

2023

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“,
Градежен факултет, Скопје

Зоран Мисајлески

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЕТАЊЕ I

(НА ФУНКЦИИ ОД ЕДНА ПРОМЕНЛИВА)

- Функции
- Изводи
- Интеграл

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“,
Градежен факултет, Скопје

Зоран Мисајлески

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЕТАЊЕ I

(НА ФУНКЦИИ ОД ЕДНА ПРОМЕНЛИВА)

Скопје, 2023

Издавач:

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје,
бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје,
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:

проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:

проф. д-р Зоран Мисајлески,
вонреден професор на ГФ, УКИМ, Скопје

Рецензенти:

проф. д-р Даниел Велинов,
вонреден професор на ГФ, УКИМ, Скопје
проф. д-р Анета Велкоска,
вонреден професор на УИНТ, Охрид

Техничка обработка:

проф. д-р Зоран Мисајлески,
вонреден професор на ГФ, УКИМ, Скопје

Лектура на македонски јазик:

ас. м-р Цутка Јованоска
асистент на ДУТ, Тетово

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски“, Скопје

517.1/3 (075.8)

Мисајлески, Зоран

Диференцијално и интегрално сметање I [Електронски извор]: (на функции од една променлива) / Зоран Мисајлески. – Скопје: Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ – Скопје, Градежен факултет, 2023

Начин на пристапување (URL):

http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41. – Текст во PDF формат, содржи 265 стр., илустр. – Наслов преземен од екранот. – Опис на изворот на ден 01.03.2023. – Библиографија: стр. 261-262

ISBN 978-9989-43-487-7

а) Реални функции од една променлива -- Диференцијално сметање -- Интегрално сметање -- Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 59566085

Предговор

Учебникот „Решени задачи по диференцијално и интегрално сметање I“ ја покрива содржината од диференцијалното и интегралното сметање на функциите со една променлива, што се изучуваат на Градежниот факултет во предметите Математика (4+4) и Математика 1 (4+4).

Учебникот можат да го користат и студентите од останатите технички факултети бидејќи во нивните предмети од областа математика се изучува ист или сличен материјал, како и учениците од четврта година во средното образование на природно-математичката насока, кои ги изучуваат предметите Математичка анализа и Математика 4, за четврта година од гимназиското образование. Учебникот формира целина со збирката „Решени задачи по диференцијално и интегрално сметање I“ од истиот автор и материјалот најефективно би се усвоил со нивно паралелно користење.

Во 2012 година за потребите на вежбите е напишан темелен формуларник со дефиниции, правила, тврдења и постапки кои се користат при решавањето задачи. Во 2015-та година материјалот е проширен со внесување докази на теоремите и други содржини, кои авторот ги користеше за држење на предавањата во периодот од 2015-та до 2021-ва година, кога учебникот е финализиран до денешната форма.

Материјалот во учебникот е поделен на 8 глави, без предговор, литература и содржина: 1. Функции; 2. Низи и граница и непрекинатост на функција; 3. Изводи; 4. Примена на изводи; 5. Неопределен интеграл; 6. Определен интеграл и примена; 7. Прилог; 8. Поставени задачи. Првите 6 глави го содржат материјалот по кој се држат предавањата. Во седмата глава е материјалот кој не се бара на студентите на испитите, но е значаен да остане во овој ракопис. Во осмата глава се дадени нерешени задачи. Најголем дел од задачите со исти или сменети цифри се зададени на писмените испити во периодот од 2004-та до 2014-та година или се користени за држење на вежбите од страна на авторот кој во тој период беше асистент на предметите од областа математика.

Ова е прво издание на учебникот и авторот ќе им биде благодарен на читателите кои со своите забелешки ќе придонесат во подобрувањето на квалитетот во наредните изданија.

Проф. д-р Зоран Мисајлески

Учебникот е посветен на мојот татко Силјан,
наставник по математика

1.0. РЕАЛНИ БРОЕВИ

Проширено множество на реалните броеви. Интервали. Множеството реални броеви проширено со елементите $-\infty$ и $+\infty$, такви што за секој реален број x , $-\infty < x < +\infty$, се нарекува проширено множество реални броеви и се означува со $\overline{\mathbb{R}}$.

Нека $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a < b$. Подножествата од $\mathbb{R}$,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b, a, b \in \overline{\mathbb{R}}\}, [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b, a, b \in \overline{\mathbb{R}}\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b, a \in \mathbb{R}, b \in \overline{\mathbb{R}}\} \text{ и}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b, a \in \overline{\mathbb{R}}, b \in \mathbb{R}\},$$

се нарекуваат **интервали**. Точките a и b се нарекуваат крајни точки или граници на интервалите. Ако интервалот не ги содржи крајните точки се нарекува **отворен**, ако содржи една **полуотворен** (полузатворен), а ако ги содржи двете крајни точки **затворен**.

Значи, интервалите во $\mathbb{R}$, чијашто една крајна точка е $-\infty$ или $+\infty$ се:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, \mathbb{R} = (-\infty, +\infty),$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \text{ и } [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

Со ∞ ќе го означиме множеството $\infty = \{-\infty, +\infty\}$, кое во одредени записи ќе го третираме и како елемент со својство за секое $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \infty$.

Околина на број и точка на натрупување на множество. Околина на реалниот број a (точката a) е секоја унија од отворени интервали, што ја содржи точката a . Специјално ε -околина на a , $\varepsilon > 0$, е интервалот $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, односно множеството од сите реални броеви x , такви што $|x - a| < \varepsilon$. Често под околина на a ќе подразбираме ε -околина на a , а под околината на $-\infty$, $+\infty$ и ∞ , соодветно интервалите:

$$(-\infty, a), (a, +\infty) \text{ и } (-\infty, a) \cup (b, +\infty), a, b \in \mathbb{R}.$$

Реалниот број a (точката a) е **точка на натрупување на множеството** $M \subseteq \mathbb{R}$ ако во секоја ε -околина на a се наоѓа барем еден елемент од множеството M различен од a . Во спротивно a е изолирана точка на множеството M .

Да забележиме дека зборот ' ε -околина' од дефиницијата може да се замени со 'околина', додека зборот 'барем еден' со 'бесконечно'.

Миноранта, мајоранта, инфимум, супремум, минимум, максимум. Ограничени и неограничени множества. Бројот $a \in \mathbb{R}$ е **миноранта** за множеството M , ако е помал или еднаков од секој елемент на M . Најголемата миноранта на множеството M се нарекува **инфимум** на M и се означува со $\inf M$. Ако $\inf M \in M$, тогаш тој се нарекува **минимум** и се означува со $\min M$.

Бројот $b \in \mathbb{R}$ е **мајоранта** за множеството M , ако е поголем или еднаков од секој елемент на M . Најмалата мајоранта на множеството M се нарекува **супремум** на M и се означува со $\sup M$. Ако $\sup M \in M$, тогаш тој се нарекува **максимум** и се означува со $\max M$.

Множеството M е **ограничено од долу** ако има барем една миноранта. Множеството M е **ограничено од горе**, ако има барем една мајоранта. Множеството M е **ограничено**, ако е ограничено од долу и од горе.

На крајот ќе ги наведеме следниве тврдења:

Теорема 1.0.1.* (Болцано-Вајерштас). Секое бесконечно и ограничено множество M има точка на натрупување.

Доказ. Види, на пример, [12] од литература.

Својство 1.0.2.* Ако $a = \inf M$, тогаш важат:

- 1) За секој $x \in M$, $x \geq a$; и
- 2) За секое $\varepsilon > 0$, постои $x \in M$, таков што $x < M + \varepsilon$.

Доказ. Тврдењето 1) е очигледно.

2) Ако тврдењето не важи, тогаш ќе постои $\varepsilon > 0$, таков што за сите $x \in M$, $x \geq M + \varepsilon$. Но, во тој случај $M + \varepsilon$ би бил

минораната поголема од M , што противречи на претпоставката дека M е најголемата миноранта.■

Својство 1.0.3.* Ако $b = \sup M$, тогаш важат:

- 1) За секој $x \in M$, $x \leq b$; и
- 2) За секое $\varepsilon > 0$, постои $x \in M$ таков што $x > b - \varepsilon$.

Доказ. Доказот е аналоген на доказот во претходниот.■

1.1-11. ФУНКЦИИ

1.1. Дефиниција на функција

Дефиниција 1.1.1. Нека X и Y се непразни подмножества од множеството на реални броеви. Ако за секој $x \in X$ по некое правило f му придружине единствен реален број $y \in Y$, тогаш велиме дека е зададена **реална функција** од една променлива.

Означуваме $f: X \rightarrow Y$, $y = f(x)$.

Множеството X се нарекува **дефинициона област** или **домен** и се означува уште со D_f или D . Формулата f се нарекува **правило на пресликување**. Ако дефиниционата област не е дадена, тогаш за дефинициона област се подразбира најголемото множество од реални броеви за кое формулата f има смисла. Множеството Y се нарекува **кодомен** на функцијата f . Ако кодоменот не е зададен, сметаме дека истиот е $\mathbb{R}$, како што најчесто ќе биде случај. Тогаш функцијата ја означуваме со:

$$y = f(x), x \in D_f \text{ или } y \rightarrow f(x), x \in D_f.$$

Функциите обично се означуваат со малите латински букви $f, g, h, \dots$. Множеството $V_f = \{f(x) | x \in D_f\}$ се нарекува **множество вредности** на функцијата f . Променливата x се нарекува **независна променлива** или **аргумент**, додека променливата y **зависна променлива**. Ако $x = x_0$, $x_0 \in D_f$, тогаш велиме дека x_0 е вредност на аргументот, додека $y_0 = f(x_0)$ вредност на функцијата во точката x_0 , или слика на x_0 .

Нека е дадена функцијата $y = f(x)$. Множеството точки

$$G_f = \{(x, y) | x \in D_f, y = f(x)\}$$

се нарекува **график** на функцијата f . Крива во рамнина со зададен Декартов правоаголен координатен систем е график на функција, ако произволна права паралелна со y -оската ја сече кривата во најмногу една точка.

Пример 1.1.1. Функцијата $y = 3x + 1$, $x \in [-1, 2]$; или $x \rightarrow 3x + 1$ е линеарна функција бидејќи на секој аргумент $x \in [-1, 2]$ му ја придружува сликата која е 3 пати по аргументот зголемен за 1 т.е $3x + 1$. Дефиниционата област на функцијата е множеството $[-1, 2]$. Притоа, $f(-1) = 3 \cdot (-1) + 1 = -2$, $f(0) = 1$ и $f(2) = 7$ се неколку вредности на функцијата. Множеството вредности на функцијата е $V_f = [-2, 7]$. Графикот на функцијата е отсечката AB , $A(-1, -2)$ и $B(2, 7)$.

Пример 1.1.2. Функцијата $y = \frac{2x-1}{x-1}$ има дефинициона област $D_f = \mathbb{R} / \{1\}$ бидејќи дадената формула има смисла за сите броеви, освен за $x = 1$. Кодоменот на функцијата е $\mathbb{R}$.

Дефиниција 1.1.2. Две функции $f: D_f \rightarrow Y$ и $g: D_g \rightarrow Z$ се **еднакви**, ако имаат исти дефинициони области т.е. $D_f = D_g = D$, исти правила на пресликување т.е. $f = g$ или $f(x) = g(x)$ за секое $x \in D$, и исти кодомени $Y = Z$.

Пример 1.1.3. Функциите $y = \ln x^2$, $x > 0$ и $y = 2 \ln x$ се еднакви функции.

Функциите $y = \ln x^2$ и $y = 2 \ln x$ не се еднакви, првата има дефинициона област $\mathbb{R} / \{0\}$, а втората $(0, +\infty)$.

Функциите $y = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$ и $y = x-1$ се различни бидејќи првата е дефинирана на $\mathbb{R} / \{-1\}$, а втората на $\mathbb{R}$.

Функциите $y = x^2$, $x \in (-\infty, 0]$ и $y = x^2$, $x \in [0, +\infty)$ исто така се различни. ■

Функцијата f дефинирана на D , таква што $f(x)=c$ каде што c е константа, се нарекува **константна функција**. Функцијата f на D , за која $f(x)=x$ за секој $x \in D$ се нарекува **идентична функција**. Функцијата g на D_g е **рестрикција** на f на D_f , ако $D_g \subseteq D_f$ и $g(x)=f(x)$ за секој $x \in D_g$. Означуваме: $g = f|_{D_g}$.

1.2 Начини на задавање на функции. Една функција може да се зададе аналитички, графички и табеларно.

1) Ако функцијата е зададена со помош на формула, која опишува на кој начин на секој елемент од доменот му се придружува елемент од кодоменот, велиме дека е зададена **аналитички**. Ние најчесто ќе работиме со функции кои се зададени аналитички. Ако формулата е од облик $y = f(x)$, тогаш функцијата е зададена **експлицитно**. Притоа, формулата може да биде различна на различни подмножества од дефиниционата област. Ако функцијата $y = y(x)$ е зададена со помош на равенката:

$$F(x, y) = 0,$$

во тој случај велиме дека е зададена **имплицитно**. Функцијата $y = y(x)$ е зададена **параметарски**, ако е зададена со помош на равенките,

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

каде што $t \in T$ е параметар. Функцијата може да се зададе и со **поларната равенка**:

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \varphi \in \Phi,$$

каде што ρ и φ се поларни координати, кои ќе ги објасниме подоцна.

2) Функцијата е зададена **графички**, ако е зададена со скицирање на нејзиниот график во Декартов правоаголен или поларен координатен систем.

3) Функцијата може да се зададе и **табеларно**, односно со помош на табела којашто ги покажува вредностите на независната променлива заедно со соодветните вредности на функцијата. На овој начин обично се задаваат функции кои имаат конечно множество допуштени вредности. На пример, ако функцијата f е дефинирана на множеството $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и има вредности $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$, тогаш истите може прегледно да се претстават со табелата:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$

Пример 1.2.1. Знаковната функција: $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, е

претставена аналитички со помош на формула што се состои од 3 дела, 1 за $x \in (0, +\infty)$, 0 за $x = 0$ и -1 за $x \in (-\infty, 0)$.

Пример 1.2.2. Равенката $x^2 + y^2 = 1$ (1) определува две имплицитно зададени функции: $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Да забележиме дека со комбинирање на вредностите од претходните две функции можат да се формираат бесконечно многу функции кои ја задоволуваат равенката (1). Сепак, најчесто ги подразбираме горните функции затоа што се единствени непрекинати функции на целата дефинициона област.

1.3. Операции со функции. Нека функциите f и g се дефинирани на D_f и D_g , соодветно, и нека c е константа. Функциите: **производ** на функцијата f со константата c ; **збир, разлика, производ и количник** на функциите f и g , соодветно означени со: cf , $f + g$, $f - g$, fg и $\frac{f}{g}$, $g \neq 0$ се дефинирани со:

$$(cf)(x) = cf(x), \quad x \in D_f \text{ и}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \text{ и } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D_f \cap D_g.$$

Со помош на графици на функциите f и g можеме да ги скицираме графици на функциите cf , c -константа, $f + g$, $f - g$,

fg и $\frac{f}{g}$, $g \neq 0$, така што ќе ги примениме соодветните аритметички операции на графиците на f и g .

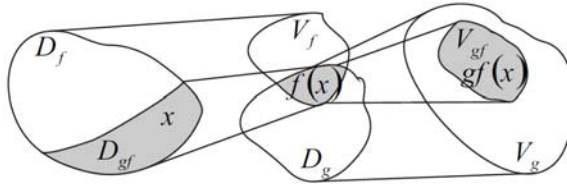
Имено, ако (x, y_f) и (x, y_g) се точки од графиците на f и g со иста апциса, тогаш соодветната точка на графикот на $f + g$ е $(x, y_f + y_g)$, која е добиена со собирање на ординатите y_f и y_g . Аналогно важи за останатите 4 случаи.

1.4. Сложена функција (композиција на функции).

Нека се дадени функциите $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$, такви што $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$ и $f(X) \subseteq Y$. Функцијата $g \circ f: X \rightarrow Z$, дефинирана со:

$$g \circ f(x) = g(f(x)),$$

се нарекува **композиција** на функциите f и g .



Цртеж 1.4.

Пример 1.4.1. Нека се дадени функциите $f(x) = \sin x$ и $g(x) = x^2$. Тогаш,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = \sin^2 x \text{ и}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sin x^2.$$

Значи дека не важи комутативниот закон за композиција, т.е.

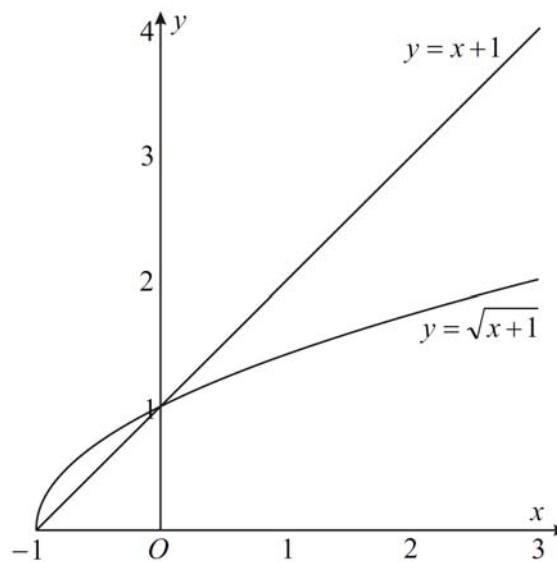
$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Пример 1.4.2. Функцијата $y = e^{x^2+1}$ може да се претстави како композиција на функциите $f(x) = x^2 + 1$ и $g(x) = e^x$, т.е. $g(f(x)) = e^{x^2+1}$. Да забележиме дека претставувањето не е еднозначно, т.е. функцијата може да се претстави како

композиција и на други функции. На пример $y = e^{x^2+1}$ е композиција на $f(x) = x^2$ и $g(x) = e^{x+1}$.

Графикот на сложената функција може да се нацрта со помош на графиките на нејзините компоненти.

Пример 1.4.3. Графикот на сложената функција $y = \sqrt{x+1}$ ќе го нацртаме со коренување на ординатите на графикот на функцијата $y = x+1$ (види цртеж 1.4.3).



Цртеж 1.4.1.

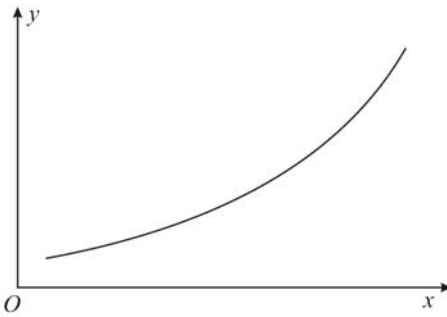
1.5. Локални екстрими монотоност, конкавитет и ограниченост на функција.

Дефиниција 1.5.1. Функцијата $y = f(x)$ е **монотono растечка (монотono неопаѓачка)** на множеството $X \subseteq D_f$, ако за сите $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$), кога $x_1 < x_2$.

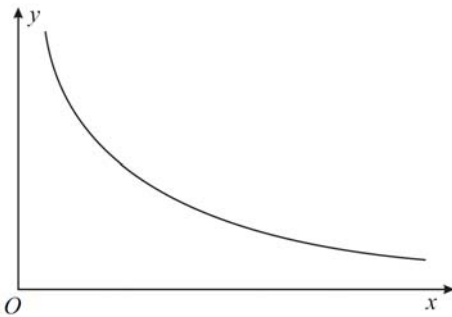
Функцијата $y = f(x)$ е **монотono опаѓачка (монотono нерастечка)** на множеството $X \subseteq D_f$, ако за сите $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) кога $x_1 < x_2$.

Една функција е **монотона** ако е растечка, неопаѓачка, опаѓачка или нерастечка. Ако функцијата е растечка или опаѓачка,

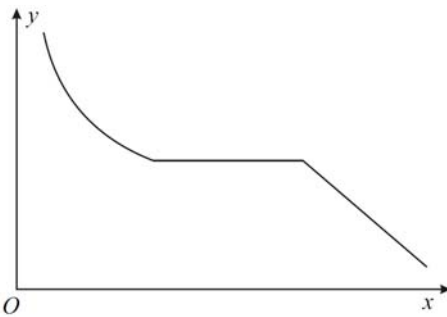
тогаш е **строго монотона**.



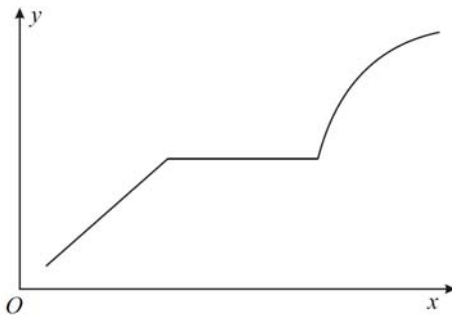
Цртеж 1.5.1.1. Растечка



Цртеж 1.5.1.2. Опаѓачка



Цртеж 1.5.1.3. Нерастечка



Цртеж 1.5.1.4. Неопаѓачка

Функцијата $y = f(x)$ е **ограничена** на множеството $X \subseteq D_f$, ако множеството вредности на функцијата е ограничено, т.е. постојат $a, b \in \mathbb{R}$, такви што $a \leq f(x) \leq b$ за секој $x \in X$.

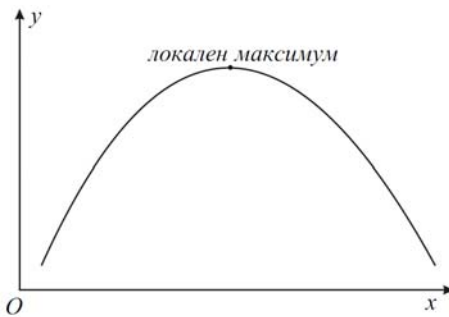
Дефиниција 1.5.2. Нека функцијата $y = f(x)$ е дефинирана на D . Функцијата f има **локален максимум** во точката $x_0 \in D$, ако постои околина U на x_0 таква што

$$f(x) < f(x_0) \text{ за секое } x \in U \cap D \setminus \{x_0\}.$$

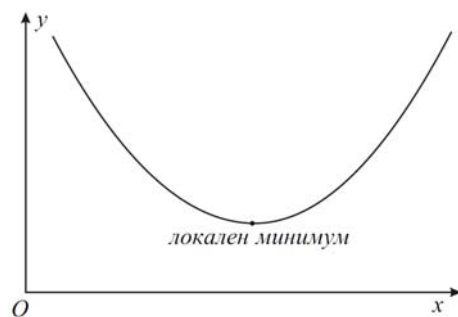
Функцијата $f(x)$ има **локален минимум** во точката $x_0 \in D$, ако постои околина U на x_0 таква што

$$f(x) > f(x_0) \text{ за секое } x \in U \cap D \setminus \{x_0\}.$$

Локалниот максимум и локалниот минимум се нарекуваат **локални екстреми** на функцијата f .



Цртеж 1.5.2.1. Локален максимум



Цртеж 1.5.2.2. Локален минимум

Во претходните дефиниции станува збор за **строги локални екстреми**. Ако $< (>)$ се замени со $\leq (\geq)$, тогаш ги добиваме дефинициите за **нестроги локални екстреми**.

Дефиниција 1.5.3. Функцијата $f(x)$ има **максимум** на множеството $X \subseteq D_f$, ако постои број $x_0 \in X$, таков што $f(x) \leq f(x_0)$ за секој $x \in X$. Бројот $f(x_0)$ се нарекува максимум на $f(x)$ на X . Ако множеството X се совпаѓа со дефиниционата област на $f(x)$, тогаш $f(x_0)$ се нарекува максимум (**апсолутен максимум**) на функцијата $f(x)$.

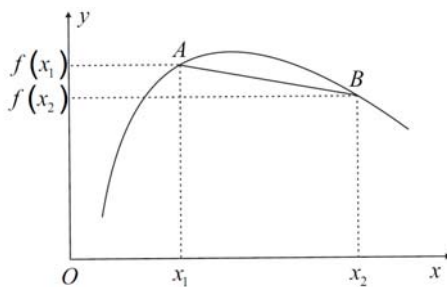
Функцијата $f(x)$ има **минимум** на множеството $X \subseteq D_f$, ако постои број x_0 од X , таков што $f(x_0) \leq f(x)$ за секој $x \in X$. Бројот $f(x_0)$ се нарекува минимум на $f(x)$ на X . Ако множеството X се совпаѓа со дефиниционата област на $f(x)$, тогаш $f(x_0)$ се нарекува минимум (**апсолутен минимум**) на функцијата $f(x)$.

Максимумот и минимумот на функцијата f на X , ако постојат, се нарекуваат **екстреми** (екстремни вредности) на f на X .

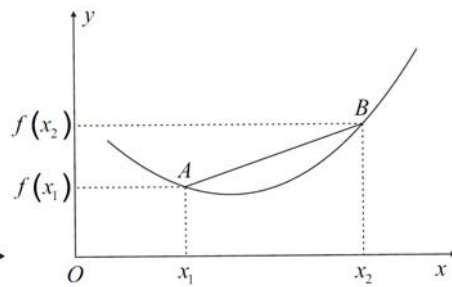
Дефиниција 1.5.5. Функцијата f дефинирана на (a, b) , е **конкавна или вдлабната (конвексна или испакната)** на (a, b) , ако за секое $x_1, x_2 \in (a, b)$ вредноста на функцијата е помала (поголема) од вредноста на линеарната функција чиј график минува низ точките $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$.

За означување конкавна функција ќе го користиме симболот „ $\cup$ “, а за конвексна „ $\cap$ “. Притоа, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ т.е. (a, b) може да биде и еден од интервалите $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ или $(-\infty, +\infty)$.

Геометриски интерпретирано, функцијата f е конкавна (конвексна) на (a, b) ако за произволни точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$, $x_1, x_2 \in (a, b)$, отсечката AB е над (под) графикот на функцијата.



Цртеж 1.5.5.1. Конвексна функција



Цртеж 1.5.5.2. Конкавна функција.

1.6. Парност, непарност и периодичност на функција.

Дефиниција 1.6.1. Нека функцијата $y = f(x)$ е дефинирана на D .

Функцијата f е **парна**, ако D е симетрична и

$$f(-x) = f(x).$$

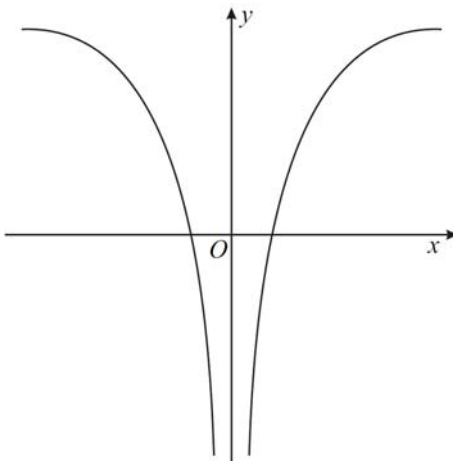
Функцијата f е **непарна**, ако D е симетрична и

$$f(-x) = -f(x).$$

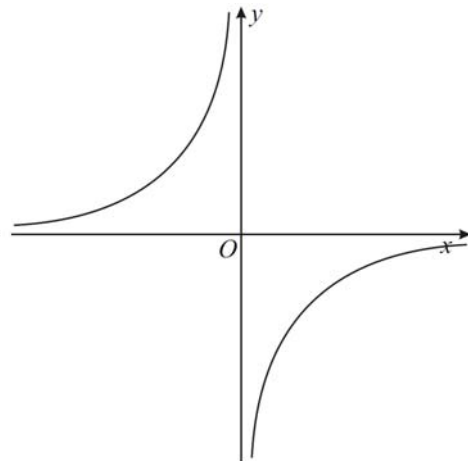
Функцијата f е **ниту парна ниту непарна**, ако не е парна и не е непарна.

Тврдењето дефиниционата област е симетрична (се мисли во однос на нулата), значи дека за секое $x \in D$ следува: $-x \in D$. Најчесто функциите се ниту парни ниту непарни. Единствена истовремено парна и непарна функција е **нула** функцијата $f(x) = 0$, за секое $x \in D$, каде што D е симетрична област. Секоја друга функција е или парна или непарна или ниту парна ниту непарна.

Графикот на парната функција е симетричен во однос на y -оската. Графикот на непарната функција е симетричен во однос на координатниот почеток. Затоа при скицирањето на графикот на парна или непарна функција, доволно е тој да се скицира на интервалот $(-\infty, 0]$ или на $[0, +\infty)$, а потоа на останатиот дел од дефиниционата област, симетрично да се преслика во однос на y -оската за парните, односно во однос на координатниот почеток за непарните функции.



Цртеж 1.6.1.1 Парна функција



Цртеж 1.6.1.2 Непарна функција

Пример 1.6.2. Функцијата $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ е непарна бидејќи $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ е симетрична и:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x).$$

Функцијата $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$ е парна бидејќи $D_f = \mathbb{R}$ е симетрична и:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 2} = \frac{x^2}{x^2 + 2} = f(x).$$

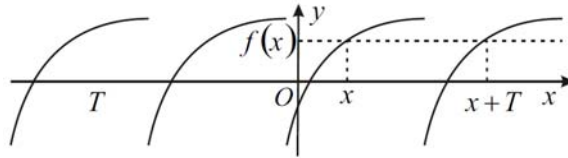
Функцијата $f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 1}$ е ниту парна ниту непарна бидејќи

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ не е симетрична, иако $f(x) = x$ за $x \neq -1$; односно за: $x \neq -1$ важи $f(-x) = -f(x)$.

Дефиниција 1.6.3. Нека функцијата $y = f(x)$ е дефинирана на D . Функцијата f е **периодична**, ако постои број $T \neq 0$ таков што:

$$x \pm T \in D \text{ и } f(x+T) = f(x) \text{ за секој } x \in D.$$

Бројот T се нарекува **период на** f .



Цртеж 1.6.3. Периодична функција

Најмалиот позитивен период на f , ако постои, се нарекува **основен период**. Често под поимот период на функција ќе го подразбираме основниот период. При скицирањето на график на периодична функција со основен период T , доволно е тој да се скицира на $[0, T]$. Ако функцијата f е периодична со основен период T , сите периоди на f се nT , $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Строго монотоните функции на $(-\infty, a)$ или $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ не се периодични. Такви се, на пример, рационалната, логаритамската и експоненцијалната функција.

Пример 1.6.4. Тригонометриските функции се периодични. Основниот период на $\sin x$ и $\cos x$ е 2π , додека на $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ е π .

Константната функција $f(x) = c$, c -константа нема основен период бидејќи за секој $x \in \mathbb{R}$ и секој $T \neq 0$,

$$f(x+T) = c = f(x),$$

па не постои најмал позитивен реален број T .

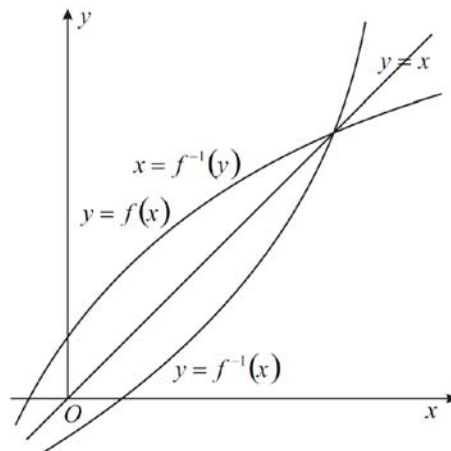
1.7. Инверзна функција. Функциите што поседуваат својство различни елементи да пресликуваат во различни елементи се нарекуваат обратноеднозначни или **инјекции**. Функциите што поседуваат својство секој елемент од кодоменот да е слика на елемент од доменот се нарекуваат **сурјекции**. Функциите што ги имаат двете својства се **биекции**.

Дефиниција 1.7.1. Нека функцијата $f : X \rightarrow Y$ е биекција. Тогаш $Y = f(X)$ и постои функција $f^{-1} : Y \rightarrow X$ дефинирана со:

$$x = f^{-1}(y) \text{ ако } y = f(x),$$

која се нарекува **инверзна функција** на функцијата f .

Од дефиницијата за инверзна функција следуваат следниве тврдења. Функциите f и f^{-1} се биекции и меѓусебно инверзни. Функцијата f има инверзна ако и само ако е биекција.



Цртеж. 1.7.1. Инверзна функција

Функциите $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ имаат ист график, но кај $x = f^{-1}(y)$ (*), променливата y е независна додека x зависна. Со замена на местата на променливите x и y во равенката (*), постигнуваме променливите да бидат стандардно означени. Тогаш ја добиваме функцијата

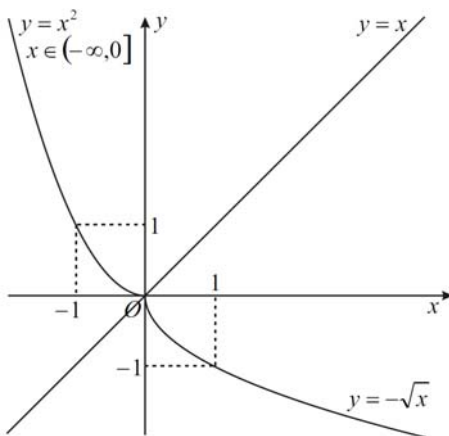
$$y = f^{-1}(x), \quad x \in Y, \quad y \in X;$$

чиј график е симетричен на графикот на функцијата $y = f(x)$ во однос правата $y = x$, бидејќи секоја точка (x, y) е симетрична на (y, x) во однос на правата $y = x$.

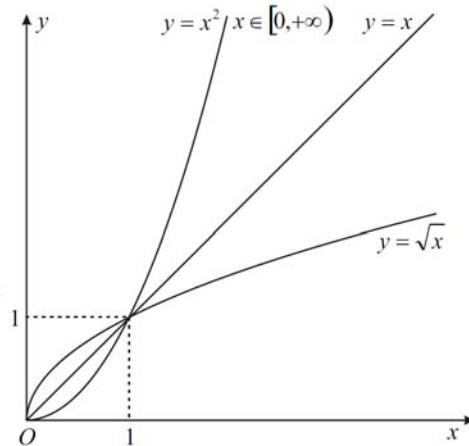
Теорема 1.7.2. Секоја строго монотона функција $f: X \rightarrow f(X)$, има инверзна.

Доказ. Секоја строго монотона функција е биекција, па има инверзна.

Пример 1.7.3. Функцијата $y = x^2$ нема инверзна бидејќи елементите $-x$ и x , $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ги пресликува во ист реален број x^2 . Но рестрикциите на $y = x^2$ на $(-\infty, 0]$ и $(0, +\infty]$ имаат инверзни функции $y_1 = -\sqrt{x}$ и $y_2 = \sqrt{x}$, соодветно.



Цртеж 1.7.3.1.



Цртеж 1.7.3.2.

1.8. Елементарни функции. Основни елементарни функции се:

- 1) **константната** $y = c$, каде c е константа;
- 2) **степенската** $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$;
- 3) **експоненцијалната** $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- 4) **логаритамската** $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- 5-8) **тригонометриските** $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$
 $y = \operatorname{ctg} x$; и

9-12) **циклометриските** функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$ и $y = \operatorname{arccctg} x$.

Елементарни функции се функциите што се добиени од основните елементарни функции со конечен број пати примена на аритметичките операции (собирање, одземање, множење, делење и степенување) и операцијата композиција на функции.

Функциите со кои работиме, со неколку исклучоци, се елементарни.

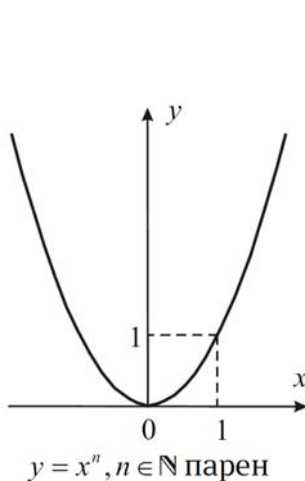
Пример 1.8. Функцијата **цел дел**, ознака $y = [x]$, $x \in \mathbb{R}$; која го пресликува бројот во најмалиот цел број помал од него, не е елементарна функција.

Елементарните функции се изучувани во средното образование. Во продолжение ќе направиме нивни преглед.

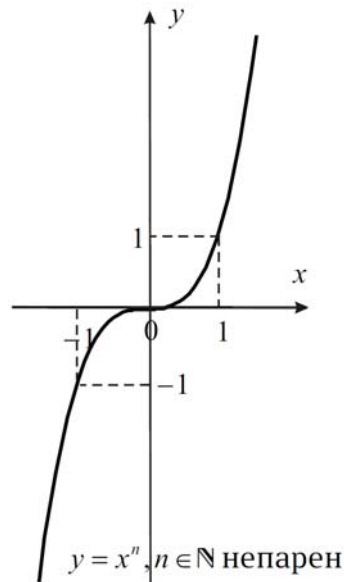
1.8.1. Степенска функција. Функцијата $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$ се нарекува степенска функција.

Во $x=0$ има вредност 0, па $x=0$ е нула на функцијата, освен во случајот кога $a=0$, тогаш важи $0^0=1$.

- Ако степеновиот показател $a=n$ е природен број, дефиниционата област е $\mathbb{R}$.



Цртеж 1.8.1.1.



Цртеж 1.8.1.2.

Степенски функции кога степеновиот показател е природен број

Ако n е парен, тогаш и функцијата е парна, опаѓа на $(-\infty, 0]$, расте на $[0, +\infty)$ и во точката $x = 0$ има минимум.

Ако n е непарен, тогаш и функцијата е непарна и расте на $\mathbb{R}$. За $n \neq 1$, точката $x = 0$ е превојна точка. За $n = 1$ графикот на функцијата е правата $y = x$.

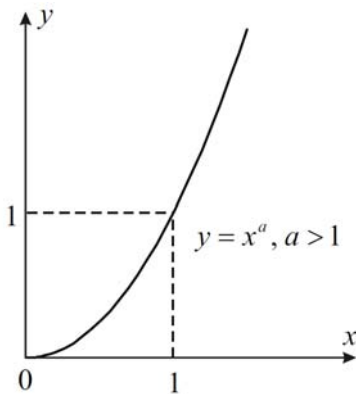
- Ако степеновиот показател $n = 0$, тогаш функцијата е константната функција.

- Ако степеновиот показател е негативен цел број, тогаш дефиниционата област, исто така, е $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Графикот ќе го нацртаме со помош на нејзината реципрочна функција $\frac{1}{x^{-n}}$, $-n \in \mathbb{N}$. За определување на реципрочните вредности ги користиме правите $y = \pm 1$.

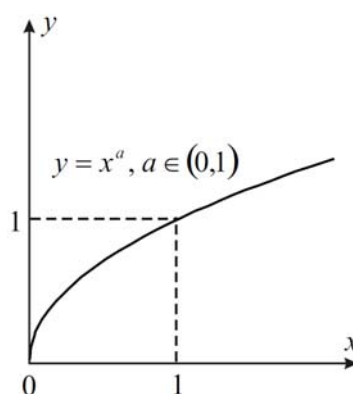
- Ако $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, тогаш $y = \sqrt[q]{x^p}$. Дефиниционата област е $\mathbb{R}$, освен кога p е непарен, а q е парен, тогаш $D = [0, +\infty)$.

- Ако $a = -\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, тогаш $y = \frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$ и $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, освен кога p е непарен, а q е парен, тогаш $D = (0, +\infty)$.

- Во останатите случаи, кога $a \in \mathbb{R}$ ако $a > 0$, $D = [0, +\infty)$. Разгледуваме случаи кога $a > 1$ и $a \in (0, 1)$.



Цртеж 1.8.1.3.

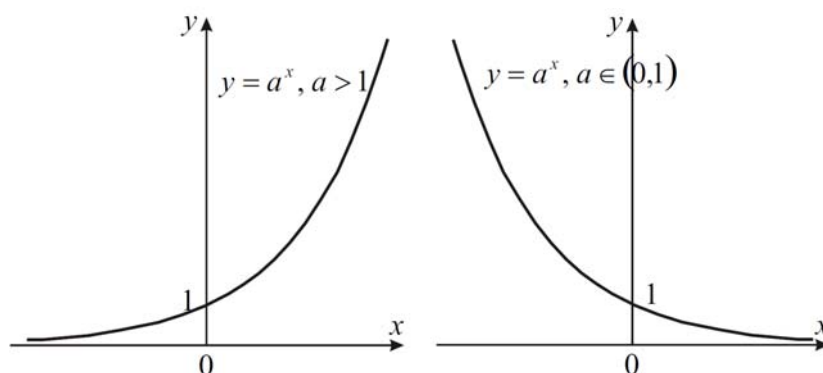


Цртеж 1.8.1.4.

На горните цртежи се дадени графици на степенската функција кога $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\mathbb{Q}\}$ или $a = \frac{p}{q}$, $p = 2k + 1$, $q = 2l$, $k, l \in \mathbb{N}$.

Ако $a < 0$, тогаш $y = \frac{1}{x^{-a}}$ и $-a > 0$, па графикот може да го нацртаме со помош на графикот на функцијата $y = x^{-a}$. $D = (0, +\infty)$.

1.8.2. Експоненцијална функција. Функцијата $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$; е експоненцијална функција. Дефиниционата област е $\mathbb{R}$. Функцијата расте за $a > 1$ и опаѓа за $a \in (0, 1)$. Функцијата е позитивна за сите $x \in \mathbb{R}$, т.е. $a^x > 0$. Во $x = 0$ има вредност $y = 1$.



Цртеж 1.8.2.1.

Цртеж 1.8.2.2.

Експоненцијална функција

1.8.3. Логаритамска функција. Функцијата:

$$y = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1$$

дефинирана со $y = \log_a x$ ако $x = a^y$, е логаритамска функција.

Дефиниционата област е $(0, +\infty)$, т.е. функцијата е дефинирана за $x > 0$. Од дефиницијата за логаритамската функција следува дека таа е инверзна на функцијата $y = a^x$, $x > 0$. За $a > 1$ функцијата монотонно расте, додека за $a \in (0, 1)$ монотонно опаѓа. Нула на функцијата е точката $x = 1$.

Од својствата на експоненцијалната функција следува дека логаритамската функција ги поседува следниве својства:

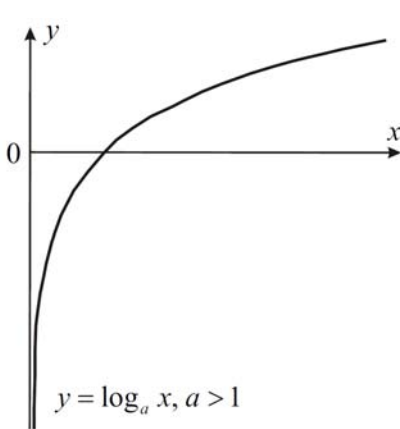
$$1) \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; \quad 2) \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y;$$

$$3) \log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a}; \quad 4) \log_a x^y = y \log_a x;$$

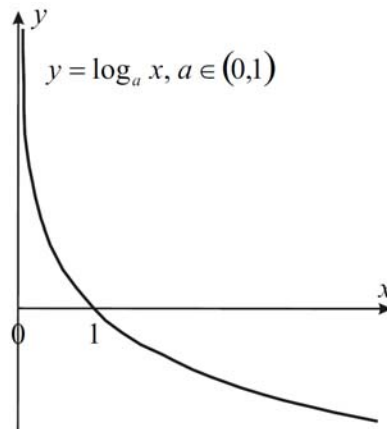
$$5) \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x; \quad 6) a^{\log_a x} = x;$$

$$7) \log_a a = 1; \quad 8) \log_a 1 = 0;$$

под услов да постои секој од логаритмите. Ако $a=10$, тогаш логаритмот се нарекува **декаден** и се означува со $\lg$. Значи $\lg x = \log_{10} x$. Ако $a=e$, каде e е ирационален број кој подоцна ќе го дефинираме, тогаш логаритмот се нарекува **природен** и се означува со $\ln$ т.е. $\ln x = \log_e x$.



Цртеж 1.8.3.1.



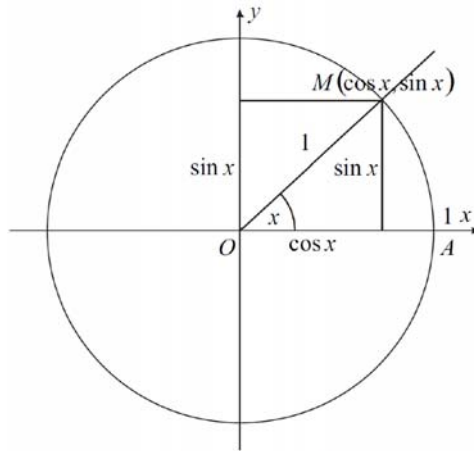
Цртеж 1.8.3.2.

Логаритамска функција

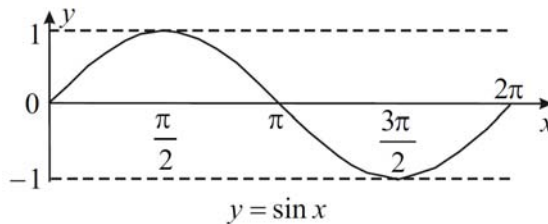
1.8.4. Тригонометриски функции. Функциите $y = \sin x$, $y = \cos x$ се дефинираат со помош на **тригонометриска кружница**, односно кружница со центар во координатниот почеток и радиус 1. Нека M е точка од кружницата и x е аголот $\angle AOM$. По дефиниција $\sin x$ е проекцијата на точката M на y -оската, додека $\cos x$ е проекцијата на M на x -оската (види цртеж 1.4.8.1).

Ако точката M се движи од почетната точка A во насока спротивна од движењето на стрелките на часовникот, тогаш може

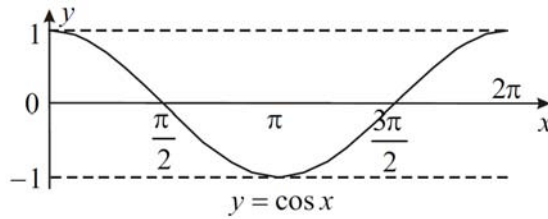
да се добие кој било агол од интервалот $[0, +\infty)$, додека при обратно движење на M , од интервалот $(-\infty, 0]$. На овој начин на секое $x \in \mathbb{R}$ му е доделена вредност $\sin x$ и $\cos x$, односно дефиниционата област на $\sin$ и $\cos$ е $\mathbb{R}$. Множеството вредности на $\sin$ и $\cos$ е $[-1, 1]$. Функциите $\sin$ и $\cos$ се периодични со основен период 2π . Нули на функцијата синус се $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; а на косинус $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Функцијата синус има максимуми во $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; и минимуми во $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; додека косинус има максимум во $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; и минимуми во $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. На основниот период функцијата синус расте на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ и опаѓа на $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, додека косинус расте на $[\pi, 2\pi]$ и опаѓа на $[0, \pi]$.



Цртеж 1.8.4.1. Тригонометриска кружница



Цртеж 1.8.4.2. Синус

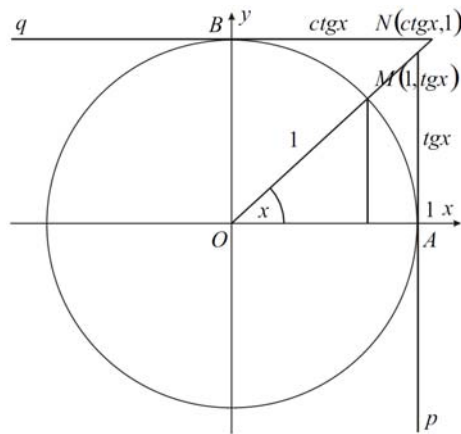


Цртеж 1.8.4.3. Косинус

Функциите тангенс и котангенс се дефинирани со равенките:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ и } \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

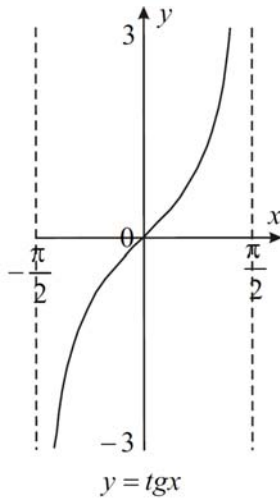
Функциите тангенс и котангенс може да се дефинираат и независно. Имено ако p и q се прави низ A и B паралелни на y и x оските, соодветно, тогаш $\operatorname{tg} x$ е ординатата на точката M , додека $\operatorname{ctg} x$ е апцисата на точката N . Притоа, M и N се пресечни точки на кракот на аголот, различен од $\overline{OA}$, со правите p и q соодветно.



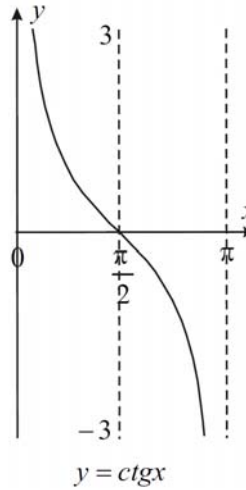
Цртеж 1.8.4.4.

Функцијата тангенс е дефинирана во сите точки, освен $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; нули има во $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; и монотонно расте на секој од интервалите на дефинираност.

Функцијата котангенс е дефинирана во сите точки, освен $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; нули има во $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; и монотono опаѓа на секој од интервалите на дефинираност.



Цртеж 1.8.4.5. Тангенс

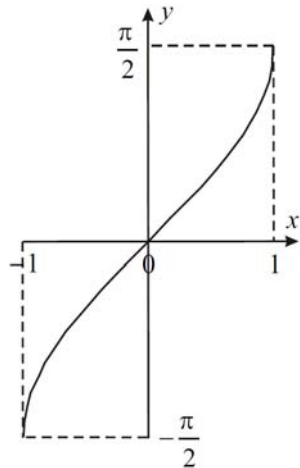


Цртеж 1.8.4.6. Котангенс

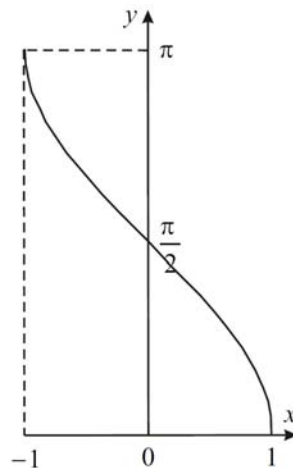
Основен период на функциите тангенс и котангенс е π , а множество вредности $\mathbb{R}$.

1.8.5. Циклометриски функции. Тригонометриските функции немаат свои инверзни функции бидејќи не се обратноеднозначни, но на рестрикции на нивните дефинициони области имаат инверзни.

Функцијата $y = \sin x$ на интервалот $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ е строго монотono растечка и бидејќи $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ и $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, дадениот интервал го пресликува во $[-1, 1]$. Следува дека синус има инверзна функција $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$; наречена **аркус синус**. Функцијата аркус синус е непарна и расте на $[-1, 1]$. Нејзиниот график е симетричен на графикот на $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ во однос на правата $y = x$ и минува низ координатниот почеток ($\arcsin 0 = 0$).



