

2024

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“,
Градежен факултет, Скопје

Зоран Мисајлески

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЕТАЊЕ II

(НА ФУНКЦИИ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ)

- Функции
- Изводи
- Интеграли

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“,
Градежен факултет, Скопје

Зоран Мисајлески

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЕТАЊЕ II

(НА ФУНКЦИИ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ)

Скопје, 2024

Издавач:

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:

проф. д-р Биљана Ангелова, ректор

Уредник на публикацијата:

проф. д-р Зоран Мисајлески,
вонреден професор на ГФ, УКИМ, Скопје

Рецензенти:

проф. д-р Даниел Велинов,
вонреден професор на ГФ, УКИМ, Скопје
проф. д-р Сања Атанасова
вонреден професор на ФЕИТ, УКИМ, Скопје

Техничка обработка:

проф. д-р Зоран Мисајлески,
вонреден професор на ГФ, УКИМ, Скопје

Лектура на македонски јазик:

ас. м-р Цутка Јованоска,
асистент на ДУТ, Тетово

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

517.1/.3(075.8)

МИСАЈЛЕСКИ, Зоран

Диференцијално и интегрално сметање II [Електронски извор] : (на функции од повеќе променливи) / Зоран Мисајлески. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Градежен факултет, 2024

Начин на пристапување (URL):

[https://www.ukim.edu.mk/e-izdanija/GF/Diferencijalno_i_integralno_smetanje_II_\(na_funkcii_od_povekje_promenlivi\).pdf](https://www.ukim.edu.mk/e-izdanija/GF/Diferencijalno_i_integralno_smetanje_II_(na_funkcii_od_povekje_promenlivi).pdf).

- Текст во PDF формат, содржи 405 стр., граф.прикази. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 22.01.2024. - Библиографија: стр.

399-400

ISBN 978-9989-43-497-6

1. Гл. ств. насл.

а) Математичка анализа -- Диференцијално сметање -- Интегрално сметање
-- Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 62802181

Предговор

Учебникот „Диференцијално и интегрално сметање II (на функции од повеќе променливи)“ целосно ја покрива содржината по предметот Математика 2 (3+3).

Учебникот можат да го користат и студентите од останатите технички факултети, бидејќи во нивните предмети од областа математика се изучува ист или сличен материјал.

Материјалот во првиот дел од учебникот е поделен на 11 глави, без предговор, литература и содржина: 1. Функции од повеќе променливи; 2. Парцијални изводи; 3. Примена на парцијални изводи; 4. Диференцијални равенки од прв ред; 5. Линеарни диференцијални равенки; 6. Двоен интеграл; 7. Троен интеграл; 8. Криволиниски интеграл; 9. Површински интеграл; 10. Векторска анализа; 11. Диференцијална геометрија.

Вториот дел од учебникот содржи решени задачи од претходно наведените теми.

Теорискиот дел од материјалот е напишан во периодот 2014-2017-та година, кога се обработени на компјутер (освен цртежите кои се скенирани во ракопис и нацртани во 2023-та) предавањата коишто ги држи авторот на предметот Математика 2 (3+3) и сродниот предмет Одбрани поглавја од математиката (4+4) во последните 10 години (2014-2023). Во периодот 2018-2023-та година, материјалот е досредуван и проширен до сегашната форма со цртежи и содржини кои ги поврзуваат и дообјаснуваат целините што се обработуваат на предавањата. Најголем дел од решените задачи се напишани во ракопис во периодот 2004-2006-тата година, преработени во 2009-тата, а обработени на компјутер и финализирани во периодот 2021-2023-та година. Најголем дел од задачите авторот ги користеше за држење на вежбите во периодот 2004-2023-та година, како и за држење на предавањата 2014-2023. Задачите со исти или сменети цифри се зададени на писмените испити во периодот од 2004-2023-та, а се користени и од демонстраторите за држење на вежбите во периодот 2014-2023.

Ова е прво издание на учебникот и авторот ќе им биде благодарен на читателите кои со своите забелешки ќе придонесат во подобрувањето на квалитетот во наредните изданија.

Проф. д-р Зоран Мисајлески

Учебникот е посветен на мојот татко Силјан (1937-2024),
наставник по математика,
затоа што ме поттикна да ја проучувам математиката

I ДЕЛ. ТЕОРИЈА

1. ФУНКЦИИ ОД ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

1.0. ОСНОВНИ ПОИМИ ЗА МНОЖЕСТВАТА ОД РЕАЛНАТА РАМНИНА

Растојание меѓу точките $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ е бројот:

$$d(M, N) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Нека $\varepsilon > 0$. ε -**околина** на точката $M_0 = M(x_0, y_0)$ е множеството:

$$T_\varepsilon(M_0) = \{(x, y) | d(M, M_0) < \varepsilon\}, \text{ каде што: } M = M(x, y).$$

Множеството $A \subseteq \mathbb{R}^2$ е **отворено**, ако за секоја точка $M \in A$, постои ε -околина на M што се содржи во A .

Множеството $A \subseteq \mathbb{R}^2$ е **затворено**, ако $\mathbb{R}^2 \setminus A$ е отворено.

Околина на точката M е секое отворено множество што ја содржи M .

Околината е унија од ε -околин. Бидејќи ε -околината е околина, често под поимот околина ќе подразбираме ε -околина.

Множеството:

$$\{M \subseteq \mathbb{R}^2 | d(M_0, M) < R\},$$

се нарекува **отворена** (дводимензионална) **топка** со радиус R и центар M_0 . Множеството $\{M \subseteq \mathbb{R}^2 | d(M_0, M) \leq R\}$, се нарекува **затворена** (дводимензионална) **топка** со радиус R и центар M_0 .

Множеството $A \subseteq \mathbb{R}^2$ е **ограничено**, ако постои отворена точка $T_\varepsilon(M_0)$, таква што: $A \subseteq T_\varepsilon(M_0)$.

Раб на множеството $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ознака ∂A , е множеството за кое секоја ε -околина на произволна точка $M \in \partial A$ содржи точки од A и $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Затворач на множеството A , ознака $\bar{A}$, е најмалото затворено множество што го содржи A .

Множеството $C \subseteq \mathbb{R}^2$ е **сврзано** ако не може да се претстави како унија од две непразни множества A и B , такви што $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Пат во $A \subseteq \mathbb{R}^2$ што ги поврзува точките M и N е непрекинато пресликување $k: [t_1, t_2] \rightarrow A$, такво што $k(t_1) = M$ и $k(t_2) = N$. Множеството $A \subseteq \mathbb{R}^2$ е **пат-сврзано**, ако за кои било две точки M и N постои пат во A што ги поврзува M и N . Секое пат-сврзано множество е сврзано. Отворено и сврзано множество се нарекува **област**. **Затворена област** е областа заедно со нејзиниот раб. Понекогаш затворената област ќе се нарекува само област.

Точката M е **точка на натрупување** (**точка на акумулација**) за множеството A , ако секоја нејзина ε -околина содржи точка од $A \setminus \{M\}$. Множеството точки на натрупување на A , ознака A' , се нарекува **изводно** множество на A . Важи:

$$\bar{A} = A \cup A'.$$

1.1. ДЕФИНИЦИЈА НА ФУНКЦИЈА ОД ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Дефиниција на функција со две променливи.

Функцијата:

$$f: X \rightarrow Y, \quad X \subseteq \mathbb{R}^2, \quad Y \subseteq \mathbb{R},$$

се нарекува **реална функција со две променливи**.

Означуваме: $z = f(x, y)$ или $z = f(M)$ каде што: $M = M(x, y)$.

Променливите x и y се независни променливи, додека променливата z е зависна променлива. Множеството X се нарекува домен или **дефинициона област** (се означува и со D_f), Y се нарекува **кодомен**, и f **правило** на пресликување. Понекогаш дефиниционата област кратко се нарекува „област“ (кога е јасно дека поимот се однесува на дефинициона област). Во општ случај дефиниционата област не мора да е област, т.е. отворено и сврзано множество. Множеството:

$$\{f(x, y) | (x, y) \in D_f\}$$

е множество вредности на функцијата f и се означува со V_f .

График на функцијата f е множеството:

$$\{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D_f\}.$$

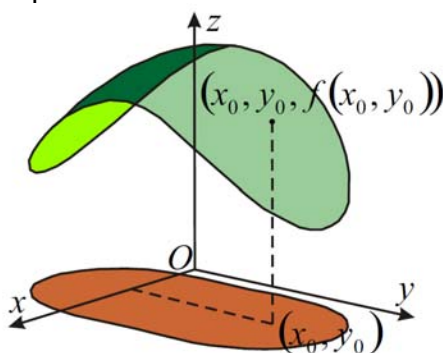
Една функција може да биде зададена **табеларно, графички и аналитички**.

При табеларното задавање на функцијата се формира табела во која се зададени независните и зависната променлива. Најчесто се користи за функции што имаат конечна дефинициона област.

x_1	x_2	...	x_n
y_1	y_2	...	y_n
$f(x_1, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	...	$f(x_n, y_n)$

Цртеж 1.1.1. Табеларно задавање на функција од две променливи.

Ако функцијата е зададена преку нејзиниот график, велиме дека е зададена графички.



Цртеж 1.1.2. Домен и график на функција од две променливи

Аналитичкото задавање функција е задавање преку формула и може да биде **експлицитно**, односно со равенката:

$$z = f(x, y) \quad (x = g(y, z), \quad y = h(x, z));$$

имплицитно, односно со равенката:

$$F(x, y, z) = 0;$$

параметарски, односно со равенките:

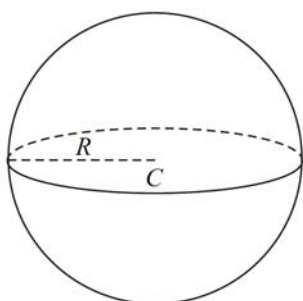
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in T;$$

итн. Најчесто ќе работиме со функции зададени аналитички.

1.2. СКИЦИРАЊЕ ПОВРШНИ

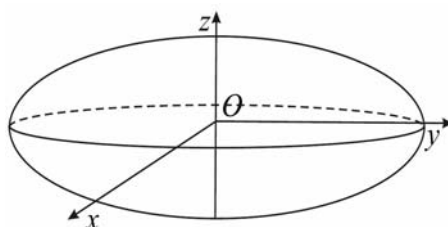
Површините се множества точки во простор и може да се скицираат на лист хартија. За да се визуелизира нивниот тродимензионален лик се користат повеќе техники. Една од нив е **методот на пресеци**, според кој површините се скицираат со помош на кривите кои се пресек на површината со координатните рамнини или рамнините паралелни на нив.

Ниво линии во однос на xOy -рамнината се пресеците на површината со рамнините $z = C$, каде што C е константа. Аналогно се дефинираат ниво линиите во однос на другите рамнини. Под ниво линии ќе ги подразбираме ниво линиите во однос на xOy -рамнината, додека за останатите рамнини ќе биде нагласено.



