблем на пребарување. Уште повеќе, сложеноста на проблемот расте експоненцијално со степените слобода на движење на раката. Оттаму, кај индустриските манипулатори често планирањето на патот на движење на раката се заменува со учење на раката од страна на човек – оператор. Човек – оператор го обучува најнапред роботскиот манипулатор да следи одредена патека, а раката потоа го повторува наученото.

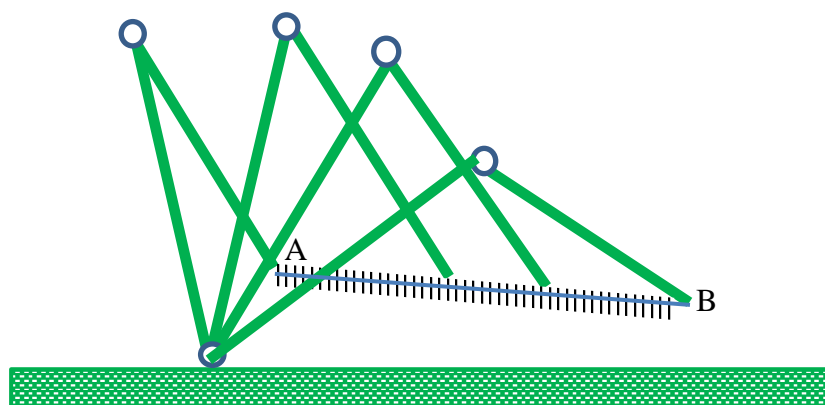
Планираниот пат на движење на роботската рака типично е претставен со меѓуточки, кои претставуваат низа од точки долж патот (или положби на извршниот елемент од раката). Задачата на планирањето траектории е да се проектира траекторија која ќе ги поврзе овие меѓуточки. Најчесто се очекува деловите од траекторијата да се спојуваат „мазно“ во меѓуточките, што значи да нема скокови во тие точки, па, затоа, одделните делови од траекторијата помеѓу две меѓуточки се планираат одделно, земајќи ги предвид само соседните делови од траекторијата.

5.3. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ТРАЕКТОРИИТЕ НА РОБОТСКАТА РАКА

На слика 5.2 е прикажана роботска рака со два степени слобода на движење, која се наоѓа во точката А во просторот. Раката, под претпоставка, треба да се придвижи во положба одредена со точката В во просторот. Нека, под претпоставка, помеѓу точките А и В е повлечена права линија по која треба да се движи роботската рака. Вака дефинираната траекторија е опишана во Декартови координати. Со помош на равенките на инверзната кинематика на раката може да се пресмета вкупното поместување на зглобовите од раката потребно таа да се најде во саканата положба (сакана позиција и ориентација). Пресметаните вредности на променливите на зглобовите на роботската рака му служат на управувачкиот дел на раката да ја

придвижи истата во новата положба. Описот на движењето на роботската рака преку вредностите на нејзините променливи се нарекува опис во просторот на зглобовите на раката. Следствено, просторот на зглобовите на една роботска рака го сочинуваат сите можни вредности на променливите на зглобовите на раката.

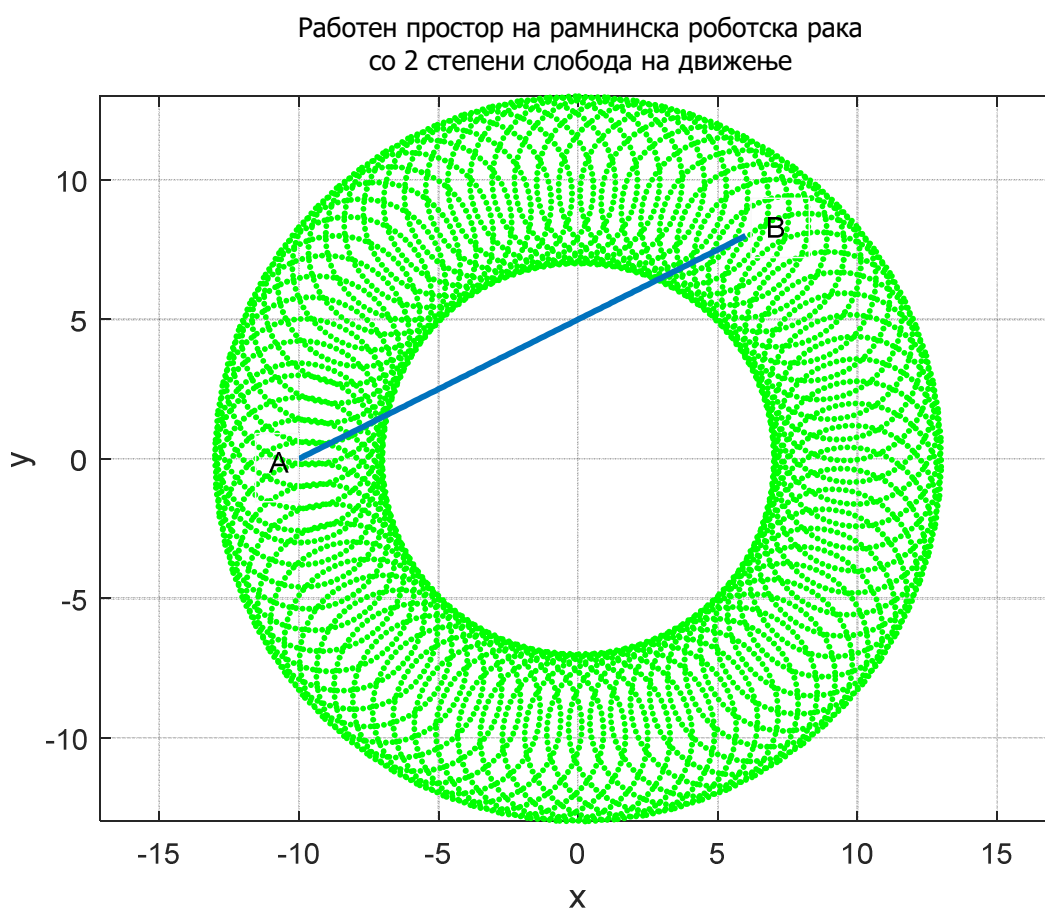
Описите на движењето на една роботска рака во Декартовиот простор и просторот на променливите на зглобовите на раката се подеднакво корисни и се применуваат во индустријата, меѓутоа секој од нив има свои предности и недостатоци. Така, траекториите на движење на роботската рака во Декартовиот простор многу лесно можат да се согледаат и претстават. Со други зборови, бидејќи сите траектории се претставени со Декартови координати, лесно може да се согледа изгледот на траекторијата на извршниот елемент на роботската рака, па, за резултат имаме управуван и познат пат на движењето на раката. Меѓутоа, пресметките на траекториите во Декартови координати се многу обемни и бараат подолго процесирачко време, за разлика од соодветните траектории во просторот на променливите на зглобовите на роботската рака. Ова може да се објасни со помош на примерот од слика 5.2. За да се реализира движењето на роботската рака од слика 5.2, правата линија помеѓу точките A и B се дели на одреден број делови – сегменти и раката при своето движење од точката A до точката B треба да помине низ сите меѓуточки со кои е извршена поделбата на патот од A до B. Тоа се остварува на тој начин, што за секоја следна меѓуположба на раката (секоја следна меѓуточка на патот од A до B) се решаваат равенките на инверзната кинематика на роботската



Слика 5.2. Секвенцијални движења на роботска рака која следи права линија

рака. Така се определуваат вредностите на променливите на зглобовите на раката кои одговараат на новата меѓуположба, па врз основа на нив управувачкиот дел од раката ја придвижува истата во таа меѓуположба. По завршувањето на движењето на раката низ сите меѓуположби таа ќе се најде во точката B. Бидејќи последователните движења на раката се опишани во Декартови координати, тие се познати во секој миг на време, што претставува предност. Меѓутоа, за секој сегмент од движењето, траекториите мора да се префрлат во просторот на зглобовите од раката, што значи дека задачата на инверзната кинематика на роботската рака мора да се решава одново при секоја следна меѓуточка од патот. Затоа планирањето на движењето на една роботска рака во Декартовиот простор претпоставува сложени и обемни пресметки, кои бараат подолго процесирачко време, во споредба со

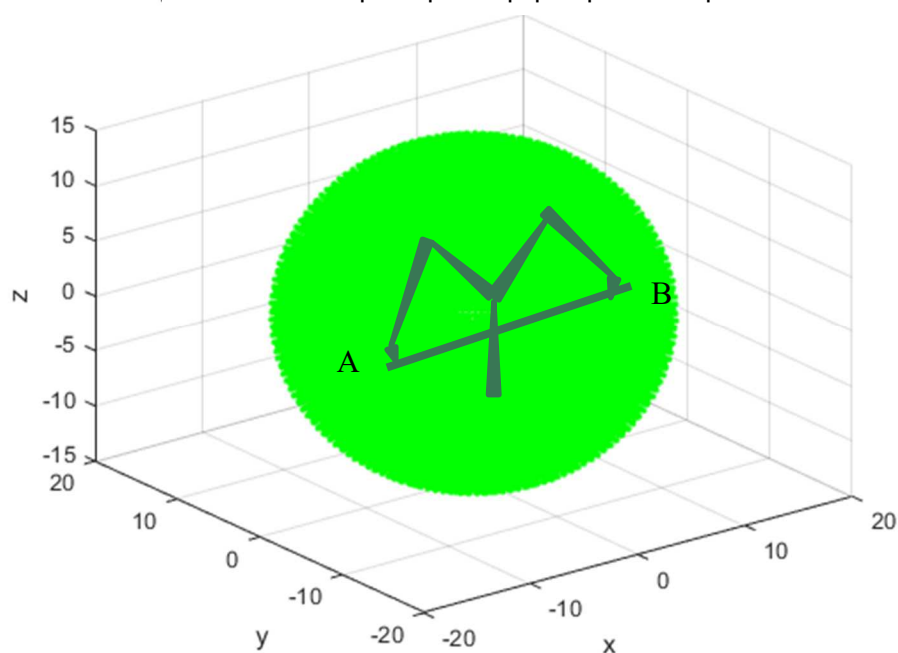
планирањето траектории во просторот на зглобовите на роботската рака. Исто така, при планирањето траектории во Декартовиот простор, иако истите лесно се согледуваат, тешко може да се согледа и предвиди појавата на сингуларитети. Така, доколку не се внимава, може да се случи раката да треба да се најде во положба надвор од нејзиниот работен простор, слика 5.3, или, што е исто така неприфатливо, да се судри самата со себе, слика 5.4. Ова произлегува од фактот дека понекогаш, пред да се изврши самото движење, е невозможно да се одреди дали раката е во состојба да се најде во саканата положба. Друг проблем е потребата од нагла, мигновена, промена на вредностите на променливите на зглобовите, слика 5.5. Некои од споменатите проблеми можат да се надминат така што на набљудуваниот пат ќе се дефинираат меѓуточки низ кои раката треба да помине со цел да ги избегне препреките на патот и сличните сингуларитети.



Слика 5.3. Дел од траекторијата АВ се наоѓа надвор од работниот простор на набљудуваната роботска рака

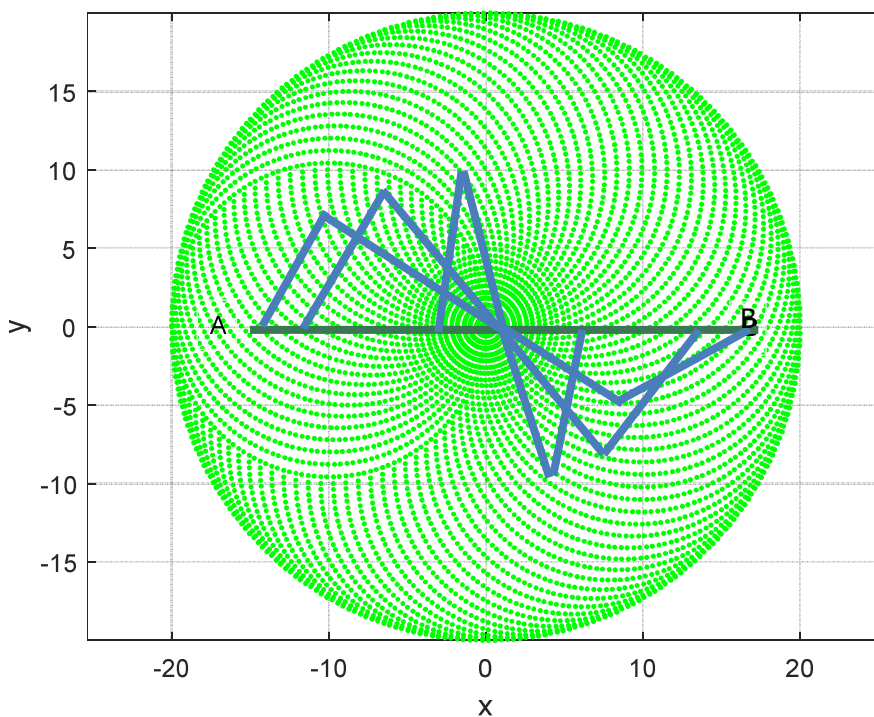
Описот на движењето на една роботска рака во просторот на променливите на зглобовите на раката е многу поедноставен; задачата на инверзната кинематика се решава само еднаш, на почетокот од планирањето на траекторијата во просторот на зглобовите. Меѓутоа, иако раката на крајот ќе се најде во саканата положба, нејзиното движење е непредвидливо.