Цртеж 1.8.5.1. Аркус синус



Цртеж 1.8.5.2. Аркус косинус

Функцијата $y = \cos x$ на интервалот $[0, \pi]$ е строго монотono опаѓачка и бидејќи $\cos(0) = 1$ и $\cos(\pi) = -1$, дадениот интервал го пресликува во $[-1, 1]$. Следува дека косинус има инверзна функција:

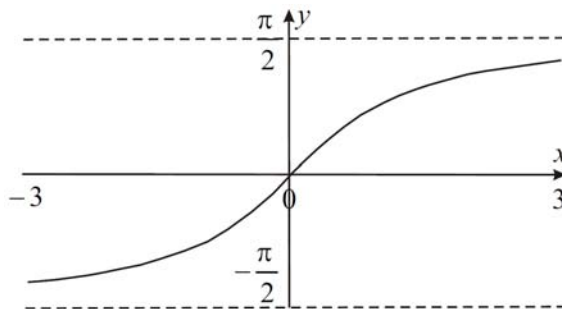
$$y = \arccos x, \quad x \in [-1, 1],$$

наречена **аркус косинус**. Функцијата аркус косинус е ниту парна ниту непарна и опаѓа на $[-1, 1]$. Нејзиниот график е симетричен на графикот на $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$; во однос на правата $y = x$ и минува низ точката $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Функцијата $y = \operatorname{tg} x$ е строго монотono растечка на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, и го пресликува интервалот на $\mathbb{R}$. Следува дека постои инверзна функција:

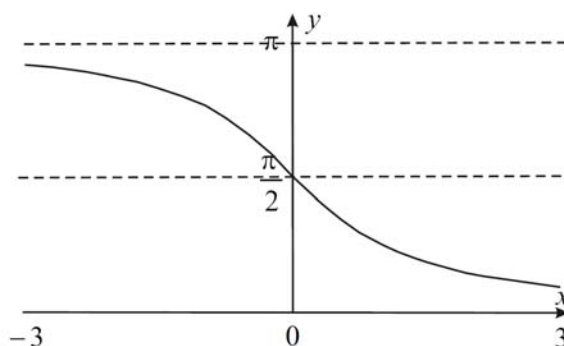
$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R};$$

наречена **аркус тангенс**. Функцијата аркус тангенс е непарна и монотono расте. Нејзиниот график е симетричен на графикот на $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ во однос на правата $y = x$ и минува низ координатниот почеток ($\operatorname{arctg} 0 = 0$).



Цртеж 1.8.5.3. Аркус тангенс

Функцијата $y = \operatorname{ctg} x$ е строго монотono опаѓачка на интервалот $(0, \pi)$, и го пресликува интервалот на $\mathbb{R}$. Следува дека постои инверзна функција $y = \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ наречена **аркус котангенс**. Функцијата аркус котангенс е непарна и монотono опаѓа. Нејзиниот график е симетричен на графикот на $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0, \pi)$ во однос на правата $y = x$ и минува низ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.



Цртеж 1.8.5.4. Аркус котангенс

Во правоаголниот триаголник со катети a и b , хипотенуза c и внатрешен агол α кој лежи спроти катетата a , важи:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Основните вредности на тригонометриските функции од агол $\alpha \in [0, \pi/2]$ се дадени во следниве табели:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{ctg} \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1.9. Тригонометриски идентитети. Во продолжение ќе наведеме некои тригонометриски равенства.

I. Основни идентитети		
1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;	2) $ \sin \alpha \leq 1$;	3) $ \cos \alpha \leq 1$;

II. Формули за симетрија	
1) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	2) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
3) $\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin \alpha$	4) $\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos \alpha$
5) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$;	6) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$;
7) $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ имаат период 2π ;	8) $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ имаат период π .

III. Адициони формули	
1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	
2) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$	
3) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	
4) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$	

IV. Формули за трансформација на збир и разлика во производ	
1) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$;	
2) $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$;	
3) $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$;	
4) $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$.	

V. Формули за трансформација на производ во збир и разлика
1) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$
2) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta));$
3) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$

VI. Формули за двоен и половичен агол	
1) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha ;$	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha ;$
3) $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} ;$	4) $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} .$

VII. Изразување на тригонометриските функции преку тангенс		
1) $\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} ;$	2) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} ;$	3) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} .$

Аналогни формули II-VI може да се изведат и за функциите тангенс и котангенс.

Да ги покажеме формулите*. Основните тригонометриски идентитети I 1) - I 3) и VII 3) следуваат од дефинициите на тригонометриските функции. Ќе ги покажеме VII 2) и VII 1),

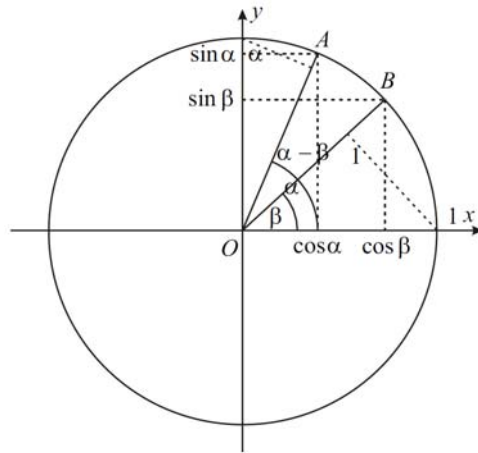
$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \text{ од каде:}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \text{ и}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \text{ од каде што:}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} .$$

Формулите за симетрија II, исто така директно следуваат од дефинициите на тригонометриските функции. Ќе ја покажеме адиционата формула III 4).



Цртеж 1.9.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \vec{op}_{OB} \overrightarrow{OA} = \vec{op}_{OB} ((\cos \alpha, 0) + (0, \sin \alpha)) = \\ &= \cos \alpha \vec{op}_{OB} (1, 0) + \sin \alpha \vec{op}_{OB} (0, 1) = \cos \alpha \vec{op}_x \overrightarrow{OB} + \sin \alpha \vec{op}_y \overrightarrow{OB} = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Равенството III 1) се добива ако во III 4) се замени α со $\frac{\pi}{2} - \alpha$ и се применат II 5) и II 6), додека III 2) и III 3) се добиваат од III 1) и III 4) со замена на b со $-b$ и примена на II 1) и II 2).

Нека, место α и β во III, соодветно се стават:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \text{ и } \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ако се соберат III 1) и III 2), како и III 3) и III 4), соодветно ги добиваме IV 1) и IV 2). Ако од III 1) се одземе III 2) и од III 3) се одземе III 4), соодветно ги добиваме IV 3) и IV 4).

Од III се добиваат VI 1) и VI 2), од каде што со примена на I 1) се добиваат VI 3) и VI 4).

1.10. Трансформација на график на функција.

Графикот на една функција може да се нацрта со трансформација на график на друга функција. Претходно опишавме трансформации на графици на функции што се производ на константа со функција; збир, разлика, производ и количник на функции; на сложени и инверзни функции.

Нека е даден графикот на функцијата $y = f(x)$.

• Графикот на функцијата:

$$y = df(b(x+a)) + c, \quad b, d \neq 0 \text{ т.е. } \frac{y-c}{d} = f(b(x+a)),$$

се црта со помош на графикот на функцијата $y' = f(x')$. Заради:

$$y' = \frac{y-c}{d} \Leftrightarrow y = dy' + c \text{ и } x' = b(x+a) \Leftrightarrow x = \frac{1}{b}x' - a;$$

секоја точка (x', y') од графикот на $y' = f(x')$ се пресликува во:

$$\left(\frac{1}{b}x' - a, dy' + c \right).$$

-Значи, графикот на $y = f(x) + c$ се добива со поместување на графикот на $y = f(x)$ паралелно со y -оската за $|c|$ единици нагоре ако $c > 0$, или надолу ако $c < 0$.

Графикот на $y = df(x)$, $d > 0$ се добива со растегнување на графикот на $y = f(x)$ долж y -оската d пати ако $d > 1$, или со стеснување $1/d > 1$ пати ако $d \in (0,1)$. Графикот на $y = df(x)$, $d < 0$ е симетричен на графикот на $y = -df(x)$, $-d > 0$ во однос на x -оската.

Графикот на $y = f(x+a)$, се добива со поместување на графикот на $y = f(x)$ паралелно со x -оската за $|a|$ единици во лево ако $a > 0$ или во десно ако $a < 0$.

Графикот на $y = f(bx)$, $b > 0$ се добива со стеснување на графикот на $y = f(x)$ долж x -оската за b пати ако $b > 1$, или со растегнување за $1/b$ пати ако $b \in (0,1)$. Графикот на $y = f(bx)$, $b < 0$ е симетричен на графикот на $y = f(-bx)$, $-b > 0$ во однос на y -оската.

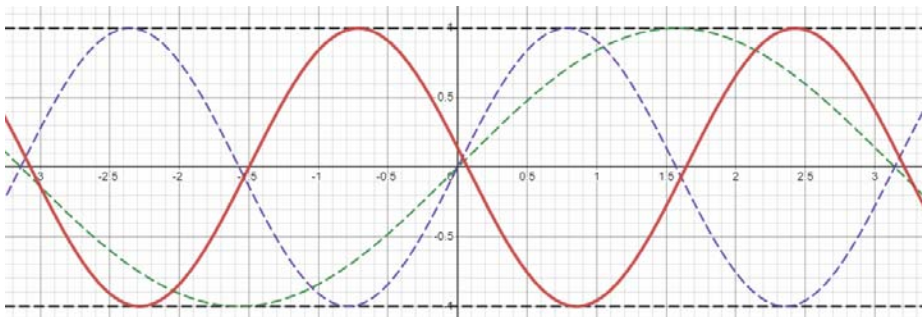
• Графикот на функцијата $y = |f(x)|$ се совпаѓа со графикот на функцијата $y = f(x)$ кога $f(x) \geq 0$ и е симетричен на графикот на $y = f(x)$ во однос на x -оската кога $f(x) < 0$.

Графикот на функцијата $y = f(|x|)$ се совпаѓа со графикот на функцијата $y = f(x)$ кога $x \geq 0$, а како график на парна функција е симетричен на графикот на $y = f(x)$ во однос на y -оската кога $x < 0$.

Пример 1.10.1. Скицирај го графикот на функцијата

$$y = \sin(2x + 3).$$

Решение. Прв начин. 1) Прво го цртаме основниот елементарен график на функцијата $y = \sin x$. Го земаме интервалот $[-\pi, \pi]$.



1) а) $y = \sin x$ зелен; б) $y = \sin 2x$ син; в) $y = \sin\left(2\left(x + \frac{3}{2}\right)\right)$ црвен.

Цртеж 1.10.1.

Графикот на $y = \sin 2x$ се добива со стеснување на $y = \sin x$ за 2 пати.

Графикот на функцијата:

$$y = \sin(2x + 3) = \sin 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

се добива со поместување на $y = \sin 2x$ паралелно на x -оската за $\frac{3}{2}$ единици во лево.

Втор начин. Графикот на функцијата $y = \sin(2x+3)$ можеме да го добиеме и директно од почетниот $y' = \sin x'$ со одредување на врската меѓу нивните координати, $y = \sin\left(\underbrace{2x+3}_{x'}\right)$, т.е.:

$$y' = y \Leftrightarrow y = y' \text{ и } x' = 2x+3 \Leftrightarrow 2x = x'-3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}x' - \frac{3}{2}.$$

Значи, y -координатите на соодветните точки им се совпаѓаат, додека x -координатата на вториот график се добива од соодветната x' -координата на првиот, со делење со 2 и одземање 1,5. Може да се земат прво клучните точки од првиот график:

$$(-\pi, 0) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}, 0\right), \left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}, -1\right),$$

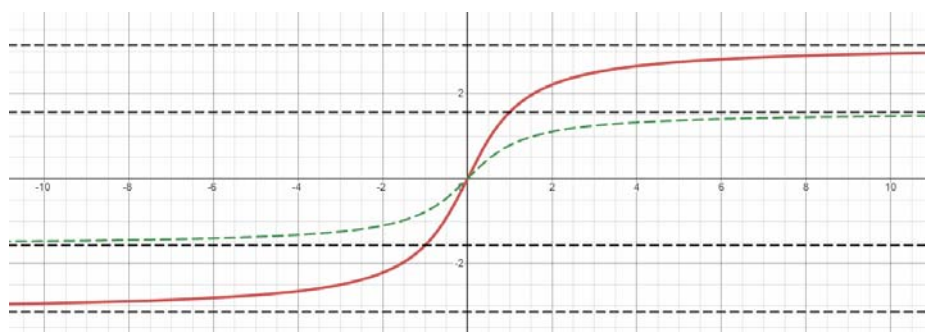
$$(0, 0) \rightarrow \left(-\frac{3}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}, 1\right), (\pi, 0) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}, 0\right);$$

а по потреба и други точки.

Пример 1.10.2. Скицирај го графикот на функцијата:

$$y = 2\arctg x.$$

Решение. Прво го цртаме графикот на функцијата $y = \arctg x$ (цртеж 1.10.2), а потоа со растегнување за 2 пати паралелно со y -оската, го добиваме графикот на $y = 2\arctg x$.



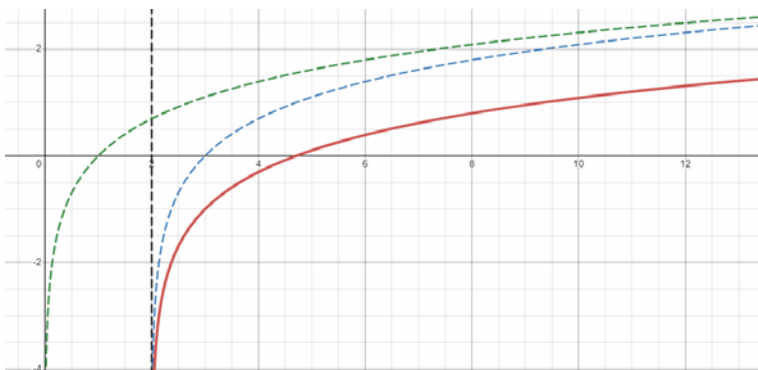
2) а) $y = \arctg x$ зелен график; б) $y = 2\arctg x$ црвен график.

Цртеж 1.10.2.

Пример 1.10.3. Скицирај го графикот на функцијата:

$$y = \ln(x-2) - 1.$$

Решение. Го цртаме елементарниот график $y = \ln x$, го поместуваме за 2 единици во десно, паралелно на x -оската и го добиваме графикот на $y = \ln(x-2)$. За подобра скица ја поместуваме и асимптотата $x=0$ во $x=2$. Потоа графикот го поместуваме за една единица надолу паралелно на y -оската и го добиваме графикот на $y = \ln(x-2) - 1$.



3) а) $y = \ln x$ зелен; б) $y = \ln(x-2)$ син; в) 2) $y = \ln(x-2) - 1$ црвен;

Цртеж 1.10.3.

1.11. Параметарски равенки на крива. Понекогаш е посоодветно наместо со равенките $F(x, y) = 0$ или $y = f(x)$, променливите x и y на една крива да се изразат преку трета променлива t која се нарекува **параметар**, а равенките на кривата:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in T;$$

параметарски равенки.

Една крива определена со имплицитна равенка може да се параметризира, односно претстави со пар параметарски равенки на различни начини. Под параметарски равенки на кривата ќе се подразбира најзначајниот пар.

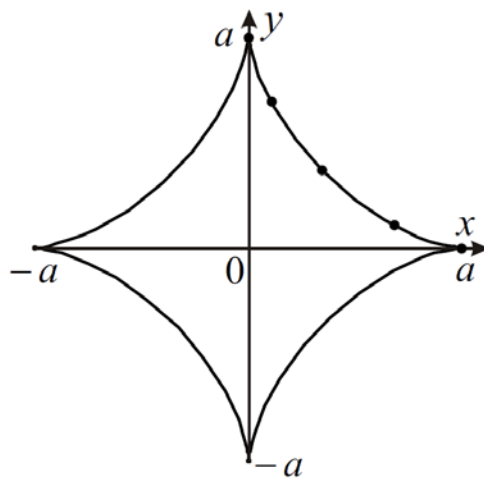
Пример 1.11.1. Астроида е крива определена со нејзината имплицитна равенка:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Параметарските равенки на астроида се:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$$

Во продолжение ќе ја скицираме астроида. Функциите $x = a \cos^3 t$ и $y = a \sin^3 t$ имаат заедничка периода: $T = 2\pi$. Затоа, за $t \in [0, 2\pi]$, ќе бидат испишани сите точки од кривата.



Цртеж 1.11.1.

Ако (x, y) е точка од кривата $x(t) = a \cos^3 t$, $y(t) = a \sin^3 t$, добиена за некоја вредност на параметарот t , тогаш, бидејќи:

$$a \cos^3(-t + \pi) = -a \cos^3 t = -x, \quad a \sin^3(-t + \pi) = a \sin^3 t = y \quad \text{и}$$

$$a \cos^3(-t) = a \cos^3 t = x, \quad a \sin^3(-t) = -a \sin^3 t = -y,$$

следува дека и точките $(x, -y)$ и $(-x, y)$ се точки од кривата. Значи, кривата е симетрична во однос на x и y -оските. Затоа, доволно е да ја скицираме кривата на интервалот $[0, \pi/2]$, а потоа да ја пресликаме симетрично во однос на x и y -оските. Формираме табела со карактеристичните вредности на интервалот $[0, \pi/2]$:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x	a	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a \approx 0,65a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a \approx 0,35a$	$\frac{1}{8}a \approx 0,125a$	0
y	0	$\frac{1}{8}a \approx 0,125a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a \approx 0,35a$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a \approx 0,65a$	a

и ги нанесуваме точките во Декартов правоаголен координатен систем (цртеж 1.11.1).

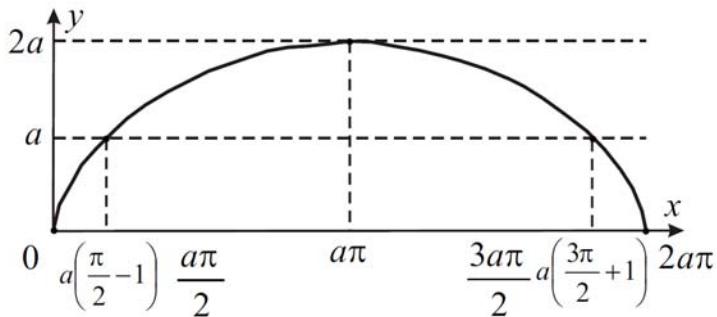
Пример 1.11.2. Циклоида е крива определена со нејзините параметарски равенки:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

За да ја нацртаме кривата определуваме неколку нејзини точки,

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx 0,57a$	$a\pi$	$a\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right) \approx 5,71a$	$2a\pi \approx 6,28a$
y	0	a	$2a$	a	0

кои што потоа ги поврзуваме, имајќи го предвид однесувањето на функциите $x(t)$ и $y(t)$.



Цртеж 1.11.2.

Бидејќи:

$$y(t + 2k\pi) = a(1 - \cos(t + 2k\pi)) = a(1 - \cos t) = y(t), \quad k \in \mathbb{Z}; \text{ и}$$

$$x(t + 2k\pi) = a((t + 2k\pi) - \sin(t + 2k\pi)) = 2ak\pi + x(t), \quad k \in \mathbb{Z};$$

кривата е график на периодична функција со период 2π . Затоа, доволно е да ја нацртаме на интервалот $[0, 2\pi]$ (цртеж 1.11.2).

Пример 1.11.3. Кружницата со центар во точката $O(x_0, y_0)$ и радиус r има имплицитна равенка $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (1).

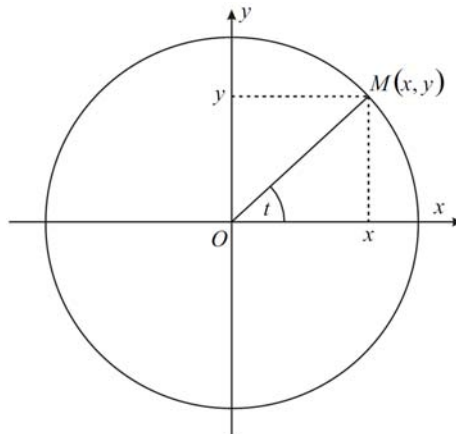
Ако ставиме:

$$x - x_0 = r \cos t, \quad y - y_0 = r \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$x = x_0 + r \cos t, \quad y = y_0 + r \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (2);$$

тогаш јасно (1) е исполнета. Притоа, ако $M(x, y)$ е точка од кружницата, тогаш t е аголот што OM , го образува со x -оската.

Равенките (2) се нарекуваат **параметарски равенки на кружница**.



Цртеж 1.11.3.

Да забележиме дека овие равенки не се единствени, т.е. равенката на кружницата може да се претстави и преку бесконечно многу други параметарски равенки.

Пример 1.11.4*. Елипсата со центар во $O(x_0, y_0)$ и полуоски a и b има имплицитна равенка:

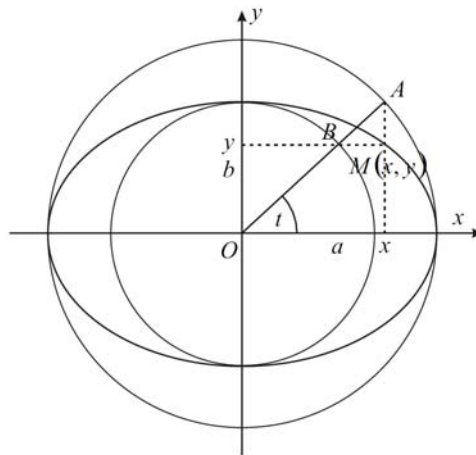
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

додека:

$$x = x_0 + a \cos t, \quad y = y_0 + b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi),$$

се **параметарски равенки на елипсата**.

Нека $M(x, y)$ е точка од елипсата, A е пресекот на правата $X = x$ со кружницата $K(O, a)$ и B е пресекот на $Y = y$ со $K(O, b)$, кои се во ист квадрант со M . Тогаш B лежи на OA и t е аголот којшто полуправата $OA = OB$, го образува со x -оската (цртеж 1.11.4).

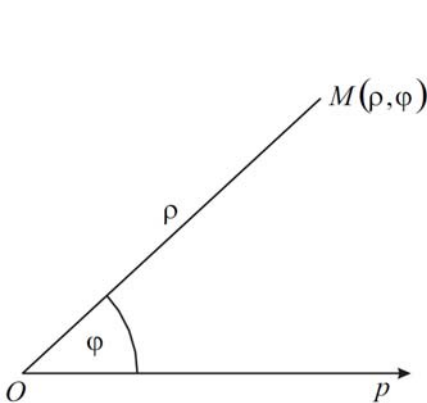


Цртеж 1.11.4.

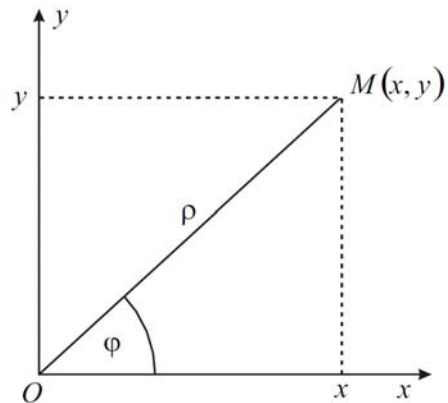
1.12. Поларен координатен систем и поларна равенка.

Поларниот координатен систем го сочинуваат точка O , полуправа p со почеток во O , и рамнина во која лежи полуправата со координатен почеток O . Точката O се нарекува **пол**, додека полуправата p **поларна оска**.

Ако M е точка од рамнината на поларниот координатен систем, тогаш нејзините поларни координати се: ρ -должината на отсечката OM и φ , $\varphi \in [0, 2\pi)$ -аголот што отсечката OM го образува со поларната оска. Означуваме: $M(\rho, \varphi)$.



Цртеж 1.12.1.



Цртеж 1.12.2.

Навистина ρ и φ определуваат единствена точка од поларниот координатен систем и обратно за секоја точка $M \neq O$ постојат единствени броеви ρ и φ , што соодветно се должината на отсечката OM и аголот што OM го зафаќа со правата p . За полот O , радиусот $\rho = 0$ додека аголот φ е неодреден.

Ако избереме Декартов координатен систем таков што полот O се совпаѓа со координатниот почеток, додека поларната оска p со x -оската, ја добиваме врската меѓу поларните и Декартовите координати на точката $M \neq O$:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1).$$

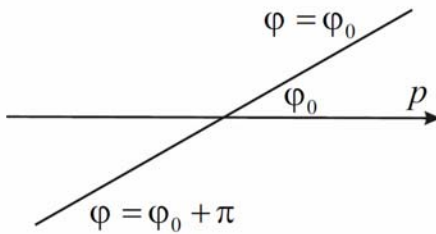
Имено, од дефинициите на синус и косинус преку тригонометриска кружница, т.е. кружница со радиус 1, важи $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$ и заради пропорционалноста со коефициент на пропорција ρ со централна кружница со радиус ρ , следува точноста на (1). Притоа:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{и за } y \neq 0, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

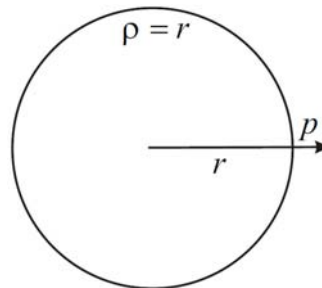
Забелешка. Од дефиницијата за поларни координати следува дека $\rho \geq 0$, но по договор ние ќе сметаме дека ρ може да биде и негативно, така што за $\varphi = \varphi_0$ од равенката $\rho = \rho(\varphi)$, кога $\rho_0 = \rho(\varphi_0) < 0$ нема да сметаме дека точката со координата (ρ_0, φ_0) не постои, туку дека е зададена точката $M_0(-\rho_0, \varphi_0 + \pi)$ за $\varphi_0 \in [0, \pi)$ или $M_0(-\rho_0, \varphi_0 - \pi)$ за $\varphi_0 \in [\pi, 2\pi)$.

Пример 1.12.1-2. 1) Равенката $\varphi = \varphi_0 \vee \varphi = \varphi_0 + \pi$, $\varphi_0 \in [0, \pi)$; е равенка на правата што минува низ координатниот почеток и со поларната оска зафаќа агол φ_0 .

2) Равенката $\rho = r$ е поларна равенка на кружница со центар во координатниот почеток и радиус r .



Цртеж 1.12.1.1.



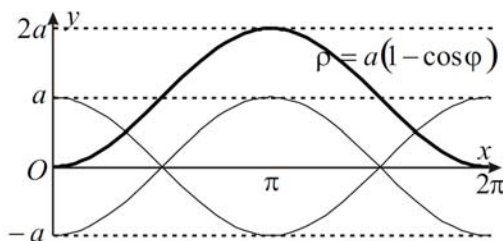
Цртеж 1.12.1.2.

Пример 1.12.3. Кривата зададена со поларната равенка:

$$\rho = a(1 - \cos \varphi),$$

се нарекува **кардиоида** (срце).

За да ја скицираме кардиоидата, го користиме помошниот график на функцијата $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ зададена во Декартови координати.

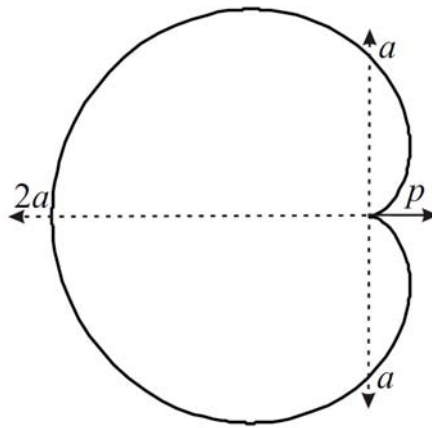


Цртеж 1.12.3.1.

Имајќи ја предвид зависноста на ρ од φ во графикот, ние можеме брзо да нанесуваме точки од кардиоидата во поларниот координатен систем, како и да знаеме да ги поврземе точките имајќи го предвид поведението на графикот.

На пример, за $\varphi = \frac{\pi}{2}$ од графикот, гледаме $\rho = a$. Точката $\left(\frac{\pi}{2}, a\right)$ ја нанесуваме на поларниот координатен систем, така што на полуправата која е поместена за агол од $\pi/2$ во однос на поларната оска, ја определуваме точката со должина a .

За попрецизно скицирање може да одбереме повеќе точки, а нивните втори координати да ги определиме од графикот 1.12.3.1 со помош на линијар.



цртеж 1.12.3.2.

Коментар. Кривата можевме да ја нацртаме и без помошниот график, тогаш ќе го добиевме времето за скицирање на графикот, но ќе требаше повеќе време за определување на вторите координати на избраните точки, и пак ќе требаше да се анализира на зависноста $\rho = \rho(\varphi)$ за да се знае како да се поврзат точките.

2.1. НИЗА

2.1.1. Дефиниција и основни поими на низа

Мотивација. Множеството $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ во кое е определен редоследот на елементите, ќе го наречеме **низа**. Значи, прв елемент е 1, втор $\frac{1}{2}$, трет $\frac{1}{3}$ итн., односно определено е пресликување a од множеството природни во множеството реални броеви. Нека:

$$a(1) = a_1, a(2) = a_2, \dots, a(n) = a_n, \dots,$$

тогаш правилото на пресликување гласи: $a(n) = a_n$. Во продолжение ќе ја искажеме дефиницијата за низа:

Дефиниција 2.1.1.1. Низа е пресликување $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, од множеството на природни во множеството на реални броеви.

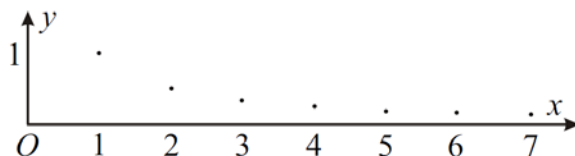
Членовите $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ се нарекуваат членови на низата. Членот $a_n = a(n)$ се нарекува **општ** или **n -ти член** на низата. Тогаш низата може да се запише во облик $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ или $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Ако е познат општиот член, низата поедноставно може да се означи со $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ или само (a_n) .

Множество вредности на низата (a_n) е множеството:

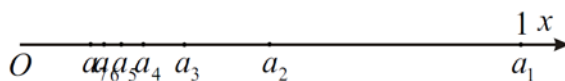
$$\left\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Пример 2.1.1.1. Низата $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, има општ член $a_n = \frac{1}{n}$ и затоа може да се запише во облик $\left(\frac{1}{n}\right)$. Множеството вредности на низата е: $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Геометриски, низата може да ја претставиме преку нејзиниот график $\{(n, a_n) | n \in \mathbb{N}\}$ или со претставување на множеството вредности на реална права.



Цртеж 2.1.1.1.1.



Цртеж 2.1.1.1.2.

Низата со општ член $a_n = (-1)^n$ е низата $((-1)^n)$, т.е. $-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots$. Нејзиното множество вредности е: $\{-1, 1\}$.

Дефиниција 2.1.1.2. Низата (a_n) е **монотono растечка (неопаѓачка)**, ако $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} \geq a_n$) за секој $n \in \mathbb{N}$. Низата (a_n) е **монотono опаѓачка (нерастечка)**, ако $a_{n+1} < a_n$ ($a_{n+1} \leq a_n$) за секој $n \in \mathbb{N}$.

Низата што поседува едно од претходно наведените четири својства велиме дека е **монотона**. Ако низата е монотono растечка или опаѓачка, тогаш таа е **строго монотона**.

Монотоноста на низите ја испитуваме на еден од следниве начини:

1) Ја оценуваме разликата $a_{n+1} - a_n$. Ако $a_{n+1} - a_n > 0$ за секое $n \in \mathbb{N}$ т.е. $a_{n+1} > a_n$ низата расте, а ако $a_{n+1} - a_n < 0$ т.е. $a_{n+1} < a_n$ низата опаѓа.

2) Во случај кога $a_n > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$, го оценуваме количникот $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Ако $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, т.е. $a_{n+1} > a_n$ низата расте, во спротивно ако $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, низата опаѓа.

3) Неравенството $a_{n+1} > a_n$ или $a_{n+1} < a_n$ со еквивалентни трансформации го сведуваме до точно или неточно равенство за секој $n \in \mathbb{N}$.

Ако $> (<)$ се замени со $\geq (\leq)$, ги добиваме критериумите за монотоност на неопѓачки и нерастечки низи.

Пример 2.1.1.2. а) Низата $\left(\frac{1}{n}\right)$ од пример 2.1.1.1 е монотono опаѓачка бидејќи:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0.$$

б) Низата со општ член $a_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}$ монотono расте бидејќи:

$$\begin{aligned} a_{n+1} > a_n &\Leftrightarrow \sqrt{n} - \sqrt{n+1} > \sqrt{n-1} - \sqrt{n} \Leftrightarrow 2\sqrt{n} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} \text{ /}^2 \Leftrightarrow \\ 4n &> n+1 + 2\sqrt{n+1}\sqrt{n-1} + n-1 \Leftrightarrow 2n > 2\sqrt{n^2-1} \text{ /}^2 \Leftrightarrow \\ n^2 &> n^2-1 \Leftrightarrow 0 > -1. \end{aligned}$$

в) Низата $\left((-1)^n\right)$ од примерот 1.3.1.1. не е монотона бидејќи:

$$-1 < 1 > -1 \text{ т.е. } a_1 < a_2 > a_3.$$

Дефиниција 2.1.1.3. Низата (a_n) е **ограничена** (**ограничена од горе, ограничена од долу**), ако множеството вредности на низата е ограничено (ограничено од горе, ограничено од долу).

Значи, низата (a_n) е ограничена ако постои реален број M , таков што $|a_n| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$; ограничена од горе ако постои реален број M , таков што $a_n \leq M$, $n \in \mathbb{N}$; и ограничена од долу, ако постои реален број M , таков што $a_n \geq M$, $n \in \mathbb{N}$.

Супремум (инфимум, максимум и минимум) на низа ако постојат, се супремумот (инфимумот, максимумот и минимумот) на множеството вредности на низата.

Пример 2.1.1.3. а) Низата $\left(\frac{1}{n}\right)$ е ограничена. Таа има максимум и супремум 1, минимум нема, инфимум 0.

б) Низата $\left((-1)^n\right)$ е ограничена, има максимум и супремум 1 и минимум и инфимум -1 .

в) Низата (n) не е ограничена од горе, следува дека нема супремум и максимум. Минимумот и инфимумот се 1.

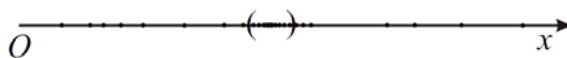
2.1.2. Граница на низа

Дефиниција 2.1.2.1. Бројот a е **граница (лимес, гранична вредност)** на низата (a_n) , ако за секоја околина U на точката a , постои природен број $n_0 = n_0(U)$, таков што $a_n \in U$ за сите $n > n_0$. Означуваме: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ или: $a_n \rightarrow a$ кога $n \rightarrow +\infty$.

Бидејќи n е природен број, дефиницијата не се менува ако место $+\infty$ стои ∞ .

Од дефиницијата следува дека бројот a е граница на низата (a_n) , ако и само ако надвор од секоја околина на точката a се наоѓаат конечен број членови на низата (a_n) .

Притоа, во секоја околина на границата се наоѓаат бесконечно членови на низата.



Цртеж 2.1.2.1

Едно својство важи за скоро сите природни броеви, ако важи за сите освен за конечно многу. Во тој случај ќе постои природен број n_0 , така што својството ќе важи за сите природни броеви поголеми од n_0 . Следува дека бројот a е граница на низата (a_n) ако и само ако во секоја околина на a се наоѓаат скоро сите членови на низата.

Вообичаена дефиниција за граница на низа е дефиницијата со помош на ε -околина на точка:

Дефиниција 2.1.2.1.' (ε - δ дефиниција за граница на низа) Бројот a е **граница (лимес)** на низата (a_n) , ако за секое $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 , таков што за сите природни броеви $n > n_0$, важи $|a_n - a| < \varepsilon$.

2.1.3. Својства на конвергентни низи

Следнава теорема дава едно важно својство за граница на низа:

Теорема 2.1.3.1. Ако низата има граница, тогаш таа е единствена.

Доказ. Нека низата има две граници a и b , $a \neq b$. Ако избереме две дисјунктни околина U_1 на a и U_2 на b , $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, би добиле противречност, бидејќи е невозможно скоро сите точки од низата да се и во U_1 и во U_2 . ■

Секоја низа што има граница велиме дека **конвергира**, во спротивно велиме дека низата **дивергира**.

Низата (a_n) **дивергира во бесконечност**, ако за секој реален број $M > 0$ постои природен број n_0 , таков што за сите $n > n_0$, важи $|a_n| > M$. Означуваме: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Низата (a_n) **дивергира во плус бесконечност**, ако за секој реален број $M > 0$ постои природен број n_0 , таков што за сите $n > n_0$, важи $a_n > M$. Означуваме: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Низата (a_n) **дивергира во минус бесконечност**, ако за секој реален број $M > 0$ постои природен број n_0 , таков што за сите $n > n_0$, важи $a_n < -M$. Означуваме: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Низите што дивергираат кон $-\infty$, $+\infty$ и ∞ , велиме дека дивергираат во потесна смисла, во спротивно дивергираат во поширока смисла.

Теорема 2.1.3.2. Секоја конвергентна низа е ограничена.

Доказ. Нека (a_n) е низа таква што $a_n \rightarrow a$ кога $n \rightarrow +\infty$. Тогаш во околината $(a-1, a+1)$ на a се наоѓаат сите членови на низата, освен конечно многу $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n_0}}$. За сите останати членови од околината, важи $a-1 < a_n < a+1$.

Ако M е најголемиот, а m најмалиот од членовите $a-1, a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n_0}}$ и $a+1$, тогаш:

$$m \leq a_n \leq M$$

за сите $n \in \mathbb{N}$, па следува дека низата (a_n) е ограничена. ■

Теорема 2.1.3.3. Монотонo неопаѓачка (растечка) низа ограничена од горе конвергира.

Доказ. 1) Нека (a_n) е неопаѓачка низа ограничена од горе. Бидејќи (a_n) е ограничена од горе, постои $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$. Според дефиницијата за супремум следува дека за секое $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што:

$$M - \varepsilon < a_{n_0} \leq M.$$

Бидејќи (a_n) неопаѓачка, за сите $n > n_0$, $M - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq M$. Следува дека за сите $n > n_0$,

$$|a_n - M| < \varepsilon.$$

Последното неравенство значи дека (a_n) конвергира и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$.

2) Специјално, тврдењето е точно и во случајот кога низата е растечка. ■

Аналогно се покажува следнава теорема:

Теорема 2.1.3.4. Монотонo нерастечка (опаѓачка) низа ограничена од долу конвергира. ■

Теорема 2.1.3.5. (Сендвич-теорема). Нека (a_n) , (b_n) и (c_n) се низи од реални броеви, такви што $a_n \leq c_n \leq b_n$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Ако низите (a_n) и (b_n) конвергираат и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

тогаш и низата (c_n) конвергира и $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$.

Доказ. Нека е дадено $\varepsilon > 0$. Бидејќи низите (a_n) и (b_n) конвергираат и тоа кон иста граница L , постои $n_1 \in \mathbb{N}$, таков што за сите $n > n_1$,

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

и постои $n_2 \in \mathbb{N}$, таков што за сите $n > n_2$,

$$|b_n - L| < \varepsilon.$$

Нека $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогаш, за сите $n > n_0$,

$$a_n, b_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

и заради условот $a_n \leq c_n \leq b_n$, следува дека за сите $n > n_0$,

$$|c_n - L| < \varepsilon.$$

Од произволноста на $\varepsilon > 0$, следува дека низата (c_n) конвергира и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L. \blacksquare$$

2.1.4. Операции со низи

Дефиниција 2.1.4.1. (Операции со низи). Нека се дадени низите (a_n) и (b_n) и реалниот број c . **Производ** на низата (a_n) со бројот c ; **збир**, **разлика**, **производ** и **количник** на низите (a_n) и (b_n) , соодветно се низите:

$$(ca_n), (a_n + b_n), (a_n - b_n), (a_nb_n) \text{ и } \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ кога } b_n \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2.1.4.2. (Операции со конвергентни низи).

Нека (a_n) и (b_n) се конвергентни низи, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ и c е константа. Тогаш, низите (ca_n) , $(a_n \pm b_n)$, $(a_n b_n)$ и $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ кога $b_n \neq 0$ за секое $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ се конвергентни и

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; \text{ и } 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Доказ*. 1) Нека е дадено $\varepsilon > 0$. Од $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ следува дека

постои $n_0 \in \mathbb{N}$, така што за сите $n > n_0$, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Тогаш:

$$|ca_n - ca| = |c||a_n - a| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon \text{ за сите } n > n_0.$$

Следува дека низата (ca_n) конвергира и:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ca = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

2) Нека е дадено $\varepsilon > 0$. Заради $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ќе постојат $n_1 \in \mathbb{N}$ и $n_2 \in \mathbb{N}$, такви што за секој природен број $n > n_1$ важи:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и за секој $n > n_2$,

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогаш, за сите $n > n_0$ важи:

$$|a_n \pm b_n - (a \pm b)| = |a_n - a \pm (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3) Нека е дадено $\varepsilon > 0$. Од $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ следува дека низата (b_n) е ограничена, па постои $M > 0$ т.ш.

$$|b_n| < M,$$

за секој $n \in \mathbb{N}$.

Нека $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$. Од $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ следува дека постојат $n_1 \in \mathbb{N}$ и $n_2 \in \mathbb{N}$, такви што за секој природен број $n > n_1$ важи:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

и за секој $n > n_2$,

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}.$$

Нека $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогаш, за сите $n > n_0$ важи:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= \left| a_n b_n - \underbrace{ab_n + ab_n}_{0} - ab \right| = |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \leq \\ &|b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| < M \frac{\varepsilon}{2M} + |a| \frac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

• Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ тогаш $|a_n b_n| < |a_n| \rightarrow 0$ кога $n \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \cdot b = 0.$$

Следува дека низата $(a_n b_n)$ конвергира и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

4) Нека е дадено $\varepsilon > 0$. Од $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ следува дека постои $n_1 \in \mathbb{N}$, така што за сите $n > n_1$,

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2},$$

од каде што:

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq ||b| - |b - b_n|| > \left| |b| - \frac{|b|}{2} \right| = \frac{|b|}{2}.$$

Исто така, постои $n_2 \in \mathbb{N}$, така што за сите $n > n_2$,

$$|b_n - b| < \frac{|b|^2 \varepsilon}{2}.$$

Нека $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогаш за сите $n > n_0$,

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| < \frac{1}{|b_n|} \frac{1}{|b|} |b - b_n| < \frac{2}{|b|} \frac{1}{|b|} \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значи, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Сега поради 3) следува:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a}{b}. \blacksquare$$

2.1.5. Некои карактеристични граници.

Теорема 2.1.5.1. Важи:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} n^a &= \begin{cases} 0, & a < 0 \\ 1, & a = 0 \\ +\infty, & a > 0 \end{cases}; & 2) \lim_{n \rightarrow \infty} a^n &= \begin{cases} \text{не постои}, & a \leq -1 \\ 0, & |a| < 1 \\ 1, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}. \\ 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \dots + b_{l-1} n + b_l} &= \begin{cases} 0, & k < l \\ a_0 / b_0, & k = l \\ +\infty \operatorname{sgn}(a_0 / b_0), & k > l \end{cases}, \quad a_0, b_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Доказ*. 1) • Ако $a = 0$, тогаш секој член од низата има вредност 1. Следува: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = 1$.

• Нека $a > 0$. Избираме: $M > 0$. Постои $n_0 \in \mathbb{N}$, такво што за сите $n > \sqrt[a]{M}$, важи $n^a > M$. Следува: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = +\infty$.

• Нека $a < 0$. Тогаш, за $b = -a$, $n^a = n^{-b} = 1/n^b$ и $b > 0$. Следува:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^b} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

2) • Ако $|a| < 1$, тогаш $|a| = \frac{1}{1+\alpha}$, каде што $\alpha > 0$.

Од биномниот развој следува:

$$(1+\alpha)^n = 1+n\alpha+\dots+\alpha^n > 1+n\alpha, \quad n > 1;$$

бидејќи сите членови во развојот се позитивни. Следува дека за $n > 1$,

$$0 < |a|^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} < \frac{1}{1+n\alpha} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n\alpha} = 0$$

од каде што:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0, \quad \text{па и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0.$$

• Ако $a = 1$, тогаш и $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1$.

• Ако $a > 1$, тогаш $a = 1+\alpha$, $\alpha > 0$ и

$$a^n = (1+\alpha)^n > 1+n\alpha \rightarrow +\infty \quad \text{кога} \quad n \rightarrow \infty.$$

3) Да ја означиме границата со L . Ако пред полиномите извлечеме n^k и n^l соодветно, добиваме:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-l} \frac{a_0 + a_1 n^{-1} + \dots + a_{k-1} n^{1-k} + n^{-k}}{b_0 + b_1 n^{-1} + \dots + b_{l-1} n^{1-l} + b_l n^{-l}} =$$

$$\frac{a_0}{b_0} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-l} = \begin{cases} 0, & k < l \\ a_0 / b_0, & k = l \\ +\infty \operatorname{sgn}(a_0 / b_0), & k > l \end{cases},$$

бидејќи сите членови во полиномите, освен a_0 и b_0 тежат кон 0 кога $n \rightarrow \infty$, додека втората граница е пресметана во 1).

2.1.5.2. Бројот e . Ќе покажеме дека низата (a_n) ,

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ е монотонно растечка низа ограничена од горе, т.е. дека конвергира.

Теорема 2.1.5.2. Низата (a_n) , $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ конвергира.

Доказ. • Со примена на Њутновата биномна формула добиваме:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{n!} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \\ &= 1 + \binom{n+1}{1} \frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2} \frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3} \frac{1}{(n+1)^3} + \dots + \binom{n+1}{n+1} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= 1 + 1 + \frac{(n+1)n}{2!} \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} \frac{1}{(n+1)^3} + \dots + \\ &\quad \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n+1-n)}{(n+1)!} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \\ &\quad \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Ако ги споредиме a_n и a_{n+1} забележуваме првиот број има $n+1$, додека вториот $n+2$ собирока. Првите два собирока им се исти. Заради:

$$1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

следува дека третиот до $n+1$ -от собирук на a_n се помали од соодветните собироци на a_{n+1} , и $n+2$ -от собирук на a_{n+1} е позитивен. Следува дека $a_n < a_{n+1}$.

$$\bullet a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + 2 = 3.$$

При што, точноста на првото неравенство (1) следува од развојот на a_n . Бидејќи $n! = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}_{n-1} > 2^{n-1}$ за секое $n > 1$, следува:

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

од каде што точно е второто неравенство (2). Во доказот на равенството 3 ја применивме формулата за сума на геометричка прогресија

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \text{ за } q = \frac{1}{2}.$$

Следува дека за низата a_n важи $a_n < 3$, односно е ограничена од горе.

Значи, низата конвергира бидејќи е монотono растечка ограничена од горе. ■

Дефиниција 2.1.5.3. (Дефиниција на бројот e).

Границата на низата (a_n) , $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ се означува со e . Значи:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Се покажува дека ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, тогаш $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

Неопределени облици. Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, тогаш границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ ако постои, ја нарекуваме неопределен облик $\frac{0}{0}$, бидејќи границата не може веднаш да се определи, туку за нејзино пресметување потребни се дополнителни средувања на дробката a_n / b_n . Сите неопределени облици се:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - (\infty), (\pm\infty - (\pm\infty)), 0^0, 1^\infty, \infty^0.$$

Неопределени облици не се:

$$0 \cdot 0 = 0, \infty \cdot \infty = \infty, \frac{0}{\infty} = 0, \frac{\infty}{0} = \infty, 0^\infty = 0, 1^0 = 1, \infty^\infty = \infty, \\ \pm\infty + (\pm\infty), (\pm\infty) - (\mp\infty) \text{ и т.н.}$$

2.1.6. Подниза и точка на натрупување.

Дефиниција 2.1.6.1. Нека (a_n) е низа и (n_k) е растечка низа од природни броеви. Тогаш низата (a_{n_k}) се нарекува **подниза** на низата (a_n) .

Дефиниција 2.1.6.2. Реалниот број a е **точка на натрупување** за низата (a_n) , ако е точка на натрупување за множеството вредности на (a_n) .

Значи a е точка на натрупување за низата (a_n) , ако во секоја околина (ε -околина) на a , се наоѓаат бесконечно членови на (a_n) .

Пример 2.1.6.1. Низата $((-1)^n)$ има две точки на натрупување -1 и 1 . Ако $k_n = 2n$ и $l_n = 2n+1$ тогаш низите

$$(a_{k_n}), a_{k_n} = 1 \text{ и } (a_{l_n}), a_{l_n} = -1$$

се конвергентни поднизи од $((-1)^n)$.

Без доказ ќе ги наведеме следниве теореми за низи:

Теорема 2.1.6.1.* Ако $a \in \mathbb{R}$ е точка на натрупување за низата (a_n) , тогаш постои подниза (a_{n_k}) од низата (a_n) , која конвергира кон a . Ако $-\infty$ ($+\infty$) е точка на натрупување за низата (a_n) , тогаш постои подниза (a_{n_k}) од низата (a_n) , таква што $a_{n_k} \rightarrow -\infty$ ($a_{n_k} \rightarrow +\infty$) кога $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2.1.6.2.* (Болцано-Вајерштас). Секоја ограничена низа од реални броеви има барем една точка на натрупување во $\mathbb{R}$. Секоја низа од реални броеви има барем една точка на натрупување во $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Теорема 2.1.7.* (Кошиев критериум за конвергенција). Низата (a_n) конвергира ако и само ако за секое $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што за сите $n > n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ важи:

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

2.2. ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА

2.2.1. Граница на функција

Нека функцијата $y = f(x)$ е дефинирана на D_f и x_0 е точка на натрупување на D_f .

Дефиниција 2.2.1. (Граница на функција според Коши или $\varepsilon - \delta$ дефиниција). Бројот A е **граница** на функцијата $y = f(x)$ кога x тежи кон x_0 (во точката x_0) ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$, таков што за сите $x \neq x_0$ за кои $|x - x_0| < \delta$ да следува:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Означуваме: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ кога $x \rightarrow x_0$.

Симболично дефиницијата за граница на функција ја запишуваме вака:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0), 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Границата $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ја означуваме и со:

$$f(x) \rightarrow A \text{ кога } x \rightarrow x_0.$$

Ако во горната дефиниција, место $x \neq x_0$, се додаде $x > x_0$ ($x < x_0$), ја добиваме дефиницијата за лева (десна) граница на функцијата $y = f(x)$ кога x тежи кон x_0 и се означува со $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$). Имено:

Дефиниција 2.2.2. Бројот A е **лева граница** на функцијата $y = f(x)$ во точката x_0 , ознака $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$, ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$, таков што за сите $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ да следува:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Дефиниција 2.2.3. Бројот A е **десна граница** на функцијата $y = f(x)$ во точката x_0 , ознака $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$, таков што за сите $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ да следува:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Теорема 2.2.4. Функцијата $y = f(x)$ има граница во точката x_0 , ако и само ако постојат левата и десната граница во x_0 и се еднакви.

Доказ. $\Rightarrow$) Ако функцијата $y = f(x)$ има граница во точката x_0 , тогаш постојат и се еднакви левата и десната граница во x_0 .