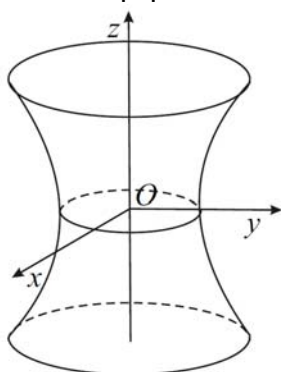
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

Сфера



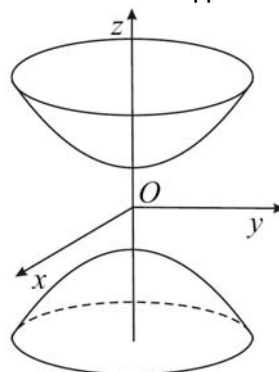
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Елипсоид



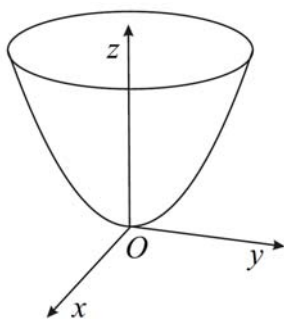
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Еднокрилен хиперболоид



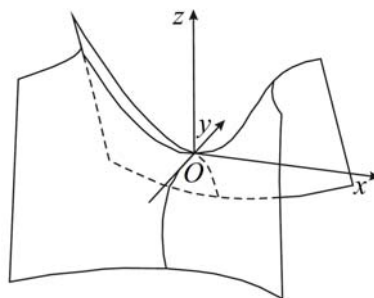
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Двокрилен хиперболоид



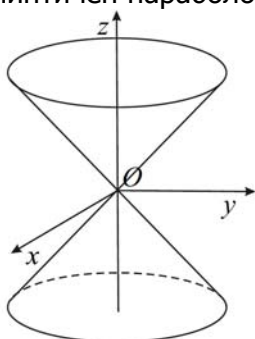
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Елиптичен параболоид



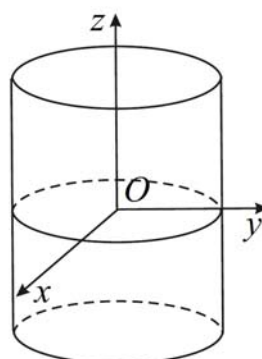
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Хиперболичен параболоид



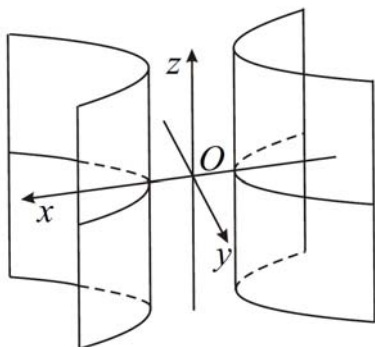
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Конус



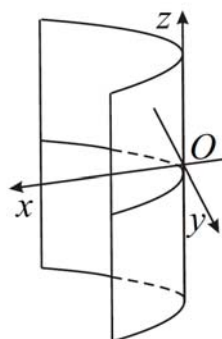
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Елиптичен цилиндар



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Хиперболичен цилиндар



$$x^2 = ay, \quad a \neq 0$$

Параболичен цилиндар

Цртеж 1.2.1-10. Површини од втор ред

Пресеците на површината со координатните рамнини се викаат **главни пресеци**.

Во продолжение се скицирани и аналитички се опишани сферата (со нејзината општа равенка), како и најзначајните површини од втор ред сместени во координатен систем кој одговара на нивните канонски равенки.

Површината од втор ред може да се претстави како унија од најмногу два графика на функции од две променливи.

Равенката на површината од втор ред, сместена во произволен координатен систем, може да се определи ако се најде врската меѓу координатите на точката и координатите на точката од координатниот систем во кој површината има канонска равенка.

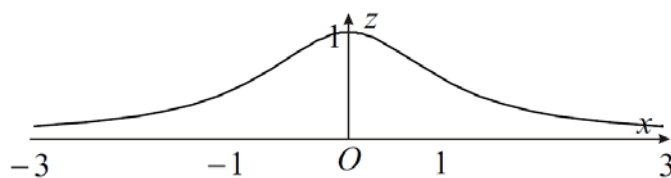
Постапката се нарекува **трансформација на координати**.

Задача 1.2.2. Да се скицира површината $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ со

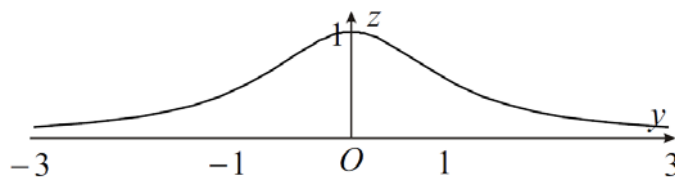
помош на ниво линии и главни пресеци.

Решение. Главни пресеци се:

$$x = 0, z = \frac{1}{1+y^2}; \text{ и } y = 0, z = \frac{1}{1+x^2} \text{ (цртеж 1.2.2.1-2.)}$$



Цртеж 1.2.2.1.



Цртеж 1.2.2.2.

Не постои пресек со xOy -рамнината бидејќи $z \neq 0$.

Ниво линии се:

$$z = C \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2+y^2} = C \Leftrightarrow 1+x^2+y^2 = \frac{1}{C} \Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{C} - 1.$$

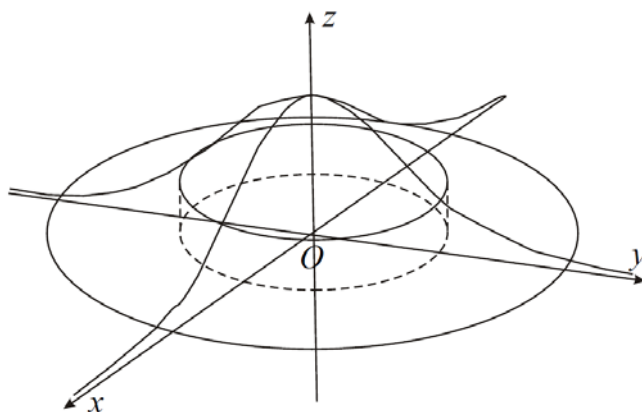
Притоа:

$$\frac{1}{C} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C} \geq 1 \Leftrightarrow C > 0, C \leq 1 \Leftrightarrow C \in (0, 1].$$

Значи, ниво линиите се кружниците:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{C} - 1, C \in (0, 1].$$

Ги скицираме ниво линиите и главните пресеци во тридимензионален координатен систем, со што се визуелизира површината.



Цртеж 1.2.2.3.

1.3. ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА

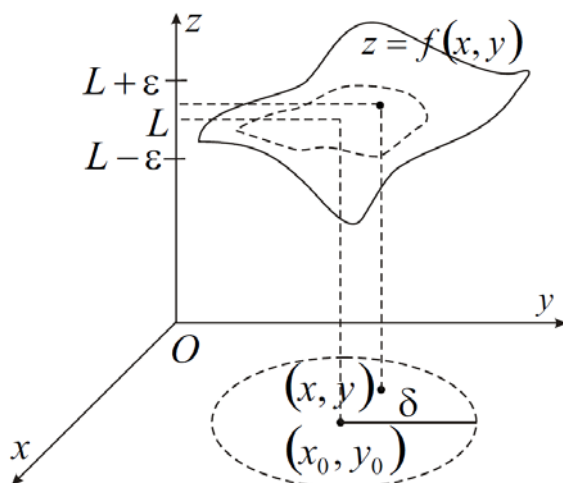
Нека функцијата $z = f(x, y)$ е дефинирана во околина на точката $M_0 = M(x_0, y_0)$, освен можеби во точката $M_0((x_0, y_0))$.

Дефиниција 1.3.1. (Коши). Бројот L е **граница** (лимес) на функцијата $z = f(x, y)$ во точката (x_0, y_0) (кога $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$), ако за секое $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$, така што од:

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \text{ да следува: } |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Во тој случај пишуваме:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L \text{ или } \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = L. \blacksquare$$



Цртеж 1.3.1.

Да забележиме дека бројот L е точка од рамнината, т.е. може да се запише во обликот (x_L, y_L) , каде што x_L и y_L се реални броеви.

Значи, бројот L е граница ако колку и да земеме мала околина $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ на L , секогаш ќе постои ε -околина на (x_0, y_0) , таква што сликите на сите точки од околината, освен (x_0, y_0) , се во интервалот $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Тогаш, ако избереме низа од точки од D_f , што неограничено се доближуваат до (x_0, y_0) , сликите неограничено ќе се доближуваат до L . Затоа точно е следново тврдење:

Дефиниција 1.3.2. (Хајне). Бројот L е **граница** на функцијата $z = f(x, y)$ во точката (x_0, y_0) , ако за секоја низа $((x_n, y_n))$ во $D_f \setminus \{(x_0, y_0)\}$ која конвергира кон (x_0, y_0) , соодветната низа $(f((x_n, y_n)))$ конвергира кон L .

Дефинициите 1.1.2. и 1.1.3. се еквивалентни. Всушност, 1.1.3. е теорема, но бидејќи во многу литератури се зема за дефиниција, и двете еквивалентни тврдења се означени како дефиниции. Границата на функцијата од две променливи поседува аналогни својства како во еднодимензионалниот случај. Нивните докази, исто така, се аналогни.

Теорема 1.3.3. (Збир, разлика, производ и количник на граници и смена на променливи за граница). Нека функциите f и g се дефинирани во околина на (x_0, y_0) и постојат

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ и $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y)$. Тогаш:

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (f(x, y) \pm g(x, y)) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \pm \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y);$$

$$2. \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (f(x, y) g(x, y)) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y);$$

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \left(\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \right) = \frac{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)}{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y)} \quad \text{ако } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) \neq 0.$$

4. (Смена на променливи). Ако $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \in D_g$ каде што g е непрекината функција од една променлива, тогаш:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(f(x, y)) = g(A).$$

Задача 1.3.1-2. Пресметај ги границите, ако постојат:

$$1) L = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}; \quad 2) L = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Решение. 1) Ако во границата воведеме смена (поларни координати): $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$; тогаш кога $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ следува дека $\rho \rightarrow 0$, па добиваме:

$$L = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3 \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi}{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{\rho^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) = 0.$$

Границата е 0 бидејќи $\rho \rightarrow 0$ и $\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi$ е ограничена.

2) **Прв начин.** Воведуваме смена $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$; па:

$$L = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} = \sin \varphi \cos \varphi.$$

Заради произволноста на φ следува дека границата не постои.