Работен простор на сферна роботска рака



Слика 5.4. Роботската рака е принудена да се судри самата со себе

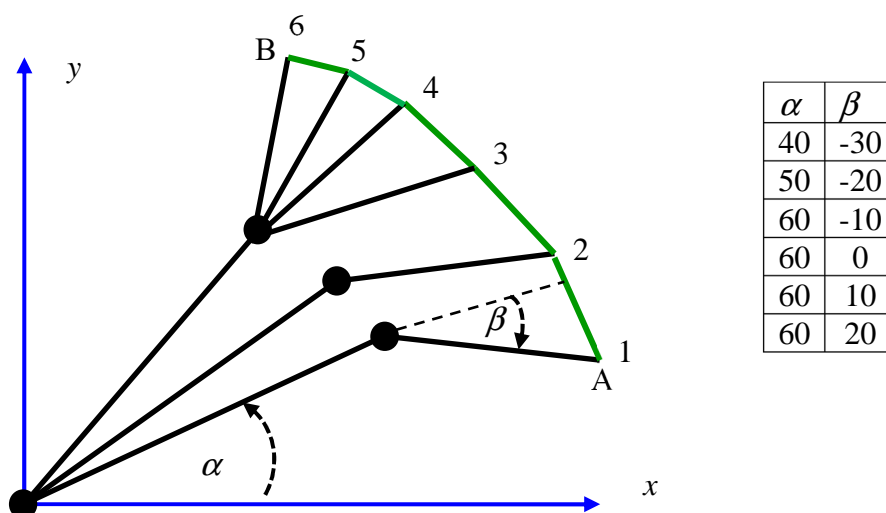
Работен простор на рамнинска роботска рака со 2 степени слобода на движење



Слика 5.5. Траекторијата АВ бара нагла промена на аглите на зглобовите од раката заради постоењето сингуларитети

5.4. ОСНОВИ НА ПЛАНИРАЊЕТО НА ТРАЕКТОРИЈАТА НА ДВИЖЕЊЕ НА РОБОТСКАТА РАКА

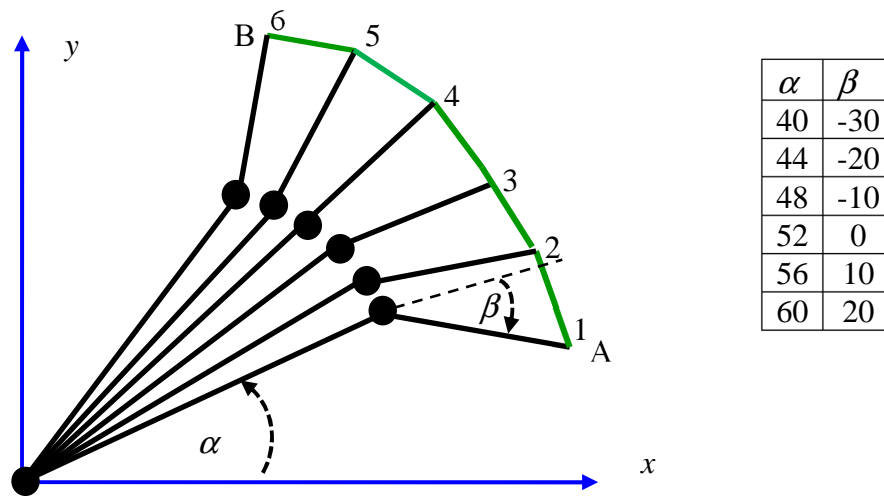
Основите на планирањето на траекторијата на движењето на една роботска рака, како во просторот на променливите на зглобовите на раката така и во Декартовиот простор, можат да се изложат преку движењето на едноставна роботска рака со два степени слобода на движење. Нека, под претпоставка, раката треба да се придвижи од точката A во точката B, како што е покажано на сликата 5.6. Конфигурацијата на раката, односно нејзината положба во точката A е одредена со аглите $\alpha = 40^\circ$ и $\beta = -30^\circ$, додека конфигурацијата на раката во точката B е дефинирана со аглите $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 20^\circ$. Исто така се претпоставува дека максималната брзина на движење на зглобовите на раката е $10^0 / \text{sec}$. Еден начин да се придвижи раката од точката A до точката B е ако двата зглоба на раката се движат со максимална брзина. Тоа значи дека по 2 сек првиот (долен) крак на раката ќе заврши со своето движење, додека вториот (горен) крак ќе продолжи со движење следните 3 сек. На слика 5.6 е прикажано и движењето на краците на раката и траекторијата на извршниот елемент на роботската рака. Како што може да се забележи, патот е неправилен и растојанијата што ги изминува извршниот елемент од роботската рака се нееднакви.



Слика 5.6. Ненормализирано движење на роботска рака со два степени слобода на движење во просторот на променливите на зглобовите на раката

Во продолжение може да се разгледува случајот кога зглобовите на роботската рака се движат симултано со различни брзини на движење, така што го започнуваат и завршуваат движењето истовремено. Ова може да се постигне со нормализирање на брзините на движење на зглобовите на раката, така што зглобот со помало движење ќе се движи пропорционално побавно. Конкретно во набљудуваниот пример од слика 5.6, аголот α треба да се менува со брзина од $4^0 / \text{sec}$, додека аголот β се менува со брзина од $10^0 / \text{sec}$. Резултантната траекторија на ваквото движење е прикажана на слика 5.7, од каде може да се забележи дека сегментите на движењето се многу

повеќе слични помеѓу себе, но патот е сè уште неправилен и се разликува од патот во претходниот случај.

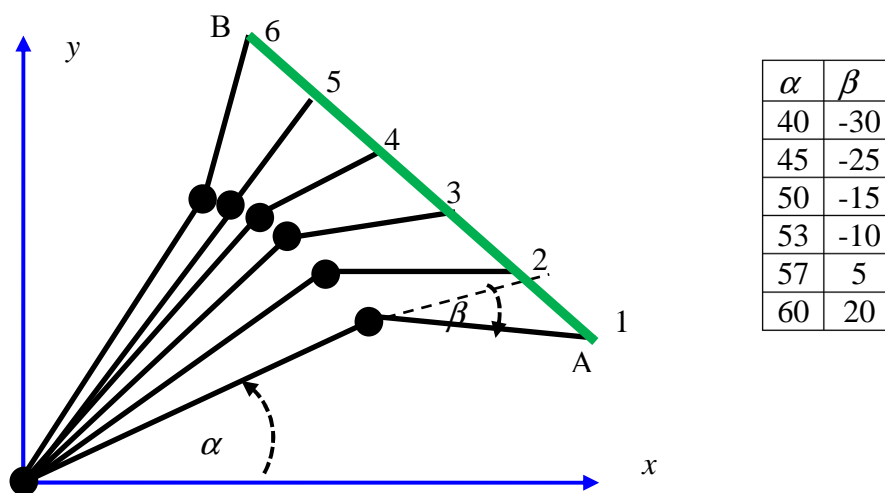


Слика 5.7. Нормализирано движење на роботска рака со два степени слобода на движење во просторот на променливите на зглобовите на раката

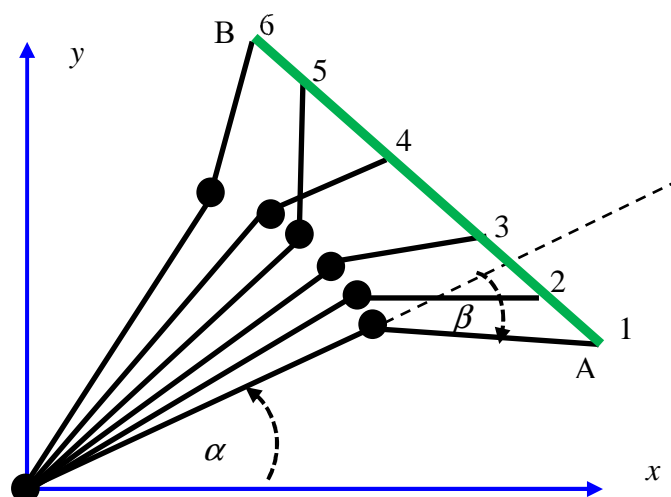
И двете движења претставени на слика 5.6 и слика 5.7 се планирани во просторот на променливите на зглобовите на раката. Единствените потребни и направени пресметки се однесуваат на променливите на зглобовите на раката, а во вториот случај, и на нормализирањето на брзините на зглобовите на раката. Нека сега, во продолжение, се претпостави дека раката треба да следи одреден пат помеѓу точките A и B, претставен со права линија. Наједноставно решение на оваа задача е помеѓу точките A и B да се повлече права линија и истата да се подели на одреден број, на пример 5, еднакви сегменти. Тогаш за секоја меѓуточка на патот од A до B треба да се пресметаат соодветните вредности на аглиите α и β , како што е покажано на слика 5.8. Во овој случај патот е права линија, меѓутоа аглиите на зглобовите не се менуваат подеднакво. Иако резултантното движење е права, што значи позната траекторија, за секоја меѓуточка од оваа линија треба одново да се пресметуваат вредностите на аглиите на зглобовите на раката. Колку е поголем бројот сегменти на кој се дели траекторијата на движењето на раката, толку е поголема прецизноста со која роботската рака ќе се движи по саканата траекторија. Очигледно е дека во случај на мал број сегменти раката нема точно да ја следи траекторијата помеѓу секои две меѓуточки. Бидејќи сите сегменти од движењето на раката се пресметуваат врз основа на информации изразени во Декартови координати, траекторијата од слика 5.8 е планирана во Декартовиот простор.

Во случајот од слика 5.8 се претпоставува дека актуаторите на роботската рака се доволно снажни да ги обезбедат потребните сили за забрзување и успорување на зглобовите на раката според потреба. Така, за да ја имаат саканата брзина на движење на почетокот од секој сегмент на траекторијата од A до B, зглобовите на набљудуваната роботска рака треба мигновено да се забрзуваат од вредност 0 на потребната вредност, и на крајот од секое меѓудвижење треба мигновено да се

успоруваат, за да запрат во саканата меѓуположба. Доколку тоа не е случај, раката нема да ја следи сосем точно замислената траекторија, туку малку ќе застанува додека забрзува до саканата брзина на движење. Ситуацијата може да се подобри ако траекторијата, наместо на еднакви, се подели на различни сегменти, кои се помали на почетокот и при крајот од траекторијата, додека роботската рака се забрзува, односно успорува пред запирањето. Тоа е прикажано на слика 5.9. Се разбира, и во овој случај мора да се решаваат равенките на инверзната кинематика на роботската рака за секоја од меѓуточките на траекторијата.



Слика 5.8. Движење на роботска рака со два степени слобода на движење во Декартовиот простор

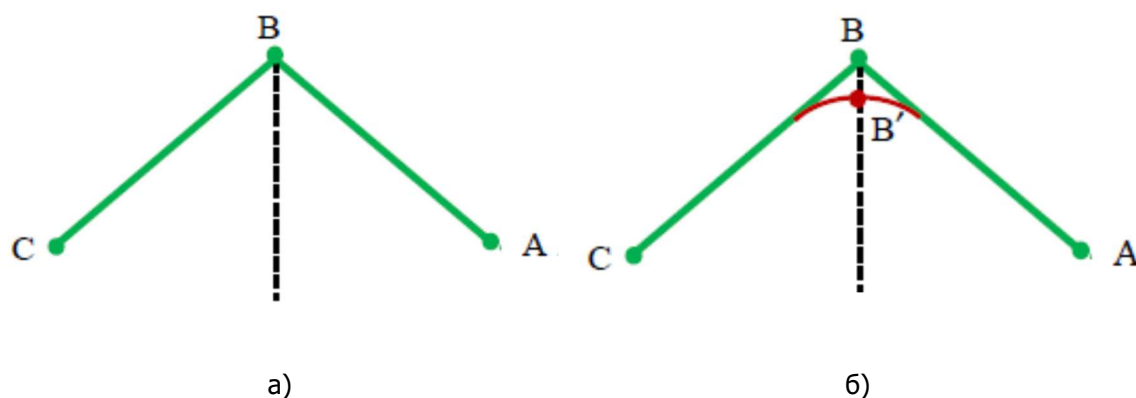


Слика 5.9. Планирање на траекторијата на движење на роботска рака со два степени слобода на движење во Декартовиот простор со области на забрзување и успорување

Траекторијата на движење на роботската рака воопшто не мора да биде права линија, туку произволна, на пример, квадратна параболична крива. Тогаш координатите на секоја од меѓуточките на траекторијата се пресметуваат врз основа на саканата траекторија, па потоа се определуваат соодветните вредности на променливите на зглобовите на раката.

Во сите досегашни случаи се разгледуваше движењето на роботска рака помеѓу две точки А и В. Во пракса, роботската рака мора да помине низ многу последователни точки, вклучувајќи ги и меѓуточките. Така следен чекор во планирањето на траекторијата на движење на една роботска рака е планирањето на движењето меѓу последователни точки и на крајот, планирањето на континуално движење.

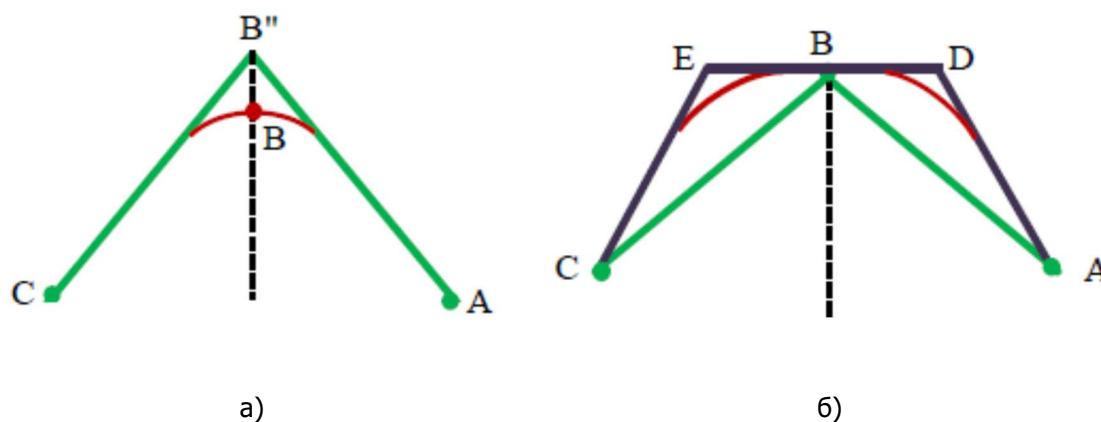
Нека, под претпоставка, една роботска рака треба да се придвижи од точката А во точката В и потоа во точката С, како што е покажано на слика 5.10 а). Еден начин да се постигне оваа цел е раката да се забрза од точката А, да се движи со постигнатата сакана брзина долж траекторијата помеѓу А и В и на крај, по успорувањето, да застане во В. Потоа треба повторно да забрзува од точката В, да се движи со постигнатата сакана брзина по траекторијата помеѓу точките В и С и, по соодветното успорување, да застане во точката С. Ваквото движење од типот појди-запри има за резултат нерамномерно движење со скокови и непотребен број запирања. Многу подобро е двата сегмента од движењето на раката помеѓу точките А и С да се спојат меѓусебно така што раката кога ќе се доближи до точката В ќе успори доколку е потребно, ќе продолжи по делот за спојување на двата сегмента, повторно ќе забрза кон точката С и конечно ќе запре во С. На овој начин се остварува многу поелегантно движење и се намалува стресот врз роботската рака, што подразбира и помала потребна енергија за реализирање на движењето. Како резултат на спојувањето на одделните сегменти на движење, раката наместо низ точката В ќе минува низ некоја друга блиска точка В', слика 5.10 б).



Слика 5.10. Спојување одделни сегменти на патот на движење на една роботска рака

Доколку е потребно раката да мине точно низ точката В, наместо В се планира друга точка В'', така што по спојувањето на сегментите од А до В'' и од В'' до С раката ќе мине низ точката В, слика 5.11 а). Алтернативно, пред и по точката В можат да се дефинираат меѓуточки D и E, така што точката В ќе се најде точно на правиот дел од траекторијата на движење на роботската рака помеѓу овие две меѓуточки D и E,

со што раката сигурно ќе помине низ точката B, слика 5.11 б). Ако движењето на раката се состои од поголем број сегменти, сите меѓу себе можат да се поврзат со меѓусегменти за спојување.