$\Leftarrow$) Нека е дадено $\varepsilon > 0$. Нека постојат левата и десната граница на f во x_0 , и се еднакви на A . Следува дека постојат позитивни броеви δ_1 и δ_2 , такви што за сите

$$x \in (x_0 - \delta_1, x_0) \text{ и } x \in (x_0, x_0 + \delta_2) \text{ да следува } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

За $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ од $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ т.е. $|x - x_0| < \delta$ и $x \neq x_0$ следува $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Значи, функцијата f има граница во x_0 . ■

Дефиницијата за граница на функција кога A е ∞ , $+\infty$ и $-\infty$ (x_0 е ∞ , $+\infty$ и $-\infty$) се добива ако ε (δ) се означи со M (K) и $|f(x) - A| < \varepsilon$ ($|x - x_0| < \delta$) се замени со $|f(x)| > M$, $f(x) > M$, $f(x) < -M$ ($|x| > K$, $x > K$, $x < -K$) соодветно.

Низата (x_n) е **низа во** X ако $x_n \in X$ за секое $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниција 2.2.1.' (Граница на функција според Хајне или дефиниција на граница со помош на низи). Бројот A е **граница** на функцијата $y = f(x)$ кога x тежи кон x_0 (во точката x_0), ако за секоја низа (x_n) во $D_f \setminus \{x_0\}$ таква што:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \text{ да следува: } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Дефиниција 2.2.2.' Бројот A е **лева граница** на функцијата $y = f(x)$ кога x тежи кон x_0 (во точката x_0), ако за секоја низа (x_n) во D_f , таква што: $x_n < x_0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \text{ да следува } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Дефиниција 2.2.3.' Бројот A е **десна граница** на функцијата $y = f(x)$ кога x тежи кон x_0 (во точката x_0), ако за секоја низа (x_n) во D_f , таква што: $x_n > x_0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \text{ да следува: } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Двете дефиниции за граница (лева граница, десна граница) на функција се еквивалентни.

Важат аналогни дефиниции кога $A, x_0 \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$, само што кога $x_0 \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$, $D_f \setminus \{x_0\}$ се заменува со D_f . Така на пример:

- Бројот A е граница на функцијата $y = f(x)$ кога x тежи кон $+\infty$, ако за секоја низа (x_n) во D_f , таква што $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, да следува: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

2.2.2. Својства на граница на функција

Теорема 2.2.2.1. (Теорема за единственост на граница). Ако функцијата $y = f(x)$ има гранична вредност во точката $x = x_0$, тогаш таа е единствена.

Доказ. Нека A и B се граници на функцијата $y = f(x)$ во $x = x_0$, и (x_n) е низа во $D_f \setminus \{x_0\}$ таква што $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Бидејќи A и B се граници, од дефиницијата за граница на функција според Хајне, важи: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$. Но, секоја низа има единствена граница, па $A = B$.

Теорема 2.2.2.2. (Операции со граници на функции).

Ако постојат границите $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ и $c \in \mathbb{R}$ е константа, тогаш постојат и границите:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x), c \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)), \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) \text{ и}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ кога } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0, \text{ и}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

Доказ. 1) Нека (x_n) е низа во $D_f \setminus \{x_0\}$, таква што $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Бидејќи постои $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, следува $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Тогаш:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} cf(x_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = cA.$$

Следува дека постои $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cA = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

2) Нека (x_n) е низа во $D_f \setminus \{x_0\}$ таква што $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ и постојат: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$. Тогаш постојат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \pm g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \pm \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n).$$

3) Нека (x_n) е низа во $D_f \setminus \{x_0\}$, таква што $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ и постојат $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, следува постојат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B \text{ и}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n).$$

Значи постои:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = AB = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x_n).$$

4) Нека (x_n) е низа во $D_f \setminus \{x_0\}$, таква што $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ и постојат: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \neq 0$. Тогаш постојат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B \text{ и}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(x)}.$$

2.2.3. Некои поважни граници

Граничната вредност на функцијата по дефиниција се бара само од основните елементарни функции. При определувањето на границите од останатите елементарни функции се сретнуваме со два случаја.

Ако $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ не генерира неопределен облик, тогаш границата се добива кога во $f(x)$, x ќе се замени со x_0 .

Ако $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ генерира еден од неопределените облици:

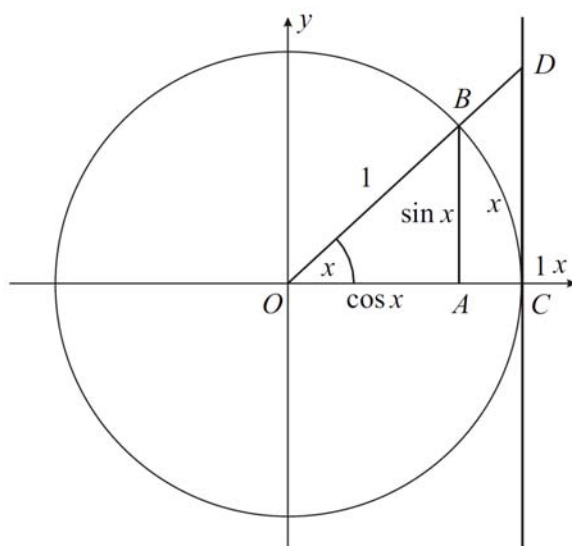
$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - (\infty), 1^\infty, 0^0, \infty^0;$$

функцијата $f(x)$ се трансформира до погоден облик и се применуваат правилата за пресметување на граница.

Ќе разгледаме некои поважни граници:

Теорема 2.2.3.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Доказ. Нека x е должината на локот BC во тригонометриската кружница, односно кружницата со радиус 1.



Цртеж 2.2.3.1.

Должината на лакот се совпаѓа со големината на аголот изразена во радијани. Затоа,

$$\overline{OA} = \cos x, \overline{OB} = \overline{OC} = 1, \overline{AB} = \sin x, \overline{CD} = \operatorname{tg} x.$$

- Нека $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Очигледно, $0 < \sin x < x$.

Од триаголникот OAB , кружниот исечок OCB и триаголникот OCD , следува:

$$P_{\triangle OAB} < P_{OCB} < P_{\triangle OCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x \cos x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x \Leftrightarrow$$

$$\sin x \cos x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \quad / : \sin x \Leftrightarrow \cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x} \quad (1).$$

Последната еквиваленција е точна заради:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{и} \quad \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}.$$

Од (1), бидејќи $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, од сендвич-теоремата следува дека: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ (*).

• Ако $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, тогаш $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, па важи:

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < \frac{1}{\cos(-x)} \Leftrightarrow \cos x < \frac{-\sin x}{-x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x},$$

и заради: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, следува $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$ (**).

Од (*) и (**) заклучуваме дека: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Теорема 2.2.3.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Доказ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$. ■

Теорема 2.2.3.3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Доказ. • За секој $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$ постои $n \in \mathbb{N}$, таков што:

$$n \leq x < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Бидејќи:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e \cdot 1 = e \text{ и}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e,$$

од сендвич-теоремата следува дека:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \leq x < n+1}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (*).$$

• Ако $x \leq -1$ воведуваме смена $x = -t$. Кога $x \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$. Следува:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t =$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) = e \cdot 1 = e \quad (**).$$

Од (*) и (**) следува дека: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. ■

Теорема 2.2.3.4. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Доказ. Воведуваме смена $x = 1/t$. Кога $x \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e. \blacksquare$$

Да забележиме дека од својствата на функциите e^x и $\ln x$, важи:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ (означуваме } e^{-\infty} = 0), \quad e^0 = 1, \quad e^1 = e, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ (} e^{+\infty} = +\infty)$$

како и

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ (} \ln 0 = -\infty), \quad \ln 1 = 0, \quad \ln e = 1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ (} \ln(+\infty) = +\infty).$$

Теорема 2.2.3.5-7. Точни се следниве граници:

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a;$$

од каде што:

$$5') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad 6') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \quad 7') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^e - 1}{x} = e.$$

Доказ. 5) Имаме:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \left(\frac{0}{0}\right)^1 = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}, \end{aligned}$$

при што чекорите 1 и 3 следуваат соодветно од логаритамските формули:

$$b \log_a x = \log_a x^b \text{ и } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

додека 2 следува од непрекинатоста на логаритмот, па кога:

$$x \rightarrow x_0 > 0 \text{ следува } \log_a x \rightarrow \log_a x_0.$$

6) Воведуваме смена:

$$a^x - 1 = t \Leftrightarrow a^x = t + 1 \Leftrightarrow x = \log_a(t + 1).$$

Кога $x \rightarrow 0$, тогаш $t \rightarrow a^0 - 1 = 0$. Следува:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log_a(t+1)}{t}} = \frac{1}{\frac{1}{\ln a}} = \ln a.$$

7) Имаме:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(1+x)^a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} a \frac{e^{a \ln(1+x)} - 1}{a \ln(1+x)} \frac{\ln(1+x)}{x} = a \cdot 1 \cdot 1 = a,$$

бидејќи кога $x \rightarrow 0$, исто така, $\ln(1+x) \rightarrow \ln 1 = 0$, па од 2' следува:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a \ln(1+x)} - 1}{a \ln(1+x)} = 1. \blacksquare$$

Очигледна е точноста на следниве граници:

Теорема 2.2.3.8-11. Точни се следниве граници:

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ 1, & a = 0 \\ +\infty, & a > 0 \end{cases}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ 1 & a = 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} 0, & n < m \\ a_0 / b_0, & n = m; \quad a_0, b_0 \neq 0 \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^k P_{n-k}(x)}{(x-a)^l Q_{m-l}(x)} = \begin{cases} 0, & k-l > 0 \\ P_{n-k}(x_0) / Q_{m-l}(x_0), & n=m, \\ \infty, & l-k > 0 \end{cases}$$

каде P_n и Q_m се полиноми од ред n и m , додека a е нивна нула од ред k и l , соодветно.

Забелешка. Границата 10, 3) може да се досреди, место ∞ да биде $-\infty$ или $+\infty$, бидејќи се сведува на: $\operatorname{sgn}(a_0 / b_0) \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m}$, каде што $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{n-m}$ е $-\infty$ кога $n-m$ е непарен, во спротивно е $+\infty$.

Во 11) ако $l-k > 0$ е парен, тогаш лимесот се сведува на $-\infty$ или $+\infty$. Ако $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, тогаш границата секогаш се сведува на $-\infty$ или $+\infty$.

2.2.4.* Бесконечно мали големини

Дефиниција 2.2.4.1. Функцијата $y = \alpha(x)$ се нарекува **бесконечно мала големина** во точката $x = x_0$ или **кога** $x \rightarrow x_0$ ако:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Притоа, x_0 може да биде еден од симболите: $-\infty$, $+\infty$ и ∞ ; и место x_0 може да стои: x_0^- или x_0^+ .

Дефиниција 2.2.4.2. (Споредување на бесконечно мали големини). Нека $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се бесконечно мали големини кога $x \rightarrow x_0$.

Ако $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, тогаш велиме дека $\alpha(x)$ е **бесконечно мала големина од повисок ред** во однос на $\beta(x)$ кога $x \rightarrow x_0$.

Ако $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k \neq 0$, $k = \text{const}$, тогаш велиме дека $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се **бесконечно мали големини од ист ред** кога $x \rightarrow x_0$.

Специјално ако $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, тогаш велиме дека $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се еквивалентни бесконечно мали големини кога $x \rightarrow x_0$.

Ако $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, тогаш велиме дека $\alpha(x)$ е **бесконечно мала големина од понизок ред** во однос на $\beta(x)$ кога $x \rightarrow x_0$.

Ако не постојат границите $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$, тогаш велиме дека $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се **неспоредливи** бесконечно мали големини кога $x \rightarrow x_0$.

Ако $\alpha(x)$ е бесконечно мала големина од повисок ред во однос на $\beta(x)$ кога $x \rightarrow x_0$, тогаш пишуваме:

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \text{ (кога } x \rightarrow x_0 \text{)}$$

Задача 2.2.4.3. Спореди ги следниве бесконечно мали големини $\alpha(x) = x^2 - 2x + 1$ и $\beta(x) = x^3 - x$ кога $x \rightarrow 1$.

Решение. Имаме:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{1-1}{1(1+1)} = 0.$$

Следува дека $\alpha(x) = x^2 - 2x + 1$ е бесконечно мала големина од повисок ред во однос на $\beta(x) = x^3 - x$ кога $x \rightarrow 1$. Бидејќи $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty$, $\beta(x) = x^3 - x$ е бесконечно мала големина од понизок ред во однос на $\alpha(x) = x^2 - 2x + 1$.

Задача 2.2.4.4. Спореди ги следниве бесконечно мали големина $\alpha(x) = \frac{x-1}{x+1}$ и $\beta(x) = 1 - \sqrt{x}$ кога $x \rightarrow 1$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{x+1}}{1 - \sqrt{x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{x+1}}{1 - \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{\sqrt{x} + 1}{x + 1} = -1. \end{aligned}$$

Следува дека $\alpha(x) = \frac{x-1}{x+1}$ и $\beta(x) = 1 - \sqrt{x}$ бесконечно мали големина од ист ред кога $x \rightarrow 1$, но не се еквивалентни. Својството „бесконечно мали големина од ист ред“ е симетрично, односно ако $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се бесконечно мали големина од ист ред, тогаш и $\beta(x)$ и $\alpha(x)$ се бесконечно мали големина од ист ред.

Задача 2.2.4.5. Спореди ги следниве бесконечно мали големина $\alpha(x) = 1 - \cos^3 x$ и $\beta(x) = \frac{3}{2} \sin^2 x$ кога $x \rightarrow 0$.

Решение. Користејќи ги идентитетите:

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \text{ и } 1 - \cos^3 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x),$$

добиваме:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\frac{3}{2} \sin^2 x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 + \cos x + \cos^2 x)}{3 \sin^2 x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2} (1 + \cos x + \cos^2 x)}{\left(\frac{x}{2} \right)^2 3 \frac{\sin^2 x}{x^2}} = 1 \cdot \frac{1 + \cos 0 + \cos^2 0}{3 \cdot 1} = 1.$$

Следува дека $\alpha(x) = 1 - \cos^3 x$ и $\beta(x) = \frac{3}{2} \sin^2 x$ се еквивалентни бесконечно мали големина кога $x \rightarrow 0$.

2.3. НЕПРЕКИНАТОСТ НА ФУНКЦИЈА

2.3.1 Дефиниција, основни поими и операции со непрекинати функции. Прекини. Превојни точки

Нека функцијата $y = f(x)$ е дефинирана на X и $x_0 \in X$.

Дефиниција 2.3.1. Функцијата $y = f(x)$ е **непрекината** во точката $x_0 \in X$ ако:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Значи, функцијата е непрекината во x_0 ако е дефинирана во таа точка, постои граничната вредност на функцијата во таа точка и двете вредности се еднакви.

Интуитивно, една функција е непрекината ако нејзиниот график може да се нацрта без подигнување на моливот.

Во изолираните точки сметаме дека функцијата е непрекината.

Функцијата $y = f(x)$ е непрекината на X , ако е непрекината за секое $x_0 \in X$.

Секоја елементарна функција е непрекината на својата дефинициона област.

Дефиниција 2.3.2. Функцијата $y = f(x)$ е **непрекината од лево** во точката $x_0 \in X$ ако:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Функцијата $y = f(x)$ е **непрекината од десно** во точката $x_0 \in X$ ако:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Теорема 2.3.3. (Операции со непрекинати функции)
Ако функциите f и g се непрекинати во точката $x_0 \in D_f \cap D_g$, тогаш и функциите:

$$cf, c = \text{const}, f \pm g, f \cdot g \text{ и } \frac{f}{g}, g \neq 0$$

се непрекинати во x_0 .

Доказ. Бидејќи функциите f и g се непрекинати во точката x_0 , постојат границите $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ и тие соодветно се $f(x_0)$ и $g(x_0)$. Од својствата за граница на функција следува дека постојат границите:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x), c \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)), \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) \text{ и}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ кога } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \text{ и тие соодветно се:}$$

$$cf(x_0), f(x_0) \pm g(x_0), f(x_0)g(x_0) \text{ и } f(x_0)/g(x_0).$$

Последново значи дека функциите:

$$cf, c = \text{const}, f \pm g, f \cdot g \text{ и } \frac{f}{g} \text{ за } g \neq 0$$

се непрекинати во x_0 . ■

Дефиниција 2.3.4. Функцијата $y = f(x)$ има **прекин** во точката $x_0 \in X$ ако не е непрекината во x_0 .

Дефиниција 2.3.5. Функцијата $y = f(x)$ има **прекин од прв ред** во точката $x_0 \in D_f$ (x_0 е точка на прекин од прв ред за f), ако постојат левата и десната граница во x_0 , но барем една од нив е различна од $f(x_0)$. Функцијата $y = f(x)$ има **отстранлив прекин** во точката $x_0 \in D_f$ (x_0 е точка на отстранлив прекин за f), ако постои:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ но } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Сите останати точки на прекин се точки на **прекин од втор ред**.

Отстранливиот прекин е прекин од прв ред. Тогаш можеме да го „отстраниме“ прекилот со дефинирање на функцијата $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}$, која е непрекината во x_0 и се совпаѓа со $f(x)$ секаде, освен во x_0 . Велиме дека функцијата $f(x)$ сме ја продолжиле по непрекинатост во точката $x = x_0$.

Точки на прекин од втор ред се и точките на натрупување за дефиниционата област во кои функцијата не е дефинирана. Во некои литератури овие точки не се сметаат за точки на прекин.

Пример 2.3.6-8. 1) Функцијата $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ има

прекин од прв ред во $x = 0$, бидејќи $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, но $f(0) = 0$.

Прекилот е отстранлив.

2) Функцијата $f(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ во точката $x = 0$, има

прекин од прв ред кој не е отстранлив, бидејќи

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Ваквиот прекин се нарекува скокачки.

3) Функцијата $y = \ln x$ има прекин од втор ред во $x = 0$.

Дефиниција 2.3.9. Точката x_0 во која функцијата f е непрекината и го менува конкавитетот, се нарекува **превојна точка** на f . Ако x_0 е превојна точка на f , тогаш $P(x_0, f(x_0))$ е превојна точка на графикот на f .

2.3.2.* Својства на непрекинати функции

Во продолжение без доказ ќе наведеме неколку теореми за непрекинати функции.

Теорема 2.3.4.* (Прва теорема на Вајерштас). Ако f е непрекината функција на интервалот $[a, b]$, тогаш f е ограничена на $[a, b]$.

Теорема 2.3.5*. (Втора теорема на Вајерштас). Ако f е непрекината функција на интервалот $[a, b]$, тогаш f достигнува максимум и минимум на $[a, b]$.

Теорема 2.3.6.* (Прва теорема на Болцано-Коши) Нека функцијата f е непрекината на интервалот $[a, b]$ и $f(a) < 0, f(b) > 0$ ($f(a) > 0, f(b) < 0$). Тогаш постои број ξ таков што $f(\xi) = 0$.

Теорема 2.3.7*. (Втора теорема на Болцано-Коши) Нека f е непрекината функција на интервалот P . Тогаш и $f(P)$ е интервал.

3. ИЗВОДИ

3.1. Извод на функција

Дефиниција 3.1.1. Функцијата $f(x)$ определена на (a,b) , има **извод** во точката $x_0 \in (a,b)$, ако постои границата (како конечен број):

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1).$$

Ако горната граница е ∞ , тогаш велиме дека функцијата има **бесконечен извод**.

Ако ставиме $x = x_0 + \Delta x$, тогаш кога $\Delta x \rightarrow 0$ следува дека $x \rightarrow x_0$, па границата (1) може да се запише и во вид:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Функцијата $f(x)$ има **извод** на (a,b) , ако има извод во секоја точка x од интервалот (a,b) , $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогаш $f'(x)$ е функција определена на (a,b) и се нарекува **прв извод** на $f(x)$ на (a,b) . Ако функцијата има извод во x_0 (на (a,b)), велиме уште дека е **диференцијабилна** во x_0 (на (a,b)).

Ако функцијата $f(x)$ има извод на (a,b) и (c,d) , тогаш велиме дека има извод на $(a,b) \cup (c,d)$. Ако има извод на множество од отворени интервали, велиме дека има извод и на нивната унија.

Ако функцијата $f'(x)$ има извод во точката $x_0 \in (a,b)$, тогаш тој се означува со $f''(x_0)$ и се нарекува **втор извод** на функцијата $f(x)$ во x_0 . Ако функцијата $f(x)$ има втор извод во секоја точка x од интервалот (a,b) , тогаш е определена функција $f''(x)$ на (a,b) , која се нарекува втор извод на функцијата $f(x)$ на (a,b) .

Аналогно дефинираме, трет извод, четврт извод итн. прво во точка, а потоа и на отворено множество (унија од отворени интервали). Ако постои изводот на $n-1$ -виот извод на функцијата $f(x)$ во $x_0 \in (a, b)$, тогаш тој се нарекува **n -ти извод** на $f(x)$ во x_0 и се означува со $f^{(n)}(x_0)$.

Дефиниција 3.1.2. Функцијата $f(x)$ определена на (a, b) , има **лев (десен) извод** во точката $x_0 \in (a, b)$, ако постои границата:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}).$$

Аналогно, како при претходната дискусија,

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}).$$

Теорема 3.1.3. Функцијата $y = f(x)$ има извод во точката x_0 , ако и само ако постојат левиот и десниот извод во x_0 и се еднакви, т.е.

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Доказ. Следува непосредно од својство за граница на функција.

Според теорема 3.1.1, ако не постои некој од едностраните изводи $f'_-(x_0)$ или $f'_+(x_0)$, или $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, тогаш функцијата $f(x)$ нема извод во x_0 .

Теорема 3.1.4. Ако функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна во точката x_0 , тогаш таа е непрекината во x_0 .

Доказ. Нека функцијата f е диференцијабилна во точката x_0 , т.е. постои границата:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

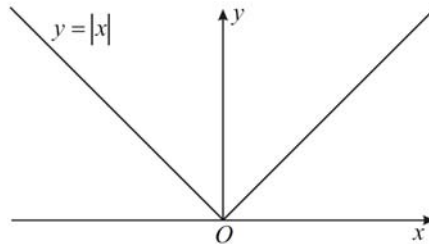
(како конечен број). Тогаш мора:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Следува дека функцијата f е непрекината во x_0 . ■

Следниов пример покажува дека обратното тврдење од теоремата не мора да важи.

Пример 3.1.5. Функцијата $f(x) = |x|$ е непрекината, но не е диференцијабилна во $x = 0$. Имено, $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$, т.е. функцијата е непрекината во $x = 0$, но:



$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \text{ и}$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Значи, левиот и десниот извод не се еднакви, па не постои изводот во $x = 0$. ■

Интуитивно, една функција е непрекината на даден отворен интервал ако нејзиниот график може да се скицира без подигнување на моливот, додека има извод ако уште графикот нема 'острини'.

3.2. Извод од сума, разлика, производ, количник, сложена и инверзна функција (правила за наоѓање извод).

Теорема 3.2.1. (Извод од константа, константа по функција, и сума, разлика, производ и количник на функции). Нека c е реален број и функциите f и g се диференцијабилни на (a, b) . Тогаш и функциите cf , $f + g$, $f - g$,

fg и $\frac{f}{g}$ ако $g \neq 0$, се диференцијабилни на (a, b) и

$$c' = 0, (cf)' = cf', (f + g)' = f' + g', (f - g)' = f' - g',$$

$$(fg)' = f'g + fg' \text{ и } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Доказ. Имаме:

$$1) c'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c(x_0 + \Delta x) - c(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

$$2) (cf)'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{cf(x_0 + \Delta x) - cf(x_0)}{\Delta x} =$$

$$c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = cf'(x_0).$$

$$3) (f + g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x_0 + \Delta x) - (f + g)(x_0)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - (f(x_0) + g(x_0))}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$f'(x_0) + g'(x_0) = (f' + g')(x_0).$$

4) Тврдењето $(f - g)' = f' - g'$ следува од 3) ако место функцијата g се земе $-g$.

Формулата се докажува и директно, аналогно на 3).

$$\begin{aligned}
 5) (fg)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(fg)(x_0 + \Delta x) - (fg)(x_0)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - \overbrace{f(x_0)g(x_0 + \Delta x) + f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}^0 - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} g(x_0 + \Delta x) + f(x_0) \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) + f(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \\
 &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) = (f'g + fg')(x_0).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f}{g}(x_0 + \Delta x) - \frac{f}{g}(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0) - \overbrace{f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0)}^0 - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x g(x_0)g(x_0 + \Delta x)} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}}{g(x_0)g(x_0 + \Delta x)} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} g(x_0) - f(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}}{g(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x)} = \\
 &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2} \right)(x_0).
 \end{aligned}$$

Пример 3.2.2.* (Формула на Њутн-Лајбниц за n -ти извод од производ). Ако $y(x) = f(x)g(x)$ и функциите $f(x)$ и $g(x)$ се n пати диференцијабилни, тогаш

$$y^{(n)} = f^{(n)}g + \binom{n}{1}f^{(n-1)}g' + \dots + \binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)} + \dots + \binom{n}{n-1}f'g^{(n-1)} + fg^{(n)}.$$

Доказ. Доказот на тврдењето следува од правилото за извод од производ и принципот на математичка индукција.

Теорема 3.2.7. (Извод од сложена функција). Нека функцијата $f(x)$ е непрекината на (a, b) и $g(x)$ е реална функција, таква што композицијата $g(f(x))$ е определена на (a, b) . Ако функцијата $f(x)$ има извод во точката x_0 , и функцијата $g(x)$ има извод во точката $y_0 = f(x_0)$, тогаш и композицијата $g(f(x))$ има извод во x_0 и $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Доказ. Имаме:

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x_0 + \Delta x) - (g \circ f)(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Нека $f(x_0) = y_0$. Тогаш може да означиме:

$$f(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y, \text{ од каде што } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y.$$

Бидејќи функцијата $f(x)$ е непрекината, следува дека ако $\Delta x \rightarrow 0$, тогаш $\Delta y \rightarrow 0$. Затоа:

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0) + \Delta y) - g(f(x_0))}{\Delta y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= g'(f(x_0))f'(x_0). \blacksquare\end{aligned}$$

При решавање задачи, функцијата f од сложената функција $g(f(x))$ не е дадена и треба да се избере така што gf ќе се сведе на елементарна функција т.е. $f(x)$ се добива како претпоследна операција при пресметувањето на сликата $y = g(f(x))$ од аргументот x во gf .

3.3. Извод од основните елементарни функции

3.3.1. Извод од експоненцијалната функција $y = a^x$,
 $a > 0, a \neq 1$.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

3.3.2. Извод од логаритамската функција $y = \log_a |x|$,
 $a > 0, a \neq 1$; дефинирана на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Прв начин. Ако $x > 0$,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log_a \lim_{x / \Delta x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} =$$

$$\log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Ако $x < 0$, според правилото за извод од сложена функција,

$$y' = (\log_a (-x))' = \frac{1}{-x \ln a} (-x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Втор начин. Изводот на логаритамската функција може да го пресметаме користејќи го изводот експоненцијалната која е нејзина инверзна функција, и теоремата за инверзна функција. Бидејќи за $x > 0$, $y = \log_a x$ т.е. $x = a^y$,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(a^y)'_y} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

3.3.3. Извод од степенската функција $y = x^a$, $a \neq 0$, $x > 0$.

Бидејќи $y = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$, според формулата за извод од експоненцијална и правилото за извод од сложена функција, добиваме:

$$y' = e^{a \ln x} (a \ln x)' = x^a a \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

Коментар.* Функцијата x^a има дефинициона област $\mathbb{R} (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, кога $a = \frac{m}{n}$ ($a = -\frac{m}{n}$), $m, n \in \mathbb{N}$ и $(m, n) \neq (2k-1, 2l)$, $k, l \in \mathbb{N}$. И во тие тие случаи, т.е. за $x < 0$ од $-x^a = (-x)^a$ следува:

$$y'(x) = -y'(-x) = -a(-x)^{a-1} = ax^{a-1}.$$

Пример 3.3.3. Користејќи ја биномната формула, пресметај го по дефиниција изводот на функцијата $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}(\Delta x)^k + \dots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}(\Delta x)^{k-1} + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right)}{\Delta x} = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

3.3.4-7. Извод од тригонометриските функции:

4) $y = \sin x$.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x. \end{aligned}$$

Втор начин. Имаме,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) = \sin(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\frac{4}{\Delta x} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2} + \cos x =$$

$$\cos x .$$

5) $y = \cos x$.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \sin \frac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x} =$$

$$- \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = -\sin x .$$

Втор начин. Се решава аналогно како вториот начин од 4).

Трет начин. Користејќи ги идентитетите:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \text{ и } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x ,$$

како и правилото за извод од сложена функција, добиваме:

$$y' = (\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \left(\frac{\pi}{2} - x \right)' = -\sin x .$$

6) $y = \operatorname{tg} x$.

Бидејќи $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ според правилото за извод од количник:

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

7) $y = \operatorname{ctg} x$.

Прв начин. На ист начин како претходно, од $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ добиваме:

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Втор начин.

$$y = \operatorname{ctgx} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)' = -\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} (\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

3.3.8-11. Извод од аркус функциите:

8) $y = \arcsin x$ т.е. $x = \sin y$ за $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, т.е. за $|x| < 1$.

Со помош на правилото за извод на инверзна функција добиваме:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

9) $y = \arccos x$ т.е. $x = \cos y$ за $y \in (0, \pi)$, т.е. за $|x| < 1$ и

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'_y} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

10) $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ т.е. $x = \operatorname{tgy}$ за $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$.

Заради идентитетот $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y$ добиваме:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tgy})'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

11) $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ т.е. $x = \operatorname{ctgy}$ за $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$.

Заради идентитетот $\frac{1}{\sin^2 y} = 1 + \operatorname{ctg}^2 y$ добиваме:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(ctgy)'_y} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{1+ctg^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

3.3.12. Таблица на изводи. Изводите од основните елементарни функции се дадени прегледно во следната табела:

$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1, \text{ специјално } (e^x)' = e^x;$	
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1, x \neq 0, \text{ специјално } (\ln x)' = \frac{1}{x};$	
$(x^a)' = ax^{a-1}, a \neq 0, x > 0, \text{ спец. } x' = 1; \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \text{ и } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$	
$(\sin x)' = \cos x;$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z};$
$(\cos x)' = -\sin x;$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z};$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1;$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2};$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1;$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Задача 3.1.6. Определи го по дефиниција изводот на функцијата $y = x^2 - x + 2$.

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) + 2 - (x^2 - x + 2)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x - \Delta x + 2 - x^2 + x - 2}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 - \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 1)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x - 1) = 2x - 1. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Задача 3.2.3-6. Најди ги изводите на следниве функции:

$$1) y = 3 + 2x - x^2; \quad 2) y = \frac{4}{\sqrt[3]{x^3}} + \frac{2^x}{3^x};$$

$$3) y = e^x \sin x; \quad 4) y = \frac{\arccos x}{1 - x^2}.$$

Решение. 1) $y' = 3' + 2(x)' - (x^2)' = 2 - 2x = 2(1 - x);$

$$2) y = \frac{4}{3}x^{-\frac{3}{4}} + \left(\frac{2}{3}\right)^x \text{ од каде што:}$$

$$y' = \frac{4}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{7}{4}} + \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln \frac{2}{3} = -\frac{1}{\sqrt[4]{x^7}} + \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln \frac{2}{3}.$$

$$3) y' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x).$$

$$4) y' = \frac{(\arccos x)'(1 - x^2) - \arccos x \cdot (1 - x^2)'}{(1 - x^2)^2} =$$

$$\frac{-\sqrt{1 - x^2} - \arccos x(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{2x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}}{(1 - x^2)^2}$$

Изводот постои за секое $x \in (-1, 1)$.

Задача 3.2.7.1. Најди го изводот на функцијата: $y = \sqrt{\sin x}$.

Решение. Имаме: $y_x = \sqrt{X}$, $X = \sin x$ од каде што:

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{X}} = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}, \quad X'_x = \cos x \text{ па } y' = y'_x X'_x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Изборот на функцијата X , изводот y'_x и враќањето во првобитната променлива може да се направат директно. Тогаш постапката е:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} (\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Задача 3.2.7.2. Најди го изводот на функцијата:

$$y = \operatorname{arctg} \sqrt{ax}.$$

Решение. За $a = 0$, $y = 0$ па $y' = 0$. Нека $a \neq 0$. Тогаш со два пати примена на формулата за извод од сложена функција добиваме:

$$y' = \frac{1}{1 + (\sqrt{ax})^2} (\sqrt{ax})' = \frac{1}{1 + ax} \frac{1}{2\sqrt{ax}} (ax)' = \frac{a}{2\sqrt{ax}(1 + ax)}.$$

Со малку рутина пресметувањето може да се изврши во еден чекор:

$$y' = \frac{1}{1 + (\sqrt{ax})^2} \frac{1}{2\sqrt{ax}} a = \frac{a}{2\sqrt{ax}(1 + ax)}.$$

Коментар. Дефиниционата област на изводот е определена од дефиниционата област на функцијата y и од интервалите на кои изводот постои, и нема да ја запишуваме експлицитно. Во задачата 3.2.7.1 $D_y = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$, во 3.2.7.2 е $\mathbb{R}$ за $a = 0$, $(0, \infty)$ за $a > 0$ и $(-\infty, 0)$ за $a < 0$.

Задача 3.2.7.3. Најди го изводот на функцијата:

$$y = \cos^3 x.$$

Решение. Заради $y = \cos^3 x = (\cos x)^3$,

$$y' = 3 \cos^2 x (\cos x)' = -3 \sin x \cos^2 x.$$

Теорема 3.3.13. (Извод од инверзна функција). Нека функцијата $f(x)$ е непрекината и строго монотона на (a, b) . Ако функцијата $f(x)$ има извод во точката x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, тогаш и инверзната функција f^{-1} има извод во точката $y_0 = f(x_0)$ и притоа:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказ. Имаме:

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y}.$$

Нека $f^{-1}(y_0) = x_0$, од каде што: $f(x_0) = y_0$; $f^{-1}(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x$ од каде што $f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) = \Delta x$ и

$$f(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y \text{ т.е. } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y.$$

Заради непрекинатоста на f^{-1} , од $\Delta y \rightarrow 0$ следува: $\Delta x \rightarrow 0$. Затоа:

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Пример 3.3.14. Инверзната функција на функцијата $y = \sqrt[3]{x}$ е $x_y = y^3$, чиј извод е: $x'_y = 3y^2$. Затоа:

$$y' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

3.4. Извод од имплицитно зададена функција.

Нека функцијата $y = y(x)$ (1), е зададена имплицитно со равенката:

$$F(x, y(x)) = 0 \quad (2).$$

Со диференцирање функцијата (2) по x , имајќи предвид дека y е функција од x , ја добиваме равенката:

$$\Phi_1(x, y, y') = 0,$$

која е линеарна по y' и затоа лесно се изразува y' преку x и y ,

$$y' = \varphi_1(x, y) \quad (3).$$

За да го најдеме вториот извод на функцијата (1), ја диференцираме равенката (3) и добиваме:

$$y'' = \Phi_2(x, y, y'),$$

од каде што со замена на y' од (3), ја добиваме равенката:

$$y'' = \varphi_2(x, y).$$

Продолжувајќи ја постапката, можеме да го изразиме n -тиот извод ако постои, како функција од x и y ,

$$y^{(n)} = \varphi_n(x, y).$$

Пример 3.4.1. Изводот на функцијата:

$$x^2 + 2x^3y^4 - 3y^2 + 5x = 0,$$

по променливата x се добива со диференцирање на равенката:

$$2x + 2(3x^2y^4 + x^34y^3y') - 6yy' + 5 = 0$$

и изразување на y' :

$$2(4x^3y^3 - 3y)y' = -(5 + 2x + 6x^2y^4) \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{5 + 2x + 6x^2y^4}{2(4x^3y^3 - 3y)}.$$

Наоѓање на извод со логаритмирање. Функцијата $y = f(x)^{g(x)}$ (4), каде што $f(x) > 0$, ниту е од облик x^a , ниту a^x , па затоа нејзиниот извод не можеме да го пресметаме само со помош на табличните изводи. Но, со логаритмирање на изразот (4) добиваме:

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} \text{ т.е. } \ln y = g(x) \ln f(x),$$

од каде што со диференцирање за $y \neq 0$, добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} y' &= g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x) \Leftrightarrow \\ y' &= y \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \Leftrightarrow \\ y' &= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right).\end{aligned}$$

Постапката се нарекува наоѓање на извод со логаритмирање. Во некои случаи со логаритмирање се упростува пресметувањето на изводите на функциите од облик $y = f(x)$, каде што $f(x) > 0$.

3.5. Извод од параметарски зададена функција

Нека се дадени функциите:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (1),$$

нека V_x е множеството вредности на $x = x(t)$ и нека функцијата $x = x(t)$ има инверзна функција $t = x^{-1}(x)$. Тогаш, на V_x е дефинирана функција $y = y(x)$ со правилото:

$$y = y(x^{-1}(x)) \quad (2).$$

Велиме дека функцијата $y = y(x)$ е **зададена параметарски** со равенките (1), а t е параметар за функцијата $y = y(x)$ (t е аргумент за функциите $x = x(t)$, $y = y(t)$).

Ако функциите $x = x(t)$, $y = y(t)$ се диференцијабилни во t , тогаш за да правиме разлика помеѓу изводот по променливата x и по параметарот t , изводите по параметарот ќе ги означуваме со точка, т.е. $x'(t) = \dot{x}(t)$, $y'(t) = \dot{y}(t)$.

Коментар. Да забележиме дека правилата во функциите со аргументи t и x и слика y не се исти, иако заради прегледност користиме иста ознака, т.е. наместо на пример $y = \varphi(t)$ и $y = \psi(x)$, пишуваме: $y = y(t)$ и $y = y(x)$.

Теорема 3.5.1. (Извод на параметарски зададена функција). Ако функцијата $y = y(x)$, зададена со параметарските равенки:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

каде што функциите $x = x(t)$ и $y = y(t)$ се диференцијабилни во t и $\dot{x}(t) \neq 0$, тогаш и функцијата $y = y'(x)$ има извод во $x = x(t)$ и важи:

$$y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Доказ. Функцијата $y = y(t)$ ја запишуваме во облик:

$$y = y(x^{-1}(x)), \quad \text{каде што } y = y(t), \quad t = x^{-1}(x).$$

Оттука:

$$y'_x = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},$$

што требаше да се докаже. ■

Претходната теорема ни ја задава функцијата $y = y'(x)$, параметарски, со равенките:

$$x = x(t), \quad y' = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Ако функцијата $y = y(x)$, зададена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$ има втор извод во $x = x(t)$ тогаш:

$$y''(x) = \frac{\dot{(y')}}{\dot{x}} = \left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \right) \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

Ако функцијата $y = y(x)$, зададена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$ е n -пати диференцијабилна во $x = x(t)$, тогаш:

$$y^{(n)}(x) = \frac{\dot{(y^{(n-1)})}}{\dot{x}}(t).$$

Задача 3.5.2. Најди го изводот на функцијата:

$$x = a \sin^3 t, \quad y = a \cos^3 t.$$

Решение. Имаме:

$$\dot{x} = 3a \sin^2 t \cos t, \quad \dot{y} = -3a \cos^2 t \sin t \quad \text{од каде:}$$

$$y' = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{-3a \cos^2 t \sin t}{3a \sin^2 t \cos t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctgt}.$$

3.6. Диференцијал на функција

Производот $f'(x)k$ на изводот на функцијата $y = f(x)$ со еден ист множител $k \neq 0$ се нарекува **диференцијал** на $f(x)$ во точката x и се означува со dy или $df(x)$. Множителот k се избира да е ист за сите функции и се бележи со $k = dx$. Тогаш, диференцијалот на функцијата $y = f(x)$ е:

$$dy = f'(x)dx \quad \text{или} \quad dy = y'dx.$$

***Втор диференцијал** на функцијата $f(x)$ во x , е диференцијалот на dy и се бележи со d^2y . Важи:

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = (y'dx)' dx = (y')' dx \cdot dx = y''(x)dx^2.$$

Понатаму, **n -ти диференцијал** на функцијата $f(x)$ е диференцијалот на $n-1$ -виот диференцијал на $y = f(x)$ и се означува со $d^n y$. Важи: $d^n y = y^{(n)}(x)dx^n$. Навистина ако $d^k y = y^{(k)}(x)dx^k$, тогаш:

$$\begin{aligned} d^{k+1}y &= d(d^k y) = d(y^{(k)}(x)dx^k) = (y^{(k)}(x)dx^k)' dx = \\ &= (y^{(k)}(x))' dx^k \cdot dx = y^{(k+1)}(x)dx^{k+1}. \end{aligned}$$

Правилата за наоѓање на диференцијал од константа, константа по функција; и збир, разлика, производ и количник на функции се аналогни на правилата за наоѓање на извод. Имено:

$$dC = 0, \quad d(cf) = (cf)' dx = cf'dx = cdy, \quad c = \text{const};$$

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = vdu + u dv ,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \left(\frac{u'v - uv'}{v^2}\right)dx = \frac{u'vdx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - u dv}{v^2}, \quad v \neq 0 .$$

Формулата за наоѓање на диференцијал на функцијата $y = f(x)$, $dy = y'dx$, важи и кога x не е независна променлива. Имено, ако $y = f(x)$ и $x = g(t)$, т.е. $y = f(g(t))$, тогаш:

$$dy = (f(g(t)))' dt \text{ и } dx = g'(t)dt ,$$

па заради $(f(g(t)))' = f'(x)g'(t)$, добиваме:

$$dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx .$$

Приближно пресметување. Нека функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна во точката x_0 . Бидејќи:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} ,$$

за мали вредности на $\Delta x \neq 0$, ќе важи:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Leftrightarrow f'(x_0)\Delta x \approx f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \Leftrightarrow \\ f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x .$$

Притоа, последниот израз важи и кога $\Delta x = 0$.

Затоа, за приближно пресметување на вредностите на диференцијабилната функција $y = f(x)$ во точките што се близу до точката x_0 , кога вредностите $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ се познати, се користи формулата:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x .$$

4. ПРИМЕНА НА ИЗВОДИ

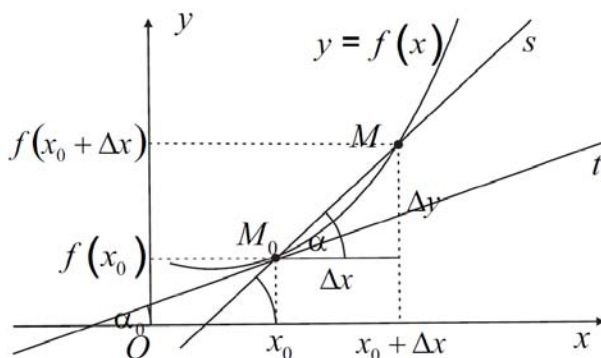
4.1. Равенка на тангента и нормала

4.1.1. Една геометриска интерпретација на поимот извод. Тангента и нормала. Нека функцијата $y = f(x)$ е дефинирана во околина на точката x_0 и непрекината во x_0 . Нека точката $x_0 + \Delta x$ припаѓа на таа околина и $f(x_0)$ и $f(x_0 + \Delta x)$ се соодветно вредностите на функцијата во точките x_0 и $x_0 + \Delta x$. Тогаш коефициентот на правец на секантата на графикот што минува низ точките:

$$M_0(x_0, f(x_0)) \text{ и } M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \text{ е}$$

$$k_s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

каде што α е аголот што секантата го образува со x -оската.



Цртеж 4.1.1

Ако $\Delta x \rightarrow 0$, поради непрекинатоста на функцијата f во точката x_0 , следува дека и $\Delta y \rightarrow 0$, па точката M тежи кон M_0 , при што секантите тежат кон една гранична права наречена **тангента** на функцијата $y = f(x)$ во точката x_0 . Нејзиниот коефициент на правец е:

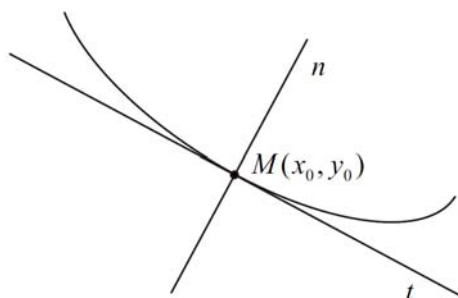
$$k_t = \operatorname{tg} \alpha_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

каде што α_0 е аголот што тангентата го образува со x -оската.

Значи, првиот извод на функцијата $y = f(x)$ во точката x_0 е еднаков на коефициентот на правец на тангентата t на графикот на функцијата $y = f(x)$ во точката $M_0(x_0, f(x_0))$.

Правата што е нормална на тангентата и минува низ x_0 се нарекува **нормала** на функцијата $y = f(x)$ во точката x_0 .

4.1.2. Равенка на тангента и нормала. • Нека функцијата $y = f(x)$ има конечен ненулт извод во точката x_0 .



Цртеж 4.1.2.1

Од аналитичка геометрија во рамнина следува дека коефициентот на правец на правата зададена во нормален вид $y = kx + n$, е k , односно бројот пред x . Ако ставиме $y_0 = f(x_0)$ и $y'_0 = f'(x_0)$, тогаш коефициентот на правец на тангентата на функцијата $y = f(x)$ во точката $M_0(x_0, y_0)$ е:

$$k = y'_0.$$

Од аналитичка геометрија во рамнина имаме дека равенката на правата што минува низ точката M_0 е $y - y_0 = k(x - x_0)$. Оттука, равенката на тангентата е:

$$t: y - y_0 = y'_0(x - x_0) \quad (1).$$

Две прави со коефициенти k_1 и k_2 се заемно нормални ако и само ако $k_1 k_2 = -1$ или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Затоа коефициентот на правец на нормалата е: $-\frac{1}{y'_0}$, а нејзината равенка е:

$$n: y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0) \quad (2).$$

Задача 4.1.2.1. Напиши ја равенката на тангентата и нормалата на кривата $y = x^2$ во точката со апциса $x_0 = 2$.

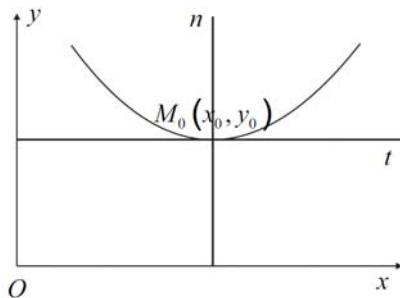
Решение. Ординатата на допирната точка е: $y_0 = 2^2 = 4$. Од $y' = 2x$ и $y'_0 = 2x_0 = 4$ добиваме:

$$t: y - y_0 = y'_0(x - x_0) \Leftrightarrow y - 4 = 4(x - 2) \Leftrightarrow 4x - y - 4 = 0;$$

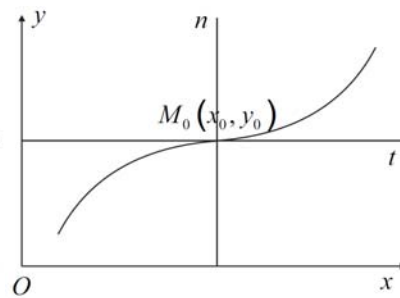
$$n: y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0) \Leftrightarrow y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow 4y - 16 = 2 - x \Leftrightarrow x + 4y - 18 = 0.$$

• Ако $f'(x_0) = 0$, тогаш тангентата е паралелна со x -оската, т.е. хоризонтална, а нормалата е паралелна со y -оската, т.е. вертикална. Нивните равенки се:

$$t: y = y_0, \quad n: x = x_0.$$



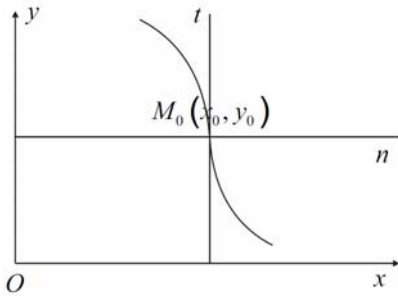
Цртеж 4.1.2.2.



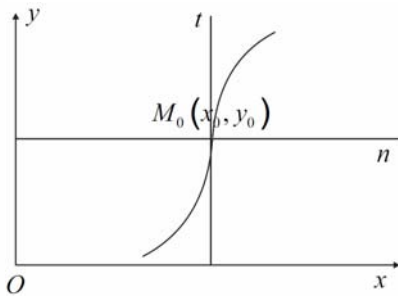
Цртеж 4.1.2.3.

Ако $f'(x_0) = +\infty$ или $f'(x_0) = -\infty$ или $(f'_-(x_0) = -\infty$ и $f'_+(x_0) = +\infty)$ или $(f'_-(x_0) = +\infty, f'_+(x_0) = -\infty)$, тогаш тангентата е вертикална, а нормалата хоризонтална. Нивните равенките се:

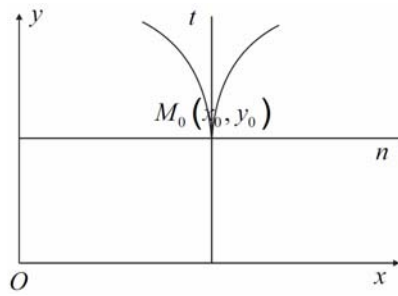
$$t: x = x_0, \quad n: y = y_0.$$



Цртеж 4.1.2.4. $f'(x_0) = -\infty$

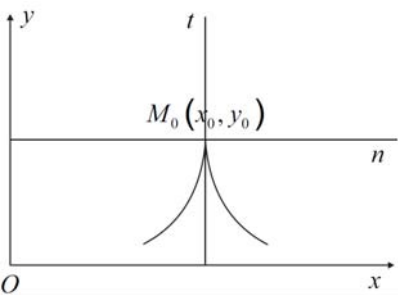


Цртеж 4.1.2.5. $f'(x_0) = +\infty$



$$f'_-(x_0) = -\infty, f'_+(x_0) = +\infty; \quad f'_-(x_0) = +\infty, f'_+(x_0) = -\infty.$$

Цртеж 4.1.2.6.



Цртеж 4.1.2.7.

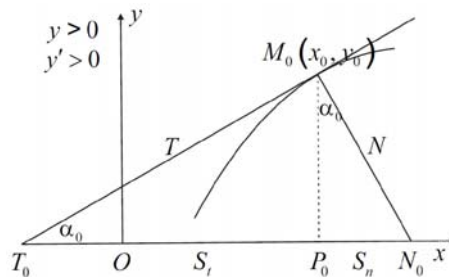
4.1.3. Критериум за пресметување на агол меѓу криви со помош на изводи. Од аналитичка геометрија следува дека аголот α меѓу кривите $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ во пресечната точка x_0 , е аголот меѓу нивните тангенти, и се пресметува според

формулата $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$, каде што k_1 и k_2 соодветно се

коефициентите на правец на тангентите на кривите во x_0 . Ако кривите се диференцијабилни во x_0 , следува дека $k_1 = f'_1(x_0)$ и $k_2 = f'_2(x_0)$ од каде што:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0)f'_2(x_0)} \right|.$$

4.1.4. Допирни Големини. Нека тангентата t на функцијата $y = f(x)$ во точката $M_0(x_0, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$, ја сече x -оската во точката T_0 , а нормалата во точката N_0 . Нека P_0 е проекција на точката M_0 на x -оската (види цртеж).