Втор начин. Ако земеме $y = ax$, тогаш:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2}{x^2 + a^2 x^2} = \frac{a}{1 + a^2}.$$

Заради произволноста на параметарот a , следува дека границата не постои. ■

Теорема 1.3.4. Функцијата $z = f(x, y)$ има граница L во точката (x_0, y_0) ако и само ако може да се претстави во обликот:

$$f(x, y) = L + \alpha(x, y), \text{ каде што: } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \alpha(x, y) = 0.$$

Доказ. Нека функцијата има граница L . Дефинираме:

$$\alpha(x, y) = f(x, y) - L.$$

Тогаш:

$$f(x, y) = L + \alpha(x, y) \text{ и } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \alpha(x, y) = 0. \blacksquare$$

За фиксно y функцијата $z = f(x, y)$ може да се разгледа како функција од една променлива $\varphi_y(x) = f(x, y)$ за која е дефиниран, ако постои, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_y(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$. За произволно y , лимесите дефинираат функција $\psi_x(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ која определува, ако постои, $\lim_{y \rightarrow y_0} \psi_x(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ (1).

Слично е определен, ако постои, $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ (2).

Границите (1) и (2) се нарекуваат **повторени** граници.

Следниве примери покажуваат дека ако постои границата на функцијата, не мора да постојат повторените граници во дадена точка, и обратно ако постојат повторените граници дури и ако се совпаѓаат, не мора да постои границата на функцијата.

Пример 1.3.3. Повторените гранични вредности на функцијата $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ во точката $(0, 0)$ постојат и се различни, додека граничната вредност во истата точка не постои. Имено:

$$\text{а) } \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+y}{x-y} \right)^{x \neq y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{-y} = -1 \text{ и}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x+y}{x-y}^{x \neq y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

$$\text{в) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y} \text{ не постои бидејќи } \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right) \text{ и } \left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n} \right), \quad n \in \mathbb{N};$$

тежат кон $(0, 0)$ кога $n \rightarrow +\infty$, но низите од нивните вредности тежат кон различни граници:

$$f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{2}{n} - \frac{1}{n}} = \frac{\frac{3}{n}}{\frac{1}{n}} = 3 \rightarrow 3 \text{ и } f\left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{3}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{3}{n} - \frac{1}{n}} = \frac{\frac{4}{n}}{\frac{2}{n}} = 2 \rightarrow 2,$$

кога $n \rightarrow +\infty$.

Пример 1.3.4. Повторените гранични вредности на функцијата од задачата 1.3.2. во точката $(0, 0)$ се еднакви, додека граничната вредност на функцијата не постои. Имено:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0 \text{ и}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Пример 1.3.5. За функцијата $f(x, y) = y \sin \frac{1}{x}$ постои граничната вредност и една од повторените гранични вредности во $(0, 0)$, додека другата повторена гранична вредност не постои. Имено:

а) $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} y \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не постои бидејќи $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не постои (види збирка диференцијално и интегрално сметање 1);

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 ; \text{ и}$$

в) Заради $-|y| \leq \left| y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |y|$, имаме:

$$-\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y| \leq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left| y \sin \frac{1}{x} \right| \leq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y| \Leftrightarrow 0 \leq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left| y \sin \frac{1}{x} \right| \leq 0 ,$$

од каде што следува дека:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left| y \sin \frac{1}{x} \right| = 0 \text{ т.е. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} y \sin \frac{1}{x} = 0 .$$

Забелешка*. Следнава теорема ги определува условите кога постојат и се еднакви границата и повторената граница на функцијата, но бидејќи не е предмет на овој курс, само ќе ја наведеме.

Теорема 1.3.5. Ако постои границата на функцијата $z = f(x, y)$ во точката (x_0, y_0) и ако за секое $y \in T_\delta(y_0) \setminus \{y_0\}$ постои границата $g(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$, тогаш постои повторената граница:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \text{ и } \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) .$$

1.4. НЕПРЕКИНАТОСТ

Нека функцијата $z = f(x, y)$ е дефинирана во околина на точката (x_0, y_0) .

Дефиниција 1.4.1. Функцијата $z = f(x, y)$ е **непрекината** во точката (x_0, y_0) , ако:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Функцијата $z = f(x, y)$ е **непрекината** (на X), ако е непрекината во секоја точка од $D_f(X)$.

За да $z = f(x, y)$ биде непрекината во точката (x_0, y_0) , треба да постојат:

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y);$

2) $f(x_0, y_0);$ и

3) двете вредности да се еднакви.

Значи, непрекинатоста, всушност, е граница на функција во случај кога границата е еднаква на вредноста на функцијата во дадената точка. Затоа дефиницијата можеме да ја искажеме во следниот вид:

Функцијата $z = f(x, y)$ е непрекината во точката $M_0(x_0, y_0)$ ако за секој позитивен број ε постои позитивен број δ , така што за сите точки $M(x, y)$ за кои:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \text{ т.е. } d(M, M_0) < \delta,$$

да следува:

$$|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$$

Интуитивно, функциите што ги изучуваме се непрекинати ако нивните графици може да се скицираат без подигнување на моливот, т.е. личат на збир од истегнати со вдлабнатини и испакнатини ограничени или неограничени листови.

Ако функцијата не е непрекината во точката (x_0, y_0) , велиме дека има **прекин** во таа точка.

Пример 1.4.1. Испитај ја непрекинатоста на функцијата:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Заради непрекинатоста на гранките, функцијата е непрекината во секоја точка различна од $(0, 0)$. Од:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \begin{pmatrix} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{pmatrix} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} = \sin \varphi \cos \varphi,$$

следува дека не постои границата, т.е. функцијата има прекин во точката $(0, 0)$.

Коментар. Поимите граница на функција и непрекинатост се дефинираат аналогно и за точките на натрупување на дефиниционата област на функцијата кои не се внатрешни точки.

Нека функцијата $z = f(x, y)$ е дефинирана во околина на точката (x_0, y_0) .

Дефиниција 1.4.2*. Нека Δx и Δy соодветно се прирастите на независните променливи x и y и точката:

$$M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D_f.$$

Разликата:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

се нарекува **тотален прираст (нарастување)** на функцијата $z = f(x, y)$ во точката $M(x_0, y_0)$. Разликите:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

и

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

се нарекуваат парцијални прирасти на функцијата $z = f(x, y)$ во точката $M(x_0, y_0)$.

2. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ

2.1. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ

Дефиниција на парцијален извод. Нека функцијата $z = f(x, y)$ е дефинирана во околина на точката (x_0, y_0) .

Дефиниција 2.1.1. Парцијален извод на функцијата $z = f(x, y)$ по променливата x во точката $M_0 = M(x_0, y_0)$ е бројот:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

ако границата постои.

Освен $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, ги користиме ознаките, $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_x(M_0)$; или $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$, $z'_x(x_0, y_0)$, $z'_x(M_0)$ ако $z = z(x, y)$.

Ако функцијата f има извод во секоја точка од дефиниционата област D , тогаш добиваме функција $\frac{\partial f}{\partial x}$, определена на D .

Дефиниција 2.1.2. Парцијален извод на функцијата $z = f(x, y)$ по променливата y во точката $M_0 = M(x_0, y_0)$ е бројот:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

ако границата постои.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ го означуваме и со: $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$, $f'_y(M_0)$;
 $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$ со: $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)$, $z'_y(x_0, y_0)$; $z'_y(M_0)$, ако $M_0 = M(x_0, y_0)$.

Ако функцијата f има извод во секоја точка од D , тогаш добиваме функција $\frac{\partial f}{\partial y}$, определена на D .

Функциите $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ ги нарекуваме **парцијални изводи од прв ред** или само парцијални изводи на функцијата f .

Задача 2.1.3. Да се најдат парцијалните изводи на функцијата: $z = \arctg \frac{y}{x}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Парцијалните изводи на $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ по x и y , ако постојат, ги нарекуваме **парцијални изводи од втор ред** и ги означуваме соодветно со:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (f''_{xx}), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (f''_{xy}), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (f''_{yx}) \text{ и } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (f''_{yy}).$$

Парцијалните изводи:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \text{ и } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

се нарекуваат **мешани парцијални изводи** од втор ред.

Аналогно се дефинираат и означуваат **парцијални изводи од n -ти ред**.

Следнава теорема ги определува условите под кои мешаните парцијални изводи на дадена функција се еднакви. Функциите кои ги користиме обично ги исполнуваат тие услови.

Теорема 2.1.4. (Теорема за еднаквост на мешаните изводи). Нека функцијата $z = f(x, y)$ и нејзините парцијални изводи:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

се дефинирани во околина на точката (x_0, y_0) . Ако мешаните изводи

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ се непрекинати во таа точка, тогаш:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0). \blacksquare$$

Аналогно тврдење важи за парцијалните изводи од ред n -ти ред.

Задача 2.1.5. Да се најдат парцијалните изводи од втор ред за функцијата: $z = \frac{x-y}{x+y}$.

Решение. Прво ги пресметуваме парцијалните изводи од прв ред:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x-y)'_x (x+y) - (x-y)(x+y)'_x}{(x+y)^2} = \frac{x+y - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x-y)'_y (x+y) - (x-y)(x+y)'_y}{x+y} = \frac{-(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

од каде што:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{2y}{(x+y)^2} \right)'_x = 2y \left(-\frac{2}{(x+y)^3} \right) (x+y)'_x = -\frac{4y}{(x+y)^3};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2 \left(\frac{y}{(x+y)^2} \right)'_y = 2 \frac{(x+y)^2 - y \cdot 2(x+y)(x+y)'_y}{(x+y)^4} = \\ &= 2 \frac{x+y-2y}{(x+y)^3} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \left(-\frac{2x}{(x+y)^2} \right)'_y = -2x \frac{-2}{(x+y)^3} (x+y)'_y = \frac{4x}{(x+y)^3}.\end{aligned}$$

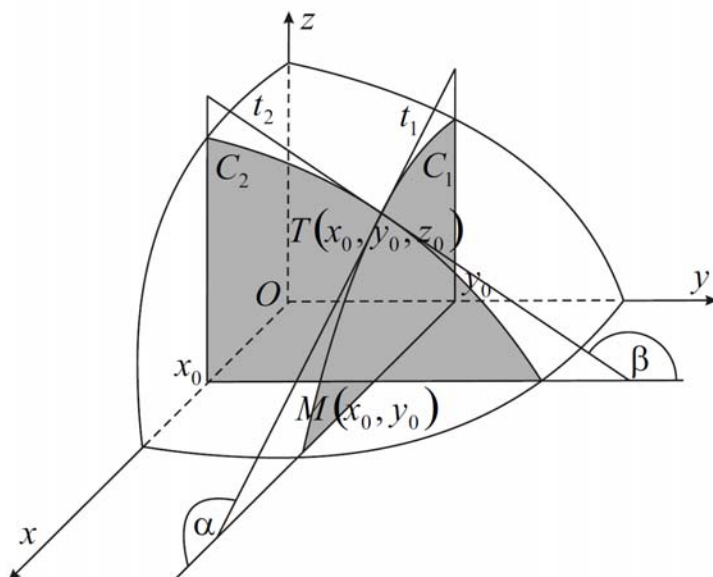
Коментар: Пресметавме само еден мешан парцијален извод бидејќи мешаните парцијални изводи се еднакви. Навистина:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -2 \left(\frac{x}{(x+y)^2} \right)'_x = -2 \frac{(x+y)^2 - x \cdot 2(x+y)(x+y)'_x}{(x+y)^4} = \\ &= -2 \frac{x+y-2x}{(x+y)^3} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} \text{ т.е. } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.\end{aligned}$$

2.1.6. Геометриска интерпретација на парцијалните изводи.