Слика 5.11. Спојување одделни сегменти на патот на движење на една роботска рака така што ќе се обезбеди раката сигурно да минува низ точката B

Откако се испланира патот на движењето на роботската рака, управувачкиот дел од манипулаторот ги користи тие пресметки за да ги пресмета вредностите на променливите на нејзините зглобови, што ќе овозможат соодветно управување и движење на раката. Секогаш кога патот на движењето на роботската рака е многу сложен и не може едноставно да се опише аналитички, едно решение е роботската рака рачно да се поместува и да се регистрира движењето на секој од нејзините зглобови. Забележаните вредности на променливите на зглобовите на раката подоцна можат да се искористат за управување и движење на раката на истиот пат. Ова многу често се прави во индустријата кога роботските манипулатори се обучуваат за извршување одредени задачи какви што се фарбањето автомобили, заварувањето делови со сложени облици и сл.

5.5. ПЛАНИРАЊЕ ТРАЕКТОРИЈА НА ДВИЖЕЊЕ ВО ПРОСТОРОТ НА ЗГЛОБОВИТЕ НА РОБОТСКАТА РАКА

Обично при планирањето на траекторијата на движење на една роботска рака, патот се дели на меѓуточки, така што има одредена слобода при планирањето на траекториите за деловите од патот помеѓу тие меѓуточки. Општо земено, за дефинирање на положбата, брзината и забрзувањето на зглобовите на раката во секоја точка од еден сегмент се користат полиноми од одреден степен. Степенот на полиномот е одреден со бројот гранични услови што треба да се задоволат. Така, ако треба да се исполнат само граничните услови во поглед на движењето, задоволува полином од прв степен. Ако треба да се задоволат граничните услови и во поглед на движењето и во поглед на брзината, ќе биде потребен полином од трет степен итн. Притоа мора да се планира траекторијата на движење за секој зглоб од раката одделно.

5.5.1. ПЛАНИРАЊЕ ТРАЕКТОРИИ ПРЕТСТАВЕНИ СО ПОЛИНОМ ОД ПРВ СТЕПЕН

Почетната положба на роботската рака (позиција и ориентација), под претпоставка, е позната. Со помош на равенките за инверзна кинематика можат да се определат вредностите на променливите на зглобовите на раката кои одговараат на нејзината сакана крајна положба. Нека вредноста на променливата на i – тиот зглоб на раката во времето t_0 е означена со q_0 , а нејзината вредност во времето t_f е означена со q_f . Треба да се дефинира движењето на i – тиот зглоб од положбата зададена со q_0 во положбата одредена со q_f . Еден начин тоа да се стори е при планирање на траекторијата на движењето на зглобот да се усвои полином од прв степен, што подразбира линеарна траекторија:

$$q(t) = a_1 t + a_0, \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (5.1)$$

Коефициентите на оваа траекторија се определуваат од граничните услови:

$$t = t_0 = 0 \Rightarrow q(t_0) = q(0) = q_0 \quad (5.2)$$

$$t = t_f \Rightarrow q(t_f) = q_f \quad (5.3)$$

па, оттука:

$$t = t_0 = 0: q(t_0) = a_1 t_0 + a_0 = q(0) = a_0 = q_0 \quad (5.4)$$

$$t = t_f: q(t_f) = a_1 t_f + a_0 = a_1 t_f + q_0 = q_f \Rightarrow a_1 = \frac{q_f - q_0}{t_f} \quad (5.5)$$

За определување два непознати коефициенти, доволни се само два гранични услови, и тоа се условите за изминатиот пат на почетокот и крајот од набљудуваниот временски сегмент $t_0 \leq t \leq t_f$, па за траекторијата на зглобот од набљудуваната роботска рака дефинитивно се добива:

$$q(t) = \frac{q_f - q_0}{t_f} t + q_0, \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (5.6)$$

додека неговата брзина и забрзување се дадени со изразите:

$$\dot{q}(t) = \frac{q_f - q_0}{t_f} = \text{const.}, \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (5.7)$$

$$\ddot{q}(t) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \vee t_f \\ 0, & t_0 < t < t_f \end{cases} \quad (5.8)$$

Може да се забележи дека ваквата траекторија претпоставува бесконечно забрзување во граничните точки, што реално не може да се оствари. Исто така, доколку се планира траекторија која поминува низ повеќе меѓуточки, линеарните сегменти од траекторијата од типот (5.6) ќе значат дисконтинуитет на брзината во тие меѓуточки.

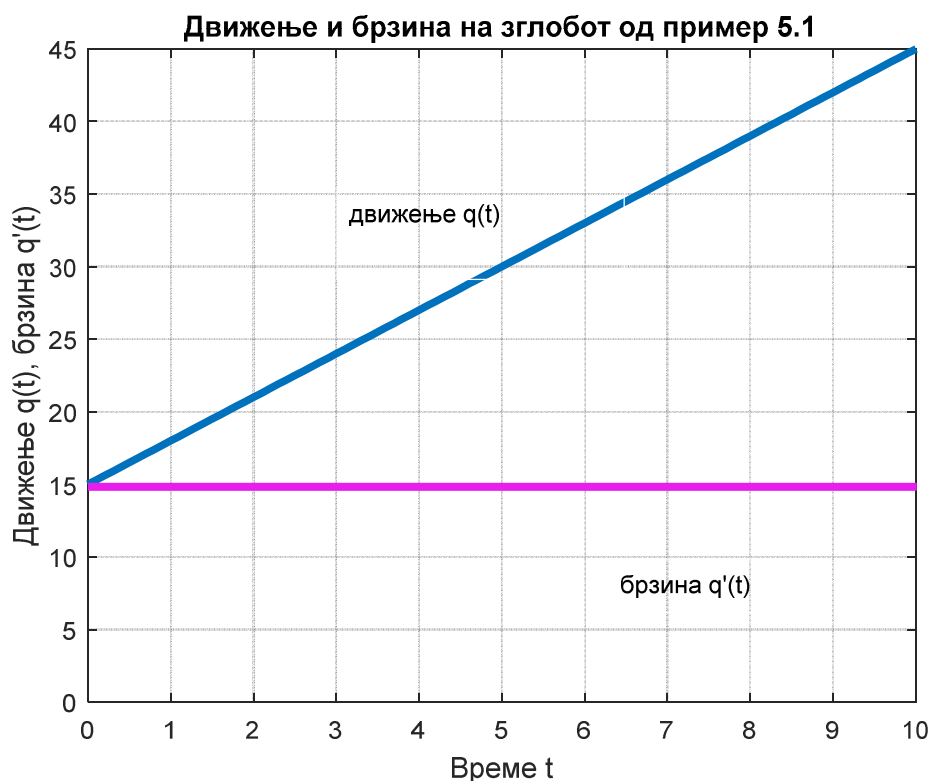
Пример 5.1. Со примена на полином од прв степен да се испланира траекторијата на движење на третиот зглоб од една роботска рака со три степени слобода на движење, кој за време од 10 sec треба да се придвижи од почетната положба одредена со аголот $q_0 = 15^0$ во крајната положба зададена со аголот $q_f = 45^0$. Да се пресметаат вредностите на аголот на зглобот за $t = 2, 4, 6, 8$ sec.

Решение: Со воведување на граничните услови од примерот 5.1 во (5.6), за траекторијата и брзината на набљудуваниот зглоб се добива:

$$q(t) = \frac{q_f - q_0}{t_f} t + q_0 = \frac{45 - 15}{10} t + 15 = 3t + 15, \quad t_0 = 0 \leq t \leq 10 = t_f \quad (5.9)$$

$$\dot{q}(t) = 3 = const., \quad t_0 = 0 \leq t \leq 10 = t_f \quad (5.10)$$

Истите се прикажани графички на слика 5.12, добиена со помош на програмскиот пакет MATLAB. Бараните вредности на аголот на зглобот во дадените мигови се $q(2) = 21^0$, $q(4) = 27^0$, $q(6) = 33^0$, $q(8) = 39^0$.



Слика 5.12. Движење и брзина на зглобот од примерот 5.1

5.5.2. ПЛАНИРАЊЕ ТРАЕКТОРИИ ПРЕТСТАВЕНИ СО ПОЛИНОМ ОД ТРЕТ СТЕПЕН

При планирањето на траекторијата на движење на еден зглоб, се разбира, може да се усвои и полином од повисок степен. Така, движењето на i – тиот зглоб на една роботска рака од почетната положба q_0 во мигот t_0 до крајната положба q_f во мигот t_f може да се претстави со полином од трет степен од општ облик:

$$q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (5.11)$$

кој ќе ги задоволи дадените почетни услови:

$$q(t_0) = q(0) = q_0, \quad q(t_f) = q_f \quad (5.12)$$

Бидејќи полиномот (5.11) има 4 неопределени коефициенти, за нивно определување потребни се четири услови. Затоа условите (5.12) се дополнуваат со граничните услови за брзината на движењето на набљудуваниот зглоб во почетниот и крајниот миг на набљудување. Нека, под претпоставка, зглобот треба да појде од мирување и да запре во мирување, што значи нулева почетна и крајна брзина $\dot{q}_0 = \dot{q}_f = 0$:

$$\dot{q}(t_0) = \dot{q}(0) = \dot{q}_0 = 0, \quad \dot{q}(t_f) = \dot{q}_f = 0 \quad (5.13)$$

Претпоставката дека набљудуваниот зглоб го започнува движењето од мирување и на крајот од тоа движење повторно запира не претставува никакво ограничување. Подеднакво може да се претпостават и соодветни вредности за почетната и крајната брзина на зглобот различни од нулата.

Со воведување на граничните услови (5.12) – (5.13) во изразите за движењето и брзината на набљудуваниот зглоб:

$$\begin{aligned} q(t) &= a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad t_0 \leq t \leq t_f \\ \dot{q}(t) &= 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1, \quad t_0 \leq t \leq t_f \end{aligned} \quad (5.14)$$

се добиваат следните вредности за коефициентите на полиномот (5.11):

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q(0) = q_0 = a_0 \Rightarrow a_0 = q_0 \\ \dot{q}(t_0) &= \dot{q}(0) = 0 = 3a_3 t_0^2 + 2a_2 t_0 + a_1 = a_1 \Rightarrow a_1 = 0 \\ q(t_f) &= a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + a_1 t_f + a_0 = a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + q_0 = q_f \\ \dot{q}(t_f) &= \dot{q}_f = 3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f + a_1 = 3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t_f^2 & t_f^3 \\ 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_f - q_0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} t_f^2 & t_f^3 \\ 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_f - q_0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{t_f^4} \begin{bmatrix} 3t_f^2 & -t_f^3 \\ -2t_f & t_f^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_f - q_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t_f^{-2} & -t_f^{-1} \\ -2t_f^{-3} & t_f^{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_f - q_0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{t_f^3} \begin{bmatrix} 3t_f(q_f - q_0) \\ -2(q_f - q_0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Оттука, движењето и брзината на набљудуваниот зглоб (5.14) ќе бидат дадени со следните конкретни изрази:

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{-2(q_f - q_0)}{t_f^3} t^3 + \frac{3(q_f - q_0)}{t_f^2} t^2 + q_0, \quad t_0 \leq t \leq t_f \\ \dot{q}(t) &= \frac{-6(q_f - q_0)}{t_f^3} t^2 + \frac{6(q_f - q_0)}{t_f^2} t, \quad t_0 \leq t \leq t_f \end{aligned} \quad (5.16)$$

Изразите (5.16) овозможуваат да се определи движењето и брзината на набљудуваниот зглоб во произволен временски миг и врз основа на овие вредности управувачкиот дел од роботската рака го генерира потребниот управувачки закон и дејствија за придвижување на зглобот од една во друга дефинирана положба. Ако зглобот треба да се придвижи така што ќе мине низ повеќе последователни точки, крајните вредности за положбата и брзината на движењето на зглобот од секој еден претходен сегмент на движење се користат како почетни вредности за следниот. Истата постапка се применува за сите зглобови на набљудуваната роботска рака одделно, но сите се придвижуваат заедно од почетокот до крајот на планираното движење.

Иако положбата и брзината на движење на зглобовите се континуални, забрзувањето не мора да биде таква величина, што може да претставува проблем.

Пример 5.2. Со примена на полином од трет степен да се испланира траекторијата на движење на првиот зглоб од една роботска рака со три степени слобода на движење, кој за време од 5 сес треба да се придвижи од почетната положба одредена со аголот $q_0 = 30^0$ во крајната положба зададена со аголот $q_f = 75^0$. Зглобот поаѓа од мирување и запира во мирување. Да се пресметаат вредностите $q(1)$, $q(2)$, $q(3)$ и $q(4)$.