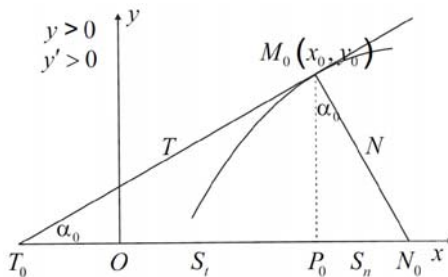


Цртеж 4.1.4.1.

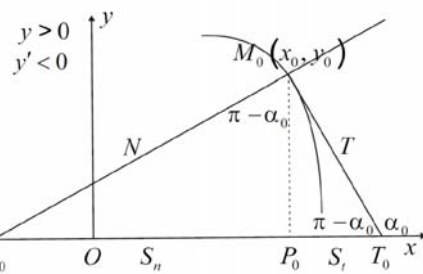
Должината на отсечката M_0T_0 се нарекува **должина на тангента**, должината на M_0N_0 - **должина на нормала**, должината на T_0P_0 - **субтангента** и должината на P_0N_0 - **субнормала**.

Четириите должини се нарекуваат **допирни големини**. Должината на тангентата, должината на нормалата, субтангентата и субнормалата во дадена точка на функцијата $y = y(x)$, соодветно ќе ги означиме со T , N , S_t и S_n . Ако ставиме $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0$, тогаш:

Прв начин. Ги разгледуваме сите 4 распореди во зависност од знакот функцијата и нејзиниот извод во околина на x_0 .



Цртеж 4.1.4.2.



Цртеж 4.1.4.3.

Аналогни се цртежите за случаите: $y < 0, y' > 0$; и $y < 0, y' < 0$. Од правоаголниот триаголник $T_0P_0M_0$ имаме:

$$|\sin \alpha_0| = \frac{|y_0|}{T} \text{ и } |tg \alpha_0| = \frac{|y_0|}{S_t},$$

додека од $M_0P_0N_0$:

$$|\cos \alpha_0| = \frac{|y_0|}{N} \text{ и } |tg \alpha_0| = \frac{S_n}{|y_0|}.$$

Со помош на тригонометриските идентитети:

$$\sin \alpha_0 = \frac{tg \alpha_0}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha_0}} \text{ и } \cos \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha_0}},$$

добиваме:

$$T = \overline{M_0T_0} = \frac{1}{|\sin \alpha_0|} = \left| \frac{y_0 \sqrt{1 + tg^2 \alpha_0}}{tg \alpha_0} \right| = \left| \frac{y_0}{y'_0} \right| \sqrt{1 + y'^2_0},$$

$$N = \overline{M_0N_0} = \frac{1}{|\cos \alpha_0|} = |y_0 \sqrt{1 + tg^2 \alpha_0}| = |y_0| \sqrt{1 + y'^2_0},$$

$$S_t = \overline{T_0P_0} = \frac{|y_0|}{|tg \alpha_0|} = \left| \frac{y_0}{y'_0} \right| \text{ и}$$

$$S_n = \overline{P_0N_0} = |y_0 tg \alpha_0| = |y_0 y'_0|.$$

Значи, должината на тангентата, должината на нормалата, субтангентата и субнормалата во произволна точка $M(x, y)$, соодветно се пресметуваат според формулите:

$$T = \left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2}, \quad S_t = \left| \frac{y}{y'} \right|,$$

$$N = |y| \sqrt{1 + y'^2} \text{ и } S_n = |yy'|.$$

4.2. Теореме за средна вредност

Теорема 4.2.1. (Теорема на Ферма). Нека функцијата $y = f(x)$ е определена на интервалот (a, b) и има локален екстрем во $x_0 \in (a, b)$. Ако функцијата е диференцијабилна во таа точка, тогаш:

$$f'(x_0) = 0.$$

Доказ. Нека функцијата $y = f(x)$ има локален максимум во $x_0 \in (a, b)$. Следува дека постои околина U на x_0 во (a, b) , таква што $f(x) \leq f(x_0)$, т.е. $f(x) - f(x_0) \leq 0$ за секое $x \in U$. Тогаш,

$$\text{за } x < x_0, \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} \geq 0, \text{ од каде што:}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ и}$$

$$\text{за } x > x_0, \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \leq 0, \text{ од каде што:}$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Добивме дека: $f'_-(x_0) \geq 0$ и $f'_+(x_0) \leq 0$. Бидејќи функцијата има извод во x_0 , важи: $f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0)$, што е можно само ако

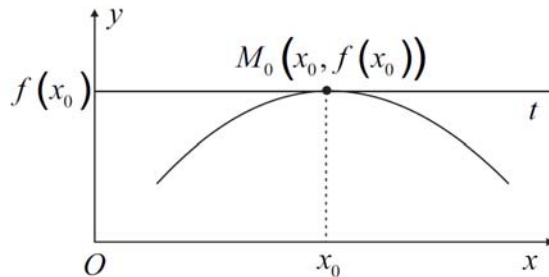
$$f'(x_0) = 0.$$

Доказот е аналоген во случајот кога функцијата има локален минимум во x_0 . ■

Геометриска интерпретација на теоремата на Ферма.

Теоремата на Ферма вели дека ако функцијата $y = f(x)$ ги исполнува условите од теоремата, тогаш тангентата на графикот на

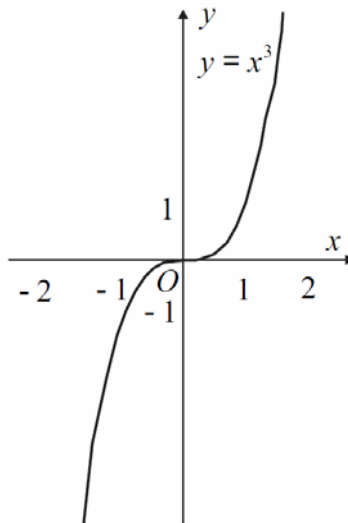
функцијата во точката $M_0(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$, е паралелна со x -оската.



Цртеж 4.2.1.

Следниот пример покажува дека обратното тврдење на теоремата: „Ако $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, b)$, тогаш x_0 е апциса на локален екстрем“, не мора да важи. Значи, условот $f'(x_0) = 0$ е потребен, но не и доволен услов за постоење на екстрем во x_0 .

Пример 4.2.1.1. Да ја разгледаме функцијата $f(x) = x^3$. Важи: $f'(x) = 3x^2$ и $f'(x) = 0$ за $x = 0$, но $x = 0$ не е точка на екстрем.



Цртеж 4.2.1.1.

Теорема 4.2.2. (Теорема на Рол). Нека функцијата $y = f(x)$, ги исполнува следниве три услови:

- 1) f е непрекината на $[a, b]$;
- 2) f е диференцијабилна на (a, b) ; и
- 3) $f(a) = f(b)$.

Тогаш постои точка $\xi \in (a, b)$, таква што $f'(\xi) = 0$.

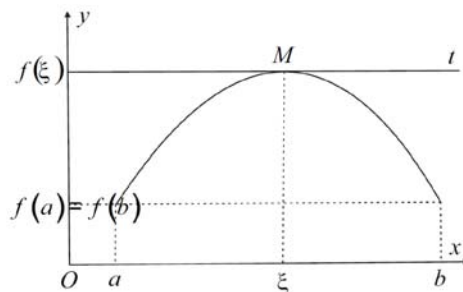
Доказ. Бидејќи функцијата f е непрекината на затворениот интервал $[a, b]$, според теоремата на Вајерштас за непрекинати функции, таа достигнува минимум $m = f(x_1)$ и максимум $M = f(x_2)$.

1) Ако f е константна функција, тогаш $f'(x) = 0$ за секој $x \in (a, b)$, па тврдењето од теоремата е исполнето.

2) Ако f не е константна функција, тогаш максимумот и минимумот имаат различни вредности, а бидејќи вредностите на функцијата во крајните точки се еднакви, барем една од точките x_1 или x_2 припаѓа на отворениот интервал (a, b) . Да ја означиме таа точка со ξ . Според теоремата на Ферма $f'(\xi) = 0$. ■

Геометриска интерпретација на теоремата на Рол.

Теоремата на Рол вели дека ако функцијата $y = f(x)$ ги исполнува условите од теоремата, тогаш на нејзиниот график постои точка $M(\xi, f(\xi))$, во која тангентата на графикот на функцијата е хоризонтална, т.е. паралелна со x -оската.



Цртеж 4.2.2.

Задача 4.2.2.1. Провери дали функцијата $f(x) = 3x - x^2$ ги исполнува условите од теоремата на Рол на интервалот $[0,3]$. Во потврден случај најди ја вредноста точката ξ .

Решение. Функцијата f е диференцијабилна на $\mathbb{R}$. Специјално f е непрекината на интервалот $[0,3]$, има извод $y'(x) = 3 - 2x$ на интервалот $(0,3)$ и $f(0) = f(3) = 0$.

Следува дека функцијата ги исполнува условите од теоремата на Рол. Точката $\xi \in (0,3)$ е:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{3}{2}.$$

Задача 4.2.2.2. Провери дали функцијата:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \leq 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

ги исполнува условите од теоремата на Рол на интервалот $[-1,3]$. Во потврден случај најди ја соодветната точка ξ од теоремата.

Решение. Функцијата е непрекината во точката $x = 0$, бидејќи:

$$f(0^-) = f(0) = f(0^+) = 1.$$

Следува дека функцијата е непрекината на интервалот $[-1,3]$.

Функцијата е диференцијабилна во точката $x = 0$, бидејќи

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2\Delta x} - e^0}{2\Delta x} = 2 \text{ и}$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{2\Delta x + 1 - e^0}{\Delta x} = 2.$$

Следува дека функцијата е диференцијабилна на интервалот $(-1,3)$. Но:

$$f(-1) = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \text{ и } f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7, \text{ па } f(-1) \neq f(3).$$

Следува дека функцијата не ги исполнува условите од теоремата на Рол.

Теорема 4.2.3. (Теорема на Лагранж). Нека функцијата f е:

- 1) непрекината на $[a, b]$; и
- 2) диференцијабилна на (a, b) .

Тогаш постои точка $\xi \in (a, b)$, таква што: $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Доказ. Функцијата $f_p = f_p(x)$ чиј график е правата што минува низ точките $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ има равенка:

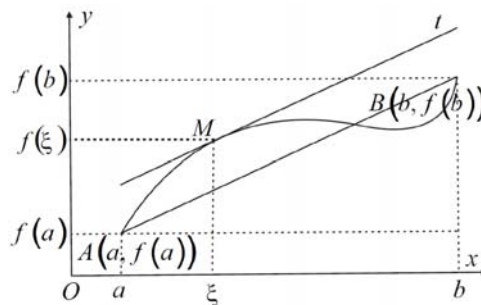
$$y - y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_0) \Leftrightarrow f_p(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \Leftrightarrow$$

$$f_p(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ја разгледуваме функцијата: $F(x) = f(x) - f_p(x)$, т.е.

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

која е разлика од функцијата f и линеарната функција f_p .



Цртеж 4.2.3.

Функцијата F ги исполнува условите од теоремата на Рол. Имено:

- 1) F е непрекината на $[a, b]$, како разлика од непрекинатите функции f и f_p ;
- 2) F е диференцијабилна на (a, b) , како разлика на диференцијабилните функции f и f_p , при што:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

$$3) F(a) = 0 \text{ и } F(b) = 0.$$

Следува постои точка $\xi \in (a, b)$, таква што:

$$F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

што требаше да се докаже. ■

Геометриска интерпретација на теоремата на Лагранж. Теоремата на Лагранж вели дека ако функцијата f ги исполнува условите од теоремата, тогаш на нејзиниот график постои точка $M(\xi, f(\xi))$, $\xi \in (a, b)$ во која тангентата на графикот на функцијата е паралелна со правата што минува низ точките $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ (цртеж 4.2.3). Имено, $k_t = f'(\xi)$ е коефициентот на правец на тангентата во точката M , $k_p = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ е коефициентот на правец на правата низ A и B , додека равенството $k_t = k_p$ значи дека правите се паралелни.

Задача 4.2.3.1. Провери дали функцијата $f(x) = \ln x$ ги исполнува условите од теоремата на Лагранж на интервалот $[1, e]$. Во потврден случај најди ја вредноста на точката ξ .

Решение. Функцијата $f(x) = \ln x$ е диференцијабилна за секое $x > 0$, па ги исполнува условите од теоремата на Лагранж.

Притоа, $f'(x) = \frac{1}{x}$ и

$$\begin{aligned} f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &\Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\xi} = \frac{\ln e - \ln 1}{e - 1} &\Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{1}{e - 1} \Leftrightarrow \xi = e - 1. \end{aligned}$$

Значи, бараната точка е: $\xi = e - 1$.

Задача 4.2.3.2. Со помош на теоремата на Лагранж, докажи го неравенството:

$$\ln(1+x) < x, \quad x > 0.$$

Решение. Ја разгледуваме функцијата:

$$f(x) = \ln(1+x) \text{ на интервалот } [0, x], \quad x > 0.$$

Функцијата е непрекината и диференцијалбилна на $[0, x]$. Од теоремата на Лагранж следува дека постои точка $\xi \in (0, x)$ ($\xi > 0$ (1)), таква што:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Бидејќи $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ од каде $f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi} < 1$, добиваме:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} < 1 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln(1+x) < x,$$

што требаше да се докаже.

Теорема 4.2.4. (Теорема на Коши). Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ ги исполнуваат следниве услови:

- 1) f и g се непрекинати на $[a, b]$;
- 2) f и g се диференцијабилни на (a, b) ; и
- 3) $g'(x) \neq 0$ за сите $x \in (a, b)$.

Тогаш постои точка $\xi \in (a, b)$, таква што: $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ (1).

Да забележиме дека (1) е добро дефинирана бидејќи од $g'(x) \neq 0$ за секое $x \in (a, b)$ следува дека $g(b) - g(a) \neq 0$. Имено ако $g(b) = g(a)$, тогаш според теоремата на Рол би постоела точка $\xi \in (a, b)$, таква што: $g'(\xi) = 0$.

Доказ. Ја разгледуваме функцијата:

$$F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)).$$

Функцијата F ги исполнува условите од теоремата на Лагранж, т.е.

- 1) F е непрекината на $[a, b]$;

2) F е диференцијабилна на (a, b) , при што:

$$F'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x); \text{ и}$$

3) $F(a) = 0$ и $F(b) = 0$.

Следува дека постои точка $\xi \in (a, b)$, таква што: $F'(\xi) = 0$ т.е.

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \blacksquare$$

Задача 4.2.4.1. Провери дали функциите $f(x) = 2x^3 - 6x + 7$ и $g(x) = x^3 + x + 2$ ги исполнуваат условите од теоремата на Коши на интервалот $[0, 2]$. Во потврден случај најди ја вредноста на точката ξ .

Решение. Функциите f и g се непрекинати и диференцијабилни за секој $x \in \mathbb{R}$ и

$$f'(x) = 6x^2 - 6 \text{ и } g'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0.$$

Следува дека функциите f и g , ги исполнуваат условите од теоремата на Коши на интервалот $[0, 2]$. Притоа:

$$f(0) = 7, f(2) = 11, g(0) = 2, g(2) = 12 \text{ и } f'(x) = 6x^2 - 6,$$

од каде што важи:

$$\begin{aligned} \frac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Leftrightarrow \frac{11 - 7}{12 - 2} = \frac{6\xi^2 - 6}{3\xi^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{6\xi^2 - 6}{3\xi^2 + 1} \Leftrightarrow \\ 6\xi^2 + 2 &= 30\xi^2 - 30 \Leftrightarrow 24\xi^2 = 32 \Leftrightarrow \xi^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \xi = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Од двете вредности, точката $\xi = \frac{2}{\sqrt{3}}$ е внатрешна точка за $[0, 2]$.

Да забележиме дека ако во теоремата на Коши ставиме $g(x) = x$, ја добиваме теоремата на Лагранж, а ако во Лагранжовата теорема ставиме $f(a) = f(b)$ ја добиваме Роловата теорема. Значи, Роловата теорема е специјален случај на Лагранжовата, која, пак е специјален случај на Кошиевата теорема.

Условите во теоремите се доволни, но не и потребни, што значи дека ако се исполнети условите сигурно постои точката ξ , но таа може да постои и ако некој од условите не е исполнет.

Две последици од теоремите за средна вредност се:

Теорема 4.2.5. Нека функцијата f е диференцијабилна на интервалот (a, b) . Ако $f'(x) = 0$ за секое $x \in (a, b)$, тогаш f е константна функција на (a, b) .

Доказ. Нека $x_1, x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$. Функцијата f ги исполнува условите од теоремата на Лагранж на интервалот $[x_1, x_2]$, бидејќи f е диференцијабилна, па и непрекината на $[x_1, x_2]$. Следува дека постои точка $\xi \in (x_1, x_2)$, таква што $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Но од условот на задачата $f'(\xi) = 0$ па:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Од произволниот избор на точките x_1 и x_2 следува дека вредноста на функцијата во секоја точка од (a, b) е иста т.е f е константна функција на (a, b) . ■

Теорема 4.2.6. Нека функциите f и g се диференцијабилни на (a, b) . Ако $f'(x) = g'(x)$ за секое $x \in (a, b)$, тогаш f и g се разликуваат за константа.

Доказ. Да ја разгледаме функцијата $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in (a, b)$. Бидејќи $f'(x) = g'(x)$, важи:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \text{ за секое } x \in (a, b).$$

Според претходната теорема $h = c$ е константна функција, т.е.

$$f(x) - g(x) = c, \quad c = \text{const} \text{ или } f(x) = g(x) + c. \blacksquare$$

Претходните две теореме важат и кога a и (или) b се еден од симболите $-\infty, +\infty$.

4.3. ЛОПИТАЛОВО ПРАВИЛО

Теорема 4.3.1. (Лопиталово правило). Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ ги исполнуваат следниве услови во некоја околина на точката x_0 :

1. Диференцијабилни, освен можеби во точката x_0 ;

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (облик $\frac{0}{0}$) или

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ (облик $\frac{\infty}{\infty}$);

3. $g'(x) \neq 0$ за сите $x \neq x_0$.

Тогаш, ако постои $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (како реален број, $-\infty$, $+\infty$ или ∞),

постои и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Коментар. Аналогно тврдење важи кога бројот x_0 е еден од симболите $-\infty$, $+\infty$ или ∞ .

Доказ. Ќе го докажеме случајот кога:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ (облик } \frac{0}{0} \text{)}.$$

• Нека $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

1) Нека точката $x > x_0$ припаѓа во околина на x_0 во која се исполнети условите од теоремата. Функциите f и g ги исполнуваат условите од теоремата на Коши на интервалот $[x_0, x]$, т.е. се непрекинати на $[x_0, x]$ и диференцијабилни на (x_0, x) и $g'(x) \neq 0$ на (x_0, x) . Следува дека постои точка $\xi \in (x_0, x)$, таква што:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \stackrel{f(x_0)=g(x_0)=0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (1).$$

Ако во последното равенство ставиме $x \rightarrow x_0$, $x > x_0$, имаме:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{a}{=} \lim_{\xi \rightarrow x_0^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \stackrel{b}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2),$$

каде што, бидејќи постои третиот лимес и $x_0 < \xi < x$, постои и вториот лимес и важи равенството b . Додека заради (1) постои и првиот лимес и важи равенството a .

2) Аналогно се покажува случајот кога $x < x_0$, при што се добива:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (3).$$

Од (2) и (3) следува дека левата и десната граница се еднакви, па постои:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

• Нека не важи $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Ги разгледуваме функциите:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases} \text{ и } G(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

за кои важи:

$$F(x_0) = G(x_0) = 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{G(x)} \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F'(x)}{G'(x)} \quad (4).$$

Функциите F и G ги исполнуваат условите од теоремата и за нив важи заклучокот од претходниот случај, па заради (4) тој ќе важи и за f и g . ■

Ако $x_0 = +\infty$, тогаш теоремата на Лопитал (облик $\frac{0}{0}$) гласи:

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се: 1) диференцијабилни за секое $x > M$, 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ и 3) $g'(x) \neq 0$ за сите $x > M$.

Тогаш ако постои $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (како реален број, $-\infty$, $+\infty$ или ∞),

постои и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказ. Воведуваме смена $x = \frac{1}{t}$. Кога $x \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow 0^+$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0.$$

Според Лопиталовото правило кога се тежи кон конечен број, имаме:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \stackrel{\text{ЛП}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогно се покажува случајот кога $x_0 = -\infty$ или $x_0 = \infty$. ■

Теоремата на Лопитал (облик $\frac{\infty}{\infty}$) нема да ја докажеме. Ќе спомнеме дека понекогаш (но не секогаш) границата што генерира облик $\frac{\infty}{\infty}$, може да реши со сведување на облик $\frac{0}{0}$ со трансформацијата $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$. Важи и обратното.

Лопиталовото правило често се користи при пресметување на граници, бидејќи обично границата од количникот на две функции потешко се наоѓа отколку границата од количникот на нивните изводи.

Лопиталовото правило може да се примени и на функциите $f^{(n)}(x)$ и $g^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, \dots$, доколку ги исполнуваат условите од теоремата. Тогаш:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)},$$

т.е. Лопиталовото правило се применува повеќекратно додека не се најде граничната вредност.

Задача 4.3.2.1-4. Пресметај ги границите:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 3x - 1}{2x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^x - a}{x - 1}.$$

Решение. 1) Ако побараме граница кога x тежи кон 1, добиваме неопределеност од облик $\frac{0}{0}$. Бидејќи постојат изводите на членот во броител $(x^5 - 1)' = 5x^4$ и $(2x^3 - x - 1)' = 6x^2 - 1$, можеме да го примениме Лопиталовото правило, според кое:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right)^{\text{III}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4}{6x^2 - 1} = \frac{5}{6 - 1} = 1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right)^{\text{III}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}}{3x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 3x - 1}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right)^{\text{III}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 3}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^x - a}{x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right)^{\text{III}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^x \ln a}{1} = a \ln a. \blacksquare$$

Задача 4.3.3.1-2. Пресметај ги границите:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ctg x}.$$

Решение.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\text{III}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{6x^2 - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\text{III}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3}{12x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3} x^2 = +\infty.$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctgx}} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^{III} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^{III} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \sin x \cos x = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Сите неопределени облици $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - (\infty), 1^\infty, 0^0, \infty^0$ се

сведуваат на $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ или на определен израз. Имено:

1. Неопределениот облик $0 \cdot \infty$ се појавува во случајот: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$, каде што $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$. Тогаш изразот се сведува на $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1/g(x)}$ (облик $\frac{0}{0}$), или $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{1/f(x)}$ (облик $\frac{\infty}{\infty}$);

2. Неопределениот облик $\infty - (\infty)$ се јавува во случајот:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)), \text{ каде што } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

Тогаш лимесот се рационализира или се сведува на $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right)$. Ако $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$ се добива неопределен облик

$0 \cdot \infty$. Ако $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \neq 1$, тогаш граничната вредност е ∞ .

3. Неопределените облици $1^\infty, 0^0$ и ∞^0 се јавуваат во случајот $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$, каде што $f(x)$ тежи кон $0^+, 1$ или $+\infty$, а $g(x)$ тежи кон 0 или ∞ , кога $x \rightarrow x_0$. Тогаш:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)}$$

се сведува на обликот $0 \cdot \infty$. За да не ги вршиме операциите во степенот, во пракса, наместо лимесот $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$, го пресметуваме:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x) = A, \text{ од каде } L = e^A.$$

Во решенијата на задачите ќе биде означено за кој вид на неопределеност се работи и кога е применето Лопиталовото правило. На читателот ќе му биде оставено да провери дали се исполнети условите за примена на Лопиталовото правило.

Задача 4.3.4.1-2 Пресметај ги границите:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right).$$

Решение.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0} \right)_{\text{III}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\left(-\frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0} \right)_{\text{III}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{a}{x}} \left(-\frac{a}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = a \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{a}{x}} = a.$$

Задача 4.3.5.1-2. Пресметај ги границите:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$$

Решение.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \left(\frac{0}{0} \right)_{\text{III}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right)^{\text{III}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctgx}} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x \sin x}{\cos x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x \sin x - \pi}{2 \cos x} &= \left(\frac{0}{0}\right)^{\text{III}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + 2x \cos x}{-2 \sin x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + x \operatorname{ctgx}) = -\left(1 + \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}\right) = -1. \end{aligned}$$

Задача 4.3.6.1-2. Пресметај ги границите:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x^{\operatorname{tg} x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}.$$

Решение. 1) Имаме:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x^{\operatorname{tg} x} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\ln \sin x^{\operatorname{tg} x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \ln \sin x} = e^0 = 1$$

бидејќи:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{ctgx}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \cos x = 0.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(e^x + x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(e^x + x)} = e^2,$$

бидејќи:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e^x + x} (e^x + 1)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = \frac{e^0 + 1}{1 + 0} = 2.$$

Задача 4.3.7.1-2. Пресметај ги границите:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x^{\operatorname{tg} x}.$$

Решение. 1) Претходно имаме пресметано дека:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

Затоа:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^0 = 1.$$

2) Нека $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x^{\lg x} = (0^0)$. Тогаш:

$$\begin{aligned} \ln L &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \sin x^{\lg x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \lg x \ln \sin x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\lg x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cos x = \sin 0 \cos 0 = 0. \end{aligned}$$

Следува: $L = e^0 = 1$.

Задача 4.3.8.1-2. Пресметај ги границите:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}.$$

Решение. 1) Нека $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x = (\infty^0)$. Тогаш:

$$\begin{aligned} \ln L &= \ln \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(\ln \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\ln \frac{1}{x}} x \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln \frac{1}{x}} = \frac{0}{\ln(+\infty)} = \frac{0}{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

Следува $L = e^0 = 1$.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} = (\infty^0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln \left(\left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln \frac{1}{x}} = e^0 = 1,$$

бидејќи:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{\sin^2 x} \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\cos x} = 1 \cdot \frac{0}{\cos 0} = 0. \end{aligned}$$

4.4. Екстремни вредности, интервали на монотоност, превојни точки, интервали на конкавитет и асимптоти на функции

4.4.1 Точки на локален екстрем и интервали на монотоност.

Поимот монотоност на функции е даден во првата глава. Во овој дел ќе воведеме критериуми за монотоност на диференцијабилни функции.

Теорема 4.4.1.1. (Критериум за строга монотоност на функции). Нека функцијата f е диференцијабилна на (a, b) . Ако $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) за секое $x \in (a, b)$, тогаш функцијата f монотонно расте (опаѓа) на (a, b) .

Доказ. 1) Нека $f'(x) > 0$ на (a, b) и $x_1, x_2 \in (a, b)$ т.ш. $x_1 < x_2$. Функцијата f ги исполнува условите од теоремата на Лагранж на интервалот $[x_1, x_2]$. Следува дека постои $\xi \in (x_1, x_2)$, таква што:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Од условот $f'(\xi) > 0$, добиваме:

$$\underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}_{>0} > 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Следува дека функцијата f монотонно расте на (a, b) .

2) Аналогно се покажува тврдењето во случајот кога $f'(x) < 0$ на (a, b) . ■

Обратното тврдење не мора да важи. Значи, ако функцијата f монотонно расте (опаѓа) и е диференцијабилна на некој интервал, тогаш нејзиниот прв извод не мора да е поголем (помал) од 0, туку $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$). Да го покажеме последново тврдење.

1) Нека $x_0 \in (a, b)$ и f монотонно расте на (a, b) .

За $x < x_0$ следува дека $f(x) < f(x_0)$ т.е. $f(x) - f(x_0) < 0$, па:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ и}$$

за $x > x_0$ следува $f(x) > f(x_0)$ т.е. $f(x) - f(x_0) > 0$, па:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Ако побараме граница кога $x \rightarrow x_0$, добиваме:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

2) Аналогно, ако $x_0 \in (a, b)$ и f монотонно опаѓа на (a, b) , добиваме: $f'(x_0) \leq 0$.

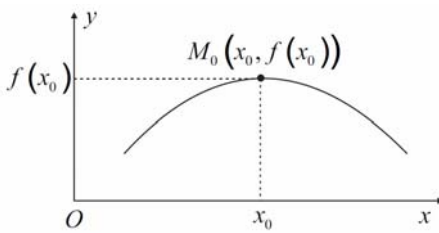
Пример 4.4.1.1. Функцијата $y = x^3$ расте на $\mathbb{R}$, $y' = 3x^2 \geq 0$. Имено, во $x = 0$, не важи $y'(0) > 0$, туку $y'(0) = 0$.

Дефиниција 4.4.1.2. Стационарни точки на функцијата f се точките $x_0 \in D_f$ во кои првиот извод постои и $f'(x_0) = 0$.

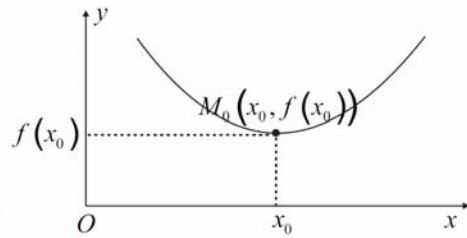
Критични точки на функцијата f се точките $x_0 \in D_f$ во кои:

$$f'(x_0) = 0 \text{ или } f'(x_0) \text{ не постои.}$$

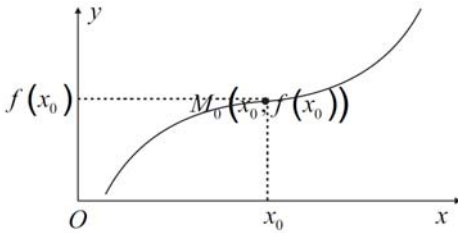
Тангентата на графикот на f во $M_0(x_0, f(x_0))$, во стационарната точка x_0 е хоризонтална.



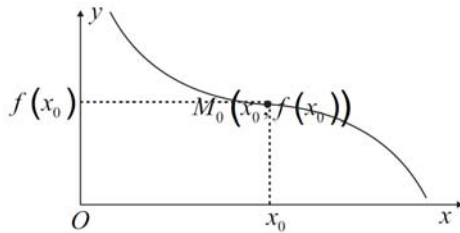
Цртеж 4.4.1.1.1. Локален максимум



Цртеж 4.4.1.1.2. Локален минимум



Цртеж 4.4.1.1.3. Нема лок. екс.

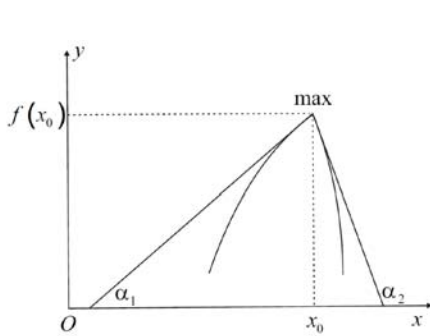


Цртеж 4.4.1.1.4. Нема лок. екс.

Теорема 4.4.1.2. (Потребен услов за постоење на екстрем). Нека функцијата f е непрекината на (a, b) и има екстрем во $x_0 \in (a, b)$. Тогаш, или $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не постои.

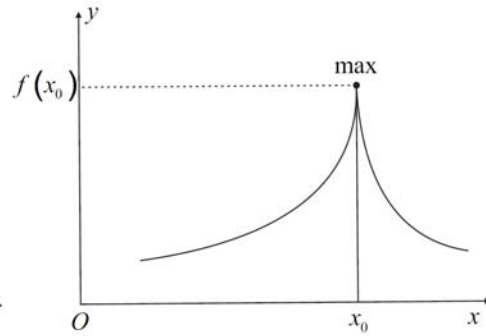
Доказ. Нека f има екстрем во $x_0 \in (a, b)$. Ако постои $f'(x_0)$, тогаш според теоремата на Ферма $f'(x_0) = 0$. Затоа, $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не постои. ■

Обратното тврдење од теоремата не важи, т.е. може $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ да не постои, но функцијата да нема локален екстрем во x_0 . Затоа, за да се најде екстремот се потребни дополнителни услови, наречени доволни услови што треба да ги исполнува функцијата за да има локален екстрем во x_0 . Секоја од следниве теореме дава доволни услови за постоење на екстрем.



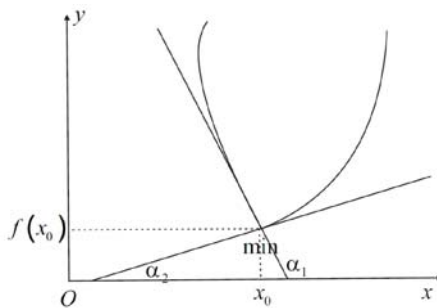
$$f'_-(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_1, f'_+(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_2;$$

Цртеж 4.4.1.2.1.



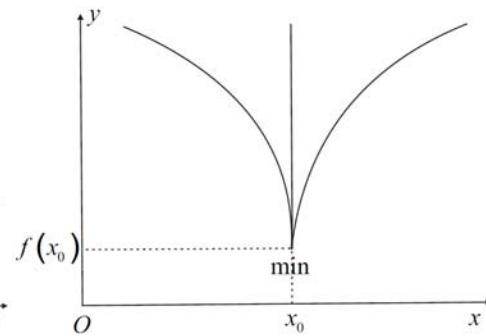
$$f'_-(x_0) = +\infty, f'_+(x_0) = -\infty;$$

Цртеж 4.4.1.2.2.



$$f'_-(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_1, f'_+(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_2;$$

Цртеж 4.4.1.2.3.



$$f'_-(x_0) = -\infty, f'_+(x_0) = +\infty.$$

Цртеж 4.4.1.2.4.

Дефиниција 4.4.1.2. Велиме дека функцијата f **го менува знакот од + кон - (од - кон +)** во точката x_0 , ако постои околина на x_0 , таква што за сите точки x од околината важи: $f(x) > 0$ за $x < x_0$ ($f(x) < 0$ за $x < x_0$) и $f(x) < 0$ за $x > x_0$ ($f(x) > 0$ за $x > x_0$).

Ако функцијата f го менува знакот од + кон -, или од - кон + во x_0 , велиме дека f **го менува знакот во** x_0 .

Теорема 4.4.1.3. (Прв критериум за постоење на екстрем). Нека функцијата f е диференцијабилна на (a, b) , освен можеби во точката $x_0 \in (a, b)$ во која е непрекината и $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не постои. Тогаш:

1. Ако функцијата f' го менува знакот од + кон - во x_0 , тогаш f има локален максимум во x_0 ;
2. Ако функцијата f' го менува знакот од - кон + во x_0 , тогаш f има локален минимум во x_0 ;
3. Ако функцијата f' не го менува знакот во x_0 , тогаш f нема локален екстрем во x_0 .

Доказ. Тврдењата од теоремата следуваат директно од теоремата 4.4.1.1. Имено, постои околина на x_0 во која:

- 1) Функцијата f лево од x_0 расте, а десно од x_0 опаѓа, па во x_0 има локален максимум.
- 2) Функцијата f лево од x_0 опаѓа, а десно од x_0 расте, па во x_0 има локален минимум.
- 3) Функцијата f на целата околина расте ако $f'(x_0) > 0$ или опаѓа ако $f'(x_0) < 0$. Следува дека f нема локален екстрем во x_0 . ■

Теорема 4.4.1.4. (Втор критериум за постоење на екстрем). Нека функцијата f има прв извод на (a, b) и втор извод во $x_0 \in (a, b)$. Тогаш:

- 1) Ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$ тогаш f има локален максимум во x_0 ;
- 2) Ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$ тогаш f има локален минимум во x_0 .

Доказ. 1) Нека $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$. Бидејќи $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$, следува дека постои околина U на x_0 , таква што за секое x од таа околина:

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

Оттука за $x < x_0$ $f'(x) > 0$, а за $x > x_0$ $f'(x) < 0$. Според теоремата 4.4.1.1. следува дека f има локален максимум во x_0 .

2) Второто тврдење се докажува аналогно.■

Пример 4.4.1.1. За функцијата:

$$f(x) = x^2, \quad f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2.$$

Притоа, $f'(x) = 0$ за $x = 0$. Значи, $f'(0) = 0$ и $f''(0) = 2 \neq 0$.

Следува дека f има локален минимум во 0.

Теорема 4.4.1.5. (Обопштен втор критериум за постоење на екстрем). Нека функцијата f има непрекинати изводи од n -ти ред на (a, b) , $n \geq 2$. Нека $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, но $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогаш:

1. Ако n е парен број, тогаш f има локален екстрем во x_0 при што:

-Ако $f^{(n)}(x_0) < 0$, тогаш f има локален максимум во x_0 ;

-Ако $f^{(n)}(x_0) > 0$, тогаш f има локален минимум во x_0 ;

2. Ако n е непарен, тогаш f нема локален екстрем во x_0 .

Доказ. Види прилог.

Задача 4.4.1.6. Најди ги локалните екстреми и интервалите на монотоност на функцијата $y = |x|(x^2 - 3)$.

Решение. Бидејќи:

$$y = x \operatorname{sgn}(x)(x^2 - 3) = (x^3 - 3x) \operatorname{sgn}(x),$$

следува дека за $x \neq 0$:

$$y' = (3x^2 - 3) \operatorname{sgn}(x) = 3(x^2 - 1) \operatorname{sgn}(x) \text{ и}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Во $x = 0$, функцијата е непрекината и нема извод бидејќи:

$$y'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{y(\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x(\Delta x^2 - 3) - 0}{\Delta x} = 3 \text{ и}$$

$$y'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{y(\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x(\Delta x^2 - 3) - 0}{\Delta x} = -3.$$

Значи, критични точки се: -1 , 0 и 1 . Заради:

$$y'(-2) < 0, \quad y'\left(-\frac{1}{2}\right) > 0, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \text{ и } y'(2) > 0,$$

функцијата опаѓа за $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, а расте за $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Притоа, $E_1(-1, -2)$ и $E_3(1, -2)$ се локални минимуми, а $E_2(0, 0)$ е локален максимум на графикот на f . Добиените заклучоци прегледно може да се претстават со табела.

	-1	0	1
y'	-	+	-
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Задача 4.4.1.7. Најди ги локалните екстреми и интервалите на монотоност на функцијата $y = |(3x - 2)(x + 2)|$.

Решение. Заради:

$$y = \begin{cases} (3x - 2)(x + 2), & (3x - 2)(x + 2) > 0 \\ -(3x - 2)(x + 2), & (3x - 2)(x + 2) < 0 \end{cases}$$

графикот на y , лесно се црта, преку $\pm(3x - 2)(x + 2)$, чии графици се параболи. Притоа:

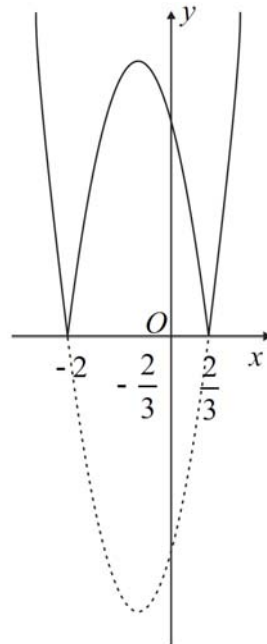
$$3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ и } x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2,$$

па $E_1(-2, 0)$ и $E_3\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ се локални минимуми. Од својствата на параболите следува дека координатите на локалниот максимум E_2 , се:

$$x = \frac{\frac{2}{3} + (-2)}{2} = -\frac{2}{3} \text{ и } y\left(-\frac{2}{3}\right) = \left| \left(3\left(-\frac{2}{3}\right) - 2\right) \left(-\frac{2}{3} + 2\right) \right| = \frac{16}{3}$$

од каде што:

$$E_2\left(-\frac{2}{3}, \frac{16}{3}\right).$$



Цртеж 4.4.1.7.

Функциите од претходните задачи не се монотони функции, но се монотони на конечен број интервали што ја сочинуваат дефиниционата област. Функцијата во нареднава задача е монотона.

Задача 4.4.1.8.* Испитај ја монотоноста на функцијата

$$y = \frac{e^{x^2} - \cos x}{x}.$$

Решение. Имаме:

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + \sin x)x - e^{x^2} + \cos x}{x^2} = \frac{(2x^2 - 1)e^{x^2} + x \sin x + \cos x}{x^2}.$$

Нека: $K = (2x^2 - 1)e^{x^2} + x \sin x + \cos x$. Важи: $K(0) = 0$ и:

$$K' = 4xe^{x^2} + (2x^2 - 1)2xe^{x^2} + \sin x + x \cos x - \sin x = 2x(2x^2 + 1)e^{x^2} + x \cos x.$$

Следува дека $K' > 0$ за $x > 0$, од каде што K монотонно расте на $(0, +\infty)$, па $K > 0$ за $x > 0$ односно $y' > 0$ за $x > 0$.

Значи y монотонно расте на $(0, +\infty)$. Бидејќи y е непарна функција следува дека y монотонно расте и на $(-\infty, 0)$. Притоа, $e^{x^2} > 1$ за $x > 0$ и $\cos x \leq 1$ па $y > 0$ на $(0, +\infty)$ и $y < 0$ на $(-\infty, 0)$.

Следува дека y е монотона функција.

4.4.2. Интервали на конкавитет и превојни точки

Поимот конкавитет на функција е даден во првата глава. Во овој пасус ќе воведеме критериум за конкавитет на диференцијабилни функции.

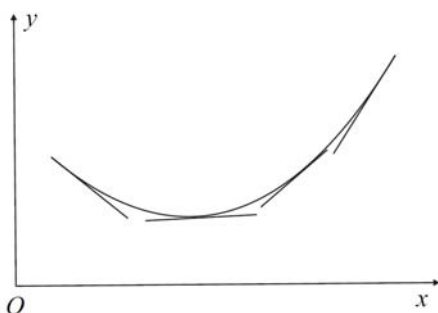
Ако една функција е диференцијабилна на (a, b) , тогаш таа има тангенти во секоја точка од (a, b) , па конкавноста и конвексноста можеме да ги дефинираме со помош на положбите на тангентите во произволна точка и графикот на функцијата.

Дефиниција 4.4.2.1.' Нека функцијата f е диференцијабилна на (a, b) и нека t е равенката на тангентата на f во точката $M(x_t, y_t)$. Функцијата f е **конкавна (конвексна)** на (a, b) ако за секое $x_t \in (a, b)$,

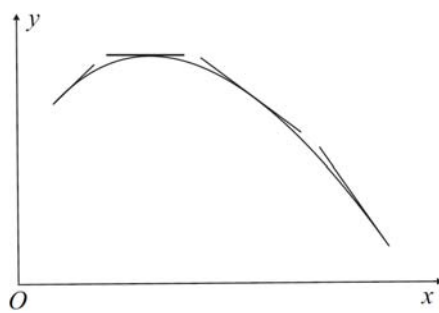
$$f(x) > t(x) \quad (f(x) < t(x))$$

за секое $x \neq x_t$ од (a, b) . ■

Дефиницијата 3.5.2.1, всушност, претставува теорема, која дава еквивалентно тврдење за поимите конкавност (конвексност) на интервал, но на потесна класа на функции, т.е. на диференцијабилни функции.



Цртеж 4.4.2.1. Конкавна функција



Цртеж 4.4.2.2. Конвексна функција

Геометриски интерпретирано, функцијата е конкавна (конвексна), ако сите точки од графикот на функцијата се над (под) тангентата на графикот во произволна точка, освен допирната точка која е на тангентата.

Теорема 4.4.2.2. Нека функцијата f има втор извод на (a, b) . Тогаш:

1. Ако $f''(x) < 0$ на (a, b) , тогаш f е конвексна на (a, b) ;
2. Ако $f''(x) > 0$ на (a, b) , тогаш f е конкавна на (a, b) .

Доказ. 2) Нека $f''(x) > 0$ и x_0 е произволна точка од (a, b) .

Равенката на тангентата на f во $M_0(x_0, f(x_0))$ е:

$$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ќе покажеме дека разликата меѓу вредноста на функцијата $y = f(x)$ и $y = t(x)$ е позитивна за секое $x \neq x_0$ од (a, b) . Имено:

$$\begin{aligned} r(x) &= f(x) - t(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = \\ &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

Според теоремата на Лагранж, постои точка $\xi \in (x_0, x)$, таква што:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Затоа

$$r(x) = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Од $f''(x) > 0$, следува дека $f'(x)$ е растечка функција па:

за $x_0 < \xi < x$,

$$f'(\xi) - f'(x_0) > 0 \text{ и } x - x_0 > 0,$$

од каде што следува дека $r(x) > 0$; и

за $x < \xi < x_0$,

$$f'(\xi) - f'(x_0) < 0 \text{ и } x - x_0 < 0,$$

од каде што исто така следува дека $r(x) > 0$.

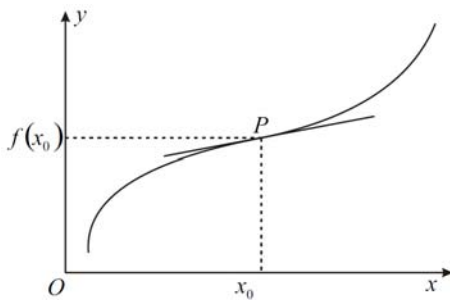
Следува функцијата е конкавна.

1) Случајот кога $f''(x) < 0$ се докажува аналогно. ■

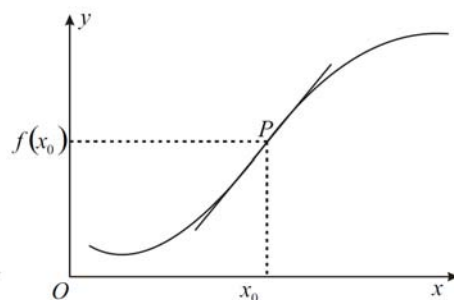
Функцијата f **го менува конкавитетот** во x_0 , ако постои околина $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на x_0 , таква што функцијата f е конкавна на интервалот $(x_0 - \delta, x_0)$, а конвексна на $(x_0, x_0 + \delta)$; или f е конвексна на $(x_0 - \delta, x_0)$, а конкавна на $(x_0, x_0 + \delta)$.

Дефиниција 4.4.2.3. Точката x_0 во која функцијата f е непрекината и го менува конкавитетот, се нарекува **превојна точка** на f . Ако x_0 е превојна точка на f , тогаш $P(x_0, f(x_0))$ е превојна точка на графикот на f .

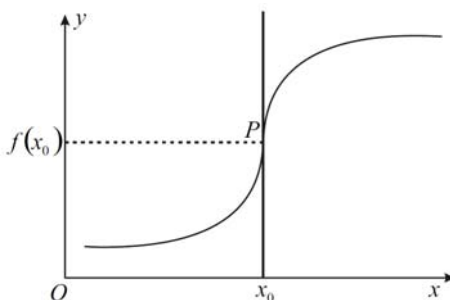
Тангентата на графикот на функцијата во превојната точка, ако постои, го сече графикот во истата точка. На последниот график долу е дадена превојна точка во која не постои тангентата на графикот. На третиот график е дадена превојна точка во која тангентата е вертикална т.е. $f'(x_0)$, па и $f''(x_0)$ не постојат.



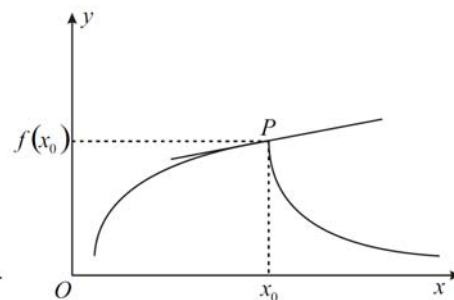
Цртеж 4.4.2.3.1.



Цртеж 4.4.2.3.2.



Цртеж 4.4.2.3.3.



Цртеж 4.4.2.3.4.

Теорема 4.4.2.4. (Потребен услов за постоење на превојна точка). Нека функцијата f има непрекинат втор извод во x_0 . Ако x_0 е превојна точка на f , тогаш $f''(x_0) = 0$.

Доказ. Да претпоставиме спротивно дека $f''(x_0) \neq 0$.

Нека $f''(x_0) < 0$. Поради непрекинатоста на f'' следува дека постои околина на x_0 во која $f''(x) < 0$. Но, тогаш според претходната теорема следува дека f е конвексна на таа околина, па x_0 не е превојна точка.

Аналогно, ако $f''(x_0) > 0$, би добиле дека f е конкавна во некоја околина на x_0 , па x_0 не би била превојна точка. ■

Обратното тврдење на теоремата не важи, т.е. ако $f''(x_0) = 0$, тогаш x_0 не мора да е превојна точка. Исто така, постојат функции што немаат втор извод во нивните превојни точки. Следниве теореми ги даваат доволните услови за постоење на превојна точка во x_0 .

Пример 4.4.2.5. За функцијата $f(x) = x^4$ важи $f''(x) = 12x^2$ и $f''(0) = 0$, но 0 не е превојна точка.

Теорема 4.4.2.6. (Прв критериум за постоење на превојна точка), Нека функцијата f има втор извод на (a, b) , освен можеби во точката $x_0 \in (a, b)$ во која е непрекината и $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не постои.

Ако функцијата f'' го менува знакот во x_0 , тогаш x_0 е превојна точка на f .

Доказ. Нека f'' го менува знакот во x_0 . Од теорема 4.4.2.2. и дефиниција 4.4.2.3., следува дека x_0 е превојна точка на f . ■

Теорема 4.4.2.4. (Втор критериум за постоење на превојна точка). Нека функцијата f има втор извод на (a, b) и трет извод во $x_0 \in (a, b)$.

Ако $f''(x_0) = 0$ и $f'''(x_0) \neq 0$, тогаш x_0 е превојна точка на f .

Доказ. Нека $f'''(x_0) > 0$. Од $f'''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} > 0$,

следува дека постои околина U на x_0 , таква што за секое x од таа околина

$$\frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} > 0 \stackrel{f''(x_0)=0}{\Leftrightarrow} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0.$$

Оттука, за $x < x_0$ $f''(x) < 0$, а за $x > x_0$ $f''(x) > 0$. Според теорема 4.4.2.2. следува дека x_0 е превојна точка за f .

2) Второто тврдење се докажува аналогно. ■

Теорема 4.4.2.5. (Обопштен втор критериум за постоење на превојна точка). Нека функцијата f има непрекинати изводи од n -ти ред на (a, b) , $n \geq 2$. Нека $x_0 \in (a, b)$ и $f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, но $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогаш:

1. Ако n е парен број, тогаш f има локален екстрем во x_0 при што:

-Ако $f^{(n)}(x_0) < 0$, тогаш f е конвексна во околина на x_0 ;

-Ако $f^{(n)}(x_0) > 0$, тогаш f конкавна во околина на x_0 ;

2. Ако n е непарен број, тогаш f има превојна точка во x_0 .

Доказ. Види прилог.

Пример 4.4.2.2. За функцијата $f(x) = x^3$, важи:

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x \quad \text{и} \quad f'''(x) = 6.$$

Притоа, $f'(x) = 0$ за $x = 0$. Но:

$$f'(0) = f''(0) = 0 \quad \text{и} \quad f'''(0) = 6 \neq 0.$$

Следува дека 0 е превојна точка за функцијата f .

4.4.3 Асимптоти на функција.

Дефиниција 4.4.3.1. Нека функцијата $y = f(x)$ е дефинирана во околина на точката a , освен во точката a .

Правата $x = a$ е **вертикална асимптота**, ако е исполнето барем едно од четирите равенства:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \text{ или } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty.$$

Дефиниција 4.4.3.2. Нека функцијата $y = f(x)$ е дефинирана во околина на $-\infty$ или $+\infty$.