Нека равенката $z = f(x, y)$ дефинира површина S . Нека C_1 е пресечна крива на S со рамнината $y = y_0$, а C_2 со рамнината $x = x_0$. Тогаш, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha$ каде што α е аголот што тангентата t_1 на кривата C_1 во точката $T_0 = T(x_0, y_0, z_0)$, го образува со позитивниот дел на x -оската, и $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$ каде што β е аголот што тангентата t_2 на кривата C_2 во точката T_0 , го образува со позитивниот дел на y -оската.

Значи, парцијалниот извод $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, е коефициентот на правец на тангентата t_1 на кривата C_1 : $z = f(x, y)$, $y = y_0$. Парцијалниот извод $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, е коефициентот на правец на тангентата t_2 , на кривата C_2 : $z = f(x, y)$, $x = x_0$.



Цртеж 2.1.6. Геометриска интерпретација на парцијалните изводи

2.2. ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ НА ФУНКЦИЈА И ТОТАЛЕН ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

Забелешка. Функцијата од една променлива $y = f(x)$, дефинирана во околина на точката x_0 , е диференцијабилна во x_0 ако и само ако:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x \quad (\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \quad (1),$$

каде што A е константа и $\alpha = \alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ кога $\Delta x \rightarrow 0$. Се покажува дека $A = f'(x_0)$. Диференцијабилноста на функциите од две променливи ќе ја дефинираме на аналоген начин.

Дефиниција 2.2.1. Функцијата $z = f(x, y)$, дефинирана на (отворена) област D , е **диференцијабилна** во $(x_0, y_0) \in D$, ако:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \quad (\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) \quad (2)$$

каде што A и B се константи, и:

$\alpha = \alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ кога $\Delta x \rightarrow 0$; и $\beta = \beta(\Delta y) \rightarrow 0$ кога $\Delta y \rightarrow 0$.

Ако функцијата $z = f(x, y)$ е диференцијабилна во секоја точка од областа D , велиме дека е диференцијабилна на D .

Теорема 2.2.2. Ако функцијата $z = f(x, y)$, дефинирана на (отворена) област D , е диференцијабилна во $(x_0, y_0) \in D$, тогаш постојат парцијалните изводи во (x_0, y_0) и

$$A = f'_x(x_0, y_0) \text{ и } B = f'_y(x_0, y_0).$$

Доказ. Ако во (2) ставиме $\Delta x \neq 0$ и $\Delta y = 0$, добиваме:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x,$$

од каде што следува дека постои:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + \alpha\Delta x}{\Delta x} = A.$$

Ако во (2) ставиме $\Delta x = 0$ и $\Delta y \neq 0$, добиваме:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = B\Delta y + \beta\Delta y,$$

од каде што:

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{B\Delta y + \beta\Delta y}{\Delta y} = B. \blacksquare$$

Значи, ако функцијата $z = f(x, y)$ е диференцијабилна во точката (x_0, y_0) , тогаш нараснувањето е:

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

каде што: $\alpha \rightarrow 0$ кога $\Delta x \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow 0$ кога $\Delta y \rightarrow 0$.

Ако функција од една променлива е диференцијабилна, тогаш таа е непрекината. Следната теорема покажува дека истото својство важи и за функции од две променливи.

Теорема 2.2.3. (Потребен услов за диференцијабилност на функција). Ако функцијата $z = f(x, y)$ е диференцијабилна во точката (x_0, y_0) , тогаш таа е непрекината во (x_0, y_0) .

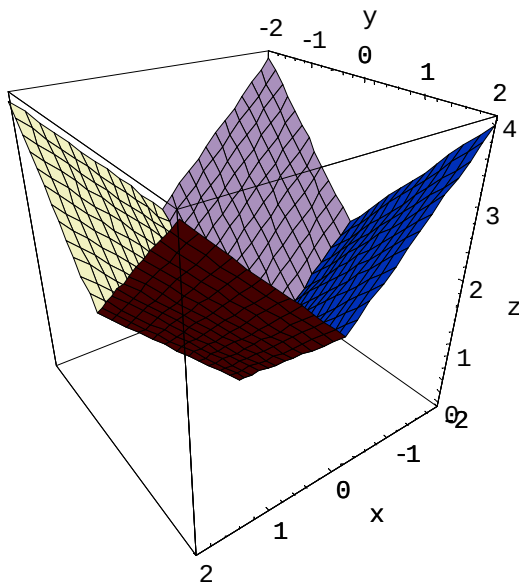
Доказ. Ако побараме лимес во 2 (стр.23), добиваме:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \Delta z = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) = 0 \Leftrightarrow \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0),$$

од каде што следува дека f е непрекината во (x_0, y_0) . ■

Следниот пример покажува дека обратното тврдење не мора да важи.

Пример 2.2.4. Функцијата $z = |x| + |y|$ е непрекината во $(0, 0)$, но не постојат парцијалните изводи, т.е. z не е диференцијабилна во таа точка.



Цртеж 2.2.4. График на функцијата $z = |x| + |y|$

Функцијата може да има парцијални изводи, но да не е диференцијабилна или непрекината.

Пример 2.2.5. Функцијата:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

има парцијални изводи $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ (Зошто?), но има прекин во $(0,0)$ (Зошто?), т.е. според теорема 2.2.3 не е диференцијабилна во $(0,0)$.

Следната теорема ги утврдува условите под кои функцијата е диференцијабилна. Да напоменеме дека постојат диференцијабилни функции што не ги исполнуваат дадените услови.

Теорема 2.2.6. (Доволен услов за диференцијабилност на функција). Ако функцијата $z = f(x, y)$ има непрекинати парцијални изводи во околина на точката (x_0, y_0) , тогаш таа е диференцијабилна во (x_0, y_0) .

Доказ*. Ги избираме ненултите нараснувања Δx и Δy , така што точката (x, y) каде што $x = x_0 + \Delta x$ и $y = y_0 + \Delta y$ е во околината на (x_0, y_0) . Нараснувањето Δz го претставуваме во вид:

$$\Delta z = (f(x, y) - f(x_0, y)) + (f(x_0, y) - f(x_0, y_0)).$$

Со примена на теоремата на Лагранж за функциите:

$$g(x) = f(x, y) \text{ и } h(y) = f(x_0, y),$$

добиваме:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y) &= f'_x(\xi, y) \Delta x \text{ и} \\ f(x_0, y) - f(x_0, y_0) &= f'_y(x_0, \eta) \Delta y, \end{aligned}$$

каде што $\xi \in (x_0, x)$ и $\eta \in (y_0, y)$. Јасно, $\xi, \eta \rightarrow 0$ кога $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$.

Бидејќи парцијалните изводи се непрекинати важи:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f'_x(\xi, y) = f'_x(x_0, y_0) \text{ т.е. } f'_x(\xi, y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha \text{ и}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f'_y(x_0, \eta) = f'_y(x_0, y_0) \text{ т.е. } f'_y(x_0, \eta) = f'_y(x_0, y_0) + \beta,$$

каде што $\alpha \rightarrow 0$ кога $\Delta x \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow 0$ кога $\Delta y \rightarrow 0$. Оттука:

$$\begin{aligned} \Delta z &= (f'_x(x_0, y_0) + \alpha)\Delta x + (f'_y(x_0, y_0) + \beta)\Delta y = \\ &= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y. \end{aligned}$$

Следува дека функцијата е диференцијабилна во точката (x_0, y_0) . ■

Значи, множеството на диференцијабилни функции во околина на дадена точка е подмножество од непрекинатите функции, а надмножество од функциите што имаат непрекинати парцијални изводи.

Тотален диференцијал. Нека функцијата $z = f(x, y)$ е диференцијабилна во точката (x_0, y_0) .

Дефиниција 2.2.7. Тотален диференцијал на функцијата $z = f(x, y)$, ознака dz , е главната вредност на нарастувањето, т.е.:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y,$$

каде што A и B се константите од дефиницијата 2.2.1.

Тоталниот диференцијал на функцијата $z = z(x, y)$ во произволна точка,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y,$$

е функција од четири променливи $x, y, \Delta x$ и Δy . Ако нараснувањата Δx и Δy ги наречеме за диференцијали на x и y соодветно, т.е. ги сметаме за константи $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$, тогаш тоталниот диференцијал е:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \text{ или } dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Може да дефинираме тотален диференцијал од тоталниот диференцијал, ако постои, кој се нарекува **тотален диференцијал од втор ред** и се означува со $d^2 z = d(dz)$ итн. **Тотален диференцијал** од n -ти ред, $n \in \mathbb{N}$; ако постои, на функцијата: $z = f(x, y)$ е:

$$d^n z = d(d^{n-1} z).$$

Ако функцијата $z = f(x, y)$ е диференцијабилна и има непрекинати парцијални изводи од n -ти ред, $n \in \mathbb{N}$, во точката (x_0, y_0) , тогаш мешаните изводи се еднакви и:

$$d^2 z = d(dz) = d(z'_x dx + z'_y dy) = (z'_x dx + z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx + z'_y dy)'_y dy = z''_{xx} dx^2 + z''_{xy} dy dx + z''_{yx} dx dy + z''_{yy} dy^2 = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2,$$

или со други ознаки: $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$. Аналогно:

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

Со помош на принципот на математичка индукција се покажува дека записот на тоталниот диференцијал:

$$d^n z = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k$$

е аналоген на биномната формула, а за полесно паметење симболично се запишува во обликот:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(n)} z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.2.8. Геометриска интерпретација на тоталниот диференцијал. Дадена е во лекцијата „Тангентна рамнина и нормала“.

2.3. ПАРЦИЈАЛЕН ИЗВОД ОД СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА

Дефиниција 2.3.1. Нека $z = f(u, v)$ е функција од променливите u и v . Ако:

$$u = u(x, y) \text{ и } v = v(x, y);$$

се функции од променливите x и y , тогаш:

$$z = f(u(x, y), v(x, y)) = g(x, y),$$

може да се разгледа како функција од x и y и се нарекува **сложена функција** од x и y .