Решение: Со воведување на соодветните гранични услови од примерот 5.2 во системот равенки (5.14) се добива:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 25 & 125 \\ 0 & 1 & 10 & 75 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} q_i \\ 0 \\ q_f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 25 & 125 \\ 0 & 1 & 10 & 75 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 75 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 5.4 \\ -0.72 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

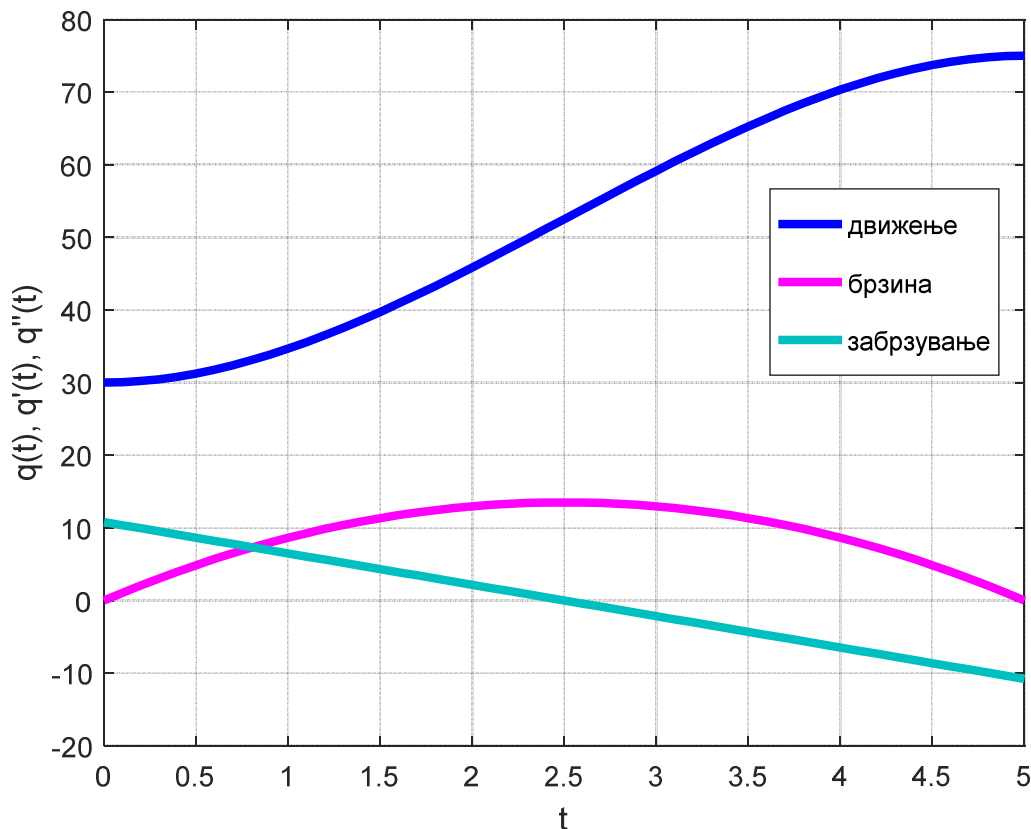
Како резултат, положбата, брзината и забрзувањето на набљудуваниот зглоб се дадени со изразите:

$$q(t) = -0.72t^3 + 5.4t^2 + 30, \quad 0 \leq t \leq 5$$

$$\dot{q}(t) = -2.16t^2 + 10.8t, \quad 0 \leq t \leq 5$$

$$\ddot{q}(t) = -4.32t + 10.8, \quad 0 \leq t \leq 5 \quad (5.18)$$

и истите се прикажани графички на слика 5.13, од каде се забележува дека во почетокот од движењето потребното забрзување на зглобот изнесува $10.8^0 / \text{sec}^2$, додека на крајот од движењето забрзувањето изнесува $-10.8^0 / \text{sec}^2$, што значи дека зглобот успорува.



Слика 5.13. Графички приказ на положбата, брзината и забрзувањето на зглобот од примерот 5.2

Бараните вредности на аголот на зглобот $q(1)$, $q(2)$, $q(3)$ и $q(4)$, добиени за $t = 1, 2, 3, 4$ sec се:

$$q(1) = 34.68^{\circ}; q(2) = 45.84^{\circ}; q(3) = 59.16^{\circ}; q(4) = 70.32^{\circ} \quad (5.19)$$

Пример 5.3. Нека роботската рака од примерот 5.2 го продолжува своето движење, така што набљудуваниот зглоб треба да се најде во положбата определена со аголот $q_f = 105^{\circ}$ по време од 3 sec. Да се определат аналитички и графички движењето, брзината и забрзувањето на зглобот на овој нов сегмент од неговата траекторија на движење.

Решение: И на овој нов сегмент од движењето на набљудуваниот зглоб неговата траекторија се опишува со полином од трет степен од дадениот општ облик (5.11), со тоа што коефициентите на полиномот (5.11) сега се определуваат врз основа на новите гранични услови. За почетни вредности на движењето на зглобот на овој сегмент се усвојуваат крајните вредности од претходниот сегмент на движење, што значи сега $q_0 = q_1 = 75^{\circ}$ и $q_f = 105^{\circ}$; почетната и крајната брзина на движењето повторно, под претпоставка, се еднакви на нула.

Со воведување на соодветните гранични услови од задачата во системот равенки (5.14) се добива:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 9 & 27 \\ 0 & 1 & 6 & 27 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} q_i \\ 0 \\ q_f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 9 & 27 \\ 0 & 1 & 6 & 27 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 75 \\ 0 \\ 105 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 0 \\ 10 \\ -2.2 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

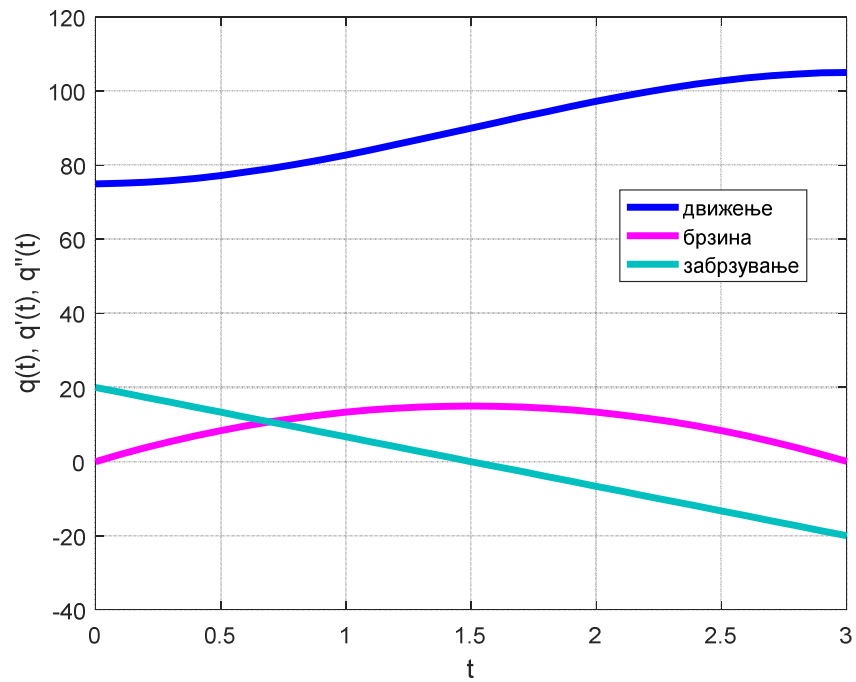
Како резултат, положбата, брзината и забрзувањето на набљудуваниот зглоб на новиот сегмент од неговото движење се опишани со следните релации:

$$\begin{aligned} q(t) &= -2.2t^3 + 10t^2 + 75, \quad 0 \leq t \leq 3 \\ \dot{q}(t) &= -6.6t^2 + 20t, \quad 0 \leq t \leq 3 \\ \ddot{q}(t) &= -13.3t + 20, \quad 0 \leq t \leq 3 \end{aligned} \quad (5.21)$$

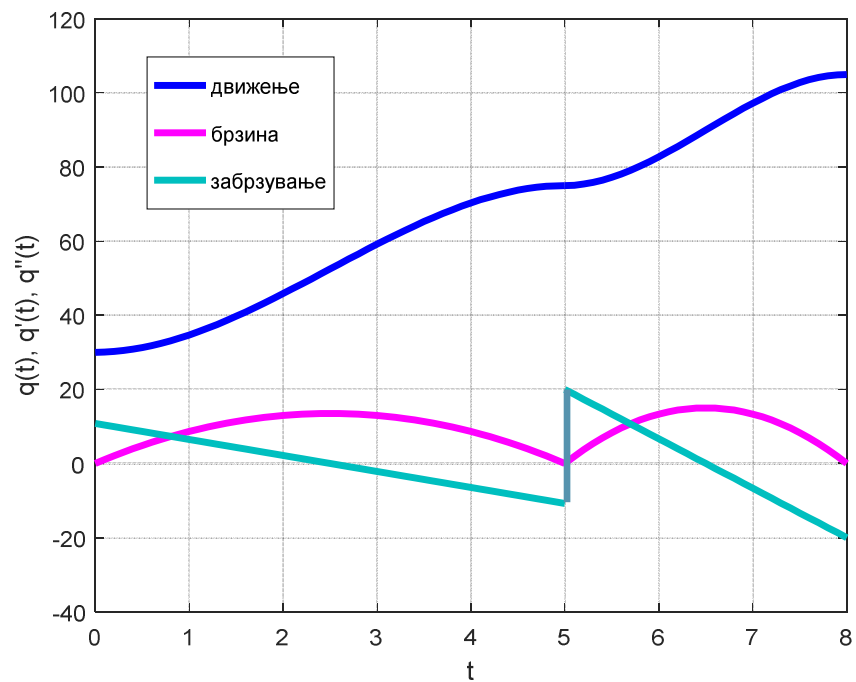
Тие графички се прикажани на слика 5.14.

Положбата, брзината и забрзувањето на роботската рака од примерот 5.2 и 5.3 можат да се прикажат за целото движење, од почетната точка $q_0 = 30^{\circ}$, па преку меѓуточката $q_1 = 75^{\circ}$ до конечната точка $q_f = 105^{\circ}$, како што е тоа сторено на слика 5.15. Сосема очекувано, граничните услови се целосно задоволени. Меѓутоа, иако континуална, кривата на брзината на движењето на зглобот го менува знакот на наклонот во меѓуточката (помеѓу двата сегмента од набљудуваното движење) од негативен во позитивен. Како резултат на тоа во забрзувањето на зглобот во

меѓуточката се јавува скок – мигновена промена од една во друга вредност. Дали роботската рака е во состојба да создаде такво забрзување или не е, тоа е веќе друго прашање за кое мора да се води сметка.



Слика 5.14. Графички приказ на положбата, брзината и забрзувањето на зглобот од примерот 5.2 на следниот сегмент од движењето одредени во примерот 5.3



Слика 5.15. Графички приказ на комплетното движење на зглобот од примерите 5.2 и 5.3

5.5.3. ПЛАНИРАЊЕ ТРАЕКТОРИЈА ПРЕТСТАВЕНА СО ПОЛИНОМ ОД ПЕТТИ СТЕПЕН

Исто како што се задава брзината на движењето на една роботска рака во крајните точки од нејзината траекторија, така може да се зададе и нејзиното забрзување. Во тој случај вкупниот број гранични услови е шест, па траекторијата на движењето на раката може да се претстави со полином од петти степен од општ облик:

$$q(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (5.22)$$

додека нејзината брзина и забрзување ќе бидат од облик:

$$\dot{q}(t) = 5a_5 t^4 + 4a_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1, \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (5.23)$$

$$\ddot{q}(t) = 20a_5 t^3 + 12a_4 t^2 + 6a_3 t + 2a_2, \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (5.24)$$

Со воведување на почетните услови:

$$q(t_0) = q(0) = q_0, \quad q(t_f) = q_f$$

$$\dot{q}(t_0) = \dot{q}(0) = \dot{q}_0 = 0, \quad \dot{q}(t_f) = \dot{q}_f = 0$$

$$\ddot{q}(t_0) = \ddot{q}(0) = \ddot{q}_0, \quad \ddot{q}(t_f) = \ddot{q}_f \quad (5.25)$$

во системот равенки (5.22) – (5.24), се добиваат следните вредности за коефициентите на полиномот (5.22):

$$q(t_0) = q(0) = q_0 = a_0 \Rightarrow a_0 = q_0$$

$$\dot{q}(t_0) = \dot{q}(0) = 0 = 5a_5 t_0^4 + 4a_4 t_0^3 + 3a_3 t_0^2 + 2a_2 t_0 + a_1 = a_1 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\ddot{q}(t_0) = \ddot{q}(0) = \ddot{q}_0 = 20a_5 t_0^3 + 12a_4 t_0^2 + 6a_3 t_0 + 2a_2 = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{\ddot{q}_0}{2}$$

$$q(t_f) = a_5 t_f^5 + a_4 t_f^4 + a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + a_1 t_f + a_0 = a_5 t_f^5 + a_4 t_f^4 + a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + a_0 = q_f$$

$$\dot{q}(t_f) = 5a_5 t_f^4 + 4a_4 t_f^3 + 3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f + a_1 = 5a_5 t_f^4 + 4a_4 t_f^3 + 3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f = \dot{q}_f$$

$$\ddot{q}(t_f) = \ddot{q}_f = 20a_5 t_f^3 + 12a_4 t_f^2 + 6a_3 t_f + 2a_2 = 20a_5 t_f^3 + 12a_4 t_f^2 + 6a_3 t_f + \ddot{q}_0$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_f - q_0 - \frac{\ddot{q}_0}{2} t_f^2 \\ -\ddot{q}_0 t_f \\ \ddot{q}_f - \ddot{q}_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_f - q_0 - \frac{\ddot{q}_0}{2} t_f^2 \\ -\ddot{q}_0 t_f \\ \ddot{q}_f - \ddot{q}_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2t_f^9} \begin{bmatrix} 20t_f^6 & -8t_f^7 & t_f^8 \\ -30t_f^5 & 14t_f^6 & -2t_f^7 \\ 12t_f^4 & -6t_f^5 & t_f^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_f - q_0 - \frac{\ddot{q}_0}{2} t_f^2 \\ -\ddot{q}_0 t_f \\ \ddot{q}_f - \ddot{q}_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 10t_f^{-3} & -4t_f^{-2} & 0.5t_f^{-1} \\ -15t_f^{-4} & 7t_f^{-3} & -t_f^{-2} \\ 6t_f^{-5} & -3t_f^{-4} & 0.5t_f^{-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_f - q_0 - \frac{\ddot{q}_0}{2} t_f^2 \\ -\ddot{q}_0 t_f \\ \ddot{q}_f - \ddot{q}_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 10(q_f - q_0)t_f^{-3} + 0.5(\ddot{q}_f - 3\ddot{q}_0)t_f^{-1} \\ -15(q_f - q_0)t_f^{-4} - (\ddot{q}_f - 1.5\ddot{q}_0)t_f^{-2} \\ 6(q_f - q_0)t_f^{-5} + 0.5(\ddot{q}_f - \ddot{q}_0)t_f^{-3} \end{bmatrix} \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

Пример 5.4. Да се одреди траекторијата на движење на првиот зглоб на роботска рака со два степени слобода на движење, кој треба да се задвижи од мирување од положбата $q_0 = 5^0$ до крајната положба $q_f = -5^0$, повторно во мирување. Под претпоставка, почетното и крајното забрзување на зглобот се исто така нулеви. Траекторијата на движењето да се претстави со полином од петти степен.