Правата $y = b$ е **хоризонтална асимптота**, ако:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \text{ или } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

Ако $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, тогаш правата $y = b$ се нарекува **лева хоризонтална асимптота**, а ако $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ тогаш $y = b$ е **десна хоризонтална асимптота**.

Дефиниција 4.4.3.3. Нека функцијата $y = f(x)$ е дефинирана во околина на $-\infty$ или $+\infty$.

Правата $y = kx + n$, $k \neq 0$ е **коса асимптота**, ако:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx); \text{ или}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Ако k и n се добиваат кога $x \rightarrow -\infty$, тогаш $y = kx + n$ се нарекува **лева коса асимптота**, додека кога $x \rightarrow +\infty$ **десна коса асимптота**.

Задача 4.4.3.4. Најди ги косите асимптоти на функцијата:

$$y = \frac{|1-x|(x+2)}{x-3}.$$

Решение. Имаме: $|1-x| = \begin{cases} 1-x, 1-x \geq 0 \text{ т.е. } x \leq 1 \\ -(1-x), 1-x \leq 0 \text{ т.е. } x \geq 1 \end{cases}$

За $x \leq 1$:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-x)(x+2)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x-x^2}{x^2-3x} = -1 \text{ и}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(1-x)(x+2)}{x-3} + x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2-x^2-2x+x^2-3x}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-4x}{x^2-3x} = 0 \quad (1),$$

Следува дека левата коса асимптота е: $y = kx + n \Leftrightarrow y = -x$.

За $x \geq 1$:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(1-x)(x+2)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2+x+x^2}{x^2-3x} = 1 \text{ и}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-(1-x)(x+2)}{x-3} - x \right) =$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(1-x)(x+2)}{x-3} + x \right) = -0 = 0.$$

Следува дека десната коса асимптота е: $y = kx + n \Leftrightarrow y = x$.

Задача 4.4.3.5. Најди ги косите асимптоти на функцијата:

$$y = |x|e^{-\frac{4}{x-1}}.$$

Решение. Важи: $|x| = -x$ за $x \leq 0$ и $|x| = x$ за $x \geq 0$.

За $x \leq 0$,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-xe^{-\frac{4}{x-1}}}{x} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{4}{x-1}} = -e^{-\frac{4}{-\infty}} = -e^0 = -1$$

и

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-xe^{\frac{4}{x-1}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - e^{\frac{4}{x-1}} \right) = (-\infty) \cdot 0 =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^{\frac{4}{x-1}}}{\frac{1}{x}} \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{4}{(x-1)^2} e^{\frac{4}{x-1}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{(x-1)^2} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{4}{x-1}} = 4 \cdot e^0 = 4.$$

Следува дека левата коса асимптота е $y = kx + n \Leftrightarrow y = -x + 4$.

Аналогно, десната коса асимптота е: $y = x - 4$. До заклучокот се стигнува и директно, бидејќи кога $x \rightarrow +\infty$, $y = xe^{\frac{4}{x-1}}$, од каде што изразите во лимесите се со спротивен знак од соодветните лимеси во претходниот случај, и заради:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x-1} = 0,$$

коэффициентите k и n ќе бидат со спротивен знак.

Геометриска интерпретација на асимптота.* I.

Растојанието од графикот на функцијата $y = f(x)$ до вертикалната асимптота $x = a$ е $d = |x - a|$, при што $d \rightarrow 0$ кога $x \rightarrow a$. Значи, графикот на функцијата неограничено се доближува до вертикалната асимптота кога x се доближува кон a .

II. Нека $x \rightarrow -\infty$. Од дефиницијата за коса асимптота $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx)$, следува дека:

$$n + \alpha(x) = f(x) - kx \text{ и } \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = kx + n + \alpha(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = 0.$$

Нека точката P е подножје на нормалата спуштена од точката M на асимптотата и φ е аголот што го зафаќа асимптотата со позитивната насока на x -оската. Тогаш, заради $|\cos \varphi| = |\cos(\pi - \varphi)|$, растојанието меѓу графикот на f точката M е:

$$d = \overline{MP} = \overline{MN} |\cos \varphi|,$$

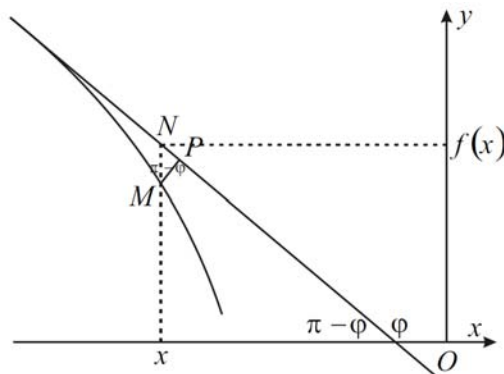
бидејќи $\overline{MN} = |\alpha(x)|$, $|\alpha(x)| \rightarrow 0$ кога $x \rightarrow -\infty$ и $\cos \alpha \leq 1$ следува:

$$d \rightarrow 0 \text{ кога } x \rightarrow -\infty.$$

Значи, графикот на функцијата неограничено се доближува до правата $y = kx + n$, кога x тежи кон $-\infty$.

Аналогно, истиот заклучок следува за случајот $x \rightarrow +\infty$.

Својството го поседува и хоризонталната асимптота $y = n$. Тврдењето се докажува, ако во претходната анализа ставиме $k = 0$ (тогаш $\alpha = 0$ од каде $\cos \alpha = 1$).



Цртеж 4.4.3.

Коментар 4.4.3.6. Графикот на функцијата може да ја сече косата или хоризонталната асимптота. Ако функцијата има лева (десна) хоризонтална асимптота, тогаш таа не може да има лева (десна) коса асимптота и обратно. Кај графиците од рационални функции, левите и десните асимптоти се совпаѓаат. Вертикалните асимптоти се бараат во точките од работ на дефиниционата област.

4.5. Испитување тек и цртање график на функција

Испитувањето на текот и цртањето на графикот на функцијата $y = f(x)$ го спроведуваме според следниов редослед:

1. Дефинициона област. Определуваме дефинициона област D_f на функцијата f .

2. Пресеци со оски. Координатите на пресечните точки со y -оската, ако постојат, се решение на системот $x = 0, y = f(x)$. Координатите на пресечните точки со x -оската, ако постојат, се решенија на системот $y = 0, y = f(x)$.

3. Симетрија (парност, непарност, периодичност).

Утврдуваме дали функцијата, парна, непарна или ниту парна ниту непарна. Ако функцијата е парна или непарна, доволно е испитувањето да го направиме на еден од интервалите:

$$(-\infty, 0] \text{ или } [0, +\infty).$$

Ако функцијата е периодична, го определуваме периодот T и испитувањето го вршиме само на интервалот $[0, T]$.

4. Екстреми. Интервали на монотоност. Го користиме критериумот за определување на екстреми и интервали на монотоност со помош на изводи. Го пресметуваме $f'(x)$, ако постои, и ги наоѓаме критичните точки и интервалите во кои $f'(x)$ има ист знак. Ако $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не постои и f' го менува знакот при премин низ x_0 , тогаш $(x_0, f(x_0))$ е локален екстрем на графикот на f . На интервалите на кои $f' > 0$, f монотонно расте ($\nearrow$); додека на интервалите на кои $f' < 0$, f монотонно опаѓа ($\searrow$). Заради прегледност интервалите на монотоност и локалните екстреми ги запишуваме во табела.

5. Превојни точки. Интервали на конкавитет. Го користиме критериумот за определување на превојни точки и интервали на конкавитет со помош на изводи. Го пресметуваме $f''(x)$, ако постои, ги наоѓаме точките во кои $f''(x)$ го менува знакот, и ги означуваме интервалите во кои $f''(x)$ има ист знак. Ако $f''(x) > 0$, тогаш $f(x)$ е конкавна ($\cup$). Ако $f''(x) < 0$, тогаш $f(x)$ е

конвексна ($\cap$). Ако $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не постои и f'' го менува знакот при премин низ x_0 , тогаш $(x_0, f(x_0))$ е превојна точка на графикот на f . Интервалите на конкавитет и превојните точки ги запишуваме во табела.

6. Асимптоти. Ги определуваме асимптотите на графикот на f . Ги определуваме едностраните лимеси на f во точките во кои f има вертикални асимптоти.

7. Цртање график. Го цртаме графикот на f според добиените податоци. Ако тие не се доволни да се нацрта графикот, задаваме одреден број на точки од графикот.

Задача 4.5.1. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата: $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

Решение. 1. Дефинициона област. Имаме: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Пресеци со оски. Бидејќи $x \neq 0$, графикот нема пресек со y -оската. Заради:

$$y = 0 \Leftrightarrow (x+2)e^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

$\Pi(-2, 0)$ е пресечна точка со x -оската.

3. Парност, непарност. Важи:

$$y(-x) = (-x+2)e^{-\frac{1}{x}} \neq \pm y(x).$$

Следува дека y е ниту парна ниту непарна функција.

4. Екстремии. Монотоност. Првиот извод е:

$$\begin{aligned} y' &= e^{\frac{1}{x}} + (x+2)e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}} = \\ &= \frac{x^2 - x - 2}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} e^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Екстремии на функцијата се $x = 2$ и $x = -1$. Други точки на промена на знак (ТПЗ) нема. Бидејќи $y(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ и $y(2) = 4e^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{e}$, екстремите на графикот на функцијата се:

$$E_1\left(-1, \frac{1}{e}\right) \text{ и } E_2\left(2, 4\sqrt{e}\right).$$

Заради $y'(1) < 0$, y опаѓа на интервалите $(-1, 0)$ и $(0, 2)$ и расте за $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 2)$. Следува дека E_1 е локален максимум, а E_2 локален минимум.

5. Превојни точки. Конкавитет. Вториот извод е:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)e^{\frac{1}{x}} + \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\ &= \frac{x^2 + 4x - x^2 + x + 2}{x^4}e^{\frac{1}{x}} = \frac{5x + 2}{x^4}e^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Притоа,

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \text{ и}$$

$$y\left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5} + 2\right)e^{-\frac{5}{2}} = \frac{8}{5\sqrt{e^5}} \approx 0,1.$$

Значи, $P\left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5\sqrt{e^5}}\right)$ е превојна точка на графикот на

функцијата. Други ТПЗ за y'' нема. Заради $y''(0) > 0$ кога $x > -\frac{2}{5}$, y е конкавна на $\left(-\frac{2}{5}, 0\right)$ и на $(0, +\infty)$, и конвексна на $\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right)$.

6. Асимптоти. а) Имаме:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = 2e^{-\infty} = 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = 2e^{+\infty} = +\infty.$$

Следува дека $x=0$ е вертикална асимптота и графикот се доближува до 0 од лево.

б) Заради:

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = \pm\infty \cdot 1 = \pm\infty,$$

Следува дека y нема хоризонтална асимптота.

в) Имаме:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot 1 = 1 \text{ и}$$

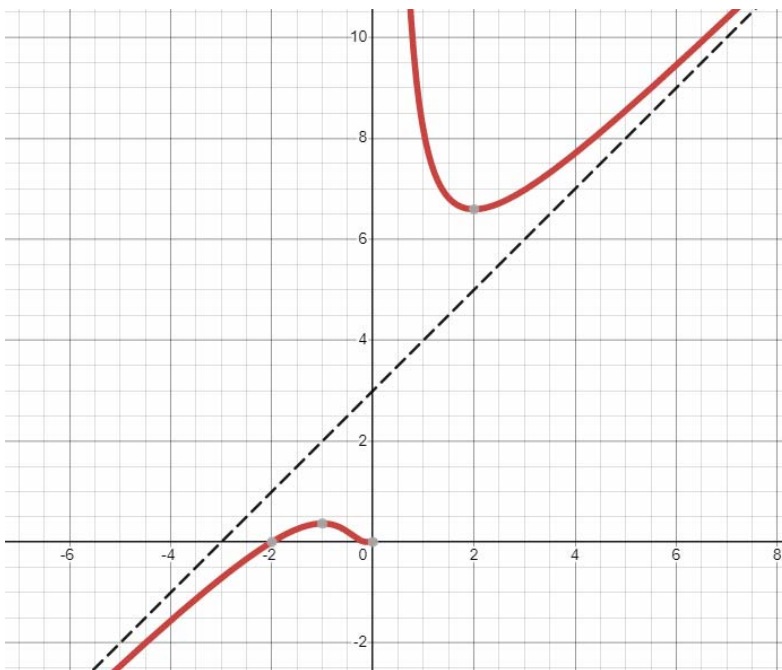
$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left((x+2)e^{\frac{1}{x}} - x \right) = (\infty - \infty) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right)^{LP} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + 1 + \frac{2}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = 3.$$

Следува $y = x + 3$ е коса асимптота.

7. График (види цртеж 4.5.1.).



цртеж 4.5.1.

4.6. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

Тејлоровата формула овозможува да се апроксимираат функциите со помош на полином, и има широка примена во математичката анализа и пошироко во техничките науки.

Дефиниција 4.6.1. Нека функцијата $f(x)$ е n пати диференцијабилна во околина на x_0 . Полиномот:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

се нарекува **Тејлоров полином** за функцијата $f(x)$ од ред n .

Теорема 4.6.1. (Тејлорова формула) Нека функцијата $f(x)$ е n пати непрекинато диференцијабилна и има $(n+1)$ -ви извод во околина U на точката x_0 . Тогаш, за секое $x \in U$ постои точка $u \in (x_0, x)$, таква што:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Доказ. Види прилог.

Последниот член во Тејлоровата формула,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

се нарекува **остаток** или остаточен член. Ако $n+1$ -от извод на функцијата $f(x)$ е ограничен во околина на точката x_0 , тогаш:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(u)(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^n (n+1)!} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} = 0.$$

Следува дека остатокот $R_n(x)$ е бесконечно мала големина од повисок ред во однос на $(x - x_0)^n$, кога $x \rightarrow x_0$.

Бидејќи точката u се наоѓа меѓу точките x_0 и x , таа може да се запише во облик:

$$u = x_0 + \theta(x - x_0) \text{ за некое } \theta \in (0,1).$$

Ако во Тејлоровата формула ставиме $x_0 = 0$, ја добиваме формулата:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \theta \in (0,1)$$

која се нарекува **Маклоренова формула**.

За функцијата претставена со Тејлоровата (Маклореновата) формула, велиме дека е развиена во Тејлоров (Маклоренов) полином.

Задача 5.* Апроксимирај ја функцијата $f(x) = x \sin 2x$ со Маклоренов полином од петти степен, а потоа оцени ја грешката на апроксимацијата за $x \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0; \quad f'(x) = \sin 2x + 2x \cos 2x, \quad f'(0) = 0; \\ f''(x) &= 2 \cos 2x + 2 \cos 2x - 4x \sin 2x = 4 \cos 2x - 4x \sin 2x, \quad f''(0) = 4; \\ f'''(x) &= -8 \sin 2x - 4 \sin 2x - 8x \cos 2x = -12 \sin 2x - 8x \cos 2x, \quad f'''(0) = 0; \\ f^{(4)}(x) &= -24 \cos 2x - 8 \cos 2x + 16x \sin 2x = -32 \cos 2x + 16x \sin 2x, \quad f^{(4)}(0) = -32; \\ f^{(5)}(x) &= 64 \sin 2x + 16 \sin 2x + 32x \cos 2x = 80 \sin 2x + 32x \cos 2x, \quad f^{(5)}(0) = 0; \\ f^{(6)}(x) &= 160 \cos 2x + 32 \cos 2x - 64x \sin 2x = 192 \cos 2x - 64x \sin 2x. \end{aligned}$$

Бидејќи $f^{(5)}(0) = 0$, Маклореновиот полином од петти степен е, всушност полином од четврт степен, односно:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + R_5(x) \\ &\Leftrightarrow f(x) = 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + R_5(x), \end{aligned}$$

каде што:

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\theta x)}{6!} x^6 = \frac{192 \cos 2\theta x - 64\theta x \sin 2\theta x}{6!} x^6, \quad \theta \in (0,1);$$

и бидејќи $|x| \leq \frac{1}{8}$, следува:

$$|R_5(x)| \leq \frac{192 + 64|x|}{6!} |x|^6 \leq \frac{200}{720} \frac{1}{8^6} = \frac{5}{18} \frac{1}{8^6} < 1,1 \cdot 10^{-6}.$$

Значи, за да ја пресметаме вредноста на функцијата f на интервалот $[-0,125; 0,125]$ со приближната формула:

$$f(x) \approx 2x^2 - \frac{4}{3}x^4,$$

грешката би била помала од $1,1 \cdot 10^{-6}$. ■

5. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

5.1. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Ако во претходните две поглавја го проучувавме проблемот на наоѓање извод на функција, во ова поглавје ќе разгледаме обратен проблем односно наоѓање функција чиј извод е познат.

5.1.1. Дефиниција на неопределен интеграл

Во ова поглавје под интервали $P, Q, \dots$, ќе подразбираме отворени интервали.

Дефиниција 5.1.1.1. Нека функцијата f е дефинирана на интервалот P . Функцијата F е **примитивна функција** на f на интервалот P ако важи:

$$F'(x) = f(x) \text{ на } P.$$

Дефиниција 5.1.1.2. Множеството од сите примитивни функции за функцијата f на P , се нарекува **неопределен интеграл** за функцијата f на P и се означува со:

$$\int f(x) dx.$$

Ако $F(x)$ е примитивна функција на f , тогаш и $F(x) + C$, каде што C е произволна константа, е примитивна функција на f . Имено,

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x), \quad x \in P.$$

Други примитивни функции на f на P нема. Имено, ако F_1 и F_2 се примитивни функции на f на P , тогаш според теоремата 4.2.6. следува дека F_1 и F_2 се разликуваат за константа.

Функцијата f се нарекува подинтегрална функција. Постапката за наоѓање примитивна функција, односно неопределен интеграл на f се нарекува **интегрирање** или интеграција.

Коментар. Операциите со неопределени интегралы се операции со множества од функции. На пример: $\int \sin x dx$ е множеството функции $\{-\cos x + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ кое се означува со $-\cos x + C$. $\int \sin x dx - \int \sin x dx$ е множеството од сите функции што се добиваат со собирање на функција од првиот со функција од вториот интеграл, односно $\{C \mid C \in \mathbb{R}\}$, кое се означува со C . Затоа пишуваме:

$$\int \sin x dx - \int \sin x dx = C.$$

Имајќи предвид дека сите примитивни функции се разликуваат за константа, во пракса оперираме со една примитивна функција и на крај додаваме константа, пишуваме:

$$\int \sin x dx - \int \sin x dx = -\cos x + \cos x + C = C.$$

5.1.2. Основни својства на неопределен интеграл

Теорема 5.1.2.1. Ако F е една примитивна функција на f на интервалот P , тогаш:

$$\int F'(x) dx = F(x) + C, \quad \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

Доказ. Следува директно од дефиницијата за неопределен интеграл.

Теорема 5.1.2.2. (Линеарност на неопределениот интеграл). Ако функциите f и g имаат примитивни функции на интервалот P , тогаш и $f+g$ и $f-g$ и af , каде што a е константа, имаат примитивни функции на P , и

$$1) \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx; \text{ и}$$

$$2) \int af(x) dx = a \int f(x) dx.$$

Доказ. 1) Бидејќи $\left(\int (f(x) \pm g(x)) dx \right)' = f(x) \pm g(x)$ и

$$\left(\int f(x) dx \pm \int g(x) dx \right)' = \left(\int f(x) dx \right)' + \left(\int g(x) dx \right)' = f(x) \pm g(x),$$

следува:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

2) Заради:

$$\left(\int af(x) dx \right)' = af(x) \text{ и } \left(a \int f(x) dx \right)' = a \left(\int f(x) dx \right)' = af(x), \quad x \in (a, b),$$

следува:

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx.$$

5.1.3 Таблица на основни интегралы.

Бидејќи операцијата интеграција е инверзна од операцијата диференцирање, од таблицата за изводи на елементарните функции се добива следнава таблица на неопределени интегралы:

$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1, \quad x > 0; \quad 3. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \quad x \neq 0.$ $\left(\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C, \quad x > 0, \quad \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C, \quad x \neq 0 \right);$	
$2. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1. \quad \left(\int e^x dx = e^x + C \right);$	
$4. \int \sin x dx = -\cos x + C;$	$5. \int \cos x dx = \sin x + C;$
$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$	
$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$	
$8. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C, \quad x \neq \pm a$ $\left(\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + C, \quad x \neq \pm 1 \right);$	
$9. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases} \quad \left(\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases} \right);$	

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}, x \in (-a, a)$$

$$\left(\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}, x \in (-1, 1) \right);$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C, x \in \mathbb{R} \text{ за } k > 0, x^2 > -k \text{ за } k < 0.$$

Коментар 5.1.3.1. 1) Равенствата на интегралите во таблицата се точни на секој од интервалите содржани во дефиниционата област. Но, ако дефиниционата област е унија од повеќе дисјунктни максимални интервали, тогаш интеграционата константа е иста на секој од нив, но не мора да е иста на нивната унија. На пример, за подинтегралната функција $f(x) = \frac{1}{x}$ чијашто дефинициона област е множеството $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, второто равенство на целата дефинициона област е:

$$\begin{cases} \ln|x| + C_1 & x \in (-\infty, 0) \\ \ln|x| + C_2 & x \in (0, \infty) \end{cases} = \begin{cases} \ln(-x) + C_1 & x \in (-\infty, 0) \\ \ln x + C_2 & x \in (0, \infty) \end{cases}.$$

2) Ограничувањето $x > 0$ во првото равенство (1) е точно во општ случај, додека за одредени вредности на a може да биде и пошироко. На пример, ако $a = \frac{m}{n}$, каде што m и n се природни

броеви, $HЗД(m, n) = 1$ и n е непарен, тогаш $x \in \mathbb{R}$. Ако $a = -\frac{m}{n}$, каде што m и n се природни броеви и n е непарен, тогаш $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3) Од правилата за изводи и таблицата за извод од основни елементарни функции, следува дека извод од елементарна функција е, исто така, елементарна функција. Обратното не важи т.е. интегралите од некои елементарни функции како:

$$\int e^{-x^2} dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \frac{1}{\ln x} dx, x > 0, x \neq 1; \int \frac{\sin x}{x} dx, x \neq 0, \int \frac{\cos x}{x} dx, x \neq 0, \int \frac{e^x}{x} dx;$$

не се елементарни функции.

Интегралите 1)-11) се нарекуваат таблични интеграли. Со трансформација на подинтегралната функција и примена на својствата на неопределен интеграл, интегралите од останатите функции што ќе ги презентираме ќе ги сведеме на таблични интеграли.

Задача 5.1.3.2-3. Најди ги интегралите:

$$2) \int 2x^7 dx; \quad 3) \int 3^x 2^{2x} dx$$

Решение.

$$\int 2x^7 dx = 2 \int x^7 dx = 2 \frac{x^8}{8} + C = \frac{1}{4} x^8 + C;$$

$$\int 3^x 2^{2x} dx = \int (3 \cdot 4)^x dx = \int 12^x dx = \frac{12^x}{\ln 12} + C. \blacksquare$$

5.2. Смена на променливи

Интеграли од некои посложени функции со замена на променливата со друга променлива може да се сведат на интеграл кој е табличен или може да се реши со некоја позната постапка. Следнава теорема ги дава условите под кои може да се воведо смена на променливи.

Теорема 5.2.1. (Смена на променливи). Нека функцијата f непрекината на интервалот (a, b) и $x = \varphi(t)$ е строго монотона функција со непрекинат извод на интервалот (c, d) , и ранг (a, b) . Тогаш:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Доказ. Според условите од теоремата дефинирана е сложената функција $f(\varphi(t))$, која е непрекината како композиција на непрекинати функции. Нека $F(x)$ е примитивна функција за f на P . Бидејќи $F(x) = F(\varphi(t))$, $t \in Q$ следува:

$$\begin{aligned} f(x) = F'(x) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) &\Leftrightarrow \\ f(x) = f(\varphi(t))\varphi'(t) &\Leftrightarrow \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \blacksquare \end{aligned}$$

Ако се пресмета интегралот $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C$, тогаш лесно се пресметува интегралот $\int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C$, каде што функцијата φ^{-1} постои, бидејќи функцијата φ е строго монотона, односно има инверзна.

Смената на променливи најчесто се користи кога подинтегралната функција е производ на две функции $h(f(x))$ и $g(x)$ такви што g се разликува за константа од изводот на функцијата f . Тогаш воведуваме смена $f(x) = t$. Смена на променливи се користи и за запишување на подинтегралната функција во поелементарен вид.

Ако интегрирањето се гледа како обратна операција од изведување, тогаш во некоја смисла теоремата за смена на променливи може да се смета за обратна теорема од теоремата за извод од сложена функција.

Задача 5.2.2-5. Најди ги интегралите:

$$2) \int \sin 7x dx; \quad 3) \int e^{\cos x} \sin x dx; \quad 4) \int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx; \quad 5) \int \frac{dx}{x \ln x}.$$

Решение. Заради прегледност, смената и диференцијалот ќе ги запишуваме во загради.

$$\begin{aligned} 2) \int \sin 7x dx &= \left(\begin{array}{l} 7x = t \\ 7dx = dt \end{array} \right) = \int \sin t \frac{dt}{7} = \\ &= \frac{1}{7}(-\cos t) + C = -\frac{1}{7}\cos 7x + C; \end{aligned}$$

Ако F е примитивна функција за f , тогаш:

$$\int f(kx+n)dx = \int f(t) \frac{dt}{k} = \frac{1}{k} F(t) + C = \frac{F(kx+n)}{k} + C,$$

Затоа интегралите од ваков облик може да ги пресметаме директно, како што правиме кај извод од сложена функција. Записот би бил:

$$\int \sin 7x dx = \frac{-\cos 7x}{7} + C = -\frac{1}{7} \cos 7x + C.$$

$$\begin{aligned} 3) \int e^{\cos x} \sin x dx &= \left(\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right) = \\ \int e^t (-dt) &= -e^t + C = -e^{\cos x} + C; \end{aligned}$$

Интеграцијата има пократок запис ако $\sin x dx$ се запише како диференцијал $-d(\cos x)$:

$$\int e^{\cos x} \underbrace{\sin x dx}_{-d(\cos x)} = -e^{\cos x} + C.$$

Иако постапката е пократка, бара поголема концентрација и ретко ќе ја користиме.

$$\begin{aligned} 4) \int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx &= \left(\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right) = \\ \int \frac{-dt}{\sqrt{1+t^2}} &= -\ln |t + \sqrt{t^2+1}| + C = \\ -\ln |\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 1}| &+ C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \int \frac{dx}{x \ln x} &= \left(\begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right) = \\ \int \frac{dt}{t} &= \ln |t| + C = \ln |\ln x| + C \end{aligned}$$

5.3. Парцијална интеграција

Теорема 5.3.1. (Парцијална интеграција). Ако $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се диференцијабилни функции на (a, b) и vu' има примитивна функција на (a, b) , тогаш и uv' има примитивна функција и:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx, \text{ т.е. } \int u dv = uv - \int v du.$$

Доказ. Од формулата за извод од производ

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

следува:

$$\begin{aligned} \int (u(x)v(x))' dx &= \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx \Leftrightarrow \\ u(x)v(x) + C &= \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx \Leftrightarrow \\ \int u(x)v'(x) dx &= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx. \end{aligned}$$

Бидејќи $dv = v'(x)dx$ $du = u'(x)dx$ последната формула има облик: $\int u dv = uv - \int v du$ ■

Парцијална интеграција се користи ако подинтегралната функција може да се претстави како производ од две функции u и v , така што производот од изводот на u и интегралот на v , да е подинтегрална функција на поедноставен интеграл, или на интеграл којшто е пропорционален и различен од првобитниот. Ако тоа е случај со n -тиот извод на u и n -тиот интеграл на v , тогаш парцијалната интеграција се применува n -пати.

На пример со парцијална интеграција се пресметуваат интегралите од видот: $\int \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} \text{циклометриска} \\ \text{функција} \end{smallmatrix} \right)}_u \underbrace{dx}_{dv}, \int \underbrace{P_n(x)}_u \underbrace{\sin ax dx}_{dv}$, каде

што $P_n(x)$ е полином од n -ти ред, $\int \underbrace{P_n(x)}_u \underbrace{\cos ax dx}_{dv}, \int \underbrace{P_n(x)}_u \underbrace{\ln^n x}_{dv} dx$,

$\int \underbrace{P_n(x)}_u \underbrace{e^{ax}}_{dv} dx, \int e^{ax} \sin \beta x dx, \int e^{ax} \cos \beta x dx$. Кај последните две

подинтегрални функции сеедно е која функција ќе избереме да е u , а која v' .

Методот на парцијална интеграција уште се нарекува **интегрирање по делови**. Во одредена смисла формулата за парцијална интеграција може да се смета за обратна теорема од формулата за извод од производ.

Задача 5.3.2-5. Најди ги интегралите:

$$2) \int x \cos x dx; 3) \int x e^x dx; 4) \int \arctg x dx; 5) \int e^x \sin x dx.$$

Решение. Заради прегледност, чекорите во парцијалната интеграција ќе ги пишуваме во загради.

$$2) \int x \cos x dx = \left(\begin{array}{ll} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{array} \right) = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C;$$

Ако изразите во заградата u , dv , du и v ги разгледаме како елементи на квадратна шема, тогаш uv е производот на дијагоналните елементи, а подинтегралната функција vdu е производ на елементите од втората редица.

$$3) \int x e^x dx = \left(\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = (x-1) e^x;$$

4) Функцијата $\arctg x$ ја разгледуваме како производ $(\arctg x) \cdot 1$. Тогаш може да се примени методот на парцијална интеграција, кој дадениот интеграл го сведува н интеграл од рационална функција што се решава со смена. Имаме:

$$\int \arctg x dx = \left(\begin{array}{ll} u = \arctg x & dv = dx \\ du = \frac{1}{1+x^2} dx & v = x \end{array} \right) = x \arctg x - \underbrace{\int \frac{x}{1+x^2} dx}_{I_1};$$

каде што:

$$I_1 = \left(\begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right) = \int \frac{1}{t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Следува:

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

5) Интегралот се решава со два пати примена на парцијална интеграција, при што во двата случаја за u и dv треба да се земе иста класа на функции, или тригонометриска или експоненцијална. Во спротивно би се вратиле на почетниот интеграл.

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \left(\begin{array}{ll} u = e^x & dv = \sin x dx \\ du = e^x dx & v = -\cos x \end{array} \right) = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \\ &\left(\begin{array}{ll} u = e^x & dv = \cos x dx \\ du = e^x dx & v = \sin x \end{array} \right) = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \\ &\underline{e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx}. \end{aligned}$$

Од првиот и од последниот израз на равенствата, имаме:

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx \Leftrightarrow \\ 2 \int e^x \sin x dx &= e^x (\sin x - \cos x) + C \Leftrightarrow \\ \int e^x \sin x dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C. \end{aligned}$$

5.4. Интеграли од линеарен бином и квадратен трином

Интеграли од линеарен бином. Ќе ги разгледаме интегралите:

$$1) \int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C \text{ и } 2) \int \frac{dx}{(x+a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C, \quad n \neq 1.$$

Интеграли од квадратен трином. Во овој пасус ќе ги разгледаме интегралите:

$$\begin{aligned} &\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad ax^2+bx+c \neq 0; \\ &\int (ax^2+bx+c)^{\pm \frac{1}{2}} dt, \quad \begin{array}{l} b^2-4ac > 0 \text{ или} \\ a > 0, b^2-4ac < 0 \end{array} \quad (1). \end{aligned}$$

што содржат квадратен трином, односно трином со степен 2.

Прво се трансформира триномот $ax^2 + bx + c$ во интегралот, додека да се стигне до квадратен бином, преку следниве два чекора:

1. Се вади членот $|a|$ пред триномот (може и a ако триномот не е под корен). Триномот добива облик $\pm x^2 + ax + b$.

2. Се воведува смена $t = x \pm \frac{a}{2}$. Триномот добива облик: $t^2 \pm a, a - t^2$.

Следува дека интегралите (1) се сведуваат на:

$$1) \int \frac{Mt + N}{(t^2 + k)^n} dt, n \in \mathbb{N}; \text{ и } 2) \int \sqrt{a^2 - t^2} dt \text{ или } \int \sqrt{t^2 + k} dt.$$

1а) Ќе ја опишеме постапката за пресметување на: $\int \frac{dx}{(x^2 + k)^n}$.

За $k = 0$, $I_n = \int \frac{dx}{x^{2n}} = -\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}} + C$. Нека $k \neq 0$.

За $n = 1$,

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + k} = \begin{cases} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, x \neq \pm a, k = -a^2 < 0 \\ \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, x \neq \pm a, k = a^2 > 0 \end{cases}.$$

За $n > 1$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + k)^n} = \frac{1}{k} \int \frac{x^2 + k - x^2}{(x^2 + k)^n} dx = \\ &= \frac{1}{k} \left(\int \frac{dx}{(x^2 + k)^{n-1}} - \int \underbrace{\frac{x}{(x^2 + k)^n} dx}_{dv} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} u = x & dv = \frac{x}{(1+x^2)^n} dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{k} \left(I_{n-1} - \left(-\frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(x^2+k)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{k} \left(\frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2+k)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \right).$$

Следува дека интегралот I_n се изразува преку I_{n-1} , кој се изразува преку I_{n-2} , ..., кој се изразува преку решениот интеграл I_1 .

$$16) \int \frac{Mt+N}{(t^2+k)^n} dt = M \int \frac{t}{(t^2+k)^n} dt + N \int \frac{dt}{(t^2+k)^n}.$$

Интегралот $\int \frac{t}{(t^2+k)^n} dt$ со смената $\begin{matrix} t^2+k=x \\ 2tdt=dx \end{matrix}$ се сведува на:

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{2(n-1)x^{n-1}} + C,$$

додека постапката за решавање на интегралот $\int \frac{dt}{(t^2+k)^n}$ ја опишавме претходно.

$$2a) \int \frac{\sqrt{t^2+k} dt}{\sqrt{t^2+k}} = \int \frac{t^2+k}{\sqrt{t^2+k}} dt = \int t \frac{t}{\sqrt{t^2+k}} dt + k \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k}} =$$

$$\left(\begin{matrix} u=t & dv=\frac{t}{\sqrt{t^2+k}} dt \\ du=dt & v=\sqrt{t^2+k} \end{matrix} \right) =$$

$$\underline{t\sqrt{t^2+k} - \int \sqrt{t^2+k} dt + k \ln|t+\sqrt{t^2+k}|}.$$

Ако ги изедначиме најлевиот и најдесниот израз во равенствата добиваме:

$$\int \sqrt{t^2+k} dt = \frac{t}{2} \sqrt{t^2+k} + \frac{k}{2} \ln|t+\sqrt{t^2+k}| + C.$$

$$26) \int \frac{\sqrt{a^2-t^2} dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \int \frac{a^2-t^2}{\sqrt{a^2-t^2}} dt = a^2 \int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} - \int t \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}} dt =$$

$$\left(\begin{array}{l} u = t \quad dv = \frac{t dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} \\ du = dt \quad v = -\sqrt{a^2 - t^2} \end{array} \right) =$$

$$a^2 \arcsin \frac{t}{a} - \left(-t\sqrt{a^2 - t^2} + \int \sqrt{a^2 - t^2} dt \right) =$$

$$\underline{a^2 \arcsin \frac{t}{a} + t\sqrt{a^2 - t^2} - \int \sqrt{a^2 - t^2} dt .}$$

Ако ги изедначиме најлевиот и најдесниот израз во равенствата добиваме:

$$\int \sqrt{a^2 - t^2} dt = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{t}{a} + \frac{t}{2} \sqrt{a^2 - t^2} + C .$$

Задача 5.4.1. Најди го интегралот: $I = \int \frac{2x+3}{x^2+4x-1} dx .$

Решение. Имаме:

$$I = \int \frac{2(x+2)-4+3}{(x+2)^2-4-1} dx = \left(\begin{array}{l} x+2=t \\ dx=dt \end{array} \right) = \underbrace{\int \frac{2t}{t^2-5} dt}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{1}{t^2-5} dt}_{I_2} .$$

Првиот интеграл се решава со смена:

$$I_1 = \left(\begin{array}{l} t^2 - 5 = k \\ 2t dt = dk \end{array} \right) = \int \frac{dk}{k} = \ln |k| = \ln |(x+2)^2 - 5| = \ln |x^2 + 4x - 1| .$$

Вториот интеграл е табличен:

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}} \right| = .$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x+2-\sqrt{5}}{x+2+\sqrt{5}} \right|$$

Значи:

$$I = \ln |x^2 + 4x - 1| - \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x+2-\sqrt{5}}{x+2+\sqrt{5}} \right| + C .$$

5.5. Интеграли од рационални функции

Интегрирањето на рационални функции $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ се сведува на сума од интеграли од облик $\int P(x) dx$, каде што P е полином, $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ и $\int \frac{Mx+N}{(x^2+ax+b)^n} dx$, $n \in \mathbb{N}$ кои претходно ги изучивме.

Постапката за интегрирање на рационална функција се сведува на следниве чекори:

1°. Ако $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$, каде што $\deg P(x)$ и $\deg Q(x)$ се степените на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$, тогаш полиномите се делат, од каде според Евклидовиот алгоритам за полиноми

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)} \text{ и } \deg P_2(x) < \deg Q(x).$$

Следува:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int P_1(x) dx + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)} dx \text{ и } \deg P_2(x) < \deg Q(x).$$

Рационалната функција $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ за која $\deg P_2(x) < \deg Q(x)$ се нарекува **правилна**.

2°. Според основната теорема на алгебрата секој полином $Q(x)$ може еднозначно да се претстави како производ од константа, степени на различни биноми од облик $x-a$ и триними x^2+ax+b што немаат реални решенија. Во тој случај велиме $Q(x)$ е **факторизиран** или претставен во **каноничен облик**, додека множителите се нарекуваат **прости множители**.

3°. Нека на секој множител на $Q(x)$ му соодветствува сумата:

$$(x-a)^n \rightarrow \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n} \text{ или}$$

$$(x^2 + ax + b)^k \rightarrow \frac{A_1x + B_1}{(x^2 + ax + b)} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + ax + b)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(x^2 + ax + b)^k}$$

Од теоријата на алгебрата следува дека секоја правилна рационална функција $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ може еднозначно да се претстави како збир од горните суми. Ваквото претставување се нарекува **декомпозиција** на рационалната функција, додека членовите во сумата се нарекуваат **прости дробки**.

4°. На крајот се интегрира сумата од прости дробки.

Задача 5.5.1. Најди го интегралот: $I = \int \frac{3x^2 - x - 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx$.

Решение. Со групирање на именителот добиваме:

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x - 2) + x - 2 = (x^2 + 1)(x - 2).$$

Следува:

$$\frac{3x^2 - x - 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 2} \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - x - 5 = (Ax + B)(x - 2) + C(x^2 + 1).$$

За $x = 2$, имаме $5 = 5C$, т.е. $C = 1$. За $x = 0$, $-5 = -2B + 1$ т.е. $B = 3$ и за $x = 1$, $-3 = -(A + 3) + 2$ т.е. $A = 2$. Следува дека:

$$I = \int \left(\frac{2x + 3}{x^2 + 1} + \frac{1}{x - 2} \right) dx = \left(\frac{x^2 + 1 = t}{2x dx = dt} \right) = \int \frac{dt}{t} + 3 \arctg x + \ln|x - 2| =$$

$$\ln|x^2 + 1| + 3 \arctg x + \ln|x - 2| + C.$$

Коментар. Факторизацијата на полиномот може да се направи и со помош на теоремата на Њутн со наоѓање на еден корен на соодветната кубна равенка. Можните целобројни решенија се делители на -2 , од каде што со проверка се утврдува дека $x = 2$ е решение. Потоа, полиномот се дели со $x - 2$ и се добива количник $x^2 + 1$. Коефициентите може да се најдат и со развивање на (1):

$$3x^2 - x - 5 = Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B + Cx^2 + C$$

Последното равенство е точно за секоја вредност на x ако:

$$A + C = 3 \quad (2), \quad -2A + B = -1, \quad -2B + C = -5.$$

Од првата и од третата равенка $C = 3 - A$ и $C = 2B - 5$ од каде што $3 - A = 2B - 5$ т.е. $A = 8 - 2B$. Со замена во втората равенка:

$$-16 + 4B + B = -1 \Leftrightarrow 5B = 15 \Leftrightarrow B = 3.$$

Оттука $A = 8 - 6 = 2$ и $C = 3 - 2 = 1$.

5.6. Интеграли од ирационални функции

Интегрирањето на некои класи на ирационални функции со помош на соодветна смена може да се сведе на интегрирање на рационални функции. Ќе разгледаме една таква класа.

Интегралите од облик $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$, каде што R е

рационална функција од $x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}$ и $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \dots, \frac{r}{s}$ се рационални

броеви, со смената $x = t^k$, $k = H3C(n, q, \dots, s)$, се сведуваат на интеграл од рационална функција.

Поопшта класа интеграли од претходната е:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx, \quad ad \neq bc,$$

кои со смената $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, $k = H3C(n, q, \dots, s)$ се сведуваат на интеграл од рационална функција.

Задача 5.6.1. Најди го интегралот: $I = \int \frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt[3]{3x-1}+1} dx$.

Решение. Бидејќи $H3C(2, 3) = 6$, воведуваме смена:

$$t = \sqrt[6]{3x-1} \text{ т.е. } t^6 = 3x-1 \text{ од каде што } 6t^5 dt = 3dx \text{ т.е. } dx = 2t^5 dt.$$

Следува:

$$I = \int \frac{t^3}{t^2+1} 2t^5 dt = 2 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt.$$

Заради:

$$t^8 = t^8 - 1 + 1 = (t^4 - 1)(t^4 + 1) + 1 = \\ (t^2 - 1)(t^2 + 1)(t^4 + 1) + 1$$

добиваме:

$$\frac{t^8}{t^2 + 1} = (t^2 - 1)(t^4 + 1) + \frac{1}{t^2 + 1} = \\ t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1}.$$

Со почлено интегрирање на подинтегралната функција, добиваме:

$$I = 2 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctgt} t \right) + C = \\ 2 \left(\frac{\sqrt[6]{(3x-1)^7}}{7} - \frac{\sqrt[6]{(3x-1)^5}}{5} + \frac{\sqrt[6]{(3x-1)^3}}{3} - \sqrt[6]{3x-1} + \operatorname{arctg} \sqrt[6]{3x-1} \right) + C.$$

5.7. Интеграли од тригонометриски функции

Интеграли од облик $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Интегралите од тригонометриските функции:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

каде што R е рационална функција од $\sin x$ и $\cos x$, се сведуваат на интеграли од рационални функции со смената:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad x \in (-\pi + k\pi, \pi + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Притоа,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Навистина од: $\frac{x}{2} = \operatorname{arctgt} t$ следува: $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ и од

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$$

следува:

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \text{ и} \\ \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (5.7.1). \end{aligned}$$

Смената $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ некогаш доведува до сложена рационална функција. Кај некои подинтегрални функции со одредени својства на симетрија, со други смени може да се добијат поедноставни рационални функции.

- Ако важи:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

т.е подинтегралната функцијата е парна во однос на $\sin x$ и $\cos x$, се воведува смената:

$$\operatorname{tg} x = t, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Следува: $x = \arctgt$ и $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Тогаш:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{t^2 + 1}{t^2} \text{ од каде } \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ и} \\ \frac{1}{\cos^2 x} &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = t^2 + 1 \text{ од каде што } \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad (5.7.2). \end{aligned}$$

- Ако важи:

$$R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

т.е подинтегралната функцијата е непарна во однос на $\sin x$, се воведува смената:

$$\cos x = t, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

• Ако важи:

$$R(\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

т.е подинтегралната функцијата е непарна во однос на $\cos x$, се воведува смената:

$$\sin x = t, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 5.7.1. Најди го интегралот $I = \int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$.

Решение. Ја воведуваме смената:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \text{за } x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi) \cap I_f, \quad \text{каде што } k \in \mathbb{Z} \text{ и } I_f$$

е произволен интервал на дефинираност на подинтегралната функција. Оттука,

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{и} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \text{па} \\ I &= \int \frac{2}{1+t^2} \frac{1}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{2}{1+t^2} \frac{1}{\frac{8+8t^2-8t+7-7t^2}{1+t^2}} dt = \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2-8t+15} = 2 \int \frac{dt}{(t-4)^2-1} = \left(\frac{t-4=k}{dt=dk} \right) = 2 \int \frac{dk}{k^2-1} = \\ &= 2 \frac{1}{2} \ln \left| \frac{k-1}{k+1} \right| + C = \ln \left| \frac{t-5}{t-3} \right| + C = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C. \end{aligned}$$

Бидејќи:

$$\lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi^-} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C_k = C_k \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi^+} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C_{k+1} = C_{k+1},$$

важи $C_k = C_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Следува, интегралот на D_f е:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ каде што } F(x) = \begin{cases} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right|, & x \neq (2k+1)\pi \\ 0, & x = (2k+1)\pi \end{cases}.$$

Задача 5.7.2. Најди го интегралот: $I = \int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$.

Решение. Прв начин. Со помош на смената:

$$\operatorname{tg} x = t, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ и } dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) = I_k,$$

добиваме:

$$I = \int \frac{dt}{1+t^2} \frac{1}{2 - \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t^2} \frac{1}{\frac{2+2t^2-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+t^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C_k.$$

*Во задачата се најдени неопределените интеграли на секој од интервалите I_k , но не е најден интервалот на кој е дефинирана подинтегралната функција, т.е. на $\mathbb{R}$. За да се најде неопределениот интервал на $\mathbb{R}$ треба да се додефинираат примитивните функции во точките $x = (2k+1)\pi/2$ и да се определи единствена константа C :

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^-} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C_k = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C_{k+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_k = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_{k+1} \Leftrightarrow C_{k+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + C_k.$$

Ако $C_0 = C$, следува: $C_k = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + C$, па: $I = F(x) + C$, каде што:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{k\pi}{\sqrt{2}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\} \\ \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{2}}, & x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \end{cases}.$$

Во понатамошните задачи определувањето на константата C нема да го вршиме.

Интеграли од облик $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Интегралите $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $m, n \in \mathbb{Z}$ се сведуваат на следниве случаи:

1) Ако степенот на косинусот, n , е непарен, тогаш се воведува смената $\sin x = t$. Ако $n > 0$, тогаш се извршува трансформацијата $\cos^n x dx = (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x dx$, а ако $n < 0$ тогаш

$$\frac{dx}{\cos^{-n} x} = \frac{\cos x dx}{(\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}} \text{ и се заменува } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

2) Ако степенот на синусот, m , е непарен, тогаш се воведува смена $\cos x = t$ и се продолжува аналогно како во 1) при што се користи идентитетот $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

3) Ако степените на синусот и косинусот, n и m , се парни, тогаш се смалува редот на n или m со помош на формулите:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ и } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

4) Ако степените на синусот и косинусот, n и m , се непарни и негативни, тогаш со смената $\operatorname{tg} x = t$ може да се добие поедноставна рационална функција (5.7.3).

Интегралите:

$$\int \sin^n x dx = \int \underbrace{\sin^{n-1}}_u \underbrace{\sin x}_{dv} dx \text{ и } \int \cos^n x dx = \int \underbrace{\cos^{n-1}}_u \underbrace{\cos x}_{dv} dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

можат да се пресметаат и со помош на парцијална интеграција, при што се добиваат рекурентните релации:

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \quad (4.7.4);$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx \quad (4.7.5).$$

Задача 5.7.3. Најди го интегралот $I = \int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Решение. Заради:

$$\sin^2 x \cos^2 x = \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^2 = \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1}{4} \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{4} (1 - \cos 4x),$$

интегралот е:

$$I = \frac{1}{4} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + C = \frac{x}{4} - \frac{\sin 4x}{16} + C.$$

Интеграли од облик

$$\int \sin ax \cos bxdx, \int \sin ax \sin bxdx, \int \cos ax \cos bxdx$$

Интегралите $\int \sin ax \cos bxdx$, $\int \sin ax \sin bxdx$ и $\int \cos ax \cos bxdx$ се решаваат со помош на тригонометриските идентитети:

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x) \quad (5.7.6);$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} (\sin(a+b)x + \sin(a-b)x) \quad (5.7.7);$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x) \quad (5.7.8).$$

Задача 5.7.4. Најди го интегралот $I = \int \cos 3x \cos 7xdx$.

Решение. Заради:

$$\cos 3x \cos 7x = \frac{1}{2} (\cos 10x + \cos(-4x)) = \frac{1}{2} (\cos 10x + \cos 4x),$$

интегралот е:

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 10x}{10} + \frac{\sin 4x}{4} \right) + C = \frac{\sin 10x}{20} + \frac{\sin 4x}{8} + C.$$

5.8. Интеграли што се решаваат со тригонометриски смени

Интегралите од обликот:

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx \text{ и } \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx,$$

можат да се решат со тригонометриски смени, при што:

1) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ се решава со смената:

$$x = a \sin t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ (или } x = a \cos t, \quad t \in (0, \pi)) \quad (4.8.1);$$

2) $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$ се решава со смената:

$$x = a \operatorname{tg} t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ (} x = a \operatorname{ctg} t, \quad t \in (0, \pi)) \quad (4.8.2);$$

3) $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ се решава со смената:

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2} \right) \text{ (} x = \frac{a}{\sin t}, \quad t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right)) \quad (4.8.3).$$

Во следниве три задачи на уште еден начин со користење на тригонометриски смени ќе ги најдеме интегралите од квадратните триноми $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ и $\int \sqrt{x^2 + k} dx$ и низ коментари ќе покажеме дека множествата неопределени интегралите се еднакви, иако се претставени преку различни примитивни функции. Да напоменеме дека со тригонометриски смени се решаваат и други класи на интегралите.

Задача 5.8.1. Најди го интегралот $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Решение. Прв начин. Воведуваме смена

$$x = a \sin t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

Следува:

$$dx = a \cos t dt$$

и

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 t)} = a \sqrt{\cos^2 t} = a |\cos t| = a \cos t$$

од каде што:

$$\begin{aligned} I &= \int a^2 \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} - \frac{\sin 2 \arcsin \frac{x}{a}}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

Коментар. Последниот израз може да го доведеме до облик 5.4.2. Имено заради:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2t}{2} &= \frac{2 \sin t \cdot \cos t}{2} = \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = \\ \sin \arcsin \frac{x}{a} \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin \frac{x}{a}} &= \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}, \end{aligned}$$

добиваме:

$$I = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Втор начин. Интегралот аналогно се решава и со смената:

$$x = a \cos t, \quad t \in (0, \pi). \blacksquare$$

Задача 5.8.2. Најди го интегралот $I = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx$.