Без доказ ќе ја презентираме следнава теорема:

Теорема 2.3.2. (Теорема за парцијален извод на сложена функција). Нека функцијата $z = f(u, v)$ има непрекинати парцијални изводи по $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, и нека u и v имаат, исто така, непрекинати парцијални изводи по x и y . Тогаш, постојат парцијалните изводи на функцијата

$$z = f(u(x, y), v(x, y)) = g(x, y) \text{ по } x \text{ и } y \text{ и:}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Специјално: 1) ако $z = z(u, v)$ и $u = u(x)$ и $v = v(x)$, тогаш:

$$z' \equiv \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} u' + \frac{\partial f}{\partial v} v'.$$

2) Ако $z = f(u)$ е диференцијалбилна, а $u = u(x, y)$ има непрекинати парцијални изводи, тогаш:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = f' \frac{\partial u}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = f' \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Аналогно се дефинира извод од сложена функција од 3 и повеќе променливи.

Задача 2.3.3. Да се најдат парцијалните изводи на функцијата:

$$z = u^2 \ln v, \quad u = \frac{x}{y}, \quad v = 3x - 2y \quad \text{по } x \text{ и } y.$$

Решение. Прв начин. Важи:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u \ln v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u^2}{v}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2,$$

од каде што:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \ln(v) \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v} 3 = \frac{2x \ln(3x - 2y)}{y^2} + \frac{3x^2}{y^2(3x - 2y)} \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \ln v \left(-\frac{x}{y^2} \right) + \frac{u^2}{v} (-2) = \\ &= -\frac{2x^2 \ln(3x - 2y)}{y^3} - \frac{2x^2}{y^2(3x - 2y)}. \end{aligned}$$

Втор начин. Имаме:

$$z = \left(\frac{x}{y} \right)^2 \ln(3x - 2y) = \frac{x^2}{y^2} \ln(3x - 2y),$$

од каде што:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} \ln(3x - 2y) + \frac{x^2}{y^2} \frac{1}{3x - 2y} 3 = \frac{2x \ln(3x - 2y)}{y^2} + \frac{3x^2}{y^2(3x - 2y)} \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 \left(-\frac{2}{y^3} \right) \ln(3x - 2y) + \frac{x^2}{y^2} \frac{1}{3x - 2y} (-2) = \\ &= -\frac{2x^2 \ln(3x - 2y)}{y^3} - \frac{2x^2}{y^2(3x - 2y)}. \end{aligned}$$

Задача 2.3.4. Да се најдат парцијалните изводи на функцијата:

$$z = e^{x-2y}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3 \quad \text{по } t.$$

Решение. Прв начин. Бидејќи $z = z(x(t), y(t))$, важи:

$$z' = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = e^{x-2y} \cos t + e^{x-2y} (-2) 3t^2 = e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2).$$

Втор начин. Имаме: $z = e^{\sin t - 2t^3}$,

$$z' = e^{\sin t - 2t^3} (\sin t - 2t^3)' = e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2).$$

2.4. ПАРЦИЈАЛЕН ИЗВОД ОД ИМПЛИЦИТНО ЗАДАДЕНА ФУНКЦИЈА

• **2.4.1.** Нека со равенката:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (2),$$

е зададена имплицитно функцијата $z = z(x, y)$. Со диференцирање на $F(x, y, z(x, y)) = 0$ по x и y , добиваме:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Задача 2.4.2. Да се најдат парцијалните изводи на имплицитно зададената функција $x^2 + y^2 + z = R^2$.

Решение. Прв начин, директно.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 / \frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow x + z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z};$$

$$x^2 + y^2 + z = R^2 / \frac{\partial}{\partial y} \Leftrightarrow 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow y + z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Втор начин, со користење на формулата за парцијален извод од имплицитна функција. Бидејќи:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2,$$

важи:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$

од каде што:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z} \text{ и } \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}.$$

• ***2.4.3. Забелешка.** Функцијата:

$$F(x, y) = 0 \quad (1),$$

под одредени услови, меѓу кои $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, може да дефинира функција

$y = y(x)$. Иако функцијата y постои, секогаш не е можно експлицитно да се изрази. Но, со помош на правилата за извод од сложена функција, можеме да го најдеме изводот на функцијата $y = y(x)$, без да ја изразиме експлицитно.

Имено, со диференцирање на равенката $F(x, y(x)) = 0$ по x , добиваме:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y} y' = -\frac{\partial F}{\partial x} \Leftrightarrow y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

3. ПРИМЕНА НА ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ

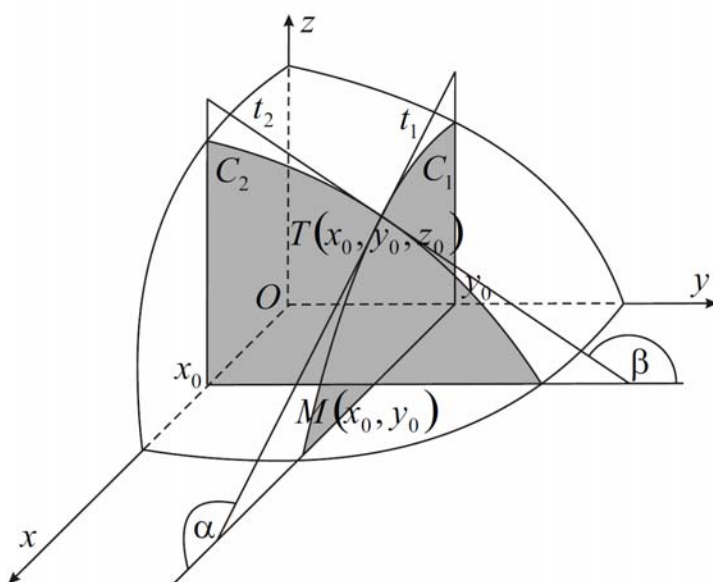
3.1. ТАНГЕНТНА РАМНИНА И НОРМАЛА НА ПОВРШИНА

• Нека со равенката $z = f(x, y)$ е дефинирана површина S во простор.

Равенката на тангентата t_1 на кривата $C_1 : z = f(x, y), y = y_0$;

е:

$$\begin{cases} z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)}.$$



Цртеж 3.1.1.

Равенката на тангентата t_2 на кривата $C_2 : z = f(x, y), x = x_0$;

е:

$$\begin{cases} z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Рамнината што ги содржи тангентите t_1 и t_2 и нивната допирна точка $T_0 = T(x_0, y_0, z_0)$ се нарекува **тангентна рамнина** на површината $z = f(x, y)$ во точката T_0 . Нејзината равенка ќе ја определиме според формулата за равенка на рамнина што содржи дадена точка и е нормална на даден вектор. Еден нормален вектор на тангентната рамнина е:

$$\begin{aligned} \vec{t}_1 \times \vec{t}_2 &= \begin{pmatrix} \vec{t}_1 = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \\ \vec{t}_2 = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 1 & \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) & 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \end{pmatrix} \quad (1). \end{aligned}$$

Оттука, нејзината равенка е:

$$\begin{aligned} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) &= 0 \Leftrightarrow \\ z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) &\quad (2). \end{aligned}$$

Правата што минува низ точката T_0 и е нормална на тангентната рамнина на површината во таа точка се нарекува **нормала** на површината $z = f(x, y)$ во точката T_0 . Бидејќи нормалниот вектор на тангентната рамнина е паралелен со нормалата, равенката на нормалата во точката T_0 ќе ја определиме според формулата за равенка на права што содржи дадена точка и е паралелна со даден вектор,

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} \quad (3).$$

- Нека површината S е зададена имплицитно со равенката:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Тогаш со замена на парцијалните изводи:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

нормалниот вектор на тангентната рамнина во точката, $(1), T_0$ е:

$$\left(-\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right) = \left(\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, 1 \right)$$

$$\parallel (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)).$$

Следува дека равенката на тангентната рамнина е:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

додека равенката на нормалата е:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Задача 3.1.1. Најди ја равенката на тангентната рамнина и нормала на површината $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ во точката $T(3, 4, -7)$.

Решение. Парцијалните изводи во точката $M(3, 4)$ се:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(3, 4) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} - 4 = \frac{3}{5} - 4 = -\frac{17}{5};$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(3, 4) = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} - 3 = \frac{4}{5} - 3 = -\frac{11}{5}.$$

Следува дека равенките на тангентната рамнина и нормала се:

$$T : z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \Leftrightarrow$$

$$z + 7 = -\frac{17}{5}(x - 3) - \frac{11}{5}(y - 4) \Leftrightarrow$$

$$5z + 35 = -17x + 51 - 11y + 44 \Leftrightarrow 17x + 11y + 5z - 60 = 0;$$

и

$$n: \frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-3}{-\frac{17}{5}} = \frac{y-4}{-\frac{11}{5}} = \frac{z+7}{-1} \Leftrightarrow \frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}.$$

Задача 3.1.2. Најди ја равенката на тангентната рамнина и нормала на површината $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ во точката $T(1, 2, -1)$.

Решение. Парцијалните изводи на функцијата:

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 \text{ се:}$$

$$F'_x = 3x^2 + yz, \quad F'_y = 3y^2 + xz \text{ и } F'_z = 3z^2 + xy;$$

од каде што:

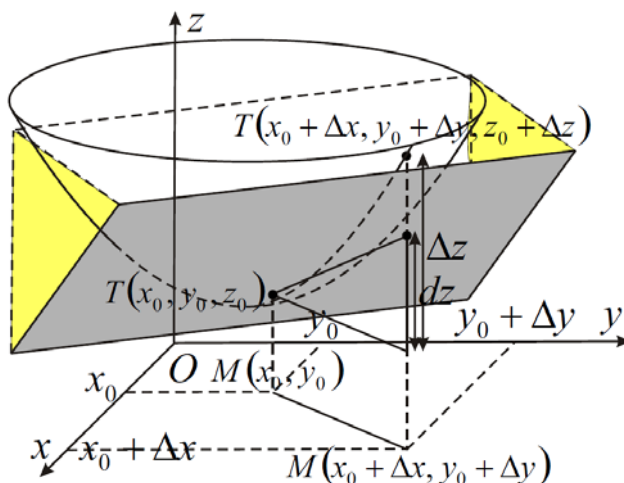
$$F'_x(1, 2, -1) = 3 - 2 = 1, \quad F'_y(1, 2, -1) = 12 - 1 = 11 \text{ и } F'_z(1, 2, -1) = 3 + 2 = 5.$$

Оттука, равенките на тангентната рамнина и нормала во точката $T(1, 2, -1)$ се:

$$\begin{aligned} T: F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 1 + 11(y - 2) + 5(z + 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ x - 1 + 11y - 22 + 5z + 5 &= 0 \Leftrightarrow \\ x + 11y + 5z - 18 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n: \frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} &= \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} \Leftrightarrow \\ \frac{x - 1}{1} &= \frac{y - 2}{11} = \frac{z + 1}{5}. \end{aligned}$$

3.1.3. Геометриска интерпретација на тоталниот диференцијал. Со помош на равенката на тангентна рамнина може да дадеме **геометриска интерпретација на тоталниот диференцијал** на функцијата $z = f(x, y)$.



Цртеж 3.1.3.