Решение: За дадените почетни услови:

$$\begin{aligned}
 q(t_0) &= q(0) = q_0, \quad q(t_f) = q_f \\
 \dot{q}(t_0) &= \dot{q}(0) = \dot{q}_0 = 0, \quad \dot{q}(t_f) = \dot{q}_f = 0 \\
 \ddot{q}(t_0) &= \ddot{q}(0) = \ddot{q}_0 = \ddot{q}(t_f) = \ddot{q}_f = 0
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

и врз основа на равенките (5.22) – (5.24), се добива:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} q_i \\ 0 \\ 0 \\ q_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ 150 \\ -60 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

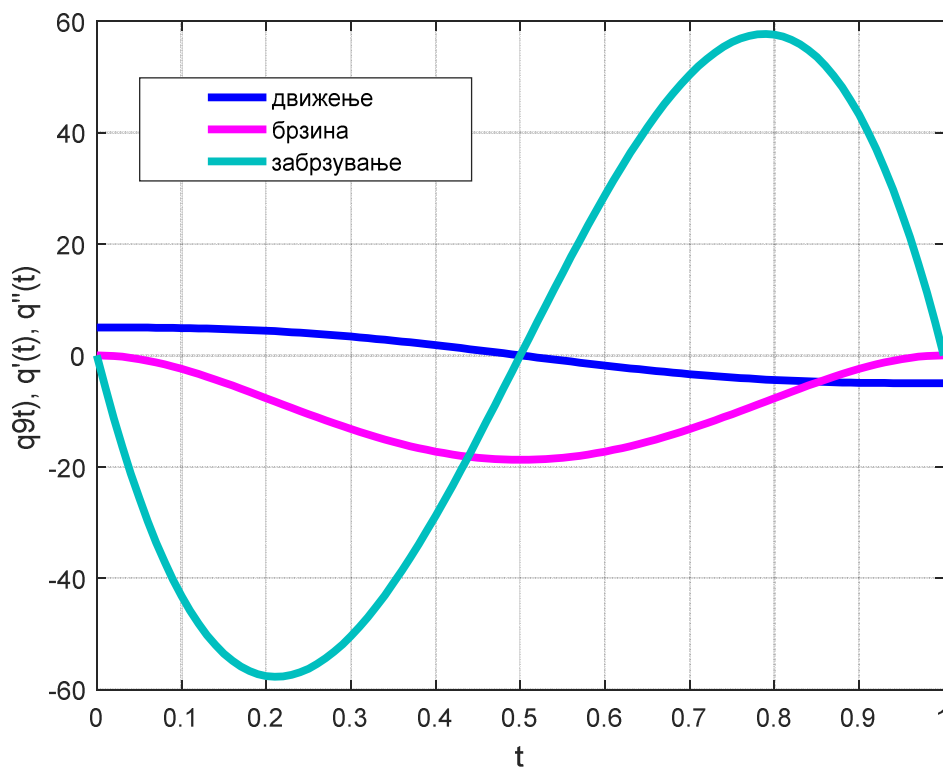
Следствено, положбата, брзината и забрзувањето на зглобот од роботската рака во примерот 5.4 ќе бидат опишани со релациите:

$$q(t) = -60t^5 + 150t^4 - 100t^3 + 5, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\dot{q}(t) = -300t^4 + 600t^3 - 300t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\ddot{q}(t) = -1200t^3 + 1800t^2 - 600t, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (5.29)$$

и истите се прикажани графички на сликата 5.16.



Слика 5.16. Графички приказ на положбата, брзината и забрзувањето на првиот зглоб на раката од примерот 5.4

5.5.4. ТРАЕКТОРИИ ПРЕТСТАВЕНИ СО ПОЛИНОМИ ОД ПОВИСОК СТЕПЕН

Во најопшт случај планираната траекторија на движење на една роботска рака може да се претстави со полином од произволен степен:

$$q(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (5.30)$$

при што треба да се определат $n+1$ коефициенти. Овие коефициенти се определуваат од граничните услови и со дефинирање потребен број нови меѓуточки. Бидејќи пресметувањето полиноми од висок степен е обемна и долготрајна работа, наместо траекторијата на движење на роботската рака да се претстави со полином од обликот (5.30), се користи комбинација од полиноми со понизок степен за одделни сегменти од траекторијата. Овие сегменти се спојуваат така што ќе бидат задоволени соодветните гранични услови. Идејата е прикажана во продолжение.

Нека една траекторија на движење роботска рака е поделена на три сегменти, при што првиот сегмент е апроксимиран со полином од 3. степен, вториот сегмент – со полином од 2. степен и последниот сегмент – со полином од 3. степен. Ваквата траекторија уште се нарекува 3-2-3 траекторија. Јасно е дека моделот на траекторијата ќе има 11 непознати коефициенти:

$$q(t)_1 = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (5.31)$$

$$q(t)_2 = b_2 t^2 + b_1 t + b_0 \quad (5.32)$$

$$q(t)_3 = c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \quad (5.33)$$

за чие определување се потребни 11 гранични и други дополнителни услови. Тие се следните:

- (1) Познатата почетна положба q_0
- (2) Почетната брзина која може да се зададе \dot{q}_0
- (3) Почетно забрзување кое може да се зададе \ddot{q}_0
- (4) Положбата на првата меѓуточка е позната, бидејќи е еднаква со крајната положба за првиот сегмент. Едновременно, положбата на првата меѓуточка мора да биде еднаква со положбата на почетокот од вториот сегмент.
- (5) Брзината на движење на раката мора во секој миг да биде континуална, па така и во првата меѓуточка.
- (6) И забрзувањето во меѓуточката не смее да има прекин.
- (7) Положбата на втората меѓуточка мора да биде еднаква со крајната положба за вториот сегмент. Едновременно, положбата на втората меѓуточка мора да биде еднаква и со почетната положба за третиот сегмент, за да се обезбеди континуалност.

- (8) Брзината на движење на раката во втората меѓуточка мора да биде континуална (не смее да има прекин).
- (9) И забрзувањето во втората меѓуточка не смее да има прекин.
- (10) Крајната положба q_f е позната односно зададена.
- (11) Крајната брзина \dot{q}_f е позната односно дефинирана.

Заради поголема едноставност на пресметките, за комплетното движење на роботската рака може да се усвои една нормализирана променлива t , додека за секој од сегментите j може да се дефинира соодветно локално време τ_j . Исто така, може да се претпостави дека локалното почетно време за секој сегмент е $\tau_{ji} = 0$, а крајното време τ_{jf} е зададено. Врз основа на направените претпоставки и дадените услови (1) – (11), за набљудуваната 3-2-3 траекторија може да се запише:

- (1) Познатата почетна положба q_0 за првиот сегмент, која одговара на почетниот миг $\tau_1 = 0$ има за резултат:

$$q(\tau_1 = 0)_1 = a_0 = q_0 \quad (5.34)$$

- (2) Познатата почетна брзина \dot{q}_0 за првиот сегмент води кон резултатот:

$$\dot{q}(\tau_1 = 0)_1 = a_1 = \dot{q}_0 \quad (5.35)$$

- (3) Зададеното почетно забрзување \ddot{q}_0 за првиот сегмент условува:

$$\ddot{q}(\tau_1 = 0)_1 = 2a_2 = \ddot{q}_0 \quad (5.36)$$

- (4) Положбата на првата меѓуточка q_1 е позната, бидејќи е еднаква со крајната положба за првиот сегмент во мигот τ_{1f} , па од (5.31) следува:

$$q_1 = q(\tau_{1f})_1 = a_3 (\tau_{1f})^3 + a_2 (\tau_{1f})^2 + a_1 (\tau_{1f}) + a_0 \quad (5.37)$$

Положбата на првата меѓуточка мора да биде еднаква со положбата на почетокот од вториот сегмент која одговара на локалното време $\tau_2 = 0$, па од (5.32) следува:

$$q_1 = q(\tau_2 = 0)_2 = b_0 \quad (5.38)$$

- (5) Брзината на движење на раката мора да биде континуална во првата меѓуточка, па:

$$b_1 = 3a_3 (\tau_{1f})^2 + 2a_2 (\tau_{1f}) + a_1 \quad (5.39)$$

(6) И забрзувањето во првата меѓуточка не смее да има прекин, па:

$$2b_2 = 6a_3(\tau_{1f}) + 2a_2 \quad (5.40)$$

(7) Положбата на втората меѓуточка q_2 мора да биде еднаква со крајната положба за вториот сегмент која одговара на моментот τ_{2f} , поради што мора да биде исполнето:

$$q_2 = q(\tau_{2f})_2 = b_2(\tau_{2f})^2 + b_1(\tau_{2f}) + b_0 \quad (5.41)$$

Едновремено, положбата на втората меѓуточка мора да биде еднаква и со почетната положба за третиот сегмент, за да се обезбеди континуалност, па за $\tau_3 = 0$ од (5.33) следува:

$$q_2 = q(\tau_3 = 0)_3 = c_0 \quad (5.42)$$

(8) Брзината на движење на зглобот од роботската рака во втората меѓуточка мора да биде континуална (не смее да има прекин), па мора да важи:

$$\dot{q}(\tau_{2f})_2 = 2b_2(\tau_{2f}) + b_1 = c_1 = \dot{q}(\tau_3 = 0)_3 \quad (5.43)$$

(9) Бидејќи и забрзувањето во втората меѓуточка не смее да има прекин, мора да биде исполнето:

$$\ddot{q}(\tau_{2f})_2 = 2b_2 = 2c_2 = \ddot{q}(\tau_3 = 0)_3 \quad (5.44)$$

(10) Крајната положба q_f е позната односно зададена, па со тоа е позната и положбата на крајот од третиот сегмент која одговара на локалното време τ_{3f} :

$$q(\tau_{3f})_3 = c_3(\tau_{3f})^3 + c_2(\tau_{3f})^2 + c_1(\tau_{3f}) + c_0 = q_f \quad (5.45)$$

(11) Крајната брзина е позната односно дефинирана:

$$\dot{q}(\tau_{3f})_3 = 3c_3(\tau_{3f})^2 + 2c_2(\tau_{3f}) + c_1 = \dot{q}_f \quad (5.46)$$

Равенките (5.34) – (5.46) можат да се запишат во матричен облик:

$$\mathbf{q} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{C} \quad (5.47)$$

каде што:

$$\mathbf{q} = [q_0 \quad \dot{q}_0 \quad \ddot{q}_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad q_f \quad \dot{q}_f]^T \quad (5.48)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \tau_{1f} & \tau_{1f}^2 & \tau_{1f}^3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\tau_{1f} & 3\tau_{1f}^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6\tau_{1f} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tau_{2f} & \tau_{1f}^2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\tau_{2f} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tau_f & \tau_f^2 & \tau_f^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\tau_f & 3\tau_f^2 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

$$\mathbf{C} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_0 \ b_1 \ b_2 \ c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3]^T \quad (5.50)$$

а нивното решение \mathbf{C} е одредено со изразот:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{q} \quad (5.51)$$

Постапката се повторува за секој од зглобовите на набљудуваната роботска рака одделно. На сличен начин можат да се планираат и други комбинации на траектории како, на пример, 3-5-3 траекторијата или 5-3 траекторијата.

Пример 5.5. Движењето на еден зглоб q е опишано во просторот на зглобовите со две полиномни траектории $q_1(t)$ и $q_2(t)$. Траекторијата $q_1(t)$ важи за временскиот интервал $0 \leq t \leq t_1$ и има нулева почетна положба, нулева почетна брзина и нулево почетно забрзување, додека траекторијата $q_2(t)$ важи за временскиот интервал $t_1 \leq t \leq t_2$ и има крајна положба q_2 и нулева крајна брзина. Во точката на спојување t_1 траекториите имаат иста положба, брзина и забрзување. (а) Да се напише општиот облик на траекториите во вид на полиноми од минимален степен. (б) Потоа да се пресметаат коефициентите на овие полиноми.

Решение: (а) Дадените ограничувања се прикажани во таблицата 5.1.

Таблица 5.1. Ограничувања за примерот 5.5

траекторија 1	траекторија 2	меѓуточка t_1
$q_1(0) = 0$	$q_2(t_2) = q_2$	$q_1(t_1) = q_2(t_1)$
$\dot{q}_1(0) = 0$	$\dot{q}_2(t_2) = 0$	$\dot{q}_1(t_1) = \dot{q}_2(t_1)$
$\ddot{q}_1(0) = 0$		$\ddot{q}_1(t_1) = \ddot{q}_2(t_1)$

Бидејќи има 8 ограничувања, траекториите можат да се усвојат да бидат полиноми од четврти и втор степен, соодветно:

$$q_1(t) = a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad 0 = t_0 \leq t \leq t_1 \quad (5.52)$$

$$q_2(t) = b_2 (t - t_1)^2 + b_1 (t - t_1) + b_0, \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (5.53)$$

(б) Познатата почетна положба $q_1(0) = 0$ за првиот сегмент, која одговара на почетниот миг $t = 0$ има за резултат:

$$q_1(0) = a_0 = 0 \quad (5.54)$$

Познатата почетна брзина $\dot{q}_1(0) = 0$ за првиот сегмент води кон резултатот:

$$\dot{q}_1(0) = a_1 = 0 \quad (5.55)$$

Додека од условот за почетното забрзување $\ddot{q}_1(0) = 0$ за првиот сегмент се добива:

$$\ddot{q}_1(0) = 2a_2 = 0 \quad (5.56)$$

Оттука:

$$q_1(t_1) = a_4 t_1^4 + a_3 t_1^3, \quad 0 = t_0 \leq t \leq t_1 \quad (5.57)$$

Положбата на првата меѓуточка $q_1(t_1)$ е позната, бидејќи е еднаква со крајната положба за првиот сегмент во мигот $t = t_1$, па од (5.57) следува:

$$q_1(t_1) = a_4 t_1^4 + a_3 t_1^3 = q_1 \quad (5.58)$$

Меѓутоа, положбата на првата меѓуточка мора да биде еднаква и со положбата на почетокот од вториот сегмент која одговара на времето $t = t_1$, па од (5.53) и (5.58) следува:

$$q_1(t_1) = a_4 t_1^4 + a_3 t_1^3 = b_0 = q_2(t_1) \quad (5.59)$$

Брзината на движење на зглобот мора да биде континуална во првата меѓуточка, па:

$$\dot{q}_1(t_1) = 4a_4 t_1^3 + 3a_3 t_1^2 = b_1 = \dot{q}_2(t_1) \quad (5.60)$$

а и забрзувањето во првата меѓуточка не смее да има прекин, па, оттука:

$$\ddot{q}_1(t_1) = 12a_4 t_1^2 + 6a_3 t_1 = 2b_2 = \ddot{q}_2(t_1) \quad (5.61)$$

Крајната положба q_2 е позната односно зададена, па со тоа е позната и положбата на зглобот на крајот од вториот сегмент, која одговара на времето $t = t_2$:

$$q_2(t_2) = b_2 (t_2 - t_1)^2 + b_1 (t_2 - t_1) + b_0 = q_2 \quad (5.62)$$

Конечно и крајната брзина на зглобот исто така е позната односно дефинирана:

$$\dot{q}_2(t_2) = 2b_2(t_2 - t_1) + b_1 = 0 \quad (5.63)$$

Оттука, за определување на преостанатите 5 непознати коефициенти на двете траектории со кои се опишува патот на зглобот од почетната до крајната положба преку една меѓуточка се:

$$a_4 t_1^4 + a_3 t_1^3 = b_0 \quad (5.64)$$

$$4a_4 t_1^3 + 3a_3 t_1^2 = b_1 \quad (5.65)$$

$$6a_4 t_1^2 + 3a_3 t_1 = b_2 \quad (5.66)$$

$$b_2(t_2 - t_1)^2 + b_1(t_2 - t_1) + b_0 = q_2 \quad (5.67)$$

$$2b_2(t_2 - t_1) + b_1 = 0 \quad (5.68)$$

или, во матричен облик:

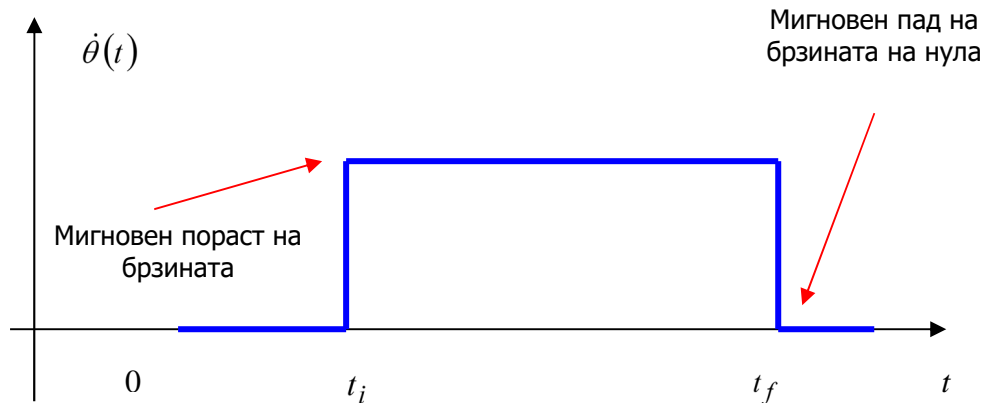
$$\begin{bmatrix} t_1^3 & t_1^4 & -1 & 0 & 0 \\ 3t_1^2 & 4t_1^3 & 0 & -1 & 0 \\ 3t_1 & 6t_1^2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & (t_2 - t_1) & (t_2 - t_1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2(t_2 - t_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^3 & t_1^4 & -1 & 0 & 0 \\ 3t_1^2 & 4t_1^3 & 0 & -1 & 0 \\ 3t_1 & 6t_1^2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & (t_2 - t_1) & (t_2 - t_1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2(t_2 - t_1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

5.5.5. ПАРАБОЛИЧНО СПОЈУВАЊЕ ЛИНЕАРНИ СЕГМЕНТИ

Многу често при извршувањето одредени задачи, пожелно е роботската рака да се движи со константна брзина $\dot{q}(t) = \omega = const.$ и нулево забрзување $\ddot{q}(t) = 0$. Тогаш траекторијата на движењето на раката ќе биде права линија, опишана со полином од прв степен, како што беше покажано во делот 5.5.1. Меѓутоа, за брзината на раката во граничните точки од набљудуваниот сегмент на движење да има облик како на слика 5.17, потребно е по апсолутна вредност бесконечно големо

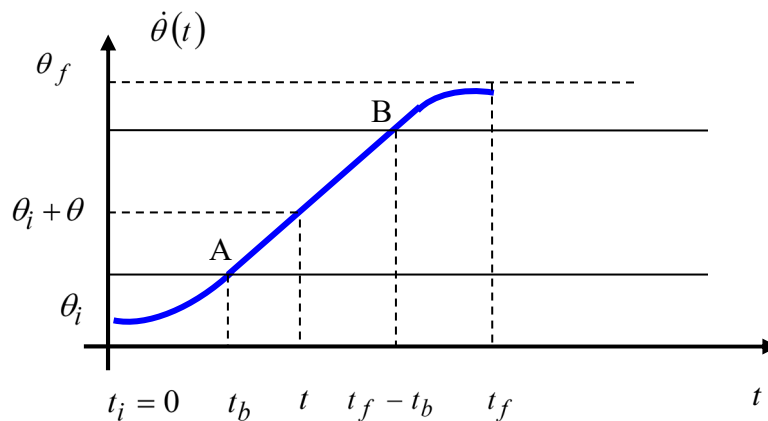
забрзување кое ќе ја предизвика прикажаната мигновена промена на брзината во граничните точки.



Слика 5.17. Константна брзина на движење на една роботска рака

За да се разреши ваквата ситуација, линеарниот сегмент на краевите се спојува со параболични делови, како што е покажано на слика 5.18. Овие делови од траекторијата, на интервалот $t_i \leq t \leq t_b$, односно интервалот $q_i \leq q \leq q_A$, се опишани со квадратната функција:

$$q_1(t) = \frac{1}{2}a_2t^2 + a_1t + a_0, \quad t_i \leq t \leq t_b \quad (5.70)$$



Слика 5.18. Спојување на параболични сегменти со линеарниот сегмент од траекторијата на движење на една роботска рака

Константите a_0 , a_1 , a_2 во (5.70) се определуваат од следните услови за почетокот на левиот параболичен сегмент:

$$q_1(t_i) = q_1(0) = q_i = a_0$$

$$\dot{q}_1(t_i) = \dot{q}_1(0) = \dot{q}_i = a_1 = 0$$

$$\ddot{q}_1(t_i) = \ddot{q}_1(0) = \ddot{q}_i = a_2 \quad (5.71)$$

од каде што следува:

$$\begin{cases} a_0 = q_i \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \ddot{q}_i \end{cases} \quad (5.72)$$

и условите за крајот од левиот параболичен сегмент:

$$\begin{aligned} q_1(t_b) &= \frac{a_2}{2} t_b^2 + q_i = q_A \\ \dot{q}_1(t_b) &= \dot{q}_A = a_2 t_b = \omega \\ \ddot{q}_1(t_b) &= \ddot{q}_A = \ddot{q}_i = a_2 \end{aligned} \quad (5.73)$$

од каде што се добива:

$$a_2 = \frac{\omega}{t_b} \quad (5.74)$$

Следствено, положбата, брзината и забрзувањето на роботската рака на левиот параболичен дел од нејзината траекторија од слика 5.18 се опишани со релациите:

$$q_1(t) = \frac{\omega}{2t_b} t^2 + q_i, \quad 0 = t_i \leq t \leq t_b \quad (5.75)$$

$$\dot{q}_1(t) = \frac{\omega}{t_b} t, \quad 0 = t_i \leq t \leq t_b \quad (5.76)$$

$$\ddot{q}_1(t) = \frac{\omega}{t_b} = \text{const.}, \quad 0 = t_i \leq t \leq t_b \quad (5.77)$$

Изразите (5.75)–(5.77) претставуваат движење со константно забрзување. Ова забрзување ја генерира потребната брзина на зглобот од набљудуваната роботска рака во крајните точки А и В од линеарниот сегмент на траекторијата. Брзината на движењето на раката на линеарниот сегмент е, се разбира, константна и се одбира во согласност со физичките можности на актуаторите.

За линеарниот сегмент од траекторијата $t_b \leq t \leq t_f - t_b$ односно $q_A \leq q \leq q_B$ на слика 5.18 важи:

$$q_2(t) = \tilde{a}_1 t + \tilde{a}_0 \quad (5.78)$$

$$\dot{q}_2(t) = \tilde{a}_1 = \omega \quad (5.79)$$

$$\ddot{q}_2(t) = 0 \quad (5.80)$$

па граничните услови за почетокот од линеарниот сегмент се:

$$q_2(t_b) = \omega t_b + \tilde{a}_0 = q_A \quad (5.81)$$

$$\dot{q}_2(t_b) = \tilde{a}_1 = \omega = \dot{q}_A \quad (5.82)$$

$$\ddot{q}_2(t_b) = 0 = \ddot{q}_A \quad (5.83)$$

а условите за крајот од линеарниот сегмент гласат:

$$q_2(t_f - t_b) = \omega(t_f - t_b) + \tilde{a}_0 = q_B \quad (5.84)$$

$$\dot{q}_2(t_f - t_b) = \tilde{a}_1 = \omega = \dot{q}_B \quad (5.85)$$

$$\ddot{q}_2(t_f - t_b) = 0 = \ddot{q}_B \quad (5.86)$$

Одовде непосредно следува:

$$\tilde{a}_0 = q_A - \omega t_b = q_B - \omega(t_f - t_b) \quad (5.87)$$

$$q_2(t) = \omega t - \omega t_b + q_A \quad (5.88)$$

$$\dot{q}_A = \omega = \dot{q}_B \quad (5.89)$$

$$\ddot{q}_A = 0 = \ddot{q}_B \quad (5.90)$$

што можеше и да се очекува. Оттаму, движењето, брзината и забрзувањето на набљудуваниот зглоб од роботската рака на линеарниот сегмент можат да се опишат на следниот начин:

$$q_2(t) = \omega t - \omega t_b + q_A, \quad t_b \leq t \leq t_f - t_b \quad (5.91)$$

$$\dot{q}_2(t) = \omega, \quad t_b \leq t \leq t_f - t_b \quad (5.92)$$

$$\ddot{q}_2(t) = 0, \quad t_b \leq t \leq t_f - t_b \quad (5.93)$$

За десниот параболичен сегмент од траекторијата на слика 5.18 помеѓу точките $t_f - t_b \leq t \leq t_f$ односно $q_B \leq q \leq q_f$ важи:

$$q_3(t) = \frac{1}{2} \bar{a}_2 t^2 + \bar{a}_1 t + \bar{a}_0, \quad t_f - t_b \leq t \leq t_f \quad (5.94)$$

$$\dot{q}_3(t) = \bar{a}_2 t + \bar{a}_1, \quad t_f - t_b \leq t \leq t_f \quad (5.95)$$

$$\ddot{q}_3(t) = \bar{a}_2 = const., \quad t_f - t_b \leq t \leq t_f \quad (5.96)$$

па, соодветните гранични услови за почетокот од десниот параболичен сегмент се:

$$q_3(t_f - t_b) = \frac{1}{2}\bar{a}_2(t_f - t_b)^2 + \bar{a}_1(t_f - t_b) + \bar{a}_0 = q_B \quad (5.97)$$

$$\dot{q}_3(t_f - t_b) = \bar{a}_2(t_f - t_b) + \bar{a}_1 = \dot{q}_B = \omega \quad (5.98)$$

$$\ddot{q}_3(t_f - t_b) = \bar{a}_2 = \ddot{q}_B \quad (5.99)$$

и за крајот од десниот параболичен сегмент:

$$q_3(t_f) = \frac{1}{2}\bar{a}_2 t_f^2 + \bar{a}_1 t_f + \bar{a}_0 = q_f \quad (5.100)$$

$$\dot{q}_3(t_f) = \bar{a}_2 t_f + \bar{a}_1 = \dot{q}_f = 0 \quad (5.101)$$

$$\ddot{q}_3(t_f) = \bar{a}_2 = \ddot{q}_f \quad (5.102)$$

Од равенките (5.98) и (5.101) се определуваат вредностите на константите \bar{a}_1 и \bar{a}_2 :

$$\bar{a}_2(t_f - t_b) + \bar{a}_1 = \omega$$

$$\bar{a}_2 t_f + \bar{a}_1 = 0$$

$$\bar{a}_1 = \frac{\omega}{t_b} t_f, \quad \bar{a}_2 = -\frac{\omega}{t_b} \quad (5.103)$$

додека константата \bar{a}_0 може да се определи од (5.100) и (5.103):

$$\bar{a}_0 = q_f - \bar{a}_1 t_f - \frac{\bar{a}_2}{2} t_f^2 = q_f - \frac{\omega}{t_b} t_f^2 + \frac{\omega}{2t_b} t_f^2 = q_f - \frac{\omega}{2t_b} t_f^2 \quad (5.104)$$

Оттука, положбата, брзината и забрзувањето на зглобот од роботската рака на десниот параболичен сегмент од траекторијата на слика 5.18 се опишани со релациите:

$$q_3(t) = -\frac{\omega}{2t_b}(t_f - t)^2 + q_f, \quad t_f - t_b \leq t \leq t_f \quad (5.105)$$

$$\dot{q}_3(t) = -\frac{\omega}{t_b}(t_f - t), \quad t_f - t_b \leq t \leq t_f \quad (5.106)$$

$$\ddot{q}_3(t) = \frac{\omega}{t_b}, \quad t_f - t_b \leq t \leq t_f \quad (5.107)$$

До истиот резултат може да се дојде ако се потсетиме дека десниот параболичен сегмент е симетричен со левиот, но со негативно забрзување, па веднаш може да се опише на следниот начин:

$$q_3(t) = \frac{1}{2} \bar{a}_2 (t_f - t)^2 + q_f \quad (5.108)$$

каде што:

$$\bar{a}_2 = -\frac{\omega}{t_b} \quad (5.109)$$

Времето на спојување на параболичните делови на почетокот t_b и крајот од линеарниот сегмент на траекторијата $t_f - t_b$ може да се пресмета на следниот начин. Заради симетрија следува:

$$q\left(\frac{t_f}{2}\right) = \frac{q_i + q_f}{2} \quad (5.110)$$

Бидејќи оваа точка припаѓа на линеарниот сегмент од траекторијата, може да се запише:

$$q_2\left(\frac{t_f}{2}\right) = \frac{q_i + q_f}{2} = \frac{\omega}{2} t_f + \tilde{a}_0 \quad (5.111)$$

Оттука, за слободниот член \tilde{a}_0 во полиномот $q_2(t)$ се добива:

$$\frac{q_i + q_f}{2} = \frac{\omega}{2} t_f + \tilde{a}_0 \Rightarrow \tilde{a}_0 = \frac{q_i + q_f - \omega t_f}{2} \quad (5.112)$$

па движењето на раката на линеарниот сегмент може да се опише на следниот начин:

$$q_2(t) = \omega t + \frac{q_i + q_f - \omega t_f}{2} \quad (5.113)$$

Вредноста $q_1(t)$ мора да биде еднаква со вредноста $q_2(t)$ во точката на спојување $t = t_b$ и оттука следува вредноста на времето на спојување t_b :

$$q_1(t_b) = q_2(t_b) \Rightarrow \frac{\omega}{2} t_b^2 + q_i = \frac{\omega t_b}{2} + q_i = \omega t_b + \frac{q_i + q_f - \omega t_f}{2} \Rightarrow$$

$$t_b = \frac{\theta_i - \theta_f + \omega t_f}{\omega} \quad (5.114)$$

Јасно е дека времето t_b не може да биде поголемо од половината од конечното време t_f , на кое време $t_b = t_f/2$ му одговара параболично забрзување и успорување без линеарен сегмент.

Пример 5.6. Првиот зглоб од набљудуваната роботска рака од примерот 5.2 треба за 6 sec. да се премести од почетната положба дефинирана со аголот $q(t_i) = q_i = 10^0$ во крајната положба зададена со аголот $q(t_f) = q_f = 60^0$, движејќи се притоа со константна брзина од $\omega = 10^0 / \text{sec}$. Да се определи времето на спојување на параболичниот сегмент на почетокот од линеарната траекторија, како и положбата, брзината и забрзувањето на зглобот од раката. Променливите на зглобот од роботската рака да се прикажат графички.