Решение. Воведуваме смена

$$x = atgt, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Следува: } dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$$

и

$$dx = \frac{2dt}{\cos^2 t} \text{ и } \sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 (1 + t^2)} = \sqrt{a^2 \frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{|\cos t|} = \frac{a}{\cos t},$$

па:

$$I = \int \frac{a}{\cos^2 t} \frac{a}{\cos t} dt = a^2 \int \frac{dt}{\cos^3 t}.$$

Бидејќи:

$$\int \frac{dt}{\cos^3 t} = \frac{1}{2} \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin t + 1}{\sin t - 1} \right| + C \quad (4.7.6.3 [1]),$$

ако воведеме смена:

$$\sin t = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}, \quad \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2t}}$$

добиваме:

$$I = \frac{a^2}{2} tgt \sqrt{1+tg^2t} + \frac{a^2}{4} \ln \left| \frac{tgt + \sqrt{1+tg^2t}}{tgt - \sqrt{1+tg^2t}} \right| + C =$$

$$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{4} \ln \left| \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{x - \sqrt{a^2 + x^2}} \right| + C.$$

Коментар. Заради:

$$\ln \left| \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{x - \sqrt{a^2 + x^2}} \right| + C = \ln \left| \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{x - \sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \right| + C = \ln \frac{(x + \sqrt{a^2 + x^2})^2}{a^2} =$$

$$2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) - 2 \ln a + C = 2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C,$$

следува дека:

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C. \blacksquare$$

Задача 5.8.3. Најди го интегралот $I = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx$.

Решение. Воведуваме смена:

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Следува дека:

$$dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t}$$

и

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = \sqrt{\frac{a^2(1 - \cos^2 t)}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{a^2 \tan^2 t} = |a \tan t| = a \tan t.$$

Оттука

$$\begin{aligned} I &= a^2 \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt = a^2 \int \frac{\sin^2 t}{(1 - \sin^2 t)^2} \cos t dt = \\ &\left(\begin{array}{l} \sin t = k \\ \cos t dt = dk \end{array} \right) = a^2 \int k \frac{k}{(k^2 - 1)^2} dk = \\ &\left(\begin{array}{ll} u = k & dv = \frac{k}{(k^2 - 1)^2} dk \\ du = dk & v = -\frac{1}{2(k^2 - 1)} \end{array} \right) = a^2 \left(-\frac{k}{2(k^2 - 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{k^2 - 1} dk \right) = \\ &-\frac{a^2}{2} \frac{k}{k^2 - 1} + \frac{a^2}{2} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{k - 1}{k + 1} \right| + C = \left(\begin{array}{l} k = \sin t \\ t = \arccos \frac{a}{x} \end{array} \right) = \\ &-\frac{a^2}{2} \frac{\sin \arccos \frac{x}{2}}{\sin^2 \arccos \frac{x}{2} - 1} + \frac{a^2}{4} \ln \left| \frac{\sin \arccos \frac{x}{2} - 1}{\sin \arccos \frac{x}{2} + 1} \right| + C. \blacksquare \end{aligned}$$

Коментар. Бидејќи:

$$k = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x},$$

добиваме:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{a^2 \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}}{2 \left(\frac{x^2 - a^2}{x^2} - 1 \right)} + \frac{a^2}{4} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} - 1}{\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + 1} \right| + C = \\ &\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - a^2} - x}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \right| + C. \end{aligned}$$

Заради:

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - a^2} - x}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \right| + C &= \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - a^2} - x}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \right| + C = \\ &= \ln \frac{a^2}{\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x \right)^2} + C = \\ &= 2 \ln a - 2 \ln \left| \sqrt{x^2 - a^2} + x \right| + C = -2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C, \end{aligned}$$

интегралот се сведува на:

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C.$$

5.9. Интеграли од останати трансцедентни функции

Интегралите $\int \frac{1}{x} R(\ln x) dx$ со смената $\ln x = t$, а интегралите $\int R(e^x) dx$ со смената $e^x = t$, се сведуваат на интеграли од рационални функции (5.9.1.).

6.1. ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

6.1.1. Дефиниција на определен интеграл

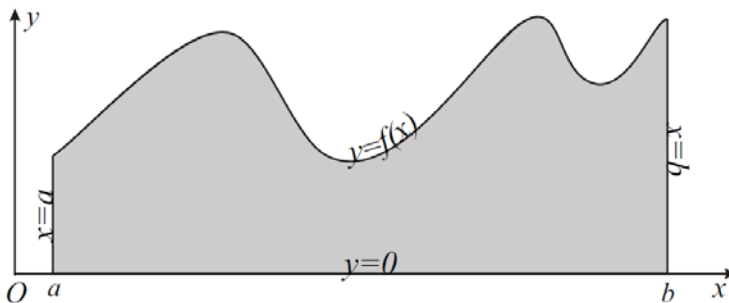
Проблем на пресметување плоштина на фигура.

Проблемот на наоѓање плоштини на рамнински ликови, доведува до воведување на поимот определен интеграл.

Нека функцијата f е дефинирана на $[a, b]$. **Криволиниски трапез на f над $[a, b]$** е множеството точки:

$$\{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Значи, криволинискиот трапез на f над $[a, b]$ е фигурата ограничена со отсечката $[a, b]$, правите $x = a$ и $x = b$ и графикот на функцијата f .



Цртеж 6.1.1.1.

Конечното множество точки $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, такви што:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b;$$

се нарекува **поделба P на интервалот $[a, b]$** .

Во продолжение ќе дадеме начин како да ја пресметаме плоштината на криволинискиот трапез.

Нека f е ненегативна непрекината функција на $[a, b]$.

Со помош на поделбата $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, интервалот $[a, b]$ го делиме на n подинтервали:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

Нека должината на секој од подинтервалите е:

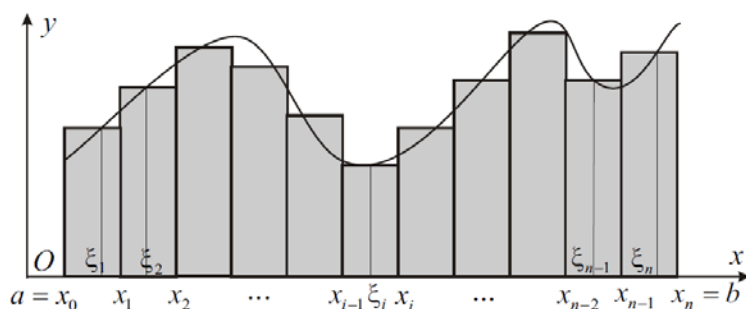
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Од секој подинтервал избираме точки:

$$\xi_1 \in [x_0, x_1], \xi_2 \in [x_1, x_2], \dots, \xi_n \in [x_{n-1}, x_n],$$

и ја формираме сумата:

$$\sigma_P = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$



Цртеж 6.1.1.2.

Сумата σ_P се нарекува **Риманова или интегрална сума** на функцијата f на $[a, b]$ која одговара на поделбата P и изборот на точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Бројот $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ се нарекува **должина на поделбата P** .

Бројот I е **граница на интегралните суми σ_P** кога $\|P\| \rightarrow 0$ или определен интеграл од a до b на f , ознака $\int_a^b f(x)dx$, ако за секое $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$, така што за секоја поделба на интервалот $[a, b]$ и секој избор на точки од подинтервалите, од $\|P\| < \delta$ да следува $|\sigma_P - I| < \varepsilon$. Значи,

$$I = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sigma_P = \int_a^b f(x)dx.$$

Кога f е непрекината функција реалниот број I постои.

Геометриската интерпретација на интегралната сума и определениот интеграл.

Римановата сума ја дава плоштината на скалестата фигура, т.е. на фигурата што е унија од правоаголниците со страни $f(\xi_i)$ и Δx_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Определениот интеграл $\int_a^b f(x)dx$ е плоштината на криволинискиот трапез на f над $[a, b]$, која претставува граница на плоштините на скалестите фигури.

На ист начин, определен интеграл на затворен интервал може да се дефинира во поопшт случај, така што, покрај за ненегативни и непрекинати функции, ќе важи и за негативни непрекинати функции, како и за други класи функции (види во прилог за класи на интегрибилни функции).

Дефиниција 6.1.1.1. (Дефиниција на определен интеграл). Нека функцијата f е дефинирана на интервалот $[a, b]$.

Ако за секоја поделба $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ на $[a, b]$, каде што:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n \text{ и } \|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i,$$

и секој избор на точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, секогаш постои иста конечна граница:

$$I = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

тогаш бројот I се нарекува определен интеграл од a до b на f и

се означува со $\int_a^b f(x)dx$. Значи:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Функцијата f се нарекува **подинтегрална функција**, а броевите a и b соодветно **долна и горна граница** на определениот интеграл на f на $[a, b]$. Ако постои определениот интеграл на f на $[a, b]$, велиме дека f е **интегрибилна** на $[a, b]$.

Од претходната дефиниција следува дека кога $\|P\| \rightarrow 0$ следува $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}$; но обратното не мора да важи и затоа членот од формулата $\|P\| \rightarrow 0$ не може да се замени со $n \rightarrow \infty$.

Се покажува дека ако функцијата f е интегралбилна на $[a, b]$, тогаш за да се пресмета определениот интеграл доволно е да се избере низа поделби $P_n = \{x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n\}$, такви што: $\|P_n\| \rightarrow 0$ (следува $n \rightarrow \infty$), фиксни точки: $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$ и да се пресмета границата:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^n) \Delta x_i.$$

Теорема 6.1.1.2. Ако f е интегралбилна на $[a, b]$, тогаш f е ограничена $[a, b]$.

Доказ. Ако f не е ограничена $[a, b]$, тогаш за секоја поделба би постоела низа од интегрални суми чија граница е бесконечност.

Навистина ако f не е ограничена на $[a, b]$ и $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ е поделба на $[a, b]$, тогаш f не е ограничена на барем еден подинтервал $[x_{k-1}, x_k]$. Следува дека постои низа точки (ξ_k^n) , $\xi_k^n \in [x_{k-1}, x_k]$, $n \in \mathbb{N}$, такви што:

$$|f(\xi_k^n)| \rightarrow +\infty \text{ кога } n \rightarrow +\infty,$$

па и низата интегрални суми:

$$|\sigma_P^n| = \left| \sum_{i=1, i \neq k}^n f(\xi_i^n) \Delta x_i + f(\xi_k^n) \Delta x_k \right| \rightarrow +\infty \text{ кога } n \rightarrow +\infty.$$

Следува дека не постои конечната граница $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sigma_P$, т.е. f не е интегралбилна на $[a, b]$. ■

Затоа понатаму ќе ги разгледуваме само ограничените функции.

6.1.2. Својства на определениот интеграл

Нека f е интегрибилна на $[a, b]$. Дефиницијата на определен интеграл ја прошируваме и во случај кога долната граница е поголема или еднаква на горната, со:

$$\int_b^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} - \int_a^b f(x) dx \text{ и } \int_a^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Последица 6.1.2.1. Ако f е интегрибилна на $[a, b]$, тогаш:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Теорема 6.1.2.2. Ако f интегрибилна на секој интервал што ги содржи точките a , b и c , тогаш:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Доказ.* Нека $a < c < b$. Да забележиме дека секоја поделба на $[a, c]$ и $[c, b]$, дефинира една поделба на $[a, b]$ и обратно. Имено, ако $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ и $P_2 = \{x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ соодветно се поделби на $[a, c]$ и $[c, b]$, тогаш $P = P_1 \cup P_2$ е поделба на $[a, b]$. Обратно, ако $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ е поделба на $[a, b]$, таква што $x_0, x_1, \dots, x_k \in [a, c]$ и $x_{k+1}, x_{k+1}, \dots, x_n \in [c, b]$, тогаш $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_k, c\}$ и $P_2 = \{c, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ соодветно се поделби на $[a, c]$ и $[c, b]$.

Избираме ξ_a и ξ_b од $[a, c]$ и $[c, b]$, соодветно. Нека $\Delta_a = c - x_{k-1}$ и $\Delta_b = x_{k+1} - c$. Заради $\Delta_a, \Delta_b \rightarrow 0$ кога $\|P\| \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^k f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right) = \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^k (f(\xi_i) \Delta x_i) + f(\xi_a) \Delta x_a \right) + \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left(f(\xi_b) \Delta x_b + \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right) \stackrel{\text{def}}{=} \end{aligned}$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2) Ако $a < b < c$ тогаш од 1) имаме:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

од каде што:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \stackrel{6.1.2.1}{=} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Аналогно, како 2), останатите 4 случаи се сведуваат на 1).■

Теорема 6.1.2.3. (Својство на линеарност на определениот интеграл). Ако f и g се интегрибилни на $[a, b]$ и $c \in \mathbb{R}$, тогаш $f + g$ и cf се интегрибилни на $[a, b]$ и

$$1) \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

$$2) \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

Доказ. Од дефиницијата на определен интеграл и својството на линеарност на сума имаме,

$$1) \int_a^b (f(x) + g(x))dx \stackrel{def}{=} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) + g(\xi_i))\Delta x_i =$$

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i \stackrel{def}{=} =$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$2) \int_a^b cf(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n cf(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$c \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \stackrel{def}{=} c \int_a^b f(x)dx. \blacksquare$$

Теорема 6.1.2.4. Ако f и g се интегрибилни функции на $[a, b]$, тогаш:

- 1) Ако $f \geq 0$ на $[a, b]$, тогаш $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;
- 2) Ако $f \geq g$ на $[a, b]$, тогаш $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$;
- 3) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Доказ.* 1) Бидејќи $f(x) \geq 0$ за секое $x \in [a, b]$ и $\Delta x_i > 0$, следува интегралната сума: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$ од каде што и:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0.$$

2) Бидејќи $f(x) \geq g(x)$ за секое $x \in [a, b]$ и $\Delta x_i > 0$, следува и:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &\geq \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i \Leftrightarrow \\ \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &\geq \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

3) Ако f е интегрибилна, тогаш и $|f|$ е интегрибилна. Од $-|f| \leq f \leq |f|$ и 2) следува:

$$\begin{aligned} \left(-\int_a^b |f(x)|dx = \right) \int_a^b -|f(x)|dx &\leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \text{ т.е.} \\ \left| \int_a^b f(x)dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)|dx. \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема 6.1.2.5.* (Теорема за средна вредност). Нека функцијата f е непрекината на $[a, b]$, $a < b$. Тогаш постои точка $\xi \in (a, b)$, таква што $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Доказ.* Нека $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ и $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$. Бидејќи $m \leq f(x) \leq M$ следува дека:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \Leftrightarrow m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx \Leftrightarrow$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad / : (b-a) \stackrel{a < b}{\Leftrightarrow} m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Бидејќи f е непрекината, следува дека за секое $a \in [m, M]$, постои $\xi \in [a, b]$, такво што $f(\xi) = a$. Специјално постои $\xi \in [a, b]$, такво што:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

Ќе покажеме дека точката ξ може да ја избереме од интервалот (a, b) . Ако $m = M$, тогаш f е константна функција, па тврдењето важи. Ако $m < M$ тогаш $m < f(\xi) < M$.

(Ако $f(\xi) = M$ тогаш би добиле:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) = m(b-a) = m \int_a^b dx \text{ т.е. } \int_a^b (f(x) - m) dx = 0.$$

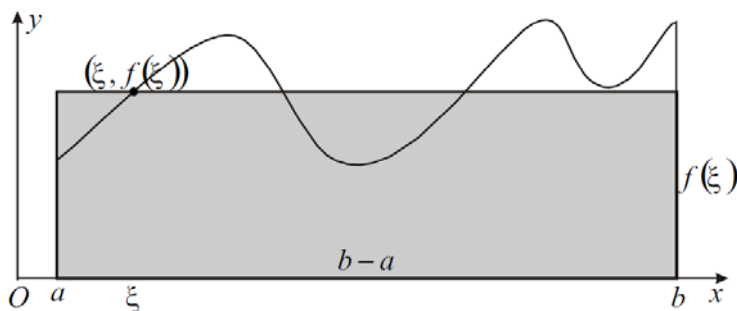
Бидејќи $f - m$ е непрекината, би добиле $f(x) = m = M, x \in [a, b]$)

Нека $m = f(x_1)$ и $M = f(x_2)$ за некои $x_1, x_2 \in [a, b]$. Бидејќи f е непрекината, ξ може да се избере така што:

$$\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b). \blacksquare$$

Бројот $f(\xi)$ се нарекува **средна вредност на f на $[a, b]$** .

Геометриска интерпретација на теоремата за средна вредност. Ако f е ненегативна непрекината функција на $[a, b]$, тогаш теоремата за средна вредност вели дека плоштината на криволинискиот трапез е еднаква на плоштината на правоаголникот со страни $b-a$ и $f(\xi)$.



Цртеж 6.1.2.5.

6.1.3. Формула на Њутн-Лајбниц

Теорема 6.1.3.1. Нека f е интеграбилна на $[a, b]$. Тогаш, функцијата $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$ е непрекината на $[a, b]$.

Доказ. Нека $x, x + \Delta x \in [a, b]$. Бидејќи f е интеграбилна на $[a, b]$, постои $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Оттука, имаме:

$$\begin{aligned} |F(x + \Delta x) - F(x)| &= \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \\ &= \left| \int_x^{x+\Delta x} M dt \right| = M|\Delta x| \rightarrow 0, \text{ кога } \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следува дека F е непрекината на $[a, b]$. ■

Теорема 6.1.3.2. Ако f е непрекината на $[a, b]$, тогаш $F(x)$ е диференцијабилна на (a, b) , при што $F'(x) = f(x)$ за секое $x \in (a, b)$.

Доказ. Нека $x, x + \Delta x \in (a, b)$. Со примена на теоремата за средна вредност имаме:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} \stackrel{TCB}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi),$$

за некоја точка $\xi \in (x, x + \Delta x)$. Притоа, бидејќи $\xi \in (x, x + \Delta x)$ од $\Delta x \rightarrow 0$, следува $\xi \rightarrow x$, а заради непрекинатоста на f , $f(\xi) \rightarrow f(x)$ кога $\xi \rightarrow x$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x). \blacksquare$$

*Од доказот следува дека на краевите на интервалот десниот извод во точката $x = a$ е $F'_+(a) = f(a)$, додека левиот извод во $x = b$ е $F'_-(b) = f(b)$.

Теорема 6.1.3.3. (Формула на Њутн-Лајбниц). Нека f е непрекината на $[a, b]$ и F е една нејзина примитивна функција, тогаш:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказ. Според претходната теорема и својство на примитивната функција, секоја примитивна функција на f има

облик $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$, каде C е константа. Затоа:

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C = C \text{ и } F(b) = \int_a^b f(t)dt + C,$$

од каде следува дека: $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. ■

6.1.4.1. Смена на променливи

Теорема 6.1.4.1. (Смена на променливи). Нека функцијата f непрекината на затворениот интервал $[c, d]$, $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ е строго монотона функција со непрекинат извод на $[c, d]$ и $a = \varphi(c)$ и $b = \varphi(d)$. Тогаш:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказ. Од условот на задачата следува дека постои сложената функција $f(\varphi(t))$ и дека подинтегралните функции $f(x)$ и $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ се непрекинати $[a, b]$ и $[c, d]$ соодветно. Бидејќи φ е монотона, постои функцијата $\varphi^{-1}: [a, b] \rightarrow [c, d]$.

Нека $F(x)$ е примитивна функција на $f(x)$. Тогаш, функцијата $F(\varphi(t))$ е примитивна функција на $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[c, d]$ бидејќи $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, од каде што:

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \stackrel{\text{И.Л}}{=} F(\varphi(t))\Big|_c^d = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = F(b) - F(a) \stackrel{\text{И.Л}}{=} \int_a^b f(x)dx. \blacksquare$$

Теорема 6.1.4.2. Нека f е интеграбилна функција на $[-a, a]$. Тогаш:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x)dx, & \text{ако } f \text{ е парна на } [-a, a] \\ 0, & \text{ако } f \text{ е непарна на } [-a, a] \end{cases}$$

Доказ. 1) Ако функцијата е парна $f(-x) = f(x)$, додека ако е непарна $f(-x) = -f(x)$ за секое $x \in [-a, a]$. Користејќи го својството 6.1.2.1. добиваме:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x)dx &= \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = \begin{pmatrix} t = -x & t = 0 \Rightarrow x = 0 \\ dt = -dx & t = -a \Rightarrow x = a \end{pmatrix} = \\ &= \int_a^0 f(-x)(-dx) + \int_0^a f(x)dx = \\ &= \begin{cases} \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, & \text{ако } f \text{ е парна на } [-a, a] \\ -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0, & \text{ако } f \text{ е непарна на } [-a, a] \end{cases} \end{aligned}$$

6.1.4.2. Парцијална интеграција

Теорема 6.1.4.3. (Парцијална интеграција) Ако функциите $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имаат непрекинат извод на $[a, b]$, тогаш:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \text{ т.е. } \int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (1).$$

Доказ. Од $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ добиваме:

$$\begin{aligned} \int_a^b (u(x)v(x))' dx &= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx \Leftrightarrow \\ u(x)v(x)\Big|_a^b &= \int_a^b v(x)u'(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx \Leftrightarrow \\ \int_a^b u(x)v'(x)dx &= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \blacksquare \end{aligned}$$

6.2. НЕСВОЈСТВЕН ИНТЕГРАЛ

6.2.1. Несвојствен интеграл од прв тип. 1. Ако постои

$\int_a^x f(t)dt$ за секое $x \geq a$, и постои конечната граница $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$,

тогаш границата се нарекува **неправ интеграл на функцијата f**

на $[a, +\infty)$ и се означува со $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Значи:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt \quad (6.2.1).$$

2. Ако постои $\int_x^b f(t)dt$ за секое $x \leq b$, и постои конечната

граница $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t)dt$, тогаш границата се нарекува **неправ**

интеграл

на функцијата f на $(-\infty, b]$ и се означува со $\int_{-\infty}^b f(x)dx$. Значи,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t)dt \quad (6.2.2).$$

Ако постои конечната граница, тогаш интегралите се нарекуваат **конвергенти**. Ако границата не постои, интегралите се нарекуваат **дивергентни**.

3. Ако за $a \in \mathbb{R}$ интегралите $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

конвергираат, тогаш по дефиниција:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (6.2.3).$$

6.2.2. Несвојствен интеграл од втор тип. 1. Ако функцијата f е определена на $[a, b)$, е интегрибилна на секој затворен интервал содржан во $[a, b)$ и постои конечен лимес

$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$, тогаш лимесот се нарекува **несвојствен интеграл на**

f на интервалот $[a, b)$ и се означува со $\int_a^b f(x)dx$. Значи:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt \quad (6.2.4).$$

2. Ако функцијата f е определена на $(a, b]$, е интегрибилна на секој затворен интервал содржан во $(a, b]$ и постои конечен

лимес $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t)dt$, тогаш лимесот се нарекува **несвојствен инте-**

грал на f на интервалот $(a, b]$ и се означува со $\int_a^b f(x)dx$.

Значи:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt \quad (6.2.5).$$

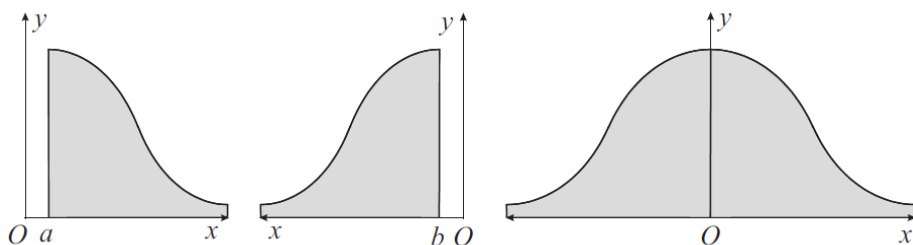
Ако постои конечната граница тогаш интегралите се нарекуваат **конвергенти**. Ако границата не постои (тука спаѓаат и случаите кога границата е $-\infty$, $+\infty$ или ∞), тогаш интегралите се нарекуваат **дивергентни**.

3. Ако функцијата f е определена на (a, b) и за $c \in (a, b)$, интегралите $\int_a^c f(x) dx$ и $\int_c^b f(x) dx$ конвергираат, тогаш по дефиниција:

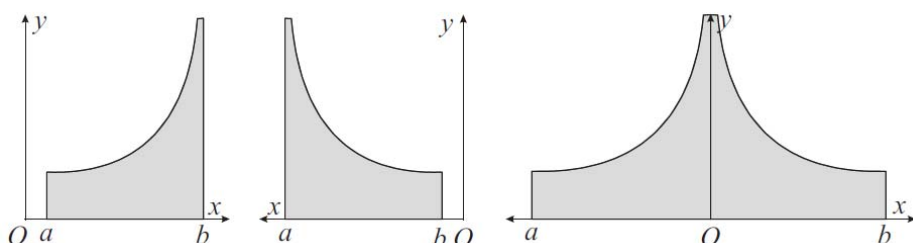
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (6.2.6).$$

За неправите интегралите важат аналогни формули за смена на променливи и интегрирање по делови.

Геометриска интерпретација на несвојствените интегралите. Нека f е непрекината ненегативна функција на интервалите на кои постојат определените интегралите чија граница е несвојствениот интеграл. Секој од определените интегралите претставува плоштина на соодвениот криволиниски трапез. Затоа несвојствениот интеграл може да се интерпретира како плоштина на неограничениот криволиниски трапез, кој е граница на криволиниски трапези.



Цртежи 6.2.1.1-3. Несвојствени интегралите од I тип

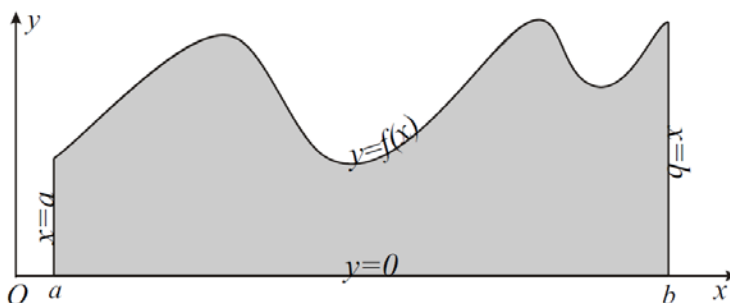


Цртежи 6.2.2.1-3. Несвојствени интеграли од II тип

3-6.6. ПРИМЕНА НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

6.3. ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКА ФИГУРА

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати на $[a, b]$. Фигурата ограничена со правите $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графикот на функцијата $y = f(x)$ е криволиниски трапез. **Фигура меѓу функциите $f(x)$ и $g(x)$ на $[a, b]$** , е фигурата ограничена со правите $x = a$ и $x = b$ и графиците на функциите $f(x)$ и $g(x)$.



Цртеж 6.3.

Теорема 6.3.1. 1) Нека функцијата $f(x)$ е непрекината на $[a, b]$. Плоштината на криволинискиот трапез на f на $[a, b]$ е:

$$P = \int_a^b |f(x)| dx. \text{ Притоа:}$$

$$P = \int_a^b f(x) dx, \text{ кога } f(x) \geq 0 \text{ на } [a, b], \text{ и}$$

$$P = -\int_a^b f(x)dx \text{ кога } f(x) \leq 0 \text{ на } [a, b].$$

2) Нека функциите f и g се непрекинати на $[a, b]$. Плоштината на фигурата ограничена со правите $x=a$, $x=b$ и графиците на функциите f и g на $[a, b]$ е:

$$P = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \text{ Притоа:}$$

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \text{ ако } f(x) \geq g(x) \text{ на } [a, b] \text{ и}$$

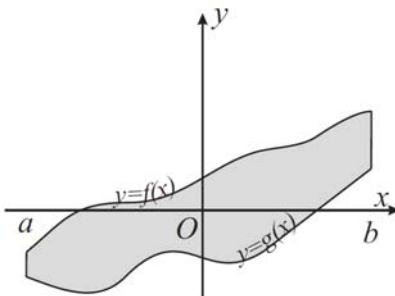
$$P = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \text{ ако } f(x) \leq g(x) \text{ на } [a, b].$$

Доказ. При дефинирањето на определен интеграл утврдивме дека плоштината на криволинискиот трапез на непрекината функција $f \geq 0$ е $P = \int_a^b f(x)dx$. Ако $f \leq 0$, тогаш

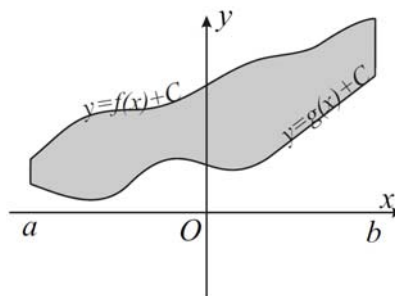
скалестите фигури чиешто плоштини конвергираат кон плоштината на криволинискиот трапез се состојат од правоаголници со страни $-f(\xi_i)$ и Δx_i . Затоа,

$$P = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (-f(\xi_i)) \Delta x_i = - \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = - \int_a^b f(x) dx.$$

2) Нека функциите f и g се непрекинати на $[a, b]$ и $f(x) \geq g(x)$, т.е. $f(x) - g(x) \geq 0$ на $[a, b]$. Бидејќи непрекинатите функции на затворен интервал се ограничени, постои реален број C , таков што $f(x) + C \geq g(x) + C \geq 0$. Тогаш, плоштината P на фигурата ограничена со графиците на f и g е:



Цртеж 6.3.1.1.



Цртеж 6.3.1.2.

$$P = \int_a^b (f(x) + C) dx - \int_a^b (g(x) + C) dx = .$$

$$\int_a^b (f(x) + C - (g(x) + C)) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Слично ако $f(x) \leq g(x)$ на $[a, b]$, тогаш $g(x) \geq f(x)$ па:

$$P = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx . \blacksquare$$

Во пракса, кога ја пресметуваме плоштината, прво ги наоѓаме пресечните точки на функциите $f(x)$ и $g(x)$, а потоа на секој подинтервал, што тие го формираат истите, се ослободуваме од апсолутната вредност и го пресметуваме интегралот.

Во следнава теорема ќе утврдиме формула за пресметување на плоштина кога функцијата $y = f(x)$ е зададена со параметарски равенки. Формулата следува од формулата за плоштина

$P = \int_a^b f(x) dx$ и формулата за смена на променливи:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(x(t)) x'(t) dt .$$

Теорема 6.3.2. Плоштината на фигурата ограничена со кривата зададена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$; каде што y и $\dot{x}$ се непрекинати и ненегативни на $[a, b]$ е

$$P = \int_a^b y(t) \dot{x}(t) dt = \int_a^b y \dot{x} dt .$$

Следнава теорема се однесува на фигури ограничени со криви зададени во поларни координати со равенките $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [a, b]$, $0 \leq b - a \leq 2\pi$, каде што ρ е ненегативна и непрекината на $[a, b]$. Овие фигури ќе ги наречеме криволиински исечоци.

Теорема 6.3.3. Плоштината на фигурата ограничена со кривата зададена со поларната равенка $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [a, b]$, $0 \leq b - a \leq 2\pi$ каде ρ е ненегативна и непрекината на $[a, b]$, е

$$P = \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2(\varphi) d\varphi \text{ т.е. } P = \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2 d\varphi .$$

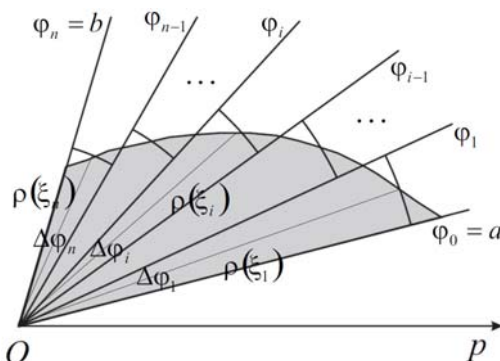
Доказ. Интервалот $[a, b]$, со помош на поделбата $P = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, таква што $a = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = b$, го делиме на n подинтервали:

$$[\varphi_{i-1}, \varphi_i], \quad i = 1, 2, \dots, n ;$$

на секој подинтервал избираме точки

$$\xi_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i], \quad i = 1, 2, \dots, n ;$$

и формираме кружни исечоци со радиуси $\rho(\xi_i)$ и агли $\Delta\varphi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.



Цртеж 6.3.3.

Бидејќи формулата за плошина на кружен исечок е: $P = \frac{1}{2} r^2 \alpha$, каде што α е централниот агол изразен во радијани, плоштината на кружните исечоци е:

$$P_i = \frac{1}{2} \rho^2(\xi_i) \Delta\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Нивната сума:

$$\sigma_P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho^2(\xi_i) \Delta \varphi_i.$$

е интегрална сума за интегралот $\frac{1}{2} \int_a^b \rho^2 d\varphi$. Следува: $P = \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2 d\varphi$.

Задача 6.3.4. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со графици на функциите:

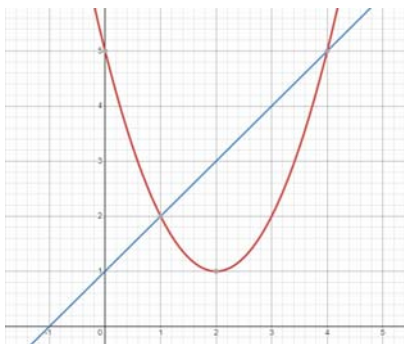
$$y = x^2 - 4x + 5 \text{ и } y = x + 1.$$

Решение. Апцисите на пресечните точки се решение на равенката:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 &= x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \\ (x - 4)(x - 1) &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4. \end{aligned}$$

Равенката $y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$ е равенка на парабола со теме $T(2, 1)$ отворена нагоре, додека $y = x + 1$ е равенка на права чиј график на интервалот $[1, 4]$ е над параболата. Затоа:

$$\begin{aligned} P &= \int_a^b (y_2 - y_1) dx = \int_1^4 (x + 1 - (x^2 - 4x + 5)) dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \\ &\left(-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 4x \right) \Big|_1^4 = -\frac{1}{3}(64 - 1) + \frac{5}{2}(16 - 1) - 4(4 - 1) = \\ &-\frac{63}{3} + \frac{75}{2} - 12 = \frac{-126 + 225 - 72}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



Цртеж 6.3.4.

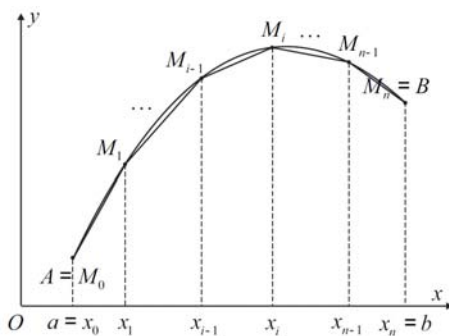
6.4. Должина на лак на крива

Теорема 6.4.1. Нека функцијата $y = f(x)$ има непрекинат извод на $[a, b]$. Тогаш должината на графикот на $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ од $A(a, f(a))$ до $B(b, f(b))$ е:

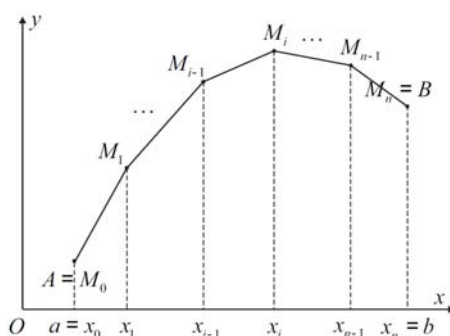
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \text{ т.е. } l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1).$$

Доказ. Нека функцијата f е непрекината и има непрекинат извод на $[a, b]$.

Нека $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ е поделба на $[a, b]$, таква што $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Поделбата P определува точки $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ од лакот $\widehat{AB}$ чишто апциси соодветно се $x_0, x_1, \dots, x_n$.



Цртеж 6.4.1.1.



Цртеж 6.4.1.2.

Искршената линија со темиња во точките $M_i(x_i, y_i)$, $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$; го апроксимира лакот $\widehat{AB}$. Ќе ја определиме нејзината должина. Отсечките $M_{i-1}M_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ имаат должина:

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Според теоремата на Лагранж, постои точка $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, таква што: $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(\xi_i)\Delta x_i$.

Следува:

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{\Delta x_i^2 + f'^2(\xi_i)\Delta x_i^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i,$$

од каде должината на искршената линија е:

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i,$$

и претставува интегрална сума за функцијата $\sqrt{1 + f'^2(x)}$, која е непрекината, па и интеграбилна на $[a, b]$. Затоа должината на лакот $\widehat{AB}$ е:

$$l = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \blacksquare$$

Ако функцијата $y = f(x)$ е зададена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$; каде што $\dot{x}$ и $\dot{y}$ се непрекинати на $[a, b]$ и $\dot{x} > 0$, тогаш според правилото за извод од параметарски зададена функција $y'(x) = \dot{y}(t)/\dot{x}(t)$ и $dx = \dot{x}(t)dt$ добиваме:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx &= \sqrt{1 + \frac{\dot{y}^2(t)}{\dot{x}^2(t)}}\dot{x}(t)dt = \sqrt{\frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}^2(t)}}\dot{x}(t)dt = \\ &= \frac{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}{|\dot{x}(t)|}\dot{x}(t)dt \stackrel{\dot{x}(t) > 0}{=} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt. \end{aligned}$$

Со тоа е докажана следнава теорема:

Теорема 6.4.2. Должината на графикот на функцијата $y = f(x)$ зададена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$; каде што $\dot{x} > 0$ и $\dot{y}$ се непрекинати на $[a, b]$ е:

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt \text{ т.е. } l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt.$$

Ако $\dot{x}(t) < 0$, за $t \in [a, b]$, тогаш $|\dot{x}(t)| = -\dot{x}(t)$, но, бидејќи $\dot{x}(t) < 0$, функцијата $x = x(t)$ монотono опаѓа, па границите се движат од поголема кон помала вредност ($dt < 0$), па ако се

доведат до нормален облик ќе се појави уште еден минус во производот. Затоа и во овој случај:

$$\sqrt{1+y'^2(x)}dx = \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt,$$

односно формулата има ист облик. Формулата може да се примени и кога $\dot{x} = 0$ на затворен интервал а $y = y(t)$ уште е монотона.

Ако графикот на функцијата $y = f(x)$ е зададен со поларната равенка:

$$\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [a, b]$$

каде што $\rho \geq 0$ и ρ и ρ' се непрекинати на $[a, b]$, тогаш користејќи ја врската меѓу декартовите и поларните координати,

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi,$$

ако се земе $t = \varphi$ за параметар, добиваме параметарски равенки на кривата:

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi, y = \rho(\varphi) \sin \varphi.$$

Со диференцирање на равенките добиваме:

$$\dot{x} = \rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi, \dot{y} = \rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi,$$

од каде што:

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= (\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi)^2 + (\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi)^2 = \\ &\rho'^2 \cos^2 \varphi - 2\rho\rho' \sin \varphi \cos \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + \\ &\rho'^2 \sin^2 \varphi + 2\rho\rho' \sin \varphi \cos \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi = \\ &\rho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \rho'^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \rho^2 + \rho'^2. \end{aligned}$$

Следува дека е докажана е следнава теорема:

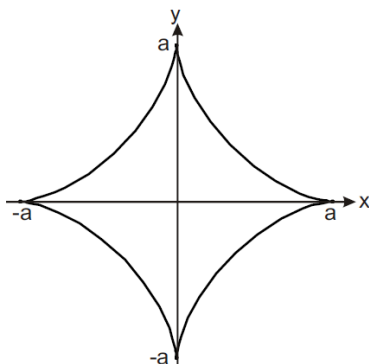
Теорема 6.4.3. Должината на графикот на функцијата $y = f(x)$ зададен со поларната равенка $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [a, b]$, $0 \leq b - a < 2\pi$; каде што ρ е ненегативна и има непрекинат извод на $[a, b]$ е:

$$l = \int_a^b \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi \text{ т.е. } l = \int_a^b \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

Задача 6.4.4. Пресметај ја должината на астроидата:

$$x = a \sin^3 t, \quad y = a \cos^3 t.$$

Решение. Должината на астроидата е 4 пати поголема од должината на делот од астроидата што се наоѓа во првиот квадрант, односно за $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Затоа, $l = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$. Притоа,



Цртеж 6.4.4.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3a \sin^2 t \cos t, \quad \dot{y} = -3a \cos^2 t \sin t; \text{ и} \\ \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= \sqrt{9a^2 \sin^4 t \cos^2 t + 9a^2 \cos^4 t \sin^2 t} = \\ 3a \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t)} &= 3a |\sin t \cos t| = 3a \sin t \cos t; \end{aligned}$$

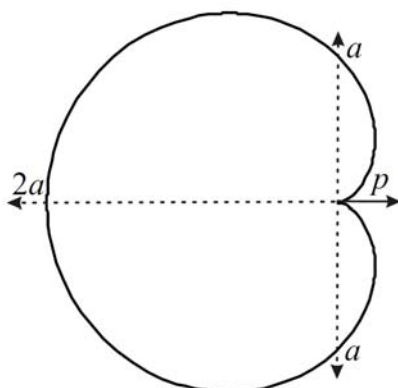
од каде што:

$$\begin{aligned} l &= 4 \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t dt = 12a \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2t}{2} dt = 6a \left(\frac{-\cos 2t}{2} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \\ &= -3a \left(\cos 2t \Big|_0^{\pi/2} \right) = -3a (\cos \pi - \cos 0) = 6a. \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 6.4.5. Пресметај ја должината на кардиоидата:

$$\rho = a(1 - \cos \varphi), \quad a > 0.$$

Решение. Должината на лакот на кардиоидата се добива за $\varphi \in [0, 2\pi]$ и е 2 пати поголема од делот на кардиоидата што се наоѓа во горната полурамнина, односно за $\varphi \in [0, \pi]$. Следува:



Цртеж 6.4.5.

$$l = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi, \text{ каде што:}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} &= \sqrt{a^2 (1 - \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ \sqrt{a^2 (1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} &= a \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} = a \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} = \\ a \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} &= 2a \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| = 2a \sin \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Оттука,

$$\begin{aligned} l &= 2 \cdot 2a \int_0^{\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \left(-2 \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= -8a \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = -8a(0 - 1) = 8a. \end{aligned}$$

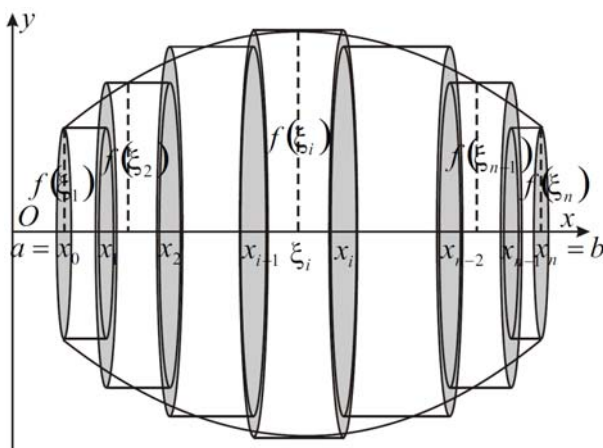
6.5. Волумен на ротационо тело

Под волуменот на тело што се добива со ротирање околу x -оската на графикот на функцијата $y = f(x)$ на $[a, b]$ ќе го подразбираме волуменот на телото добиено со ротација на фигурата ограничена со графикот на функцијата $y = f(x)$ на $[a, b]$ и рамнините $x = a$ и $x = b$.

Теорема 6.5.1. Нека функцијата $y = f(x)$ е непрекината на $[a, b]$. Волуменот на телото што се добива со ротирање околу x -оската на графикот на функцијата $y = f(x)$ на $[a, b]$ е:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx \text{ т.е. } V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Доказ. Нека функцијата $y = f(x)$ е непрекината на $[a, b]$. Нека $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ е поделба на $[a, b]$, таква што $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Нека $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n$; се произволно избрани точки од интервалите $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$; соодветно.



Цртеж 6.5.1.

На секој подинтервал $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$; со ротација на правоаголникот со страни $f(\xi_i)$ и Δx_i околу x -оската, се добива цилиндар со волумен:

$$V_x = \pi r^2 H = \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i.$$

Унијата од сите цилиндри формира тело со волумен:

$$\sigma_P = \pi \sum_{i=1}^n f^2(\xi_i) \Delta x_i,$$

кое го апроксимира ротационото тело. Следува: $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. ■

Нека $y = f(x)$ е строго монотона непрекината функција на $[a, b]$. Следува дека f има инверзна на $[f(a), f(b)]$. Ротационото тело што се добива со ротирање околу y -оската на графикот на функцијата $y = f(x)$ на $[a, b]$, се совпаѓа со телото добиено со ротација околу x -оската на нејзината инверзна функција $y = g(x)$ на $[f(a), f(b)]$. На овој начин може да пресметуваме волумени на ротациони тела што ротираат околу y -оската. За да не ги сведуваме аргументот и вредноста на функцијата во стандардниот запис x и y , соодветно, претходната теорема ќе ја запишеме во следниов вид:

Теорема 6.5.2. Нека функцијата $x = g(y)$ е непрекината на $[a, b]$. Волуменот на телото што се добива со ротирање околу y -оската на графикот на функцијата $x = g(y)$ на $[a, b]$ е:

$$V_y = \pi \int_a^b g^2(y) dy \text{ т.е. } V_y = \pi \int_a^b x^2 dy.$$

Нека функцијата $y = f(x)$ е зададена со параметарските равенки:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b];$$

каде што y и $\dot{x} \geq 0$ се непрекинати на $[a, b]$. Ако воведеме смена:

$$x = x(t), \text{ од каде што } dx = \dot{x}(t) dt$$

во формулата од претходната теорема, сме ги докажале следниве теореми:

Теорема 6.5.3. Нека функцијата $y = f(x)$ е зададена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$; каде што y и $\dot{x} \geq 0$ се непрекинати на $[a, b]$. Тогаш волуменот на телото што се добива со ротација на графикот на функцијата $y = f(x)$ околу x -оската е:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(t) \dot{x}(t) dt \text{ т.е. } V_x = \pi \int_a^b y^2 \dot{x} dt.$$

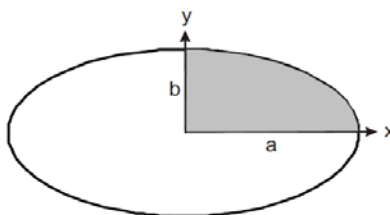
Теорема 6.5.4. Нека функцијата $y = f(x)$ е зададена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$; каде што x и $\dot{y} \geq 0$ се непрекинати на $[a, b]$. Тогаш волуменот на телото што се добива со ротација на графикот на функцијата $y = f(x)$ околу y -оската е:

$$V_y = \pi \int_a^b x^2(t) \dot{y}(t) dt \text{ т.е. } V_y = \pi \int_a^b x^2 \dot{y} dt.$$

Задача 6.5.5. Пресметај го волуменот на ротационото тело добиено со ротација на елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ околу x -оската.

Решение. Волуменот на ротационото тело е:

$$V = \pi \int_{-a}^a y^2 dx.$$



Цртеж 6.5.5.

Од $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ добиваме $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$. Значи:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = b^2 \pi \left(\left(x - \frac{x^3}{3a^2} \right) \Big|_{-a}^a \right) = \\ &= b^2 \pi \left(a + a - \frac{1}{3a^2} (a^3 - (-a)^3) \right) = b^2 \pi \left(2a - \frac{2a}{3} \right) = b^2 \pi \frac{4a}{3} = \frac{4ab^2\pi}{3}. \end{aligned}$$

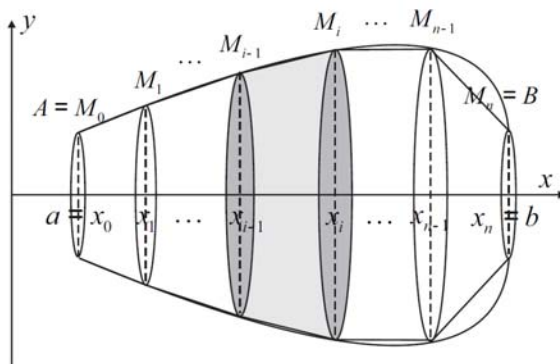
6.6. Плоштина на ротациона површина

Теорема 6.6.1. Нека функцијата $y = f(x)$ е ненегативна и има непрекинат извод на $[a, b]$. Плоштината на површината што се добива со ротирање околу x -оската на графикот на функцијата $y = f(x)$ на $[a, b]$ е:

$$P_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \text{ т.е. } P_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Доказ. Нека функцијата $y = f(x)$ е непрекината на $[a, b]$. Нека $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ е поделба на $[a, b]$ таква што:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$



Цртеж 6.6.1.

Поделбата P определува точки $M_0, M_1, \dots, M_n$ од графикот на f чии апциси соодветно се: $x_0, x_1, \dots, x_n$. Со ротација на искршената линија со темиња во точките $M_0, M_1, \dots, M_n$ околу x -оската се добива површина ја што апроксимира бараната површина. Таа претставува унија од пресечени кружни конуси со плоштини:

$$P_i = 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \overline{M_{i-1}M_i} = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \overline{M_{i-1}M_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

каде што:

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Според теоремата на Лагранж, постои точка $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, таква што

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(\xi_i)\Delta x_i.$$

Следува:

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{\Delta x_i^2 + f'^2(\xi_i)\Delta x_i^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$$

и

$$P_i = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i.$$

Затоа плоштината на апроксимираната површина е:

$$\begin{aligned} \sigma_P &= \pi \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i = \\ &= \pi \sum_{i=1}^n ((f(x_{i-1}) - f(\xi_i)) + (f(x_i) - f(\xi_i)))\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i \\ &\quad + 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i. \end{aligned}$$

Ќе покажеме дека првата сума тежи кон нула кога $\|P\| \rightarrow 0$.

Функцијата $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ е непрекината на $[a, b]$, па достигнува максимум M . Од рамномерната непрекинатост на f на $[a, b]$ следува дека за секое $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$, такво што:

$$|f(x_{i-1}) - f(\xi_i)|, |f(x_i) - f(\xi_i)| < \varepsilon/2M(b-a)\pi$$

кога $\|P\| < \delta$. Оттука:

$$\begin{aligned} \pi \sum_{i=1}^n ((f(x_{i-1}) - f(\xi_i)) + (f(x_i) - f(\xi_i)))\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i < \\ \pi 2 \frac{\varepsilon}{2M(b-a)\pi} M \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следува дека плоштината на апроксимативната површина е:

$$\sigma_P = 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i.$$

и претставува интегрална сума за функцијата $2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$.

Затоа, $P_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$. ■

Друг запис на теоремата е теоремата 6.6.1 е:

Теорема 6.6.2. Нека $x = g(y)$ е ненегативна и има непрекинат извод на $[a, b]$. Плоштината на површината што се добива со ротирање околу y -оската на графикот на функцијата $x = g(y)$ на $[a, b]$ е:

$$P_y = 2\pi \int_a^b g(y)\sqrt{1+g'^2(y)}dy \text{ т.е. } P_y = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+x'^2}dy.$$

Ако во интегралот $\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$ ставиме смена $x = x(t)$, како

во поглавјето за должина на лак на крива, добиваме:

$$\sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt,$$

со што е покажана следнава теорема:

Теорема 6.6.3. Нека графикот на функцијата $y = y(x)$ е зададен со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$; каде, y е ненегативна и $\dot{x} > 0$ и $\dot{y}$ се непрекинати на $[a, b]$. Плоштината на површината што се добива со ротирање на графикот на функцијата околу x -оската на $[a, b]$, е:

$$P_x = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt \text{ т.е. } P_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt.$$

Со замена на x и y , докажана е точноста на следнава теорема:

Теорема 6.6.4. Нека графикот на функцијата $y = y(x)$ е зададен со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$; каде што x е ненегативна и $\dot{y} > 0$ и $\dot{x}$ се непрекинати на $[a, b]$. Плоштината на површината што се добива со ротирање на графикот околу y -оската на $[a, b]$, е:

$$P_y = 2\pi \int_a^b x(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \text{ т.е. } P_y = 2\pi \int_a^b x \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

На крајот ќе напоменеме дека условот $\dot{x} \neq 0$, значи дека кривата е испишана точно еднаш додека t се движи од a до b . Ако $\dot{x} > 0$ кривата се исцртува од лево кон десно, а ако $\dot{x} < 0$ кривата се исцртува од десно кон лево. Затоа одредени поопшти случаи кои се среќаваат при решавањето задачи, лесно може да се сведат на горенаведените. Имено, се определуваат подинтервалите во кои $\dot{x} \neq 0$ и на секој подинтервал во зависност од знакот на $\dot{x}$ се сведуваат на горенаведените формули со ист или спротивен знак.