Ако во равенката на тангентната рамнина (2) ставиме: $x - x_0 = \Delta x = dx$ и $y - y_0 = \Delta y = dy$, добиваме:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)dy \Leftrightarrow z - z_0 = dz.$$

Следува дека тоталниот диференцијал на функцијата $z = f(x, y)$ чијшто график е површината S , во точката $M_0(x_0, y_0)$, а кој одговара на прирастувањето Δx и Δy на независните променливи x и y , претставува прираст на функцијата:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

чијшто график е тангентната рамнина на S во $T_0 = T(x_0, y_0, z_0)$.

3.2. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

Теорема 3.2.1 (Тејлорова формула). Нека функцијата $z = f(x, y)$ е непрекината заедно со своите парцијални изводи до $(n+1)$ -ви ред во некоја околина на точката $M_0 = M(x_0, y_0)$, тогаш за секоја точка $M = M(x, y)$ од таа околина важи формулата:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} (f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)) + \\ + \frac{1}{2!} (f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) + \dots + \\ + \frac{1}{n!} d^n(x_0, y_0) + R_n(x, y),$$

каде што:

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0)),$$

за некој $\theta \in (0, 1)$ (1). ■

Формулата (1) се нарекува **Тејлорова формула** за функцијата $z = f(x, y)$ во точката M_0 . Последниот собирок $R_n(x, y)$ се нарекува **остаток** на Тејлоровата формула.

Ако $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, тогаш Тејлоровата формула се нарекува **Маклоренова формула**.

Ако функцијата $z = f(x, y)$ е претставена со помош на Тејлоровата (Маклореновата) формула велиме дека е развиена во Тејлоров (Маклоренов) полином од n -ти степен или дека е развиена во Тејлоров (Маклоренов) ред заклучно со членовите од n -ти ред).

Задача 3.2.2. Функцијата:

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$$

развиј ја во Тејлоров полином во околина на точката $A(1, -2)$.

Решение. Ги пресметуваме членовите на Тејлоровиот ред:

$$f(1, -2) = 2 + 2 - 4 - 6 + 6 + 5 = 5,$$

$$\begin{aligned}f'_x &= 4x - y - 6, \quad f'_x(1, -2) = 4 + 2 - 6 = 0, \\f'_y &= -x - 2y - 3, \quad f'_y(1, -2) = -1 + 4 - 3 = 0, \\f''_{xx} &= 4, \quad f''_{xy} = -1, \quad f''_{yy} = -2;\end{aligned}$$

и $R_2(x, y) = 0$, бидејќи сите изводи од трет и повисок ред се нули; од каде што со замена во Тејлоровата формула добиваме:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}(f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)) + \\&\frac{1}{2!}(f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(y - y_0)^2) + R_2(x, y) \\&\Leftrightarrow f(x, y) = 5 + \frac{1}{2}(4(x - 1)^2 + 2(-1)(x - 1)(y + 2) + (-2)(y + 2)^2) = \\&5 + 2(x - 1)^2 - (x - 1)(y + 2) - (y + 2)^2.\end{aligned}$$

3.3. ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ

Дефиниција 3.3.1. Нека функцијата $z = f(x, y)$ е дефинирана на D .

Функцијата $z = f(x, y)$ има **локален максимум** во точката $(x_0, y_0) \in D$, ако постои околина U на точката (x_0, y_0) , таква што:

$$f(x_0, y_0) > f(x, y),$$

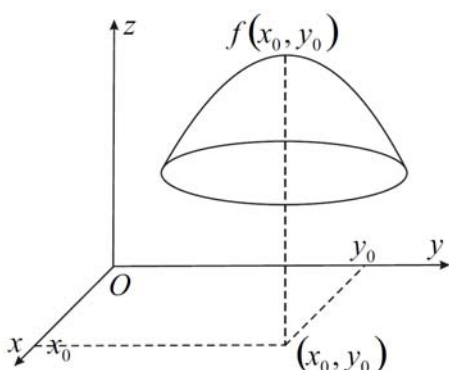
за секоја точка $(x, y) \in U \cap D$.

Функцијата $z = f(x, y)$ има **локален минимум** во точката $(x_0, y_0) \in D$, ако постои околина U на точката (x_0, y_0) , таква што:

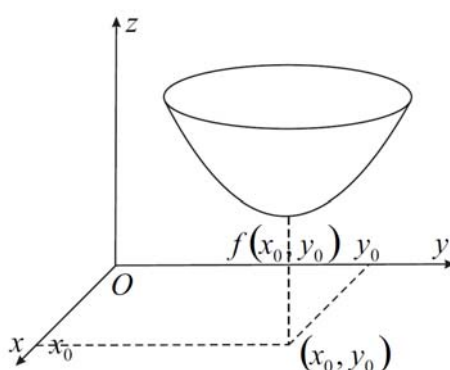
$$f(x_0, y_0) < f(x, y),$$

за секоја точка $(x, y) \in U \cap D$.

Ако $z = f(x, y)$ има локален максимум (минимум) во точката (x_0, y_0) , тогаш вредноста $f(x_0, y_0)$ се нарекува локален максимум (минимум) на $z = f(x, y)$, додека точката (x_0, y_0) е точка на локален максимум (минимум) на $z = f(x, y)$. Локалниот максимум и минимум се нарекуваат **локални екстрими**.



Цртеж 3.3.1.1. Локален максимум



Цртеж 3.3.1.2. Локален минимум

Функцијата $z = f(x, y)$ има **апсолутен максимум** (**максимум**) во точката $(x_0, y_0) \in D$, ако $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ за сите $(x, y) \in D$.

Функцијата $z = f(x, y)$ има **апсолутен минимум** (**минимум**) во точката $(x_0, y_0) \in D$, ако $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ за сите $(x, y) \in D$.

Ако $z = f(x, y)$ има апсолутен максимум (минимум) во точката (x_0, y_0) , тогаш вредноста $f(x_0, y_0)$ се нарекува апсолутен максимум (минимум) на $z = f(x, y)$, додека точката (x_0, y_0) е точка на апсолутен максимум (минимум) на $z = f(x, y)$. Апсолутниот максимум и минимум се нарекуваат апсолутни екстреми или само **екстреми**.

Ние дефиниравме локални (апсолутни) екстреми коишто уште се нарекуваат **строги** локални (апсолутни) екстреми. Ако во равенствата, место $>$ ($<$), ставиме: $\geq$ ($\leq$), тогаш говориме за локални (апсолутни) екстреми што **не** се **строги**.

Дефиниција 3.3.2. Точката $(x_0, y_0) \in D$ е **стационарна точка** за функцијата $z = f(x, y)$, ако:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \blacksquare$$

Теорема 3.3.3. (Потребни услови за постоење локален екстрем). Нека функцијата $z = f(x, y)$ е дефинирана во околина на точката $M_0 = M(x_0, y_0)$ и има непрекинати парцијални изводи од прв ред во таа точка.

Ако f има локален екстрем во M_0 , тогаш M_0 е стационарна точка, т.е.:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Доказ. Ја разгледуваме функцијата $g(x) = f(x, y_0)$. Бидејќи f има локален екстрем во M_0 , следува дека g има локален екстрем во x_0 , па според теоремата на Ферма:

$$g'(x_0) = 0 \text{ т.е. } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Слично за $h(y) = f(x_0, y)$ се добива:

$$h'(y_0) = 0 \text{ т.е. } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \blacksquare$$

Обратното тврдење не мора да важи, односно секоја стационарна точка не мора да биде точка на локален екстрем. Стационарната точка која не е екстрем се нарекува **седлеста** точка.

Дефиниција 3.3.4. Точката $(x_0, y_0) \in D$ е **критична точка** за функцијата $z = f(x, y)$, ако (x_0, y_0) е стационарна точка за функцијата $z = f(x, y)$ или еден од парцијалните изводи не постои.

Следната теорема ги дава **доволните** услови за егзистенција на екстрем на функција.

Теорема 3.3.5. (Критериум за наоѓање локални екстреми со парцијални изводи). Нека $M_0 = M(x_0, y_0)$ е критична точка за функцијата $z = f(x, y)$, и f има непрекинати парцијални изводи од втор ред во некоја околина на точката M_0 .

Нека:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad \text{и} \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Тогаш важат следниве тврдења:

1. Ако $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$; тогаш $z = f(x, y)$ има локален минимум во (x_0, y_0) ;
2. Ако $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$; тогаш $z = f(x, y)$ има локален максимум за (x_0, y_0) ;
3. Ако $AC - B^2 < 0$; тогаш $z = f(x, y)$ нема локален екстрем во (x_0, y_0) .

Доказ*. Во Тајлоровата формула:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) + \\ &+ R_2(x, y). \end{aligned} \quad \text{Ако ставиме:}$$

$$x = x_0 + \Delta x \quad \text{и} \quad y = y_0 + \Delta y, \quad \text{за} \quad \Delta y \neq 0 \quad \text{и} \quad f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

добиваме:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x, y) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{1}{2} (A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2(x, y) = \\ &= \frac{\Delta y^2}{2} \left(A \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 + 2B \frac{\Delta x}{\Delta y} + C \right) + R_2(x, y). \end{aligned}$$

Притоа, $R_2(x, y)$ е бесконечно мала големина од повисок ред во однос на $\Delta x^2 + \Delta y^2$ кога $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ ($R_2(x, y)$ е хомогена функција од трет ред по Δx и Δy , додека изразот пред него од втор). Следува дека за мали вредности на $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$, $R_2(x, y)$ не влијае на знакот на Δz . Заради $\Delta y^2 > 0$, знакот на Δz за мали вредности на Δx и Δy , зависи само од триномот:

$$At^2 + 2Bt + C,$$

каде што: $t = \frac{\Delta x}{\Delta y}$. Затоа:

1) Ако $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, тогаш равенката $At^2 + 2Bt + C = 0$ нема реални решенија и бидејќи $A > 0$ графикот на параболата: $y = At^2 + 2Bt + C$ е над x -оската, т.е. $At^2 + 2Bt + C > 0$, односно $\Delta z > 0$ за секое Δx и $\Delta y \neq 0$ во некоја околина на (x_0, y_0) , па f има локален минимум во (x_0, y_0) ;

2) Ако $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$, тогаш равенката $At^2 + 2Bt + C = 0$ нема реални решенија и бидејќи $A < 0$ графикот на параболата: $y = At^2 + 2Bt + C$ е под x -оската, т.е. $At^2 + 2Bt + C < 0$, односно $\Delta z < 0$, па f има локален максимум во (x_0, y_0) ;

3) Ако $AC - B^2 < 0$, тогаш равенката $At^2 + 2Bt + C = 0$ има две реални решенија, т.е. $At^2 + 2Bt + C$ го менува знакот, па f нема локален екстрем во (x_0, y_0) . ■

Ако $AC - B^2 = 0$ не може со помош на парцијални изводи од втор ред да се утврди дали $z = f(x, y)$ има локален екстрем во (x_0, y_0) .