Решение: Соодветните траектории на движењето, брзината и забрзувањето на набљудуваниот зглоб од дадената роботска рака се прикажани на слика 5.19. Одделните величини прикажани на сликата 5.19 се опишани со следните аналитички изрази:

- Време на спојување на левиот параболичен сегмент со линеарниот сегмент од траекторијата

$$t_b = \frac{q_i - q_f + \omega t_f}{\omega} = \frac{10 - 60 + 10(6)}{10} = 1 \text{ sec.} \quad (5.115)$$

- Левиот параболичен сегмент

$$q_1(t) = 5t^2 + 10, \quad q_i \leq q \leq q_A \quad (5.116)$$

$$\dot{q}_1(t) = 10t, \quad q_i \leq q \leq q_A \quad (5.117)$$

$$\ddot{q}_1(t) = 10, \quad q_i \leq q \leq q_A \quad (5.118)$$

- Линеарниот сегмент

$$q_2(t) = 10t + 5, \quad q_A \leq q \leq q_B \quad (5.119)$$

$$\dot{q}_2(t) = 10, \quad q_A \leq q \leq q_B \quad (5.120)$$

$$\ddot{q}_2(t) = 0, \quad q_A \leq q \leq q_B \quad (5.121)$$

- Десниот параболичен сегмент

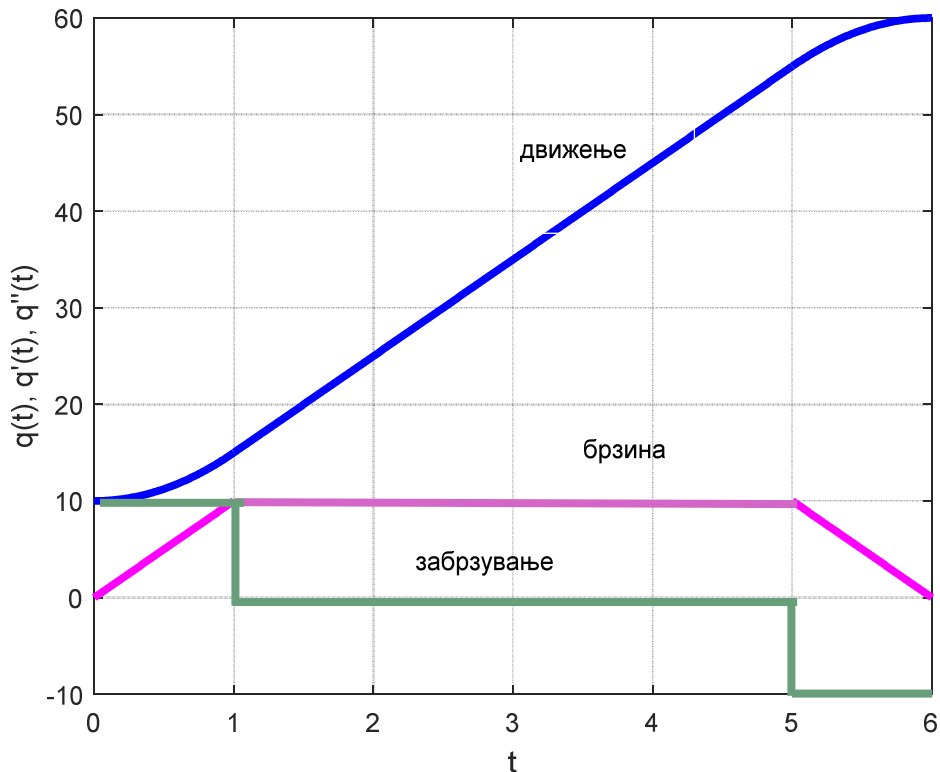
$$q_3(t) = 60 - 5(6-t)^2, \quad q_B \leq q \leq q_f \quad (5.122)$$

$$\dot{q}_3(t) = 10(5-t), \quad q_B \leq q \leq q_f \quad (5.123)$$

$$\ddot{q}_3(t) = -10, \quad q_B \leq q \leq q_f \quad (5.124)$$

Кога роботската рака треба последователно да се движи по повеќе од еден линеарен сегмент, со цел да се избегне движење од типот појди - запри, овие линеарни сегменти се спојуваат со соодветни параболични делови. Параметрите на тие параболични делови се определуваат од соодветните гранични услови, кои

обезбедуваат континуалност на положбата и брзината на роботската рака помеѓу секои два соседни сегменти. Јасно е дека за секој нов линеарен сегмент треба да се пресметува нова вредност за t_b , во зависност од брзината на движење на роботската рака на тој сегмент. Исто така постојано треба да се проверува забрзувањето на раката да не ја надмине максималната можна вредност одредена со нејзините можности.



Слика 5.19. Графички приказ на движењето на роботската рака од пример 5.6

5.6. ПЛАНИРАЊЕ ТРАЕКТОРИЈА НА ДВИЖЕЊЕ РОБОТСКА РАКА ВО ДЕКАРТОВИОТ ПРОСТОР

Сите траектории на движење дефинирани во просторот на зглобовите можат да се дефинираат и во Декартовиот простор. Основната разлика помеѓу планирањето траекторија на движење во Декартовиот простор и просторот на зглобовите е следната: при планирањето на траекторијата на движење во Декартовиот простор она што се пресметува се позицијата и ориентацијата на роботската рака во просторот, па овие вредности мора да се „преведат“ во вредности на променливите на зглобовите на роботската рака со помош на нејзината инверзна кинематика. При планирањето траекторија на движење во просторот на зглобовите директно се пресметуваат вредностите на нивните променливи. Пресметувањето на вредностите на променливите на зглобовите на роботската рака врз основа на нејзината положба во просторот преку инверзните кинематски равенки на роботската рака мора постојано да се повторува, како што е прикажано со следниот компјутерски алгоритам:

- (1) задај ги почетните и крајните услови
- (2) зголеми го времето t за чекорот Δt
- (3) пресметај ја положбата на роботската рака $\mathbf{T}(t)$ во просторот во времето t
- (4) со помош на инверзната кинематика пресметај ги вредностите на променливите на зглобовите на роботската рака $\mathbf{q}(t)$ за нејзината положба одредена под (3)
- (5) испрати информации за вредностите на променливите на зглобовите до управувачот на роботската рака
- (6) врати се на чекорот (2) и повтори ги пресметките

Најпрактични траектории на движење помеѓу две точки во индустриските примени се праволиниските, иако се можни и многу други типови, какви што се веќе прикажаните полиномни, синусни итн. Исто така, многу често се применува спојување на одделни движења (како, на пример, кога движењето се реализира преку меѓуточки).

За да се испланира една праволиниска траекторија во Декартовиот простор, трансформацијата помеѓу почетната и крајната положба на роботската рака мора најнапред да се подели на мали сегменти. Нека почетната положба на роботската рака е претставена со матрицата \mathbf{T}_i , а крајната положба со \mathbf{T}_f , додека вкупната трансформација помеѓу почетната и крајната положба на роботската рака е означена со \mathbf{H} . Тогаш:

$$\mathbf{T}_f = \mathbf{T}_i \mathbf{H}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{T}_f \quad (5.125)$$

Трансформацијата \mathbf{H} може да се подели на мали сегменти на еден од следните начини:

(1) За да се обезбеди „мазно“ движење помеѓу почетната \mathbf{T}_i и крајната положба \mathbf{T}_f на раката, \mathbf{H} треба да се подели на голем број мали сегменти. Тоа води кон пресметување голем број диференцијални движења, вклучува обемни пресметки и е применливо само доколку постои инверзен Јакобијан. Притоа, врската помеѓу позицијата и ориентацијата на роботската рака и диференцијалните движења и брзини на зглобовите од роботската рака и нејзиниот Јакобијан за секој следен сегмент се одредува преку познатите релации:

$$\mathbf{D} = \mathbf{J} \mathbf{D}_q$$

$$\mathbf{D}_q = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{D}$$

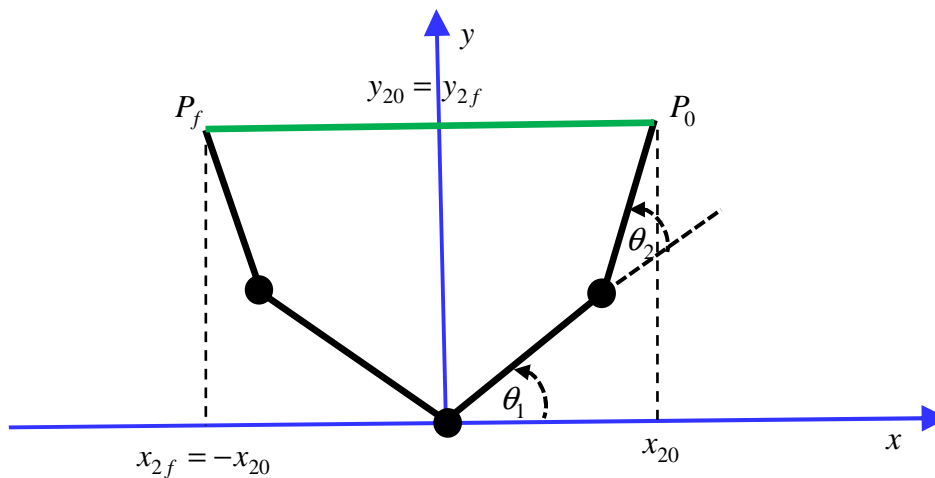
$$d\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{T}_{nova} = \mathbf{T}_{stara} + d\mathbf{T} \quad (5.126)$$

(2) Трансформацијата \mathbf{H} помеѓу почетната и крајната положба може да се разложи на една транслација и две ротации. Транслацијата го опишува придвижувањето на координатниот почеток од координатниот систем придружен со роботската рака од почетната во крајната позиција. Првата ротација има за цел координатниот систем на роботската рака да го подреди во саканиот правец, а втората ротација има за цел ротирање на координатниот систем придружен кон роботската рака околу сопствената оска додека тој не се постави во саканата крајна ориентација. Сите три трансформации се изведуваат истовремено.

(3) Трансформацијата \mathbf{H} помеѓу почетната и крајната положба може да се разложи на една транслација и една ротација околу произволна оска \mathbf{k} . Транслацијата се однесува на придвижувањето на координатниот почеток од координатниот систем придружен со роботската рака од почетната во крајната позиција. Ротацијата има за цел да го постави координатниот систем на роботската рака во саканата ориентација. Двете трансформации се изведуваат истовремено.

Пример 5.7. Рамнинска роботска рака со два степени слобода на движење треба да следи права линија помеѓу почетната точка $P_0(1.366;1.366)$ и крајната точка $P_f(-1.366;1.366)$ на еден сегмент од движењето. Раката има два ротациски зглобови и е прикажана на сликата 5.20. Да се пресметаат вредностите на променливите на зглобовите од роботската рака ако, под претпоставка, краците од роботската рака се со еднаква должина од 1 m и патот од почетната до крајната точка е поделен на 10 дела.



Слика 5.20. Планирање линеарна траекторија во Декартовиот простор

Решение: Правата линија помеѓу почетната и крајната точка од набљудуваното движење во Декартовиот простор е опишана со равенката:

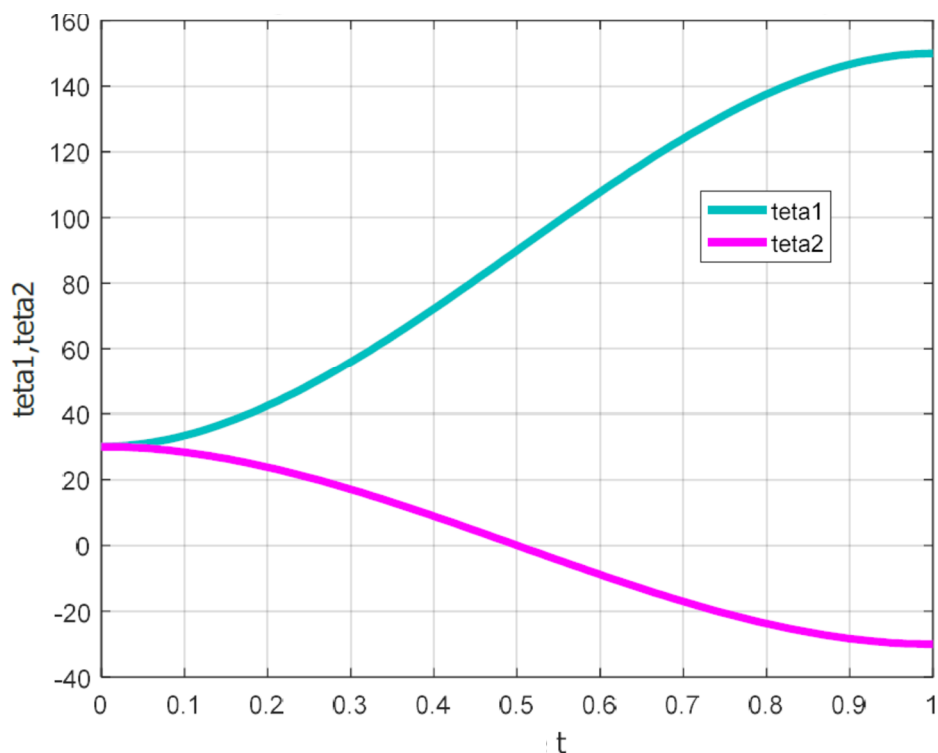
$$y = 1.366 \tag{5.127}$$

а должината на одделните сегменти од траекторијата изнесува 0.2732 m. Координатата x на меѓуточките се определува како разлика помеѓу координатите од почетните точки за секој сегмент и должината на тој сегмент, додека

координатата y има иста вредност за сите. Вредностите на променливите од зглобовите на набљудуваната роботска рака за секоја меѓуточка, заедно со координатите на тие меѓуточки, се дадени во таблицата 5.2, а вредностите на променливите на зглобовите во текот на движењето се прикажани на сликата 5.21.