Задача 6.6.5. Пресметај ја плоштината на површината добиена со ротација на првиот лак на циклоидата:

$$x = a(1 - \cos t), \quad y = a(t - \sin t), \quad a > 0;$$

околу y -оската.

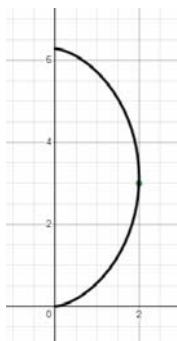
Решение. Плоштината на ротационата површина ќе ја пресметаме според формулата: $P = 2\pi \int_a^b x \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$. Првиот свод од циклоидата се испишува ако параметарот $t \in [0, 2\pi]$.

Изводите на параметарските равенки на кривата по параметарот t се $\dot{x} = a \sin t$ и $\dot{y} = a(1 - \cos t)$. Имајќи предвид дека за $t \in [0, 2\pi]$,

$\sin \frac{t}{2} \geq 0$, добиваме:

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 (1 - 2 \cos t + \cos^2 t)} =$$

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2(\sin^2 t + 1 - 2\cos t + \cos^2 t)} &= a\sqrt{2 - 2\cos t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = \\ &= a\sqrt{2 \cdot 2\sin^2 \frac{t}{2}} = 2a\left|\sin \frac{t}{2}\right| = 2a\sin \frac{t}{2} \text{ и} \\ x\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= a(1 - \cos t)2a\sin \frac{t}{2} = \\ 2a^2 2\sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} &= 4a^2 \sin^3 \frac{t}{2} = 4a^2 \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2}.\end{aligned}$$



$a = 1$ цртеж 6.6.5

Следува:

$$\begin{aligned}P &= 2\pi 4a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= \left(\begin{array}{ll} \cos \frac{t}{2} = k & t = 0 \Rightarrow k = 1 \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} dt = dk & t = 2\pi \Rightarrow k = -1 \end{array} \right) = \\ &= 8a^2 \pi \int_1^{-1} (1 - k^2)(-2dk) = 16a^2 \pi \int_{-1}^1 (1 - k^2) dk = \\ &= 16a^2 \pi \left(k - \frac{k^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 16a^2 \pi \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{64a^2 \pi}{3}.\end{aligned}$$

7. ПРИЛОГ

1. ФУНКЦИИ

Геометриските места на точки, симетрични на графиците на $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, во однос на правата $y = x$, соодветно се:

$$y \equiv \operatorname{Arcsin} x = k\pi + (-1)^k \arcsin x, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$y \equiv \operatorname{Arccos} x = 2k\pi \pm \arccos x, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$y \equiv \operatorname{Arctg} x = k\pi + \operatorname{arctg} x, \quad k \in \mathbb{Z}; \text{ и}$$

$$y \equiv \operatorname{Arcctg} x = k\pi + \operatorname{arcctg} x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.1.5. Некои карактеристични граници

Теорема 2.1.5.1.2 Точни се следниве граници:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a > 0;$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{n!} = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Доказ. 1) • Нека $a = 1$, тогаш секој член од низата има вредност 1, па и границата е 1.

• Нека $a > 1$. Тогаш, $\sqrt[n]{a} > 1$, па важи $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, каде што $\alpha_n > 0$ за секое $n \in \mathbb{N}$. Следува дека

$$a = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \dots + \alpha_n^n > 1 + n\alpha_n,$$

бидејќи членовите во развиениот облик на биномот се позитивни, па:

$$a > 1 + n\alpha_n \Leftrightarrow n\alpha_n < a - 1 \Leftrightarrow \alpha_n < \frac{a-1}{n}.$$

Заради $\frac{a-1}{n} \rightarrow 0$ кога $n \rightarrow \infty$, следува дека $\alpha_n \rightarrow 0$ кога $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Оттука, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1.$$

• Нека $0 < a < 1$. Следува дека $a = 1/b$, $b > 1$. Тогаш, од претходниот случај:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1.$$

2) Бидејќи $\sqrt[n]{n} > 1$ за $n > 1$, следува $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, $\alpha_n > 0$ за секое $n > 1$. Следува:

$$n = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \dots + \alpha_n^n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2,$$

од каде што:

$$n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 \Leftrightarrow \alpha_n^2 < \frac{2}{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Бидејќи $0 < \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$, следува дека $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Од сендвич-теоремата следува дека $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, од каде што:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) = 1.$$

3) • Ако $0 < |a| \leq 1$, тогаш јасно: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

• Ако $|a| > 1$, тогаш постои $k \in \mathbb{N}$, таков што: $k \leq |a| < k+1$ од каде што: $\frac{|a|}{k+1} < 1$. Тогаш:

$$0 < \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^k}{k!} \frac{|a|}{k+1} \frac{|a|}{k+2} \dots \frac{|a|}{n} < \frac{|a|^k}{k!} \left(\frac{|a|}{k+1} \right)^{n-k}.$$

Бидејќи $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|a|}{k+1} \right)^{n-k} = 0$, следува дека $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|^n}{n!} = 0$, па и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{n!} = 0$. За $a < 0$ и $a \in [0, 1)$ тврдењето е очигледно.

Нека $a > 1$. Постои природен број k , таков што: $k-1 \leq a < k$. Тогаш,

$$0 < \frac{n^a}{n!} \leq \frac{n^k}{n!} = \frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}.$$

Границата:

$$\frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \left(1 + \frac{2}{n-2}\right) \dots \left(1 + \frac{k-1}{n-k+1}\right) \rightarrow 1,$$

кога $n \rightarrow \infty$, додека втората граница $1/(n-k)! \rightarrow 0$, кога $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Следува: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!} = 0, \text{ од каде што: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{n!} = 0.$$

2.1.5.2.1. Приближно пресметување на бројот e . Ако:

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

важи: $a_n \leq b_n$ за секое $n \in \mathbb{N}$.

Нека е дадено $k \in \mathbb{N}$. За секое $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ важи:

$$a_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

При што важи равенство за $k = n$ (*).

Ако побараме лимес кога $n \rightarrow \infty$, добиваме:

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} = b_k \text{ за секое } k \in \mathbb{N}.$$

Бидејќи (b_k) е монотонно растечка, следува дека за $k = n$, $b_n < e$ за

секое $n \in \mathbb{N}$. Од друга страна од (*) $a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = b_n$.

Значи, $a_n \leq b_n < e$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$. Од сендвич-теоремата

следува: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$. Понатаму:

$$\begin{aligned} 0 < b_{n+k} - b_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+k)} \right) < \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{k-1}} \right) = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \frac{1 - \frac{1}{(n+2)^k}}{1 - \frac{1}{n+2}} < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{nn!}.$$

Ако пуштиме лимес кога $k \rightarrow \infty$, добиваме: $0 < e - b_n < \frac{1}{nn!}$.

На овој начин добиваме приближна формула за пресметување на бројот $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$, со точност помала од $1/nn!$.

Така, $1/nn! < 10^{-4}$ за $n \geq 7$ и кога $n = 7$ важи:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{7!} \approx 2,71825, \text{ па } e \approx 2,718.$$

2.1.5.2.2. Бројот e е ирационален број. Доказ. Имаме:

$$0 < e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{nn!} \Leftrightarrow$$

$$0 < n!e - \left(n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \dots + \frac{n!}{n!}\right) < \frac{1}{n}$$

за секое $n \in \mathbb{N}$.

Ако e не е ирационален број, тогаш: $e = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ и бидејќи $2 < e < 3$, важи $q > 1$. За $n = q$ имаме:

$$0 < q! \frac{p}{q} - q! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q} \Leftrightarrow$$

$$0 < p(q-1)! - \left(q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \dots + \frac{q!}{q!}\right) < \frac{1}{q},$$

добивме цел број да е поголем од 0 и помал од 1, што не е можно.

Теорема 2.3.7.3. (Штолцова теорема). Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ и

ако $b_{n+1} > b_n$ за скоро секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$, под услов да постои границата на десната страна.

Доказ. Види на пример [12]

2.2. ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА

-Бројот A е **граница** на функцијата $y = f(x)$ кога x тежи кон ∞ ако за секој позитивен број ε , постои позитивен број K , таков што за сите $|x| > K$ да следува: $|f(x) - A| < \varepsilon$. Означуваме:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

-Бројот A е **граница** на функцијата $y = f(x)$ кога x тежи кон $+\infty$ ако за секој позитивен број ε , постои позитивен број K , таков што за сите $x > K$ да следува: $|f(x) - A| < \varepsilon$. Означуваме:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

-Бројот A е **граница** на функцијата $y = f(x)$ кога x тежи кон $-\infty$ ако за секој позитивен број ε , постои позитивен број K , таков што за сите $x < -K$ да следува: $|f(x) - A| < \varepsilon$. Означуваме:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

-Бројот ∞ е **граница** на функцијата $y = f(x)$ кога x тежи кон ∞ ако за секој позитивен број M , постои позитивен број K , таков што за сите $|x| > K$ да следува: $|f(x)| > M$. Означуваме:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Аналогно дефинираме:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty.$$

-Бројот $+\infty$ е **граница** на функцијата $y = f(x)$ кога x тежи кон $+\infty$ ако за секој позитивен број M , постои позитивен број K , таков што за сите $x > K$ да следува: $f(x) > M$. Означуваме:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Аналогно дефинираме:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty.$$

- Бројот $-\infty$ е **граница** на функцијата $y = f(x)$ кога x тежи кон x_0 ако за секој позитивен број M , постои позитивен број δ , таков што за сите $0 < |x - x_0| < \delta$ да следува: $f(x) < -M$.
Означуваме:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

Аналогно дефинираме:

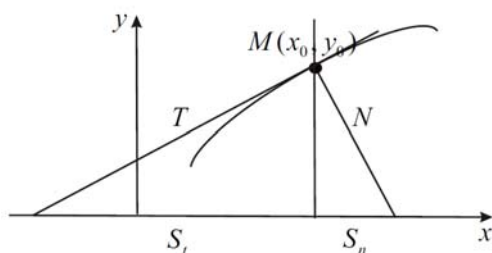
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

Сите дефиниции се добиваат од општата дефиниција за граница на функција: Функцијата $y = f(x)$ има граница A во точката x_0 , ако за секоја околина V на A постои околина U на $D_f \setminus \{x_0\}$ таква што: $f(U) \subseteq V$. Притоа, за околината на $x_0 \in \mathbb{R}$, $-\infty$, $+\infty$, ∞ доволно е да се земат $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$; $(-\infty, K)$; $(K, +\infty)$ и $(-\infty, K) \cup (K, +\infty)$, $K \in \mathbb{R}$; соодветно.

4.1.4. ДОПИРНИ ГОЛЕМИНИ

4.1.4. Втор начин (на изведување на формулите на допирните големини). Апцисата на точката T_0 е пресек на тангентата со x -оската, т.е.:

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0), \quad y = 0 \Leftrightarrow -y_0 = y'_0(x - x_0) \Leftrightarrow x = x_0 - \frac{y_0}{y'_0}.$$



Цртеж 4.1.4

Следува: $T_0 \left(x_0 - \frac{y_0}{y'_0}, 0 \right)$. Јасно $P_0(x_0, 0)$.

За апцисата на точката N_0 добиваме:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0), \quad y = 0 \Leftrightarrow -y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0) \Leftrightarrow x = x_0 + y_0 y'_0.$$

Следува: $N(x_0 + y_0 y'_0, 0)$. Оттука:

$$\overrightarrow{T_0 M_0} = \left(\frac{y_0}{y'_0}, y_0 \right) \text{ и } T = |\overrightarrow{T_0 M_0}| = \sqrt{\frac{y_0^2}{y'^2_0} + y_0^2} = |y_0| \sqrt{\frac{1 + y'^2_0}{y'^2_0}} = \left| \frac{y_0}{y'_0} \right| \sqrt{1 + y'^2_0},$$

$$\overrightarrow{M_0 N_0} = (y_0 y'_0, 0) \text{ и } N = |\overrightarrow{M_0 N_0}| = \sqrt{y_0^2 y'^2_0 + 0} = y_0 |\sqrt{1 + y'^2_0}|,$$

$$\overrightarrow{T_0 P_0} = \left(\frac{y_0}{y'_0}, 0 \right) \text{ и } S_t = |\overrightarrow{T_0 P_0}| = \left| \frac{y_0}{y'_0} \right|,$$

$$\overrightarrow{P_0 N_0} = (y_0 y'_0, 0) \text{ и } S_t = |\overrightarrow{P_0 N_0}| = |y_0 y'_0|. \blacksquare$$

4.6. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

Теорема 4.6.1. (Тејлорова формула). Нека функцијата $f(x)$ е n пати непрекинато диференцијабилна и има $(n+1)$ -ви извод во околина U на точката x_0 . Тогаш, за секое $x \in U$ постои точка $u \in (x_0, x)$, таква што:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Доказ. Доволно е да покажеме дека членот:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x),$$

може да се запише како во формулата од теоремата.

1) Нека $x > x_0$. На интервалот $[x_0, x]$ ги разгледуваме функциите по променливата t ,

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right) \text{ и } G(t) = \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Функциите F и G ги исполнуваат условите од теоремата на Коши на интервалот $[x_0, x]$, следува дека постои точка $u \in (x_0, x)$ таква што:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(u)}{G'(u)}.$$

Заради:

$$F(x_0) = f(x) - T_n(x) = R_n(x), \quad G(x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ и } F(x) = G(x) = 0,$$

$$\text{важи: } \frac{-R_n(x)}{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{F'(u)}{G'(u)} \quad (1).$$

Притоа,

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - (f''(t)(x-t) - f'(t)) - \left(\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - f''(t)(x-t) \right) - \\ &\quad \left(\frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3 - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 \right) - \dots - \\ &\quad \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \right) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \end{aligned}$$

и

$$G'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Од (1) добиваме:

$$\frac{-R_n(x)}{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n}{-\frac{(x-u)^n}{n!}} \Leftrightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

што требаше да се докаже.

2) Аналогно се покажува случајот кога $x < x_0$. ■

Ако во Тејлоровата формула го замениме x_0 со x , а x со $x+h$, го добиваме следниот нејзин облик:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Во продолжение ќе ги определиме развоите на позначајните елементарни функции во Маклоренов полином.

1) Нека $f(x) = e^x$. Заради $f^{(n)}(x) = e^x$, $n \in \mathbb{N}$; и

$$f(0) = 1, f^{(n)}(0) = 1, n = 1, 2, \dots, n \text{ и } f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x},$$

важи:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \theta \in (0,1).$$

2) Нека $f(x) = \sin x$. Од $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, \dots,$$

$$f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}, f^{(2n)}(0) = 0,$$

$$f^{(2n+2)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = (-1)^n \cos \theta x,$$

следува дека:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos \theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \theta \in (0,1).$$

3) Нека $f(x) = \cos x$. Имаме: $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1, \dots,$$

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, f^{(2n+1)}(0) = 0,$$

$$f^{(2n+2)}(\theta x) = \cos\left(\theta x + \frac{(2n+2)\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1} \cos \theta x. \text{ Затоа:}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos \theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}, \theta \in (0,1)$$

4) За функцијата $f(x) = \ln(1+x)$ важи:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2!, \quad f^{(4)}(0) = -3!, \quad \dots,$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad \text{и} \quad f^{(n+1)}(\theta x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Затоа:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad \theta \in (0,1) \quad \text{и}$$

5) За функцијата $f(x) = (1+x)^a$, $a \in \mathbb{R}$;

важи:

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\dots(a-n+1)(1+x)^{a-n}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = a, \quad f''(0) = a(a-1), \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = a(a-1)\dots(a-n+1) \quad \text{и}$$

$$f^{(n+1)}(\theta x) = a(a-1)\dots(a-n+1)(1+\theta x)^{a-(n+1)}.$$

Затоа:

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \dots + \binom{a}{n}x^n + \binom{a}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-a}}, \quad \theta \in (0,1).$$

4.4. ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ, ИНТЕРВАЛИ НА МОНОТОНОСТ, ПРЕВОЈНИ ТОЧКИ, ИНТЕРВАЛИ НА КОНКАВИТЕТ И АСИМПТОТИ НА ФУНКЦИИ

Теорема 4.4.1.5. (Обопштен втор критериум за постоење на екстрем). Нека функцијата f има непрекинати изводи од n -ти ред на (a,b) , $n \geq 2$. Нека $x_0 \in (a,b)$ и $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, но $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогаш:

1. Ако n е парен број, тогаш f има локален екстрем во x_0 при што:

-Ако $f^{(n)}(x_0) < 0$, тогаш f има локален максимум во x_0 ,

-Ако $f^{(n)}(x_0) > 0$, тогаш f има локален минимум во x_0 .

2. Ако n е непарен број, тогаш f нема локален екстрем во x_0 .

Доказ. Нека функцијата f има непрекинат n -ти извод во

$$x_0 \in (a, b), \quad n \geq 2 \quad \text{и} \quad f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Тогаш Тајлоровата формула има облик:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(u), \quad u \in (x_0, x) \text{ т.е.}$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(u).$$

Од непрекинатоста на $f^{(n)}(x)$ во x_0 , следува дека постои околина U на x_0 во која за сите $x \in U$, $f^{(n)}(x)$ има ист знак со $f^{(n)}(x_0)$. Нека $x \in U$, следува дека $u \in U$.

1) Нека n е парен број.

За $f^{(n)}(x_0) < 0$, следува дека $f^{(n)}(u) < 0$ и $(x-x_0)^n > 0$, од каде што:

$$f(x) - f(x_0) < 0 \text{ т.е. } f(x) < f(x_0),$$

па x_0 е точка на локален максимум.

За $f^{(n)}(x_0) > 0$, следува дека $f^{(n)}(u) > 0$ и $(x-x_0)^n > 0$, од каде што:

$$f(x) - f(x_0) > 0 \text{ т.е. } f(x) > f(x_0),$$

па x_0 е точка на локален минимум.

2) Нека n е непарен број.

За $f^{(n)}(x_0) < 0$, следува дека $f^{(n)}(u) < 0$, додека $(x-x_0)^n < 0$ за $x < x_0$ и $(x-x_0)^n > 0$ за $x > x_0$. Следува дека:

$$f(x) < f(x_0) \text{ за } x < x_0 \text{ и } f(x) > f(x_0) \text{ за } x > x_0,$$

што значи дека x_0 не е точка на локален екстрем.

Аналогно за $f^{(n)}(x_0) > 0$ заклучуваме исто така дека x_0 не е точка на локален екстрем. ■

Теорема 4.4.2.5. (Обопштен втор критериум за постоење на превојна точка). Нека функцијата f има непрекинати изводи од n -ти ред на (a, b) , $n \geq 2$. Нека $x_0 \in (a, b)$ и

$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ но } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогаш:

1. Ако n е парен број, тогаш f има локален екстрем во x_0 при што
 - Ако $f^{(n)}(x_0) < 0$, тогаш f е конвексна во околина на x_0 ;
 - Ако $f^{(n)}(x_0) > 0$, тогаш f е конкавна во околина на x_0 .
2. Ако n е непарен број, тогаш f има превојна точка во x_0 .

Доказ. Нека функцијата f има непрекинат n -ти извод во

$$x_0 \in (a, b), \quad n \geq 2 \quad \text{и} \quad f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Тогаш Тејлоровата формула има облик:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(u), \quad u \in (x_0, x) \text{ т.е.}$$

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(u)$$

Од непрекинатоста на $f^{(n)}(x)$ во x_0 , следува дека постои околина U на x_0 во која за сите $x \in U$, $f^{(n)}(x)$ има ист знак со $f^{(n)}(x_0)$. Нека $x \in U$, следува дека $u \in U$.

1) Нека n е парен број.

За $f^{(n)}(x_0) < 0$, следува дека $f^{(n)}(u) < 0$ и $(x - x_0)^n > 0$, од каде што:

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

па f е конвексна во околина на x_0 .

За $f^{(n)}(x_0) > 0$, следува дека $f^{(n)}(u) > 0$ и $(x - x_0)^n > 0$, од каде што:

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

па f е конкавна во околина на x_0 .

2) Нека n е непарен број.

За $f^{(n)}(x_0) < 0$, следува дека $f^{(n)}(u) < 0$, додека $(x - x_0)^n < 0$ за $x < x_0$ и $(x - x_0)^n > 0$ за $x > x_0$. Следува:

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ за } x < x_0 \text{ и}$$

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ за } x > x_0,$$

што значи дека x_0 е превојна точка на f .

Аналогно за $f^{(n)}(x_0) > 0$ заклучуваме, исто така, дека x_0 е превојна точка на f . ■

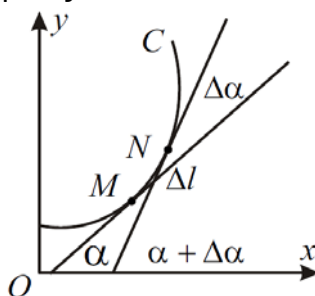
На крајот ќе искоментираме дека, ако функцијата f е непрекината на $[a, b]$, тогаш таа достигнува апсолутен минимум и апсолутен максимум на $[a, b]$. Притоа, апсолутните екстреми можат да се постигнат во крајните точки, или во локалните екстреми.

4.7. КРИВИНА НА КРИВА

Нека C е рамнинска крива која има тангента во секоја нејзина точка. Нека t и t_N соодветно се тангентите на кривата C во точките M и N . Нека $\Delta\alpha$ е аголот што го зафаќаат тангентите, т.е. аголот што покажува за колку се променил правецот на тангентата t , кога точката M движејќи се по кривата C се поместила во точката N . Нека Δl е должината на лакот MN .

Средна кривина на лакот MN е количникот $K_s = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \right|$, каде што

аголот $\Delta\alpha$ е даден во радијани.



Цртеж 4.7

Како што се гледа средната кривина зависи од должината на лакот, но и од формата на самиот лак. Притоа, два лака со иста должина можат да имаат различни средни кривини. Ако промената на аголот $\Delta\alpha$ е поголема и средната кривина има поголема вредност.

Дефиниција 4.7.1 Кривина на кривата C во точката M , ако постои, е бројот:

$$K = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \right|.$$

Поимот кривина на крива е мерка за утврдување на степенот на закривеност на кривата. Од дефиницијата на кривина на крива следува: $K \geq 0$.

Својство 4.7.2 Кривината на права е 0. Кривината на кружница е $K = \frac{1}{R}$, каде што R е радиус на кружницата.

1) На правата за кои било две точки M и N , промената на аголот $\Delta\alpha = 0$. Следува дека во секоја нејзина точка $K_s = 0$ и $K = 0$.

2) Кај кружницата со радиус R , средната кривина на лакот MN на кој одговара централниот агол $\Delta\alpha$ е:

$$K_s = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \right| = \frac{\Delta\alpha}{R\Delta\alpha} = \frac{1}{R},$$

па кривината во точката M е $K = \frac{1}{R}$. ■

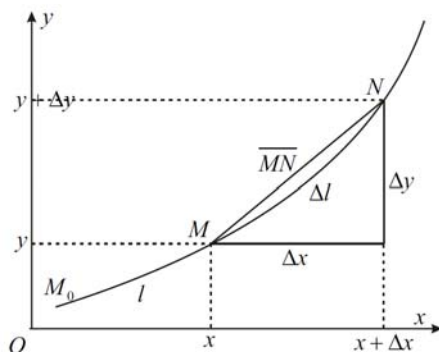
За кружницата важи уште едно својство, граничната вредност на количникот од должината на лакот $\widehat{MN}$ и должината на тетивата MN е 1, кога должината на тетивата тежи кон 0, т.е. кога точката N по кружницата тежи кон M , односно централниот агол $\Delta\alpha \rightarrow 0$. Имено:

$$K = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\widehat{MN}}{MN} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{R\Delta\alpha}{2R \sin \frac{\Delta\alpha}{2}} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta\alpha}{2}}{\sin \frac{\Delta\alpha}{2}} = 1.$$

Ова својство, под одредени услови, важи за произволна крива, но ние нема да го докажуваме, само ќе го користиме.

Нека C е рамнинска крива зададена со равенката $y = f(x)$, нека $M_0(x_0, y_0)$ е фиксна, додека $M(x, y)$ променлива точка на кривата. Нека l е должината на лакот $\widehat{M_0M}$. Нека N е точка од кривата со апциса $x + \Delta x$. Нека Δl е должината на лакот $\widehat{MN}$ и $\overline{MN}$ е тетивата што одговара на лакот $\widehat{MN}$. Од триаголникот MPN имаме:

$$\begin{aligned} \overline{MN}^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\overline{MN}}{\Delta l} \right)^2 (\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \Leftrightarrow \\ &\left(\frac{\overline{MN}}{\Delta l} \right)^2 \left(\frac{\Delta l}{\Delta x} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2. \end{aligned}$$



Цртеж 4.7.2.

Ако побараме граница кога $\Delta x \rightarrow 0$, имајќи предвид дека

$$\lim_{MN \rightarrow 0} \frac{\overline{MN}}{\Delta l} = 1,$$

добиваме:

$$l'^2 = 1 + y'^2 \Leftrightarrow l' = \sqrt{1 + y'^2} \quad (1).$$

Теорема 4.7.3. Ако кривата C е зададена со равенката $y = y(x)$, каде што $y = y(x)$ е двапати диференцијабилна функција, тогаш равенката на кривината на кривата C во точката $M(x, y)$ е:

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Доказ. Нека тангентата на кривата C во M формира агол α , а во N $\alpha + \Delta\alpha$ со позитивната насока на x -оската. Тогаш,

$$K = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \right| = |\alpha'_l| \quad (2).$$

За определување на α'_l може да се користи формулата за извод од параметарски зададена функција $\alpha'_l = \frac{\alpha'_x}{l'_x}$ (3), каде што параметарот е x .

$$\text{Бидејќи } \operatorname{tg} \alpha = y' \text{ т.е. } \alpha = \operatorname{arctg} y', \text{ следува: } \alpha'_x = \frac{1}{1 + y'^2} y'' \quad (4).$$

Од 1-4 имаме:

$$\alpha'_l = \frac{\alpha'_x}{l'_x} = \frac{1}{1 + y'^2} y'' \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ па } K = |\alpha'_l| = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

што требаше да се докаже. ■

Теорема 4.7.4. Ако кривата C е зададена со параметарските равенки $x = x(t)$ и $y = y(t)$, при што x и y се двапати непрекинато диференцијабилни функции и $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$, тогаш равенката на кривина на кривата C во точката $M(x, y)$ е:

$$K = \frac{|\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Доказ. Со замена на $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ и $y'' = \frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{x}^3}$ во равенката од теорема 4.7.3. добиваме:

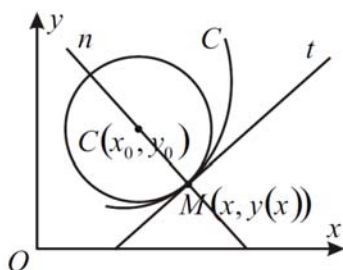
$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \left| \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \right| \frac{1}{\left(1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}|}{|\dot{x}|^3} \frac{1}{\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}|^3}} = \frac{|\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}. \blacksquare$$

Дефиниција 4.7.5. Радиус на кривина на кривата C во точката M е бројот $R = \frac{1}{K}$.

Дефиниција 4.7.6. Кружница на кривина на кривата $y = y(x)$ во точката $M(x, y)$ е кружницата која минува низ M и:

1. има заедничка тангентата со кривата во M ;
2. се наоѓа од иста страна од тангентата во околина на M , со лакот кривата;
3. има иста кривина со кривината на кривата во M .

Центарот на кружницата на кривина се нарекува **центар на кривината**, а радиусот на кружницата на кривина се нарекува **радиус на кривината**.



Цртеж 4.7.6.

Теорема 4.7.7. Координатите на центарот на кривината $C(x_0, y_0)$ на кружницата на кривина $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, $R = \frac{1}{K}$, на кривата C , што ги исполнува условите од теорема 4.7.3 за 1) или 4.7.4 за 2) се:

1. За $C: y = y(x)$,

$$x_0 = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \text{ и } y_0 = y + \frac{1+y'^2}{y''} \quad (1);$$

2. За $C: x = x(t), y = y(t)$,

$$x_0 = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}} \text{ и } y_0 = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}} \quad (2).$$

Доказ. 1) Нека кривата C е зададена со равенката $y = f(x)$ и нека точката $C(X, Y)$ е центар на кривата C во точката $M(x, y)$.

Нека $y' > 0$. Ако $y'' > 0$ ($|y''| = y''$), имајќи предвид дека:

$$\sin \alpha = \frac{tg \alpha}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \text{ и } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \text{ и}$$

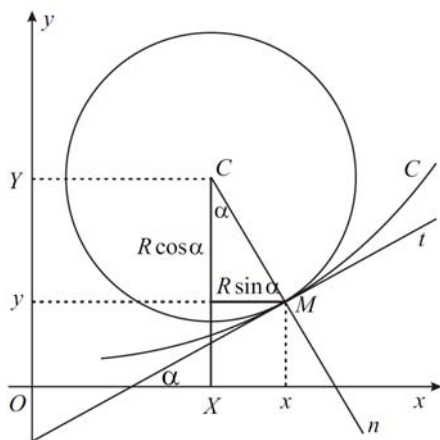
$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|},$$

според ознаките на првиот цртеж, добиваме:

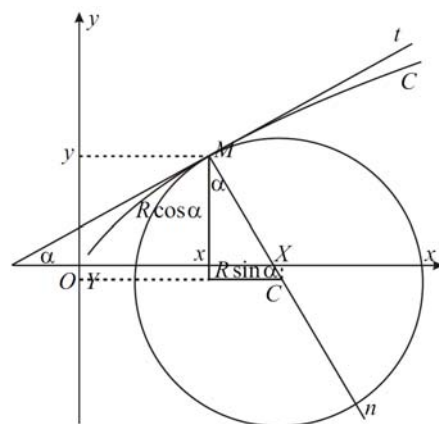
$$X = x - R \sin \alpha = x - \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \frac{y'}{1 + y'^2} = x - \frac{y'}{y''} (1 + y'^2)$$

и

$$Y = y + R \cos \alpha = y + \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \frac{1}{1 + y'^2} = y + \frac{1}{y''} (1 + y'^2).$$



Цртеж 4.7.7.1.



Цртеж 4.7.7.2.

Ако $y'' < 0$ ($|y''| = y''$), тогаш според ознаките на вториот цртеж, добиваме:

$$X = x + R \sin \alpha = x - \frac{y'}{y''} (1 + y'^2) \text{ и } Y = y - R \cos \alpha = x + \frac{1}{y''} (1 + y'^2).$$

Случајот $y' < 0$ се разгледува аналогно, при што се добиваат истите формули (1).

2) Ако кривата C е зададена со параметарските равенки $x = x(t)$ и $y = y(t)$ ги исполнува условите од теорема 4.7.4 тогаш заради $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ и $y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$, со замена во 1) ги добиваме релациите (2).■

Дефиниција 4.7.8. Геометриското место на центри на кривина на кривата C се нарекува **еволута** на C , додека кривата C се нарекува **еволвента** на својата еволута.

Равенките (1) и (2) од теорема 4.7.7 се параметарски равенки по x , односно по t , на еволутата на C . Се покажува дека нормалата на кривата C во произволна точка е тангентата на еволутата на C .

6.1.2.6. Суми на Дарбу

Нека функцијата f е дефинирана и ограничена на интервалот $[a, b]$. Нека $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ е поделба на $[a, b]$, таква што $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Поделбата го дели $[a, b]$ на n подинтервали $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Нека

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ и } M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

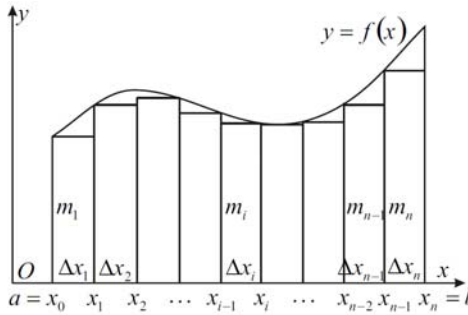
се инфимумот и супремумот на f на $[a, b]$. Тогаш:

$$s(P) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \text{ и}$$

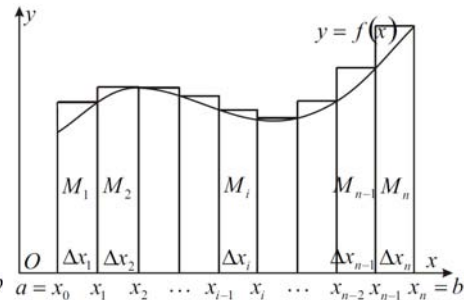
$$S(P) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

соодвено се нарекуваат **долна и горна сума на Дарбу** на f на $[a, b]$ во однос на поделбата P .

Ако f е ненегативна непрекината функција на $[a, b]$, тогаш долната и горната сума на Дарбу даваат плоштини на скалестите фигури се содржат и го содржат криволинискиот трапез (види цртеж).



Цртеж 6.1.2.6.1.



Цртеж 6.1.2.6.2.

Бидејќи $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, секоја интегрална сума σ_P е ограничена со s и S , т.е. $s(P) \leq \sigma_P \leq S(P)$ (3).

Нека $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ и $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, тогаш:

$$m(b-a) \leq s(P) \leq S(P) \leq M(b-a).$$

Притоа, за фиксна поделба P на $[a, b]$ важи:

$$s(P) = \inf \{\sigma_P\} \text{ и } S(P) = \sup \{\sigma_P\} \quad (1).$$

Ако за поделбите P и Q на $[a, b]$ важи $P \subseteq Q$, тогаш велиме дека поделбата Q е **раситнување** на P . Во тој случај:

$$s(P) \leq s(Q) \text{ и } S(Q) \leq S(P).$$

Ако P и Q се две поделби на $[a, b]$, тогаш важи:

$$s(P) \leq S(Q).$$

Имено, за поделбата $R = P \cup Q$ важи $s(P) \leq s(R) \leq S(R) \leq S(Q)$.

Од претходните тврдења следува дека постојат конечните броеви:

$$\underline{I} = \sup \{s(P)\} \text{ и } \bar{I} = \inf \{S(P)\}$$

и за секои поделби P и Q на $[a, b]$,

$$s(P) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S(Q) \quad (2).$$

За конкретна поделба P , Римановите суми σ_P се наоѓаат меѓу долната сума на Дарбу $s(P)$ и горната, $S(P)$, т.е.

$$s(P) \leq \sigma_P \leq S(P).$$

Теорема 6.1.2.6.1. Нека f е ограничена на $[a, b]$. Функцијата f е интегрибилна на $[a, b]$ ако и само ако за секое $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$, такво што

$$S(P) - s(P) < \varepsilon,$$

за секоја поделба P на $[a, b]$ со својство $\|P\| < \delta$.

Доказ. $\Rightarrow$) Нека функцијата f е интегрибилна на $[a, b]$ и $I = \int_a^b f(x)dx$. Следува дека за секое $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$, така што за секоја поделба на интервалот $[a, b]$ и секој избор на точки од подинтервалите, од $\|P\| < \delta$ да следува:

$$|\sigma_P - I| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ т.е. } I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_P < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Од (1) следува дека за:

$$\|P\| < \delta, \quad I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s(P) \quad (-s(P) \geq \frac{\varepsilon}{3} - I) \text{ и } S(P) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$$

од каде што имаме:

$$S(P) - s(P) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$) Нека за секое $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$, такво што за сите поделби на $[a, b]$ за кои $\|P\| < \delta$ да следува $S(P) - s(P) < \varepsilon$. Заради (2) следува дека $\underline{I} = \bar{I} = I$. Тогаш неравенството (2) има облик:

$$s(P) \leq I \leq S(P).$$

Заради (3) $s(P) \leq \sigma_P \leq S(P)$, од последните три неравенства следува:

$$|I - \sigma_P| < \varepsilon \text{ кога } \|P\| < \delta$$

Од произволноста $\varepsilon > 0$ следува дека $I = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sigma_P$, т.е. f е интеграбилна на $[a, b]$. ■

6.1.2.7. Класи на интеграбилни функции

Сумите на Дарбу даваат подобра визуелизација на поимот определен интеграл, во однос на Римановите суми. За функциите за кои имаме утврдено дека се интеграбилни се работи со Римановите суми. Во продолжение се дадени класите на интеграбилни функции.

Теорема 6.1.2.6. Ако f е непрекината на $[a, b]$, тогаш f е интеграбилна на $[a, b]$.

Доказ. Ако f е непрекината на $[a, b]$, тогаш f е рамномерно непрекината на $[a, b]$. Следува дека за секое $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ и поделба $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ на $[a, b]$ таква што:

$$|M_i - m_i| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ кога } \|P\| < \delta.$$

Следува:

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon \text{ кога } \|P\| < \delta.$$

Според теорема 5.1.1.2., следува дека f е интеграбилна на $[a, b]$. ■

Теорема 6.1.2.7. Ако f е монотона на $[a, b]$, тогаш f е интеграбилна на $[a, b]$.

Доказ. Нека f е монотонно растечка на $[a, b]$. Следува дека за која било поделба на $[a, b]$:

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) = f(b) - f(a).$$

Нека е дадено $\varepsilon > 0$. Постои $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, такво што за поделбите $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ на $[a, b]$ за кои $\|P\| < \delta$, т.е.

$\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ за секое $i = 1, 2, \dots, n$, важи:

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) = \varepsilon.$$

Следува f е интеграбилна на $[a, b]$. ■

Теорема 6.1.2.8. Ако f е интеграбилна на $[a, b]$, тогаш f е интеграбилна и на секој интервал $[\alpha, \beta]$ што се содржи во $[a, b]$. Обратно, ако $[a, b]$ е поделен на n подинтервали и во секој од нив f е интеграбилна, тогаш f е интеграбилна на $[a, b]$.

Доказ. $\Rightarrow$) За секоја поделба $\bar{P}$ на $[\alpha, \beta]$ постои поделба P на $[a, b]$ што ги содржи α и β и се совпаѓа со $\bar{P}$ на $[\alpha, \beta]$. Бидејќи f е интеграбилна на $[a, b]$, $S(P) - s(P) \rightarrow 0$ кога $\|P\| \rightarrow 0$. Тогаш и $S(\bar{P}) - s(\bar{P}) \leq S(P) - s(P) \rightarrow 0$ кога $\|P\| \rightarrow 0$. Следува дека f е интеграбилна на $[\alpha, \beta]$.

$\Leftarrow$) Доволно е да покажеме дека ако f е интеграбилна на $[a, c]$ и $[c, b]$, $a < c < b$ следува дека f е интеграбилна на $[a, b]$. Поделбите $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ и $P_2 = \{x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ на $[a, c]$ и $[c, b]$ соодветно, дефинираат поделба $P = P_1 \cup P_2 \cup \{c\}$ на $[a, b]$. Притоа

$$S(P_1) - s(P_1) \rightarrow 0 \text{ кога } \|P_1\| \rightarrow 0 \text{ и } S(P_2) - s(P_2) \rightarrow 0 \text{ кога } \|P_2\| \rightarrow 0.$$

Следува дека $\|P\| \rightarrow 0$ и $S(P) - s(P) \rightarrow 0$ кога $\|P\| \rightarrow 0$ т.е. f е интеграбилна на $[a, b]$. ■

Од последната теорема следува дека ако една функција е интеграбилна на конечен број подинтервали на кои е поделен $[a, b]$, тогаш функцијата е интеграбилна на $[a, b]$.

Ако функциите f и g се разликуваат во конечен број точки на $[a, b]$, тогаш сумите $S_f(P) - s_f(P)$ и $S_g(P) - s_g(P)$ се разликуваат во најмногу k члена од сумата $\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i$ која тежи кон нула кога $\|P\| \rightarrow 0$. Со тоа докажана е следнава теорема:

Теорема 6.1.2.9. Ако f и g се разликуваат само во конечен број на точки на $[a, b]$ и f е интегрибилна на $[a, b]$, тогаш и g е интегрибилна на $[a, b]$.

Од последните две теореми следуваат следниве теореми:

1) Ако f е ограничена и по делови непрекината на $[a, b]$, тогаш f е интегрибилна на $[a, b]$.

2) Ако f е ограничена и по делови монотона на $[a, b]$, тогаш f е интегрибилна на $[a, b]$.

Како што со помош на сумите на Дарбу пресметавме плоштина на криволиниски трапез, така може да пресметаме и плоштина и волумен на ротационо тело.

1.1. Функции

1.1.1. Операции со функции.

Имплицитна функција. Сложена функција

Задача 1. За функцијата $f(x) = 3^{x+1}$ најди:

а) $f(-2)$, б) $f(-1)$, в) $f(x-1)$, г) $f(x-2)f(x+1)$ и д) $\frac{f(x+1)}{f(x)}$.

Задача 2. За функцијата $f(x) = \begin{cases} x, & x < -1 \\ 0, & x \in (-1, 0) \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ најди:

а) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, б) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ и в) $f(e)$.

Задача 3. Ако $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$, $a > 0$; тогаш:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Докажи.

Задача 4. Најди го $f(x)$ ако $f\left(\frac{2x-3}{4x+1}\right) = 1 + \sin^3 x$.

Задача 5. Најди ја функцијата $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ако

$$f(-1) = 6, f(0) = 1, f(1) = 0 \text{ и } f(2) = 0.$$

Задача 6. Напиши го аналитичкиот израз на функцијата $f(x) = |x+2| + |x-1|$ без користење на знакот за апсолутна вредност.

Задача 7. Најди функција што ја исполнува релацијата:

$$x^2 + y^3 = 1.$$

Задача 8. Изрази го y како функција од x ако:

$$x = t - 1, y = t^3 + 2t + 5.$$

Задача 9. Кога две функции се еднакви? Дали се еднакви функциите:

$$\text{а) } f(x) = \frac{x^3}{x} \text{ и } g(x) = x^2; \quad \text{б) } f(x) = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} \text{ и } g(x) = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

Прашање 10. Зошто не постои сложената функција gf ,

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ и } g(x) = \ln x.$$

На која рестрикција на f сложената функција постои?

Задача 11. Најди ја сложената функција fg ако:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1} \text{ и } g(x) = x+4.$$

Задача 12. Најди две функции од кои се состои сложената функција: $h(x) = \operatorname{tg} \frac{x+1}{x-1}$. Дали изборот може да се направи на повеќе начини?

1.1.2. Формирање функции

Задача 1-2. Една страна на правоаголен триаголник има должина 7. Изрази ја/го:

- 1) дијагоналата на правоаголникот;
- 2) периметарот на правоаголникот;

како функција од другата страна x .

Задача 3. Кракот на рамнокрак правоаголен триаголник има должина 3. На страната AC лежи точката D оддалечена x единици од темето C . Низ точката D е повлечена права паралелна на хипотенузата AB , која ја сече страната BC во точка E . Изрази го периметарот на трапезот $ABDE$ како функција од x .

Задача 4. Права правилна четиристрана пирамида со основен раб $2\sqrt{2}$ и висина x е впишана во топка. Изрази го радиусот на топката како функција од x .

Коментар. Да се земат предвид случаите $x > R$ и $x < R$ кои потоа се сведуваат на еден случај (Зошто?).

Задача 5. Во прав конус со радиус r и изводница x е впишана топка. Изрази го радиусот на топката како функција од x .

Задача 6. Околу цилиндар со радиус x и висина H е опишана топка. Изрази го радиусот на топката као функција од x .

1.1.3. Дефинициона област

Задача 1. Која е дефиниционата област на елементарните функции:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt[3]{x}$; в) $y = a^x, a > 0$; г) $y = \log_a x$;

д) $y = \sin x$; ё) $y = \cos x$; е) $y = \operatorname{tg} x$; и ж) $y = c \operatorname{tg} x$.

Задача 2-4. Најди ја дефиниционата област на функцијата:

2) $y = \frac{1}{x+1}$; 3) $y = \frac{x^3+3}{x^2-7+12}$; 4) $y = \frac{x+3}{x^3+5x^5+6}$.

Задача 5-8. Најди ја дефиниционата област на функцијата:

5) $y = \sqrt[4]{x^2-1}$; 6) $y = \sqrt[5]{x^2+x-6}$;

7) $y = \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}}$; 8) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Задача 9-10. Најди ја дефиниционата област на функцијата:

9) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \frac{2x+1}{x+7}}$; 10) $y = \sqrt{\ln(x^2+3x+3)} + \lg x$;

Задача 11-12. Најди ја дефиниционата област на функцијата:

11) $y = \arcsin(6x-1)$; 12) $y = \arccos \frac{3x+2}{2x}$.

1.1.4. Парност, непарност и периодичност на функција

Задача 1-6. Определи кои од следниве функции:

1) $f(x) = -x^2$;

2) $f(x) = e^x + e^{-x}$;

3) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; 4) $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$;

5) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 3x - 2}$;

6) $f(x) = \sin x + 2 \cos x$.

се парни, непарни, ниту парни ниту непарни или периодични.

Функцијата **цел дел** од x , ознака $f(x) = [x]$ го пресликува x во најголемиот цел број што не го надминува x . Функцијата **дробен дел** од x , ознака $f(x) = \{x\}$, е определена со:

$$\{x\} = x - [x].$$

Задача 7. Докажи дека функцијата $f(x) = \{x\}$ е периодична со основен период 1.

Задача 8. Најди функција со основен период k , $k \neq 0$?

Упатство. Ако функцијата f е периодична со период T , тогаш функцијата F дефинирана со $F(x) = f(ax+b)$, $a > 0$ е периодична со период $\frac{T}{a}$.

Задача 9. Најди го основниот период на функцијата:

$$f(x) = \cos^2 x.$$

Задача 10. Која функција истовремено е парна и непарна. Образложи.

Задача 11. Докажи дека константната функција $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$; нема најмал период.

Задача 12. Докажи дека функцијата $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ не е периодична функција.

1.1.5. Нули, множество вредности, ограниченост, монотоност и локални екстреми на функција

Задача 1-4. Најди ги нулите на следниве функции:

$$1) f(x) = \frac{5x - 4x^2 - x^3}{2x^2 + 3}; \quad 2) f(x) = \lg \sqrt{x^2 + 6x - 15}.$$

$$4) f(x) = 2\sin^2 x + \sin x - 1; \quad 4) f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Задача 5. Зошто функцијата $y = \frac{1}{x}$ не е монотона?

Опреди ги интервалите на монотоност на функцијата.

Задача 6-8. Опреди ги интервалите на монотоност на функциите:

$$6) f(x) = x^2 - 2x - 1; \quad 7) f(x) = |x + 1|; \quad 8) f(x) = 3^{2-x}.$$

Утврди дали на дадените интервали функциите растат или опаѓаат.

Задача 9-12. Кои од наведените функции се ограничени од горе, од долу или ограничени, а кои не се ограничени?

$$9) f(x) = 2x + 1; \quad 10) f(x) = 5 \cos x;$$

$$11) f(x) = \{x\}; \quad 12) f(x) = 2^x.$$

1.1.6. Инверзна функција

Задача 1. Најди инверзна функција на функцијата:

$$f(x) = \sin x + 1,$$

на еден максимален интервал на кој инверзната функција постои.

Задача 2-5. Докажи дека функциите $y: D_y \rightarrow V_y$ се инверзни сами на себе, ако:

$$2) y = \frac{1}{x}; \quad 3) y = 1 - x; \quad 4) y = \frac{x+1}{x-2}$$

Задача 6. Какви треба да бидат константите a и b за да функцијата $f(x) = ax + b$ биде инверзна сама на себе.