Задача 3.3.6. Да се најдат екстремните вредности на функцијата: $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

Решение. Ги наоѓаме парцијалните изводи и ги прирамнуваме на нула:

$$f'_x = 2x - y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 9;$$

$$f'_y = -x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2y - 6.$$

Следува дека:

$$x = 2(2x + 9) - 6 = 4x + 12 \Leftrightarrow 3x = -12 \Leftrightarrow x = -4.$$

Оттука:

$$y = 2(-4) + 9 = 1.$$

Значи, единствена стационарна точка е $E(-4, 1)$. Притоа:

$$A = f''_{xx} = 2, \quad B = f''_{xy} = -1 \quad \text{и} \quad C = f''_{yy} = 2.$$

Бидејќи:

$$AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \text{и} \quad A = 2 > 0,$$

функцијата има локален минимум во E .

Пресметување апсолутни екстрими на непрекината функција на затворено и ограничено множество. * Постапката за пресметување на овие екстрими е одредена од следнава теорема:

Теорема 3.3.7*. (Теорема за постоење максимум и минимум на функција). Нека $z = f(x, y)$ е непрекината функција дефинирана на затворено и ограничено множество D . Тогаш f има максимум и минимум. ■

Значи, ако $z = f(x, y)$ е непрекината функција на затворено и ограничено множество D , апсолутните екстрими може да ги најдеме така што ќе ги пресметаме локалните екстрими на f на внатрешноста на D , ќе ги најдеме екстремите на ∂D и меѓу тие точки ќе ја определиме најмалата и најголемата вредност функцијата f .

3.4. УСЛОВЕН ЕКСТРЕМ

Функцијата $y = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ има **условен локален максимум** во точката $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ при услови:

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad F_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad F_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (1);$$

ако:

$$1) \quad F_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, k;$$

2) постои околина U на $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ таква што за секоја точка:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U \cap D_{F_1}$$

за којашто:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, k;$$

важи:

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) < F_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0). \blacksquare$$

Условниот локален максимум е дефиниран во **силна** форма. Ако „<“ се замени со „≤“ говориме за условен локален максимум во **слаба** форма.

Аналогно се дефинира поимот **условен локален минимум**. Условниот локален максимум и минимум се нарекуваат **условни локални екстреми**.

За разлика од условните, безусловните екстреми ги викаме **слободни**. Слободните екстреми се бараат на целата дефинициона област D , додека условните ги бараме на точките од дефиниционата област што ги исполнуваат равенките (1).

Еден од начините на одредување на условните екстреми е да се изразат $k < n$ променливи од k -те услови и проблемот да се сведе на наоѓање екстремна вредност на функција од $n - k$ променливи. Постапката е аналогна на наоѓање екстремна вредност на функција од две променливи.

Ако условите не е можно да се запишат експлицитно или изразите што се добиваат во постапката се комплицирани, тогаш се потребни други методи за барање на условниот екстрем.

Еден од нив е **Лагранжовиот метод на множител**, кој се состои во барање слободен екстрем на функцијата на Лагранж, која е збир од функцијата од која се бара екстрем и линеарната комбинација на условите (условните функции).

- Треба да најдеме екстремна вредност на функцијата:

$$F_1(x, y, z) \text{ при услов } F_2(x, y, z) = 0.$$

Ја формираме функцијата на Лагранж:

$$F(x, y, z, \lambda) = F_1(x, y, z) + \lambda F_2(x, y, z).$$

Со диференцирање на равенката по x , y , z и λ , и прирамнување на 0, го добиваме системот равенки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F_1}{\partial y} + \lambda \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F_1}{\partial z} + \lambda \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0,$$

$$\text{и } \frac{\partial F}{\partial \lambda} = F_2 = 0 \quad (2);$$

чишто решенија $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ се стационарни точки на F .

Се покажува дека ако функцијата $\bar{F}(x, y, z) = F(x, y, z, \lambda_0)$ има екстрем во точката (x_0, y_0, z_0) , тогаш функцијата F_1 има условен екстрем при условот $F_2 = 0$ во точката (x_0, y_0, z_0) . Значи, условите (2) се потребни услови за постоење условен екстрем.

При решавање текстуални задачи најчесто ќе бараме условен екстрем. Притоа, ќе ги одредуваме само стационарните точки, бидејќи најчесто се добива една стационарна точка, а во текстот е нагласено или од геометриската интерпретација на задачата се заклучува кој вид на екстрем е точката.

Ако треба да најдеме екстремна вредност на функцијата $F_1(x, y, z)$ при услови $F_2(x, y, z) = 0$ и $F_3(x, y, z) = 0$, ја формираме функцијата:

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = F_1(x, y, z) + \lambda F_2(x, y, z) + \mu F_3(x, y, z)$$

и ги наоѓаме нејзините стационарни точки, меѓу кои аналогно како во претходниот случај се бараат можните условни екстреми.

Задача 3.4.1. Да се најдат димензиите на отворен базен во форма на квадар со даден волумен V , така што да има најмала плоштина.

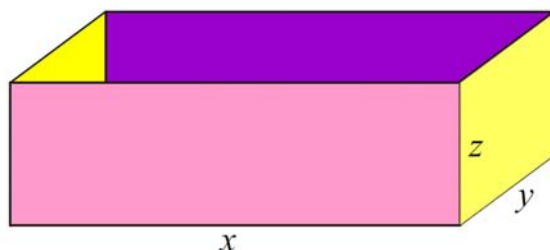
Решение. Плоштината и волуменот на квадарот се:

$$P = xy + 2xz + 2yz, \quad V = xyz.$$

Функцијата на Лагранж според условите од задачата е:

$$F = xy + 2xz + 2yz + \lambda(V - xyz).$$

Со пресметување на парцијалните изводи и прирамнување на нула, ги определуваме стационарните точки како решение на систем од четири равенки со четири непознати. Системот наједноставно се решава ако го изразиме параметарот λ од првите три равенки:



Цртеж 3.4.1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= y + 2z - \lambda yz = 0 \Leftrightarrow y + 2z = \lambda yz \Leftrightarrow \lambda = \frac{y + 2z}{yz}; \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x + 2z - \lambda xz = 0 \Leftrightarrow x + 2z = \lambda xz \Leftrightarrow \lambda = \frac{x + 2z}{xz}; \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2x + 2y - \lambda xy = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y = \lambda xy \Leftrightarrow \lambda = \frac{2x + 2y}{xy}.\end{aligned}$$

Потоа, со прирамнување на десните страни ги изразуваме променливите преку една од нив:

$$\begin{aligned}\frac{y + 2z}{yz} &= \frac{x + 2z}{xz} \Leftrightarrow \underline{xy} + 2xz = \underline{xy} + 2yz \Leftrightarrow x = y; \\ \frac{2x + 2y}{xy} &= \frac{y + 2z}{yz} \Leftrightarrow \underline{2xz} + 2yz = xy + \underline{2xz} \Leftrightarrow z = \frac{x}{2};\end{aligned}$$

и ги заменуваме во четвртата равенка:

$$V = xyz = \frac{1}{2}x^3 \Leftrightarrow 2V = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2V};$$

од каде што:

$$y = \sqrt[3]{2V} \text{ и } z = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}.$$

Значи, димензиите на базенот се: $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$ и $\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.

4. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

4.0. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

При изучувањето на појавите во природата, често не е можно да се утврди законитоста која ги поврзува големините што ја карактеризираат дадената појава, но е можно да се утврди законитоста меѓу тие големини и нивните изводи.

Дефиниција 4.1. Обична диференцијална равенка е равенката:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1);$$

која ја содржи независната променлива x , непознатата функција $y = y(x)$ и нејзините изводи $y', \dots, y^{(n)}$. ■

Равенката (1) е зададена во **имплицитен** или општ вид. Ако таа може да се запише експлицитно $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, тогаш велиме дека е зададена во **експлицитен** (нормален) вид.

Диференцијалната равенка која ја дава врската меѓу една функција од две и повеќе променливи и нејзините парцијални изводи се нарекува **парцијална диференцијална равенка**. Ние ќе разгледуваме само обични диференцијални равенки, кои ќе ги нарекуваме диференцијални равенки.

Ред на диференцијална равенка е редот на највисокиот извод кој се појавува во равенката. ■

Решенија на диференцијалните равенки. Решение или **интеграл** на диференцијалната равенка од n -ти ред на интервалот (a, b) е секоја n -пати диференцијабилна функција

$$y = y(x),$$

на (a, b) која идентички ја задоволува равенката. ■

Постапката за наоѓање на решението на диференцијалната равенка, се нарекува **интеграција** на дадената равенка.

Графикот на секое решение $y = y(x)$ се нарекува **интегрална крива** на диференцијалната равенка. ■

Да се реши (интегрира) диференцијалната равенка, значи да се најдат сите нејзини решенија. Во општ случај решенијата на диференцијалната равенка n -ти ред, претставуваат фамилија криви:

$$y = \varphi((x, C_1, C_2, \dots, C_n)) \text{ или } \Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

каде што $y = y(x)$ идентично ја задоволува функцијата и $C_1, C_2, \dots, C_n$ се произволни независни константи, и се нарекуваат **општи решенија**. ■

Притоа под произволни вредности на $C_1, C_2, \dots, C_n$ се мисли на оние вредности за кои $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ е дефинирана, додека константите $C_1, C_2, \dots, C_n$ се независни ако ниедна од нив не може да се изрази преку останатите.

Решението во кое сите константи $C_1, C_2, \dots, C_n$ се заменети со конкретни броеви, се нарекува **партикуларно решение**. ■

Постојат решенија кои не зависат од произволни константи (не се општи), нити се добиваат од нив за конкретни вредности (не се партикуларни). Ваквите решенија се нарекуваат **сингуларни** (посебни) решенија. ■

Кошиев проблем е проблемот на определување решение на равенката:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

кое ги исполнува условите:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

наречени **почетни услови**. ■

При решавањето на задачите, партикуларните решенија најчесто ги добиваме од општото, во кое треба да се исполнети конкретни почетни услови. Задачите во материјалов во кои се бара да се интегрира диференцијална равенка што содржи почетни услови, имаат единствено решение.

Формирање диференцијални равенки. Нека е дадена равенката:

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0.$$

Диференцирајќи ја равенката n -пати по x , добиваме систем од $n+1$ равенка. Со елиминација на константите $C_1, C_2, \dots, C_n$ од системот добиваме диференцијална равенка:

$$\bar{F}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Задача 4.1.1. Да се формира диференцијалната равенка на фамилијата криви: $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Решение. Ги бараме првиот и вториот извод на y .

$$y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x \text{ и } y'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x \quad (1).$$

Прв начин. Ако забележиме дека вториот извод е спротивен на функцијата, директно заклучуваме дека $y'' = -y$.