Таблица 5.2. Координати на меѓуточките и соодветни вредности на променливите од зглобовите на роботската рака од примерот 5.7

#	x	y	θ_1	θ_2
1	1.3660	1.366	30.00 ⁰	30.00 ⁰
2	1.0928	1.366	33.36 ⁰	28.32 ⁰
3	0.8196	1.366	42.48 ⁰	23.76 ⁰
4	0.5464	1.366	55.92 ⁰	17.04 ⁰
5	0.2732	1.366	72.24 ⁰	8.88 ⁰
6	0.0000	1.366	90.00 ⁰	0 ⁰
7	-0.2732	1.366	107.76 ⁰	-8.88 ⁰
8	-0.5464	1.366	124.08 ⁰	-17.04 ⁰
9	-0.8196	1.366	137.52 ⁰	-23.76 ⁰
10	-1.0928	1.366	146.64 ⁰	-28.32 ⁰
11	-1.3660	1.366	150.00 ⁰	-30.00 ⁰

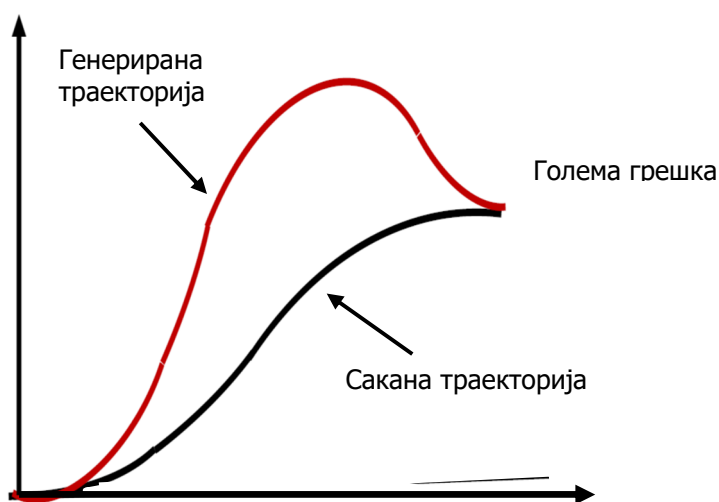


Слика 5.21. Графички приказ на променливите на зглобовите на роботската рака од примерот 5.7

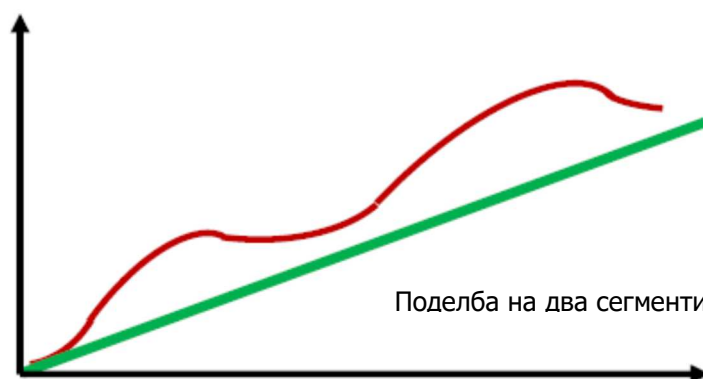
Во продолжение е прикажан еден едноставен алгоритам за генерирање праволиниска траекторија во Декартовиот простор, познат како Тајлоров алгоритам:

1. Пресметајте ја инверзната кинематика за почетната и крајната положба на роботската рака.
2. Пресметајте ја траекторијата во просторот на зглобовите.
3. Со помош на директната кинематика трансформирајте го движењето на роботската рака од просторот на зглобовите во Декартовиот простор.
4. Споредете ја добиената траекторија со саканата. Ако постои голема грешка (поголема од некоја позитивна вредност ε), тогаш:
 - (а) додајте меѓуточка на средината од Декартовата траекторија
 - (б) поделете ја траекторијата на два сегмента почеток–меѓуточка и меѓуточка–крај
 - (в) за секој сегмент повторете ги чекорите 1-4; во спротивно, реализирајте ги траекториите во просторот на зглобовите.

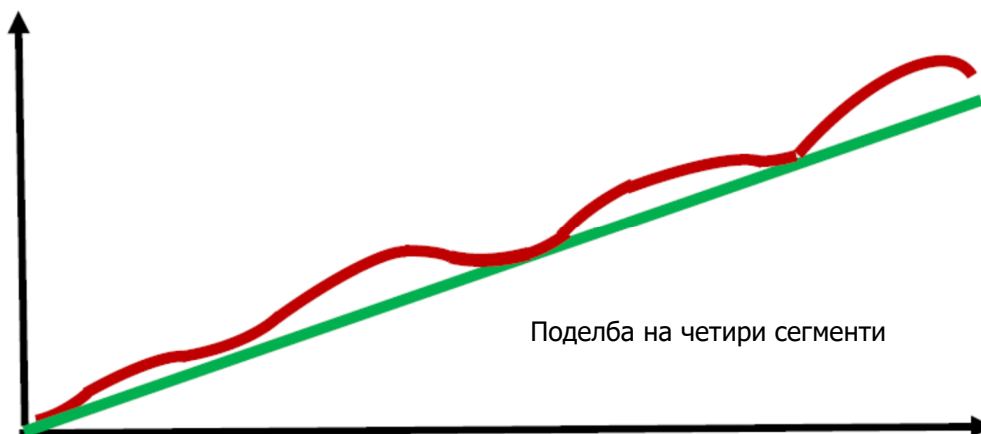
Резултатот е прикажан на сликите 5.22 – 5.24.



Слика 5.22. Генерирање линеарна траекторија во Декартовиот простор



Слика 5.23. Генерирање линеарна траекторија во Декартовиот простор со поделба на два сегменти



Слика 5.24. Квалитативен приказ на генерираната линеарна траекторија во Декартовиот простор со поделба на четири сегменти

5.7. ЗАДАЧИ

5.1. Да се испланира полиномна траекторија од минимален степен за движењето на i -тиот зглоб на една роботска рака. Движењето треба да се изведе за време од 1 sec., а соодветните гранични услови што траекторијата треба да ги задоволи се: $q(0) = 0$, $q(1) = 1$, $\dot{q}(0) = \dot{q}(1) = 0$, $\ddot{q}(0) = 0$.

5.2. Да се проектира квадратна траекторија на движењето на еден зглоб која ќе ги задоволува следните гранични услови: $q(t_0) = 1$, $\dot{q}(t_0) = 1$, $\dot{q}(t_1) = -1$, $\ddot{q}(t_1) = 2$, за $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$. Дали е тоа можно и зошто?

5.3. Со примена на полином од трет степен да се испланира траекторијата на движење на првиот зглоб од една роботска рака со три степени слобода на движење, кој за време од 1 sec. треба да се придвижи од почетната положба одредена со аголот $q_i = 45^\circ$ во крајната положба зададена со аголот $q_f = -45^\circ$. Зглобот поаѓа од мирување и запира во мирување.

5.4. Нека роботската рака од задачата 5.3 го продолжува своето движење, така што набљудуваниот зглоб треба да се врати во првобитната положба определена со аголот $\theta_f = 45^\circ$ по време од 1 sec. Да се определат аналитички и графички движењето, брзината и забрзувањето на зглобот на овој нов сегмент од неговата траекторија на движење.

5.5. Движењето на зглобовите од една роботска рака во просторот на зглобовите е претставено со полиномни траектории од петти степен. Да се определат коефициентите на соодветниот полином од петти степен, ако набљудуваниот зглоб треба да се придвижи од почетната положба $\theta_i = 0^\circ$ во крајна положба $\theta_f = 75^\circ$, за време од 3s. Почетната и крајната брзина, под претпоставка се нулеви, додека

почетното забрзување изнесува $10^0/s$, а крајното забрзување (успорување) е $-10^0/s$.

5.6. Почетната позиција на еден зглоб е θ_0 , а крајната позиција θ_f . Зглобот се задвижува од почетната позиција θ_0 до крајната позиција θ_f за време t_f . Под претпоставка, $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_f = 0$, а θ_0 и θ_f се познати константи. Траекторијата на движење на зглобот да се апроксимира со полином од трет степен. Притоа да се определи времето на извршување на движењето t_f , така што максималното забрзување на зглобот сигурно ќе биде помало од $\ddot{\theta}_{\max} = \text{const} > 0$ по апсолутна вредност.

5.7. Дадена е RPR-роботска рака. Треба да се испланира линеарна траекторија на движење на извршниот елемент од раката во Декартовиот простор од почетната положба во точката $(x_0, y_0) = (2\sqrt{3}, -4)$, до крајната положба во точката $(x_f, y_f) = (0, -8)$.

(а) Со помош на инверзната кинематика на роботската рака да се пресметаат вредностите на променливите на нејзините зглобови кои одговараат на дефинираните гранични положби.

(б) Да се најде средишната вредност од вредностите на променливите на зглобовите одредени во делот (а). Која е соодветната положба на извршниот елемент од раката која одговара на оваа средишна вредност на променливите од зглобовите?

(в) Да се одреди средишната точка на линеарната траекторија на извршниот елемент од роботската рака. Дали оваа точка е иста со точката пресметана во делот (б)? Ако не е, да се објасни што значи тоа.

(г) накусо објаснете како ќе го принудите извршниот елемент од набљудуваната роботска рака да следи права линија од точката А до точката В. Влезови во управувачкиот дел од роботската рака се променливите од зглобовите на раката.

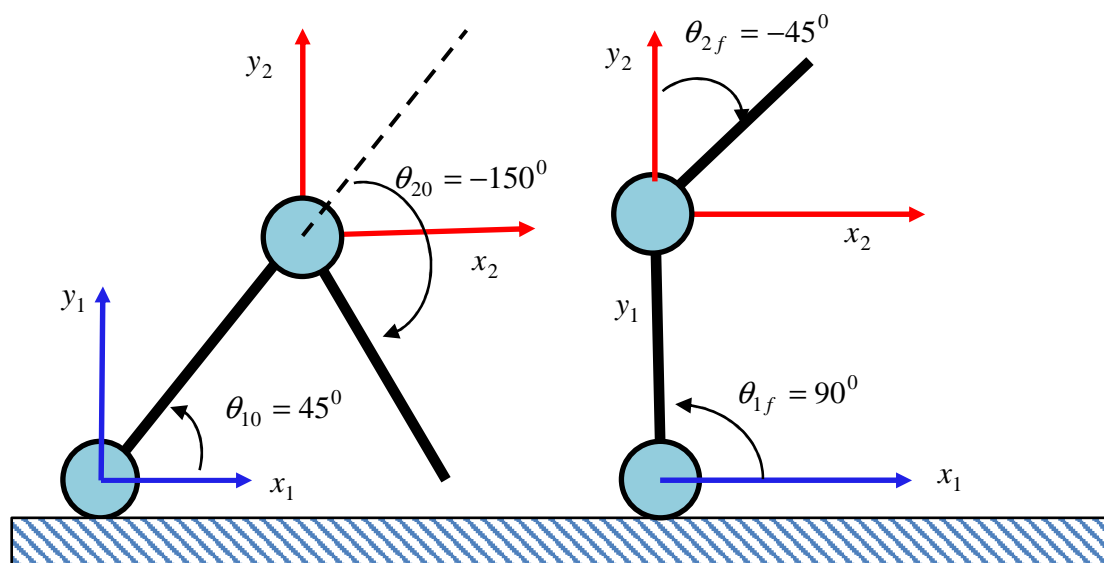
5.8. Да се генерира соодветна полиномна траекторија на движење на еден ротациски зглоб од дадена роботска рака $q(t)$, кој треба од почетната положба $q(t_i) = q_i$ во мигот $t = t_i$ да се префрли во крајната положба $q(t_f) = q_f$ во мигот $t = t_f$, при што треба да бидат задоволени следните услови:

$$t_i = 2, \quad q_i = 10^0, \quad \dot{q}_i = -20^0/s \quad (5.128)$$

$$t_f = 3s, \quad q_f = 30^0, \quad \dot{q}_f = -50^0/s \quad (5.129)$$

Траекторијата да се генерира најнапред за општ случај и потоа и за конкретните зададени гранични услови. На крајот да се прикаже графички движењето, брзината и забрзувањето на зглобот за конкретниот случај.

5.9. Дадена е роботската рака со два степени слобода на движење од сликата 5.25. Да се генерираат траекториите на движење на двата зглоба $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$, кои ја поврзуваат прикажаната почетна положба со прикажаната крајна положба на набљудуваната роботска рака. За таа цел да се претпостават линеарни траектории со параболични сегменти. Да се претпостави дека почетната и крајната брзина на зглобовите е нулева, што значи дека поаѓаат од мирување и запираат до потполно мирување. Нека времетраењето на движењето е $t_f = 2 \text{ sec}$, додека времето на забрзување односно успорување е $t_b = 0.5 \text{ sec}$.



Слика 5.25. Илустрација кон задачата 5.9

5.10. Наместо со полином од повисок степен, траекторијата на движење на i -тиот зглоб од дадена роботска рака, да се претстави со два полинома од минимален степен. Нека тоа се полиномите $q_1(t)$ на интервалот $0 = t_0 \leq t \leq t_1$ и полиномот $q_2(t)$ на интервалот $t_1 \leq t \leq t_2$. Притоа, траекторијата $q_1(t)$ има почетна вредност q_0 и нулева почетна брзина, додека траекторијата $q_2(t)$ има конечна вредност q_2 и нулева крајна брзина. Во мигот $t = t_1$ двете траектории имаат иста положба и брзина, додека забрзувањето на втората траекторија е нулево. Да се дефинираат аналитички граничните услови. Да се запишат во општ облик двата полиноми $q_1(t)$ и $q_2(t)$, кои ќе бидат од минимален степен, како и нивниот прв и втор извод. Да се пресметаат коефициентите на вториот полином. притоа да се определи q_2 , така што максималното забрзување на зглобот сигурно ќе биде помало од $\ddot{q}_{max} = const. > 0$ по апсолутна вредност.

6. ЛИТЕРАТУРА

1. John J. Craig, Introduction to Robotics: Mechanics and Control, Prentice Hall, 3rd ed., 2004.
2. Saeed B. Niku, Introduction to Robotics: Analysis, Control, Applications, Wiley; 2nd ed., 2010.
3. Colin D. Simpson, Introduction to Robotics, Logic Design Publishing; 1st ed., 2008.
4. Mark W. Spong, Seth Hutchinson, M. Vidyasagar, Robot Modeling and Control, Wiley, 1 ed., 2005.
5. Miomir Vukobratovic, Introduction to Robotics, Springer, 2011.
6. Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani, Giuseppe Oriolo, Robotics: Modelling, Planning and Control (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing), Springer, 1st ed., 2009.
7. Reza N. Jazar, Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics, and Control, Springer; 2nd ed., 2010.
8. Frank L. Lewis, Robot Manipulator Control: Theory and Practice, Marcel Dekker, Inc., 2nd ed., 2004.
9. P.I. Corke, Robotics, Vision & Control: Fundamental Algorithms in MATLAB, 2nd ed., Springer, 2017.
10. <https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/mavt/robotics-n-intelligent-systems/rsl-dam/documents/RobotDynamics2016/RD2016script.pdf>
11. Richard P. Paul, "Robot Manipulators, Mathematics, Programming, and Control," The MIT Press, 1981.

Ниту еден дел од оваа публикација не смее да биде репродуциран на било кој начин без претходна писмена согласност на авторот.

Е-издание: http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41