1.2. Скицирање криви

1.2.1. Скицирање графици на функции
зададени со експлицитни равенки

Задача 1-2. Скицирај го графикот на функцијата:

$$1) y = x^2 + 1; \quad 2) y = \frac{x^2}{3} - 2x + 1.$$

Задача 3-4. Скицирај го графикот на функцијата:

$$3) y = (x-1)^3; \quad 4) y = \frac{1}{3}(x-1)^3 - 2.$$

Задача 5-6. Скицирај го графикот на функцијата:

$$5) y = x - \cos x; \quad 2) y = \sin x + \cos x.$$

Задача 7-8. Скицирај го графикот на функцијата:

$$7) y = -\cos x; \quad 8) y = -|x|.$$

Задача 9-10. Скицирај го графикот на функцијата:

$$9) y = |\sin x|; \quad 10) y = |x^2 + 3x - 4|.$$

Задача 11-12. Скицирај го графикот на функцијата:

$$11) y = \frac{1}{x}; \quad 12) y = \frac{3x+1}{x-2}.$$

Задача 13-14. Скицирај го графикот на функцијата:

$$13) y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}; \quad 14) y = e^{x+2} + 1;$$

Задача 15-18. Скицирај го графикот на функцијата:

$$15) y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2); \quad 16) y = \log_2(2x+3);$$

$$17) y = \ln(x+2); \quad 18) y = -\log_{\frac{1}{4}}(x) - 1.$$

Задача 19-22. Скицирај го графикот на функцијата:

$$19) y = \cos \frac{x}{2}; \quad 20) y = \operatorname{ctg}(x) - 2.$$

$$21) y = \frac{1}{2} \sin(3(x-1)); \quad 22) y = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Задача 23-26. Скицирај го графикот на функцијата:

$$23) y = \arcsin(x+1); \quad 24) y = \arccos(x) - 2.$$

$$25) y = 2 \operatorname{arctg}(x-1); \quad 26) y = \operatorname{arccctg} \frac{x}{2}.$$

Задача 27-28. Скицирај го графикот на функцијата:

$$27) y = \sqrt{2x-3}; \quad 28) y = \sqrt[3]{x+1};$$

Задача 29-32. Скицирај го графикот на функцијата:

$$29) y = \frac{1}{1+x^2}; \quad 30) y = \frac{1}{\frac{1}{2} + (x+1)^2};$$

$$31) y = -\frac{1}{\sin(x-\pi)}; \quad 32) y = \frac{1}{3 \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)}.$$

1.2.2. Скицирање криви зададени со параметарски равенки

Задача 1-4. Скицирај ги кривите:

$$1) x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t;$$

$$2) x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t);$$

$$3) x = t, \quad y = t^3;$$

$$4) x = 1-t, \quad y = 1-t^2.$$

1.2.3. Скицирање криви зададени со поларни равенки

Задача 1-2. Скицирај ја кривата:

$$1) \rho = a \varphi; \quad 2) \varphi = \frac{\pi}{3};$$

$$3) \rho = a \cos \varphi; \quad 4) \rho = \frac{a}{\sin \varphi}.$$

Задача 5-6. Скицирај ја кривата:

$$5) \rho = a(1 + \sin \varphi); \quad 6) \rho = a(1 - \cos \varphi).$$

Задача 7-8. Скицирај ја кривата:

$$7) \rho = a \sin 2\varphi; \quad 8) \rho = a \cos 3\varphi.$$

Задача 9-10. Скицирај ја кривата:

$$9) \rho = a^2 \cos 2\varphi; \quad 10) \rho = a^2 \sin 2\varphi.$$

Задача 11-14. Трансформирај ги во поларни координати равенките:

$$11) y = x; \quad 12) x^2 + y^2 = a^2.$$

$$13) x^2 + y^2 = ax; \quad 14) (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

1.3. Низи

1.3.1. Дефиниција и основни поими на низа

Задача 1. Напиши ги првите неколку члена на низите:

$$а) a_n = \frac{2n-1}{n}; \quad б) a_n = (-1)^n \frac{8}{n}; \quad в) a_n = \cos \frac{n\pi}{2}.$$

Задача 2. Напиши една од можните формули за општ член на низите:

$$а) 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \dots \quad б) 1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \dots \quad в) \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$$

Задача 3-5. Испитај ја монотоноста на низата:

$$3) a_n = \frac{1}{n!}; \quad 4) a_n = \frac{2n+1}{3n}; \quad 5) a_n = \frac{1}{n+1} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Задача 6-8. Испитај ја ограниченоста (од долу, од горе) на низата:

$$6) a_n = \frac{n}{n+2}; \quad 7) a_n = \cos \frac{n\pi}{2}; \quad 8) a_n = (-1)^n n.$$

Задача 9-11. Пополни ја следнава табела:

Низа	Множесто вредности	Максимум	Минимум	Супремум	Инфинимум	Точка на натрупување
9) $\frac{1}{n^3}$						
10) $\frac{n-1}{n+1}$						
11) $7(-1)^n$						

1.3.2. Граница на низа

Задача 1-2. Со помош на теоремата за конвергенција на монотони низи, докажи ја конвергенцијата на низите:

$$1) a_n = \frac{n}{n+1}; \quad 2) a_n = \frac{1}{n}.$$

Задача 3-4. Со помош на дефиницијата за граница на низа докажи ги равенствата:

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3n-2} = -\frac{2}{3}; \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-1}{n+1} = +\infty.$$

Задача 5. Пресметај $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+1}$, а потоа најди го најмалиот природен број n_0 , таков што за сите $n > n_0$ да е исполнето $|a_n - a| < \varepsilon$, кога:

$$а) \varepsilon = 0,1; \quad б) \varepsilon = 0,05; \quad в) \varepsilon = 0,01; \quad г) \varepsilon = 0,005.$$

1.3.3. Пресметување на граница на низа

Задача 1-4. Пресметај ги границите на низите:

$$1) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{2n + 1}; \quad 2) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{2n^3 + 1};$$

$$3) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{2n^2 + 1}; \quad 4) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-3)}{n^2}.$$

Задача 5-6. Пресметај ги границите на низите:

$$5) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + n!}{(n+1)! - (n-1)!}; \quad 6) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}.$$

Задача 7-8. Пресметај ги границите на низите:

$$7) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 - 1} + 2}{n - 1}; \quad 8) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4}{\sqrt[3]{n^5 - n^4 + 2n^3 + 1}}.$$

Задача 9-10. Пресметај ги границите на низите:

$$9) L = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + 1}); \quad 10) L = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n).$$

Задача 11-12. Пресметај ги границите на низите:

$$11) L = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+1) - \ln(n-1)); \quad 12) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n + 3}{n^2 + n + 1} \right)^{n+2}.$$

Задача 13-14. Пресметај ги границите на низите:

$$13) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{1 + 3^{n-1}}; \quad 14) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - 2n^2}{n^3 - n^2 + 2n - 3} \right)^7.$$

1.4.1-4. Граница на функција

1.4.1. Граница на функција по дефиниција

Задача 1-2. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на функција докажи ја границата:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} (-x - 1) = 0; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Задача 3-6. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на функција докажи ја границата:

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^2}{x} = -\infty; \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{x} = -\infty.$$

1.4.2. Пресметување на граница на функција

Задача 1-2. Пресметај ја границата:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 7); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 7}{2x}.$$

Задача 3-4. Пресметај ја границата:

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} + x); \quad 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Задача 5-6. Пресметај ја границата:

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x^3 - x}.$$

Задача 7-10. Пресметај ја границата:

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 5x + 10}{x^3 - 2x^2 + 9x + 7}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x + 2)(x - 1)^2}{x^3 + 5}.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 - 5x + 10}{3x^3 - 9x + 6}; \quad 10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 5x + 10}{3x^3 - 9x + 6}.$$

Задача 11-12. Пресметај ја границата:

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x^2}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} \right); \quad 12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x + 1} - \frac{x^2}{x^2 - 1} \right).$$

Задача 13-14. Пресметај ја границата:

$$13) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{x - 1}; \quad 14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}.$$

Задача 15-16. Пресметај ја границата:

$$15) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 1}); \quad 16) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 2}).$$

Задача 17-18. Пресметај ја границата:

$$17) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}; \quad 18) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}.$$

Задача 19-20. Пресметај ја границата:

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}; \quad 20) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

1.4.3. Некои поважни граници

Задача 1-4. Определи ја границата:

$$\begin{array}{ll} 1) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}; & 2) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2}; \\ 3) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}; & 4) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x \cos x}. \end{array}$$

Задача 5-6. Пресметај ја границата:

$$5) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \sqrt{1-x}}; \quad 6) L = \lim_{x \rightarrow 1} (1+x) \operatorname{ctg} (1 + \sqrt[3]{x}).$$

Задача 7-8. Пресметај ја границата:

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 1}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} \right).$$

Задача 9-10. Пресметај ја границата:

$$9) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{2x}; \quad 10) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{2x}.$$

Задача 11-14. Пресметај ја границата:

$$\begin{array}{ll} 11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^x; & 12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{2}}. \\ 13) L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)^{x^2}; & 14) L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3x - 1}{2x^2 + x - 2} \right)^{\frac{x^2 - 2x}{x+3}}. \end{array}$$

Задача 15-16. Пресметај ја границата:

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} x (\ln(x+1) - \ln x); \quad 16) \lim_{x \rightarrow \infty} x \lg \left(\frac{3+x}{5+x} \right).$$

Задача 17-18. Пресметај ја границата:

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x+1}};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Задача 19-23. Определи ја границата:

$$19) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{2x+1} \right)^{\frac{x+1}{2}};$$

$$20) L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+3x-1}{x^2+x-2} \right)^{\frac{x^2-2x}{x+3}};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{x+2}};$$

$$22) L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+3x-1}{x^2+x-2} \right)^{\frac{x^2-2x}{x^2+3}}.$$

Задача 24-26. Определи ја границата:

$$24) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x}-1}{x}; \quad 25) L = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(a^{\frac{1}{x}} - 1 \right); \quad 26) L = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\log_a x - 1}{x-a}.$$

Задача 28. Докажи дека $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ не постои.

1.5. Непрекинатост на функција

1.5. Дефиниција, основни поими и операции со непрекинати функции. Прекини

Задача 0. Дефинирај непрекинатата функција. Како геометриски се интерпретира графикот на непрекинатата функција. Нацртај график на непрекинатата функција на интервалот $[0, 2]$.

Задача 1-2. Докажи дека функцијата:

$$1) f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1; \quad 2) f(x) = \operatorname{tg} 2x;$$

е непрекината.

Задача 3-4. Со помош на „ $\varepsilon - \delta$ “ - дефиницијата за непрекинатост на функцијата, покажи ја непрекинатоста на функцијата:

$$3) f(x) = x^3; \quad 4) f(x) = 2x;$$

Задача 5-6. Испитај ја непрекинатоста на функцијата:

$$5) f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1) \\ 3-x, & x \in [1, 2] \end{cases}, \text{ во точката } x_0 = 1;$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}, \text{ во точката } x_0 = 0.$$

Задача 7-9. Најди ги и испитај ги точките на прекин за функцијата:

$$7) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}; 8) f(x) = \operatorname{sgn}(x); 9) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

Задача 10. Додефинирај ја функцијата: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ во точката $x_0 = 1$, така што да биде непрекината.

Задача 11-12. Определи ги вредностите на параметарот a , така што функцијата:

$$11) f(x) = \begin{cases} 3x - \sqrt{x^2 - 1}, & |x| \geq 1 \\ ax, & |x| < 1 \end{cases}; \quad 12) f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ a + x, & x > 0 \end{cases};$$

да биде непрекината.

Задача 13. Определи ги вредностите на параметрите a и b , така што функцијата: $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ 4ax + b, & x > 1 \end{cases}$ да биде непрекината.

Задача 14. Испитај ја непрекинатоста на функцијата:

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ во } x_0 = 0.$$

2. Изводи

2.1. Извод на функција по дефиниција

Задача 1-4. Определи го по дефиниција изводот на следниве функции:

$$1) y = -3x + 1;$$

$$2) y = 2x + 3;$$

$$3) y = \frac{x}{4x-1};$$

$$4) y = x^3 - x + 2.$$

Задача 5-6. Најди по дефиниција:

$$5) y'(1), \text{ ако } y = 3x^2 + 2; \quad 6) y'(-2), \text{ ако } y = x^3 - 4x + 1;$$

Задача 7-8. Најди го изводот по дефиниција, од следниве функции:

$$7) y = \sqrt{x-1};$$

$$8) y = x \cos x.$$

Задача 9-10. Најди ги левиот и десниот извод на функцијата:

$$9) y = |x+1|;$$

$$10) y = |\ln x|;$$

во точката $x = 1$. Дали функцијата има извод во дадената точка?

Задача 11-12. Најди ги левиот и десниот извод на функцијата:

$$11) y = 2x^2 - 3, \text{ во точката } x = 1;$$

$$12) y(x) = \begin{cases} 2x-3, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ во точката } x = 0;$$

Дали функциите се диференцијабилни во дадените точки?

Задача 13. Дали функцијата $y(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ е

диференцијабилна во точката $x = 1$?

Задача 14. Определи го параметарот a , така што функцијата $y(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ x^2 + ax + 1, & x \geq 0 \end{cases}$, да е диференцијабилна.

Задача 15. Определи ги параметрите a и b , за кои функцијата: $y(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 3, & x \leq 1 \\ x^2 + b, & x > 1 \end{cases}$ е диференцијабилна.

Задача 16.* Покажи дека функцијата:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \text{ е рационален} \\ 1, & \text{ако } x \text{ е ирационален} \end{cases}$$

нема извод во ниту една точка.

2.2. Извод од сума, разлика, производ и количник

Задача 1-10. Користејќи ги табличните изводи и правилата на диференцирање, најди ги изводите на следниве функции:

$$1) y = -7; \quad 2) y = -\frac{1}{7}x^5 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{x^3};$$

$$3) y = \sqrt[4]{x^3 \sqrt[3]{x}}; \quad 4) y = \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}};$$

$$5) y = 2 \arcsin x - 3 \arccos x; \quad 6) y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x;$$

$$7) y = 4 \cdot 3^x - 2 \cdot 4^x + a^x; \quad 8) y = \ln x^2;$$

$$9) y = 3 \sin x - 2 \cos x + x; \quad 10) y = a^2 (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x).$$

Задача 11-16. Најди ги изводите на следниве функции:

$$11) y = x \cos x; \quad 12) y = (2x^2 + 3x + 1)e^x;$$

$$13) y = (x+2)(x^2-7)(x^3+5); \quad 14) y = \ln(x) \operatorname{tg} x;$$

$$15) y = x \arcsin x; \quad 16) y = \sqrt[3]{x} \sin x.$$

Задача 17-22. Најди ги изводите на следниве функции:

$$17) y = \frac{3x-2}{2x+5}; \quad 18) y = \frac{x^2-4x+2}{2x+2};$$

$$19) y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}; \quad 20) y = \frac{x \sin x}{1-\cos x};$$

$$21) y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}; \quad 22) y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Задача 23-24. Најди:

$$23) y'' \text{ ако } y = \frac{\cos x}{1 + \cos x}; \quad 24) y''' \text{ ако } y = e^x \sin x.$$

Задача 25-26. Најди ги n -тите изводи на функциите:

$$25) y = \log_a x; \quad 26) y = xe^x.$$

Задача 27. Провери дали функцијата $y = (x+1)e^x$ ја исполнува диференцијалната равенка $y''' - y'' - y' + y = 0$.

Задача 28. Докажи дека функцијата $y = \sin x + \cos x$ ја задоволува равенката: $y^{(4)} + y''' + y' + y = 0$.

Задача 29. Докажи дека функцијата $y = \frac{x+1}{x-2}$ ја исполнува равенката: $(x+1)y'' + 2yy' = 0$.

2.3. Извод од сложена функција

Задача 1-12. Пресметај ги изводите на следниве функции:

$$1) y = 2 \sin(3x^2 + 1); \quad 2) y = \ln \lg x;$$

$$3) y = \arccos(1 - x^2); \quad 4) y = \sqrt{2x - 5};$$

$$5) y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}; \quad 6) y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$$

$$7) y = (3 - 3x^7)^{18}; \quad 8) y = (1 + x^2)^7 (3x^4 - 2)^5;$$

$$9) y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \quad 10) y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

$$11) y = \sin^2 x; \quad 12) y = 2^{\cos^3 x}.$$

$$13) y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad 14) y = 3^{2^x}.$$

Задача 15-16. Пресметај:

15) y'' ако $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 7$; 16) y''' ако $y = \frac{x}{1+x^2}$;

Задача 17-18. Пресметај ги n -тите изводи на функциите:

17) $y = \sin 2x$;

18) $y = e^x \sin x$;

Задача 19. Докажи ја следнава формула:

$$(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n \geq 0.$$

Задача 20. Докажи дека функцијата $y = \arcsin x$ ја исполнува равенката: $(1-x^2)y'' - xy' = 0$.

Задача 21. Покажи дека функцијата:

$$y = e^{\arcsin x},$$

ја исполнува диференцијалната равенка: $(1-x^2)y'' - xy' - y = 0$.

Задача 22. Провери дали функцијата:

$$y = 2 \cos(\ln x) + 3 \sin(\ln x),$$

ја задоволува диференцијалната равенка: $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

2.4. Извод од параметарски зададена функција

Задача 1-4. Пресметај ги изводите:

1) $x = a \cos 2t$, $y = a \cos 3t$, $a > 0$;

2) $x = a \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} - t \right)$, $y = a \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} - 1 \right)$, $a > 0$;

3) $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$;

4) $x = \frac{a}{\cos^3 t}$, $y = a \operatorname{tg}^3 t$, $a > 0$.

Задача 5-8. Пресметај ги изводите:

5) $x = t^2$, $y = \frac{t^3}{3} - t$; 6) $x = \frac{t^2}{1-t^2}$, $y = \frac{1}{1+t^2}$;

$$7) x = t + e^{-t}, y = 2t + e^{-2t}; \quad 8) x = t \ln t, y = \frac{\ln t}{t};$$

Задача 9-12. Пресметај:

$$9) y'' \text{ ако } x = 2t^4, y = 4t - t^3; \quad 10) y'' \text{ ако } x = 2 \cos t, y = \sin t;$$

$$11) y''' \text{ ако } x = e^{2t}, y = e^{3t}; \quad 12) y''' \text{ ако } x = \cos^3 t, y = \sin^3 t.$$

Задача 15. Покажи дека функцијата:

$$x = 2t + 3t^2, y = t^2 + 2t^3;$$

ја исполнува равенката $2y'^3 + y'^2 - y = 0$.

2.5. Извод од имплицитно зададена функција

Задача 1-4. Пресметај ги изводите:

$$1) x^3 - 2xy + y^2 = 4y; \quad 2) e^y - e^{-x} + xy = 0;$$

$$3) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad 4) x = y + \arctg y.$$

Задача 5-8. Пресметај ги изводите:

$$5) y \sin x - 3 \cos y + y^2 \cos(xy) = 0; \quad 6) \arccos \frac{x}{y} - \sin y = 0;$$

$$7) e^x \sin y - e^{-y} \sin x = 0; \quad 8) (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9.$$

Задача 9-10. Најди го изводот на следниве функции:

$$9) y = x^{2x}; \quad 10) 3^x - e^{x+y} = 0.$$

Задача 11-12. Пресметај ги изводите:

$$11) y = \frac{x^2(x+1)^4}{(x-1)^2(x+2)^3}; \quad 12) y = \frac{\sqrt[3]{x^2} \sqrt{(x^2-1)^3}}{(2x-1)^2}.$$

Задача 13-16. Пресметај:

$$13) y'' \text{ ако } \arctg y = x + y; \quad 14) y'' \text{ ако } y = \frac{1}{x^{2x}};$$

$$15) y''' \text{ ако } x^2 + xy + y^2 = a^2; \quad 16) y''' \text{ ако } y^2 = 2px.$$

Задача 19. Покажи дека функцијата $y - \arctg y + x = 0$ го исполнува равенството: $y^3 y'' + 2y' = 0$.

2.6. Диференцијал на функција. Приближно пресметување

Задача 1-4. Најди ги диференцијалите на функциите:

$$\begin{aligned} 1) y &= \frac{\cos x}{x}; & 2) y &= e^x \sqrt[3]{x^3 - 3x}; \\ 3) y &= \arcsin(\ln \lg x); & 4) y &= 3^{2x} + \operatorname{arcc} \lg(2^{-x}). \end{aligned}$$

Задача 5-6. Најди ги вторите диференцијали на функциите:

$$5) y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 6) y = x \sin \left(1 - \frac{x^2}{2} \right).$$

Задача 7-9. Пресметај приближно:

$$7) \sqrt[3]{26,19}; \quad 8) \sin 31^\circ; \quad 9) \ln 0,9^\circ.$$

3. Примена на изводи

3.1. Равенка на тангента и нормала на график на функција. Агол меѓу криви. Допирни големини

Задача 1. Напиши ја равенката на тангентата и нормалата на графикот на функцијата $y = x^2 + 3x - 2$ во точката $M(2, 2)$.

Задача 2. Напиши ја равенката на тангентата и нормалата на графикот на функцијата $y = \ln x$ во точката $M(1, ?)$.

Задача 3. Напиши ја равенката на тангентата и нормалата на елипсата $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ во точката:

$$1) A(-2, 0); \quad 2) B(2, 0); \quad 3) C(0, 3); \quad 4) D(0, -3).$$

Задача 4. Напиши ја равенката на тангентата и нормалата на графикот на функцијата $y = (2x + 1)\sqrt{2 - x}$ во точката:

$$1) A(-2, ?); \quad 2) B(2, ?); \quad 3) C(1, ?); \quad 4) D\left(\frac{7}{3}, ?\right).$$

Задача 5. Напиши ја равенката на тангентата на кривата $x^2 + y^2 - 3xy - 5 = 0$ во точката $M(4,1)$.

Задача 6. Напиши ја равенката на тангентата и нормалата на кривата $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ во точката во која $t = \pi$.

Задача 7. Во која точка се сечат тангентите на графикот на функцијата $y = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$ повлечени во точки со апциси:

$$x_1 = 4 \text{ и } x_2 = -2.$$

Задача 8. Под кој агол се сечат тангентите на графикот на функцијата $y = \sin 3x$ повлечени во точки со апциси:

$$x_1 = \frac{\pi}{18} \text{ и } x_2 = \frac{5\pi}{18}.$$

Задача 9. Пресметај ја плоштината на триаголникот ограничен со координатните оски и тангентата на графикот на функцијата $y = \sqrt{2x^2 - 4}$ повлечена во точката со апциса $x_0 = 2$.

Задача 10. Најди го коефициентот на правец и тангентата на графикот на функцијата $y = \operatorname{arctg} x$, во точката со апциса $x_0 = 3$.

Задача 11. Во која точка тангентата на графикот на функцијата $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$ е паралелна со правата

$$x + 3y - 4 = 0?$$

Задача 12. Напиши ги равенките на тангентите на елипсата $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ нормални на правата $y = 4x - 14$.

Задача 13. Состави ја равенката на нормалата на графикот на функцијата $y = x \ln x$ која е нормална на правата $2x - 3y + 3 = 0$.

Задача 14. Состави ја равенката на нормалата на графикот на функцијата $y = 3x^2 - 2x + 5$ која е нормална на симетралата на првиот и третиот квадрант.

Задача 15. Најди ги точките во кои тангентите на графикот на функцијата $y = x^3 - 2x^2$ и $y = 2x^2 + 3x - 2$ се паралелни.

Задача 16. Тетивата на графикот на функцијата $y = x^3 + x - 1$ поврзува две точки со апциси $x = -1$ и $x = 1$. Состави ја равенката на тангентата на кривата која е паралелна на тетивата.

Задача 17. Најди ги аглиите под кои се сечат графиците на функциите: $2y = x^2$ и $2y = 8 - x^2$.

Задача 18. Најди ги равенките на тангентите на графикот на функцијата $y = x^3 + 3$ повлечени од точката $A(2, 3)$.

Задача 19. Најди ги равенките на тангентите на графикот на функцијата $y = \frac{x-1}{x}$ повлечени од точката $A(3, 0)$.

Задача 20. Најди ги точките во кои тангентите на графикот на функцијата $y = \frac{x+2}{x-2}$ зафаќаат агол $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ со позитивната насока на x -оската.

Задача 21-22. Најди ја должината на субтангентата, субнормалата, тангентата и нормалата на графикот на функцијата:

21) $y = \sqrt{x}$ во точката со апциса $x = 1$;

22) $y = \operatorname{tg} x$ во точката со апциса $x = \frac{\pi}{4}$.

3.2. Теореме за средна вредност

(Ферма, Рол, Лагранж и Коши)

Задача 1. Најди ја најголемата и најмалата вредност на функцијата: $f(x) = x^2(1-x)$ интервалот $[-1, 1]$.

Задача 2. Провери дали функцијата: $f(x) = 4x - x^2 - 2$ ги исполнува условите од теоремата на Рол на интервалот $[1, 3]$. Во потврден случај најди ја вредноста на точката ξ .

Задача 3. Покажи дека меѓу нулите на функцијата $f(x) = 2x + 3 - x^2$ се наоѓа корен на нејзиниот извод.

Задача 4-5. Провери дали функциите:

4) $f(x) = \sqrt{1+x}$ на интервалот $[0, 3]$;

5) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ на интервалот $[1,3]$;

ги исполнуваат условите од теоремата на Лагранж. Во потврден случај, најди ја вредноста на точката ξ .

Задача 6. Во која точка од графикот на функцијата $f(x) = x^2$, тангентата е паралелна со отсечката што ги поврзува точките $A(0,0)$ и $B(2,4)$.

Задача 7-8. Со помош на теоремата на Лагранж, покажи ги неравенствата:

7) $e^x > 1+x$, $x \neq 0$; 8) $\ln(1+x) < x$, $x > 0$.

Задача 9. Провери дали функциите:

$$f(x) = x^3 + 1 \text{ и } g(x) = 3 - x^2,$$

ги исполнуваат условите од теоремата на Коши на интервалот $[0,2]$. Во потврден случај најди ја вредноста точката ξ .

3.3. Тејлорова формула

Задача 1. Разложи го по степените на $x+1$ полиномот:

$$f(x) = -2x^3 + 5x^2 + 3x + 1.$$

Задача 2. Пресметај $f(2,3)$, ако:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1.$$

Задача 3. Апроксимирај ја функцијата $f(x) = e^x$ со Маклоренов полином од втор степен.

Задача 4. Апроксимирај ја функцијата $f(x) = x \ln x$ со Тајлоров полином од трет степен во околина на точката $x = 2$.

3.4. Лопиталово правило

Задача 1-2. Пресметај ги границите:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + 6}{x^2 - 4}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1}$;

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}, \quad a, b \in \mathbb{R};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x^3 - 2x^2 + x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a}, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right);$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin x) \operatorname{ctg} x;$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right);$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right);$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x;$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)^{\frac{1}{\ln x}};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x^{\operatorname{tg} x};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{ctg} x^{\frac{1}{\ln x}}.$$

3.5. Екстремни вредности, интервали на монотоност, превојни точки, интервали на конкавитет и асимптоти на функции

Задача 1. Претстави го бројот 18 како збир на два броја, така што нивниот производ да биде најголем.

Задача 2. Претстави го бројот 18 како збир на два броја, така што збирот на нивните кубови да биде најмал.

Задача 3. Од сите правоаголници со периметар a одреди го правоаголникот што има најголема плоштина.

Задача 4. Од сите правоаголници со периметар a одреди го правоаголникот што има најмала дијагонала.

Задача 5. Низ точката $A(1,4)$ повлечи права која со координатните оски гради триаголник во прв квадрант со најмала плоштина.

Задача 6. Точка се движи по x -оската по равенката $x(t) = \sin t + \cos t$. Која е максималната оддалеченост на точката од координатниот почеток?

Задача 7. Определи ги димезиите на базен со квадратно дно и волумен 8 единици, така што за обложување на сидовите и подот на базенот да се потроши најмалку материјал.

Задача 8. Во топка со радиус R впиши цилиндер со најголем волумен.

Задача 9. Во топка со радиус R впиши цилиндер со најголема плоштина.

Задача 10. Во прав кружен конус со радиус R и висина H впиши превртен конус чие теме е во центарот на основата на првиот конус, така што волуменот да му биде максимален.

Задача 11. Во прав кружен конус со радиус R и висина H впиши цилиндар со најголем волумен.

Задача 12. Околу полутопка со радиус R опиши конус со минимален волумен, така што основата на конусот да лежи во рамнината определена од основата на полутопката.

Задача 13. Во киносала најдобра позиција има оној гледач кој екранот го гледа под најголем агол. Одреди на кое растојание од екранот треба се седне гледачот, ако екранот е на висина од 1 до 7 метри од окото на гледачот.

Задача 14. Од картон во форма на круг со радиус r е исечена фигура во форма на крст од која со превиткување и лепење може да се состави кутија без капак во форма на квадар. Определи ги димензиите на кутијата, така што нејзината плоштина да биде најголема.

3.7. Испитување тек и цртање график на функција

Задача 1-2. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата:

$$1) y = x^3 + x^2; \quad 2) y = x^4 - 5x^2 + 4.$$

Задача 3-10. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата:

$$3) y = \frac{1-x}{x+2}; \quad 4) y = \frac{1-x^2}{x^2+2}; \quad 5) y = \frac{x^2}{x^2-3x+2}; \quad 6) y = \frac{3x}{x^2+1};$$

$$7) y = \frac{2-x-x^2}{1+x}; \quad 8) y = x + \frac{1}{x+1}; \quad 9) y = \frac{x^3}{(x+1)^2}; \quad 10) y = \frac{x^4}{x^2-3}.$$

Задача 11-12. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата:

$$11) y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}; \quad 12) y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Задача 13-14. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата:

$$13) y = \sin^2 x + \sin x; \quad 14) y = \cos x - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Задача 15-18. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата:

$$15) y = \frac{x}{e^x}; \quad 16) y = (x-1)^2 e^x; \quad 17) y = \frac{2e^{\frac{x}{2}}}{x^2-5}; \quad 18) y = \frac{1}{(3-x^2)e^x}.$$

Задача 19-22. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата:

$$19) y = \frac{\ln x}{x}; \quad 20) y = x \ln x; \quad 21) y = x - \ln x; \quad 22) y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x.$$

4. Неопределен интеграл

4.1. Основни правила и операции со таблични интегралы

Задача 1-4. Најди ги интегралите:

$$1) I = \int x^3 dx; \quad 2) I = \int \left(2x^7 - \frac{7}{x} \right) dx;$$

$$3) I = \int (x+3)(2x-1) dx; \quad 4) I = \int (2x-3)^2 dx.$$

Задача 5-8. Најди ги интегралите:

$$5) I = \int \sqrt[5]{x^2} dx; \quad 6) \int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{x}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx;$$

$$7) \int \sqrt[4]{x^4} \sqrt[3]{x^2} dx; \quad 8) I = \int \frac{(\sqrt[2]{x} + 1)^3}{\sqrt{x^2}} dx.$$

Задача 9-12. Најди ги интегралите:

$$9) I = \int 3 \sin x dx; \quad 10) I = \int \cos^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$11) I = \int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx; \quad 12) I = \int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} dx.$$

Задача 13-16. Најди ги интегралите:

$$13) I = \int \sin^2 x (tg^2(x) + 1) dx; \quad 14) I = \int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx;$$

$$15) I = \int \cos^2 x (tg^2(x) + 1) dx; \quad 16) I = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx;$$

Задача 17-20. Најди ги интегралите:

$$17) I = \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 9}}; \quad 18) \int \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$19) I = \int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx; \quad 20) \int \frac{(1-x)^2}{x(1+x^2)} dx.$$

Задача 21-24. Најди ги интегралите:

$$21) I = \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx; \quad 22) I = \int 2^x 3^x dx;$$

$$23) I = \int 3^{-x} dx; \quad 24) I = \int \frac{3^x + 4^{x-1}}{12^x} dx.$$

4.2. Смена на променливи

Задача 1-8. Најди ги интегралите:

$$1) \int \sin 3x dx; \quad 2) \int e^{3x-1} dx; \quad 3) \int \sqrt{2x-7} dx; \quad 4) \int \frac{dx}{x-a};$$

$$5) \int (x+2)^{11} dx; \quad 6) \int \frac{dx}{(x-1)^7}; \quad 7) \int 3^{2x+5} dx; \quad 8) \int \frac{1}{\sqrt{5+x^2}} dx.$$

Задача 9-14. Најди ги интегралите:

$$\begin{aligned} 9) \int \frac{x^3 + 2}{x^4 + 4x^2} dx; \quad 10) \int \frac{3x^2}{\sqrt[4]{x^3 - 7}} dx; \quad 11) \int xe^{x^2} dx; \\ 12) \int x^2 5^{x^3-1} dx; \quad 13) \int \frac{dx}{(\arccos^2 x) \sqrt{1-x^2}}; \quad 14) \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx. \end{aligned}$$

Задача 15-20. Најди ги интегралите:

$$\begin{aligned} 15) \int \frac{x^2 + 1}{x + 1} dx; \quad 16) \int \frac{x^2}{1 + x} dx; \quad 17) \int (x-1)(x+7)^{12} dx; \\ 18) \int x^2 \sqrt[3]{x+1} dx; \quad 19) \int \sqrt{x^4 + x^5} dx; \quad 20) \int \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} dx. \end{aligned}$$

4.3. Парцијална интеграција

Задача 1-2. Најди ги интегралите:

$$1) \int x \operatorname{tg} x dx; \quad 2) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

Задача 3-4. Најди ги интегралите:

$$3) \int x^3 e^{2x} dx; \quad 4) \int \ln(x^3 - 1) dx.$$

Задача 5-6. Најди ги интегралите:

$$5) \int x \log_a x dx; \quad 6) \int (x-3) \ln(x+2) dx.$$

Задача 7-10. Со помош на парцијалната интеграција најди ги следниве интегралите:

$$\begin{aligned} 7) I = \int \arccos x dx; \quad 8) I = \int \arcsin(\ln x) dx; \\ 9) I = \int \operatorname{arctg} 2x dx; \quad 10) I = \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx. \end{aligned}$$

Задача 13-16. Со помош на парцијалната интеграција најди ги следниве интегралите:

$$\begin{aligned} 13) I = \int e^x \cos x dx; \quad 14) I = \int e^x \sin 2x dx; \\ 15) I = \int \cos(\ln x) dx; \quad 16) I = \int \sin \ln(-2x) dx. \end{aligned}$$

4.4. Интеграли од линеарен бином и квадратен трином

Задача 1-2. Сведи ги во облик $a(t^2 + b)$, $t = x + c$ изразите:

1) $2x^2 + 7x + 1$; 2) $-2x^2 + x$.

Задача 3-4. Сведи ги во облик $|a|(t^2 + b)$ или $|a|(b^2 - t^2)$, $t = x + c$; изразите:

3) $2x^2 - 3x + 3$; 4) $-3x^2 + 9x + 7$.

Задача 5-7. Најди ги интегралите:

5) $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 3}$; 6) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}$; 7) $\int \frac{dx}{3 + x - 2x^2}$.

Задача 8-9. Најди ги интегралите:

8) $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x - \ln x + 1)}$; 9) $\int \frac{(1 + \cos x) \sin x dx}{8 \cos x - 2 \cos^2 x - 8}$.

Задача 10-11. Најди ги интегралите:

10) $I = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^3}$; 11) $I = \int \frac{x}{(1 + x^2)^2} dx$.

Задача 12-13. Најди ги интегралите:

12) $I = \int \frac{x + 4}{x^2 - 2x + 3} dx$; 13) $I = \int \frac{x - 3}{2x^2 + 3x + 1} dx$.

Задача 14-16. Најди ги интегралите:

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$; 15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}}$; 16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}}$.

Задача 17-18. Најди ги интегралите:

17) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$; 18) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 4x - x^2}}$.

Задача 19. Најди го интегралот: $I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 2 \sin x + 2}} dx$.**Задача 20-21.** Најди ги интегралите:

$$20) I = \int \sqrt{t^2 + 1} dt; \quad 21) I = \int \sqrt{4 - t^2} dt.$$

Задача 22-23. Најди ги интегралите:

$$22) I = \int \sqrt{x^2 + 4x + 3} dx; \quad 23) I = \int \sqrt{-x^2 + 2x - 3} dx.$$

Задача 24. Најди го интегралот: $I = \int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 3)^3}.$

4.5. Интеграли од рационални функции

Задача 1-2. Подели ги полиномите:

$$1) 3x^3 + 2x^2 + 6 \text{ со } x^2 - 2x + 3; \quad 2) 2x^2 + 3x - 1 \text{ со } x + 1.$$

Задача 3-5. Разложи ги на множители следниве полиноми:

$$3) x^2 - 2x + 3; \quad 4) (x + 2)(x^2 + x - 6); \quad 5) x^3 - 1.$$

Задача 6-8. Декомпонирај ги подинтегралните функции, без наоѓање на коефициентите:

$$6) \int \frac{dx}{2x^2 + 10x + 12}; \quad 7) \int \frac{1 - x + x^3}{(x - 1)^3 (x^2 + x + 1)^2} dx; \quad 8) \int \frac{1}{x^4 - x} dx.$$

Задача 9-10. Најди ги интегралите:

$$9) \int \frac{dx}{x(x - 1)}; \quad 10) I = \int \frac{x^3 dx}{x + 1}.$$

Задача 11-14. Најди ги интегралите:

$$11) I = \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} dx; \quad 12) I = \int \frac{x^4}{x^3 - 1} dx;$$

$$13) I = \int \frac{dx}{x^2 (1 + x^2)^2}; \quad 14) I = \int \frac{x^5 + x^4 - 2}{x^4 - 4x^2 + 4} dx.$$

4.6. Интеграли од ирационални функции

Задача 1-4. Најди ги интегралите:

1) $I = \int \frac{\sqrt{x} dx}{x-1};$ 2) $I = \int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx;$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}};$ 4) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}} dx.$

Задача 5-8. Најди ги интегралите:

5) $I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}-1};$ 6) $I = \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx;$

7) $I = \int \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx;$ 8) $I = \int \frac{x \sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx.$

4.7. Интеграли од тригонометриски функции

Задача 1-2. Најди ги интегралите:

1) $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt[5]{\cos^4 x}} dx;$ 2) $\int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x} dx$

Задача 3-4. Најди ги интегралите:

3) $I = \int \frac{1}{2+\cos x} dx;$ 4) $I = \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx.$

5) $I = \int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x};$ 6) $I = \int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx.$

Задача 7-8. Најди ги интегралите:

7) $I = \int \frac{\sin x - 2\cos x}{\sin x \cos^2 x - 3\cos^3 x} dx;$ 8) $I = \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx.$

Задача 9-12. Најди ги интегралите:

9) $I = \int \cos(-2x) \cos x dx;$ 10) $I = \int \sin(-2x) \cos x dx;$

11) $I = \int \sin x \cos(-2x) dx;$ 12) $I = \int \sin(-5x) \cos 3x \cos x dx.$

Забелешка. Во записите функцијата $f(kx)$ ја запишуваме без заграда, $f kx$. На пример записот $\sin x \cos(-2x)$ означува:

$$\sin(x) \cos(-2x), \text{ а не } \sin(x \cos(-2x)).$$

Задача 13-16. Најди ги интегралите:

$$13) I = \int \sin^2 x \cos^3 x dx; \quad 14) I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x};$$

$$15) I = \int \sin^2 x \cos^2 x dx; \quad 16) I = \int \sin^4 x \cos^2 x dx;$$

Задача 17-18. Со користење рекурентна формула, Најди ги интегралите:

$$17) I = \int \cos^7 x dx; \quad 18) I = \int \frac{dx}{\sin^5 x}.$$

4.8. Интеграли што се решаваат со тригонометриски смени

Задача 1-3. Најди ги интегралите:

$$1) I = \int x \sqrt{4-x^2} dx; \quad 2) I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}; \quad 3) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-a^2}}.$$

5. Определен интеграл и примена

5.1. Определен интеграл

Пресметување на определен интеграл по дефиниција

Задача 1. Дадена е поделбата: $P = \left\{ 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi \right\}$.

Најди ја нормата на поделбата и горната и долната сума на Дарбу за функцијата: $f(x) = \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

Задача 2. Докажи дека константната функција $f(x) = 1$ е интеграбилна и: $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

Задача 3. Испитај ја интеграбилноста на функцијата:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 1 & x = 0 \end{cases} \text{ на } [0,1].$$

Задача 4. Испитај ја интеграбилноста на функцијата:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ е рационален број} \\ 0 & x \text{ е ирационален број} \end{cases} \text{ на } [0,1].$$

Задача 5-6. Пресметај по дефиниција:

$$5) I = \int_2^3 x dx; \quad 6) I = \int_0^1 (x^2 - 1) dx;$$

Формула на Њутн Лајбниц

за пресметување на определен интеграл

Задача 1-2. Пресметај ги интегралите:

$$1) \int_1^e \ln x dx; \quad 2) \int_0^{\pi} \sin^2 x dx.$$

Задача 3. Пресметај го интегралот: $I = \int_{-2}^1 |x+1| dx.$

Задача 4. Пресметај го интегралот: $I = \int_0^{2\pi} x |\sin x| dx.$

Задача 5.* Пресметај го интегралот: $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx.$

Неравенства со интеграли

Задача 1. Докажи дека:

$$\int_2^e \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) > 3(1 - \ln 2).$$

5.2. Несвојствен интеграл

Задача 1. Испитај ја конвергенцијата на интегралите, во случај интегралот да конвергира пресметај ја неговата вредност:

$$\begin{aligned} 1) \quad I &= \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}; & 2) \quad I &= \int_1^{+\infty} \cos x dx; & 3) \quad I &= \int_0^e x |\ln x| dx; \\ 4) \quad I &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx; & 5) \quad I &= \int_0^1 \frac{x+1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx; & 6) \quad I &= \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}. \end{aligned}$$

Задача 7. Пресметај го интегралот $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5.3-5.6. Примена на определен интеграл

5.3. Плоштина на рамнински лик

Задача 1. Пресметај ја плоштината на криволинискиот трапез ограничен со: x -оската и графикот на функцијата $y = 1 - x^2$.

Задача 2. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривите: $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$ и $y = 0$.

Задача 3. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со параболата $y = 2x - x^2$ и правата $x + y = 0$.

Задача 4. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривите $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

Задача 5. Пресметај го односот на фигурите ограничени со параболата $y^2 = 2x$ и кружницата $x^2 + y^2 = 8$.

Задача 6. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривите: $y = 3^x$ и $y = x^2 + x$, $x = 0$ и $x = 1$.

Задача 7. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривата $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ и координатните оски.

Задача 8. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со еден лак на циклоидата $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ и x -оската.

Задача 9. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата: $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

Задача 10. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со астроидата: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt{2}$.

Задача 11. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата: $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$.

Задача 12. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кардиоидата: $\rho = a(1 - \sin \varphi)$.

Задача 13. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со трилисната детелина: $\rho = a \cos 3\varphi$.

Задача 14. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со четирилисната детелина: $\rho = a \sin 2\varphi$.

5.4. Должина на лак на крива

Задача 1. Пресметај ја должината на лакот на кривата:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad x \in [1, e].$$

Задача 2. Пресметај ја должината на лакот од кривата $y = \ln \sin x$ меѓу точките со апциси $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{3}$.

Задача 3. Пресметај ја должината на лакот на кривата:

$$y^2 = (x+1)^3$$

што го отсекува правата $x = 4$.

Задача 4. Пресметај ја должината на лакот на кривата:

$y = \ln \cos x$ меѓу точките со апциси $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{4}$.

Задача 5. Пресметај ја должината на лакот на кривата:

$$y = \ln x, \quad x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{12}{5} \right].$$

Задача 6. Пресметај ја должината на лакот на кривата:

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Задача 7. Пресметај ја должината на лакот на кривата:

$$x = t^2, \quad y = \frac{t}{3}(t^2 - 3);$$

меѓу пресечните точки со x -оската.

Задача 8. Пресметај ја должината на лакот на астроидата:

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t.$$

Задача 9. Пресметај ја должината на лакот на циклоидата:

$$x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t).$$

Задача 10. Пресметај ја должината на елипсата:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Задача 11. Пресметај ја должината на лакот на кардиоидата: $\rho = a(1 + \sin \varphi)$, $a > 0$.

Задача 12. Пресметај ја должината на кривата: $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

5.5. Волумен на ротационо тело

Задача 1. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација околу x -оската на фигурата ограничена со графикот на функцијата $y = \ln x$ правата $x = e$ и x -оската.

Задача 2. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација околу y -оската на делот од рамнината ограничен со кривите: $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 4$.

Задача 3. Користејќи равенка на кружница со радиус R , изведи ја формулата за волумен на топка со радиус R .

Задача 4. Пресметај го волуменот на ротационото тело добиено со ротација на елипсата $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ околу x -оската.

Задача 5. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација околу x -оската на фигурата ограничена со кривите:

$$y = \frac{1}{1+x^2} \text{ и } y = 0.$$

Задача 6. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација околу x -оската на фигурата ограничена со кривите:

$$y = |x^3| \text{ и } y = 2 - x^2.$$

Задача 5. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација околу x -оската на ликот меѓу кривите:

$$y = x^2(1 - x^2) \text{ и } y = 0.$$

Задача 7. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на фигурата околу x -оската ограничена со кривите:

$$y = x^2 \text{ и } y^2 = x.$$

Задача 8. Кривата $x^2 + (y - 2)^2 = 1$, ротира околу x -оската. Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.

Задача 9. Астроидата $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ ротира околу y -оската. Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.

Задача 10. Пресметај го волуменот на ротационото тело што се добива со ротирање околу x -оската на циклоидата:

$$x = 3(t - \sin t), \quad y = 3(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

5.6. Плоштина на ротациона површина

Задача 1. Пресметај ја плоштината на површината што се добива со ротирање на елипсата: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ околу x -оската.

Задача 2. Кривата $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$, ротира околу x -оската. Пресметај ја плоштината на добиената ротациона површина.

Задача 3. Пресметај ја плоштината на површината добиена со ротација околу y -оската на ликот определен со кривите:

$$y = \frac{x^2}{4} \text{ и } y = \frac{3}{2}.$$

Задача 4. Пресметај ја плоштината на површината образувана со ротација околу x -оската на кривата:

$$x = \frac{t^3}{3}, \quad y = 4 - \frac{t^2}{2};$$

меѓу пресечните точки со x -оската.

Задача 5. Пресметај ја плоштината на површината добиена со ротација околу y -оската на кривата:

$$x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t).$$

Задача 6. Пресметај ја плоштината на површината добиена со ротација околу x -оската на кривата:

$$x = 2 \cos^3 t, \quad y = 2 \sin^3 t.$$

Литература

[1] З. Мисајлески, **Векторска и линеарна алгебра**, е-издание на УКИМ, Скопје, 2018;

[2] З. Мисајлески, **Решени задачи по диференцијално и интегрално сметање I (на функции од една променлива)**, е-издание на УКИМ, Скопје, 2019;

[3] З. Мисајлески, **Решени задачи по векторска и линеарна алгебра**, е-издание на УКИМ, Скопје, 2019;

[4] З. Мисајлески, Б. Андоновиќ, Т. Димовски, **Збирка задачи по математика I**, за студентите на Технолошко-металургискиот факултет, е-издание на УКИМ, Скопје, 2014;

[5] С. Георгиевска, Е. Атанасова, **Математика I (Математика, Математика II)**, УКИМ, Скопје, 2002;

[6] И. Јанев, Ј. Илиевски, Д. Ѓорѓиев, **Збирка задачи по математика за четврта (прва, втора, трета) година на средното образование**, Просветно дело, Скопје, 2002;

[7] К. Тренчевски, Б. Крстеска, Г. Тренчевски, С. Здравеска, **Линеарна алгебра и аналитичка геометрија**, за трета година на реформираното гимназиско образование, Просветно дело, Скопје, 2004;

[8] Б. Трпеновски, Н. Целаковски, Ѓ. Чупона, **Виша математика**, книга I-IV, Просветно дело, Скопје, 1994;

[9] Н. Шекутковски, **Математичка анализа I**, Просветно дело, Скопје, 2008;

[10] R. Ellis, D. Gulick, **Calculus with analytic geometry**, fourth edition, Harcourt Brace Jovanovich, 1990;

[11] J. Stewart, **Calculus early transcendentals**, Thomson Brooks/Cole 2007;

[12] М. Миличиќ, **Elementi više matematike I (II) део**, Akademska misao, Beograd, 2003 (2008);

[13] Dennis G. Zill, D. Warren. S. Wright, **Calculus early transcendental**, Jones and Bartlett publishers, 2011;

[14] О. Hadžić, Ђ. Takači, **Математичке методе за студенте природних наука**, Нови Сад, 2000;

[15] И. Шапкарев, **Збирка задачи по математика**, книга I-II, Скопје, 1995;

[16] Р. Miličić, М. Ušćumlić, **Zbirka zadataka iz više matematike I**, IP Nauka, Beograd, 1982;

[17] Т. Došenović, А. Takači, D. Rakić, М. Brdar, **Zbirka zadataka iz matematike I**, Verzal, Novi Sad, 2008

[18] Соња Геговска Зајкова, Катерина Хаџи-Велкова Санева, **Математика 1, I дел**, Скопје, 2010;

[19] С. Г. Зајкова, Г. Трајковски, А. Бучковска, **Збирка решени испитни задачи од математика 1**, Скопје, 1996;

[20] Ј. Митевска, Л. Грибовска-Поповиќ, В. Манова-Ераковиќ, Ф. Митрушева, **Математика, за IV година на реформираното гимназиско образование**, Просветно дело АД, Скопје 2004;

[21] В. Apsen, **Repetitorij (Riješeni zadaci) više matematike, prvi (drugi, treći) deo**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1982 (1968,1989);

[22] Р. Малчески, **Основи на Математичка анализа (Математичка анализа I)**, ПМФ, Скопје;

[23] Г. Н. Берман, **Сборник задач по курсу математического анализа**, Наука, Москва, 1969;

[24] Демидовиќ, Б. П., **Сборник задач и упражнения по математическому анализу**, Наука, Москва 1969;

[25] В. П. Минорски, **Сборник задач по высшей математике**, Наука, Москва 1969;

[26] Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., Головач, Г. П., **Справочное пособие по математическому анализу, част первая (вторая)**, Виша школа, Киев, 1978 (1986).

СОДРЖИНА

Предговор	3
1.0. Реални броеви	5
1.1-12. Функции	7
1.1. Дефиниција на функција	7
1.2. Начини на задавање функции	9
1.3. Операции со функции	10
1.4. Сложена функција (композиција на функции)	11
1.5. Локални екстреми, монотоност, конкавитет, превојни точки и ограниченост на функција	12
1.6. Парност, непарност и периодичност на функција	15
1.7. Инверзна функција	18
1.8. Елементарни функции	19
1.9 Тригонометриски идентитети	29
1.10. Трансформација на график на функција	32
1.11. Параметарски равенки на крива	35
1.12. Поларен координатен систем и поларна равенка	39
2.1.1-6. Низи	43
2.1.1. Дефиниција и основни поими на низа.	43
2.1.2. Граница на низа.	46
2.1.3. Својства на конвергентни низи.	47
2.1.4. Операции со низи	49
2.1.5. Некои карактеристични граници.	52
2.1.6. Подниза и точка на натрупување.	56
2.2.1-4. Граница на функција	57
2.2.1. Граница на функција	57
2.2.2. Својства на граница на функција	60
2.2.3. Некои поважни граници	62
2.2.4. Бесконечно мали големини	67
2.3.1-2. Непрекинатост на функција	70
2.3.1. Дефиниција, основни поими и опреации со непрекинати функции. Прекини	70
2.3.2. Својства на непрекинати функции	73

3. Изводи	74
3.1. Извод на функција	74
3.2. Извод од сума, разлика, производ, количник, сложена и инверзна функција.	77
3.3. Изводи од основните елементарни функции	80
3.4. Извод од имплицитно зададена функција.	87
3.5. Извод од параметарски зададена функција.	89
3.6. Диференцијал на функција	91
4. Примена на изводи	93
4.1. Равенка на тангента и нормала	93
4.1.1. Една геометриска интерпретација на извод	93
4.1.2. Равенка на тангента и нормала	94
4.1.3. Критериум за пресметување на агол меѓу криви со помош на изводи	96
4.1.4. Допирни големини	97
4.2. Теореме за средна вредност (Ферма, Рол, Лагранж и Коши)	99
4.3. Лопиталово правило	108
4.4. Интервали на монотоност, екстремни вредности, интервали на конкавитет, превојни точки и асимптоти на функции.	116
4.4.1. Интервали на монотоност и локални екстреми	116
4.4.2. Интервали на конкавитет и превојни точки	124
4.4.3. Асимптоти на функција	129
4.5. Испитување тек и цртање график на функција	133
4.6. Тејлорова формула	137
5. Неопределен интеграл	140
5.1. Неопределен интеграл	140
5.1.1. Дефиниција на неопределен интеграл.	140
5.1.2. Основни својства на неопределен интеграл	141
5.1.3. Таблица на основни интеграли.	142
5.2. Смена на променливи	144
5.3. Парцијална интеграција	147
5.4. Интеграл од линеарен бином и квадратен трином	149
5.5. Интеграл од рационални функции	153
5.6. Интеграл од ирационални функции	155
5.7. Интеграл од тригонометриски функции	156

5.8. Интегралы што се решаваат со тригонометриски смени	161
5.9. Интегралы од останати трансцедентни функции	166
6. Определен интеграл и примена	167
6.1. Определен интеграл	167
6.1.1. Дефиниција на определен интеграл	167
6.1.2. Својства на определениот интеграл	171
6.1.3. Формула на Њутн-Лајбниц	175
6.1.4. Смена на променливи и парцијална интеграција	176
6.2 Несвојствен интеграл	178
6.2.1. Несвојствен интеграл од прв тип	178
6.2.2. Несвојствен интеграл од втор тип	179
6.3-6.6. Примена на определен интеграл	181
6.3. Плоштина на рамнинска фигура	181
6.4. Должина на лак на крива	186
6.5. Волумен на ротационо тело	190
6.6. Плоштина на ротациона површина	194
7. Прилог	199
8. Поставени задачи	223
9. Литература	261
10 Содржина	263

Ниту еден дел од оваа публикација не смее да биде репродуциран на кој било начин без претходна согласност од авторот.

Е-издание:

http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41