Втор начин. Го решаваме системот од првите две равенки:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

$$y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x;$$

по непознатите C_1 и C_2 :

$$D = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1;$$

$$D_{C_1} = \begin{vmatrix} y & \cos x \\ y' & -\sin x \end{vmatrix} = -y \sin x - y' \cos x;$$

$$D_{C_2} = \begin{vmatrix} \sin x & y \\ \cos x & y' \end{vmatrix} = y' \sin x - y \cos x;$$

од каде што:

$$C_1 = \frac{D_{C_1}}{D} = y \sin x + y' \cos x \text{ и}$$

$$C_2 = \frac{D_{C_2}}{D} = y \cos x - y' \sin x.$$

Ако замениме во (1), добиваме:

$$y'' = -(y \sin x + y' \cos x) \sin x - (y \cos x - y' \sin x) \cos x \Leftrightarrow$$

$$y'' = -y \sin^2 x - y' \sin x \cos x - y \cos^2 x + y' \sin x \cos x \Leftrightarrow$$

$$y'' = -y(\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow y'' = -y.$$

Значи, диференцијалната равенка е: $y'' = -y$.

4.1-7. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПРВ РЕД

4.1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПРВ РЕД

Имплицитен (општ) облик на диференцијална равенка од I ред е $F(x, y, y') = 0$. Ако од диференцијалната равенка може експлицитно да се изрази $y' = f(x, y)$, тогаш велиме дека е во **експлицитен** (нормален) облик.

Општото решение или интеграл на диференцијалната равенка од I ред може да биде изразено **експлицитно** $y = y(x, C)$ или **имплицитно** $F(x, y, C) = 0$.

Одговорот на прашањето под кои услови постои единствено решение на равенката $y' = f(x, y)$ го дава следнава теорема.

Теорема 4.1.2*. (Теорема на Коши). Ако функцијата $z = f(x, y)$ и нејзиниот парцијален извод $f'_y(x, y)$, се непрекинати на некоја област D од xOy -рамнината, тогаш постои интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \in D$ на кој постои единствено решение $y = y(x)$ на равенката $y' = f(x, y)$, кое го исполнува почетниот услов $y(x_0) = y_0$. ■

Геометриски интерпретирано, теоремата кажува дека низ секоја внатрешна точка (x_0, y_0) на областа D , минува само една интегрална крива на равенката: $y' = f(x, y)$.

4.2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ СО РАЗДВОИВИ ПРОМЕНЛИВИ

Дефиниција 4.2.1. Диференцијалната равенка:

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 ,$$

каде што $P_1(x)$, $P_2(x)$, $Q_1(y)$ и $Q_2(y)$ се дадени функции, се нарекува **диференцијална равенка со раздвоиви променливи**. ■

Интеграција. Нека е дадена равенката:

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 \quad (1).$$

- Нека $Q_1(y) \neq 0$ и $P_2(x) \neq 0$. Тогаш:

$$\begin{aligned} P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy &= 0 \Leftrightarrow \\ P_1(x)Q_1(y)dx &= -P_2(x)Q_2(y)dy \Leftrightarrow \\ \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx &= -\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy \Leftrightarrow \\ \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx &= -\int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy \quad (2). \end{aligned}$$

Последнава равенка го дава општиот интеграл на диференцијална равенка со раздвоиви променливи. Ако интегралот од релацијата (2) не може да се добие со помош на елементарните функции, тогаш велиме дека решението е изразено во **квадратури**.

- Нека $Q_1(y) = 0$ или $P_2(x) = 0$, т.е. $Q_1(y)P_2(x) = 0$. Равенката $Q_1(y) = 0$ само во нејзините корени (решенија на равенката) $y = y_0$. Тогаш, $dy = 0$, па (1) е исполнета. Слично, равенката $P_2(x) = 0$ во нејзините корени $x = x_0$, но тогаш $dx = 0$ и повторно важи (1). Значи, корените на равенките го исполнуваат (1). Ако тие решенија не може да се добијат од (2), тогаш тие се сингуларни решенија. ■

Диференцијалната равенка со раздвоиви променливи најчесто се среќава во обликот:

$$y' = P(x)Q(y).$$

Задача 4.2.1. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'x^3 = 2y.$$

Решение. Заради $y' = \frac{dy}{dx}$, имаме:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}x^3 = 2y &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x^3} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x^3} \Leftrightarrow \ln|y| = 2\frac{x^{-2}}{-2} + \ln C \Leftrightarrow \\ \ln\frac{|y|}{C} &= -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{|y|}{C} = e^{-\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow \frac{\pm y}{C} = e^{-\frac{1}{x^2}}, C > 0 \Leftrightarrow y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}, C \neq 0. \end{aligned}$$

За $C = 0$, $y = 0$, исто така, е решение, па општото решение е:

$$y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}, C \in \mathbb{R}.$$

Задача 4.2.2. Да се најде функција $y = y(x)$ која е еднаква на својот извод.

Решение. Од условот на задачата следува дека за $y \neq 0$,

$$y' = y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y$$

Оттука следува дека:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} = dx \quad (1) &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Leftrightarrow \\ \ln|y| &= x + \ln C, C > 0 \Leftrightarrow \\ \ln\frac{|y|}{C} &= x \Leftrightarrow \frac{|y|}{C} = e^x \Leftrightarrow \\ y &= Ce^x, C \neq 0. \end{aligned}$$

Притоа во (1) е скратена дефиниционата област за $y = 0$ кое партикуларно решение на равенката за $C = 0$. Следува општото решение е:

$$y = Ce^x, C \in \mathbb{R}.$$

4.3. ХОМОГЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

Дефиниција 4.3.1. Функцијата $f(x, y)$ е **хомогена функција** од ред n во однос на променливите x и y , ако важи идентитетот $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ за секое $t \in \mathbb{R}$. ■

Дефиниција 4.3.2. Диференцијалната равенка $y' = f(x, y)$ е **хомогена**, ако функцијата $f(x, y)$ е хомогена функција од ред 0, т.е. $f(tx, ty) = f(x, y)$ за секое $t \in \mathbb{R}$. ■

Ако ставиме $t = \frac{1}{x}$ во релацијата $f(tx, ty) = f(x, y)$, добиваме:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1).$$

Обратно (1) е хомогена за секое $t \in \mathbb{R}$.

Општ интеграл. Да ја разгледаме хомогената равенка $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$. Воведуваме смена $\frac{y}{x} = z$ од каде што следува дека:

$$y = zx \text{ или } y' = z'x + z.$$

Ако замениме во диференцијалната равенка, за $x \neq 0$ и $\varphi(z) \neq z$, добиваме:

$$\begin{aligned} y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) &\Leftrightarrow z'x + z = \varphi(z) \Leftrightarrow z'x = \varphi(z) - z \Leftrightarrow \\ \frac{dz}{dx}x &= \varphi(z) - z \stackrel{\varphi(z) \neq z}{\Leftrightarrow} \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \int \frac{dx}{x} \quad (2). \end{aligned}$$

Откако ќе го определиме општиот интеграл на хомогената диференцијална равенка (2) се враќаме во смената $z = \frac{y}{x}$ и го добиваме општиот интеграл на (1).

Ако $\varphi(z) = z$, тогаш равенката е $y' = \frac{y}{x}$ и е со раздвоиви променливи.

Задача 4.3.1. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2.$$

Решение. Диференцијалната равенка е хомогена, па воведуваме смена: $\frac{y}{x} = z$, од каде што следува дека: $y' = z'x + z$, па:

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2 \Leftrightarrow z'x + z = z^2 - 2 \Leftrightarrow \frac{dz}{dx}x = z^2 - z - 2 \quad (1) \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{z^2 - z - 2} = \frac{dx}{x} \quad (2) \Leftrightarrow \int \frac{dz}{z^2 - z - 2} dx = \int \frac{dx}{x}.$$

Левиот интеграл од последното равенство е:

$$\int \frac{dz}{z^2 - z - 2} = \int \frac{dz}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2} = \left(z - \frac{1}{2} = t \right) =$$

$$\int \frac{dt}{t^2 - \frac{9}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{2}} \ln \left| \frac{t - \frac{3}{2}}{t + \frac{3}{2}} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{z - 2}{z + 1} \right| + C.$$

Затоа равенката се сведува на:

$$\frac{1}{3} \ln \left| \frac{z - 2}{z + 1} \right| = \ln |x| + \ln C, \quad C > 0 \Leftrightarrow \ln \sqrt[3]{\left| \frac{z - 2}{z + 1} \right|} = \ln C |x| \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{z - 2}{z + 1} \right| = C |x^3|, \quad C > 0 \Leftrightarrow \frac{z - 2}{z + 1} = Cx^3, \quad C \neq 0.$$

Заменуваме $z = \frac{y}{x}$ и добиваме:

$$\frac{\frac{y}{x} - 2}{\frac{y}{x} + 1} = Cx^3 \Leftrightarrow \frac{y - 2x}{y + x} = Cx^3 \Leftrightarrow y - 2x = Cx^3(y + x), \quad C \neq 0.$$

Во (2) дефиниционата област е скратена за точките $z + 1 = 0$ и $z - 2 = 0$ кои се решенија на (1), т.е. за $y + x = 0$ и $y - 2x = 0$; кои се добиваат за $C = 0$. Значи, општото решение е:

$$y - 2x = Cx^3(y + x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Коментар. Во последното равенство се подразбира дека $x \neq 0$, бидејќи дефиниционата област на општото решение зависи од дефиниционата област на диференцијалната равенка.

Во наредните задачи нема секогаш да ја определуваме дефиниционата област, туку само ќе ја подрзбираме.

4.4. ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

Дефиниција 4.4.1. Линеарна диференцијална равенка се нарекува равенката:

$$y' + f(x)y = g(x),$$

каде што $f(x)$ и $g(x)$ се функции од независната променлива x .

Ако $g(x) = 0$, тогаш линеарната равенка се нарекува линеарно хомогена, додека ако $g(x) \neq 0$ е линеарно нехомогена. ■

Интеграција. Постојат неколку начини на решавање на линеарната диференцијална равенка. Ние ќе разгледаме два.

Прв начин. (Метод на смена). Воведуваме смена $y(x) = uv$ (1), каде што $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се диференцијабилни функции по x , кои подоцна ќе ги определиме. Со диференцирање на (1) имаме:

$$y'(x) = u'v + uv'.$$

Тогаш линеарната диференцијална равенка добива облик:

$$u'v + uv' + f(x)uv = g(x) \Leftrightarrow u'v + u(v' + f(x)v) = g(x) \quad (2).$$

Функцијата u ја определуваме од условот:

$$v' + f(x)v = 0 \quad (3) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = -f(x)v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -f(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\ln|v| + \ln C = -\int f(x)dx \Leftrightarrow \ln C|v| = -\int f(x)dx \Leftrightarrow C|v| = e^{-\int f(x)dx}.$$

Функцијата $v(x)$ за $C = \pm 1$ може да ја избереме да биде партикуларниот интеграл: $v = e^{-\int f(x)dx}$ (4).

Го заменуваме v во (2), кој поради (3) има облик:

$$\begin{aligned} u'v = g(x) &\Leftrightarrow \frac{du}{dx} e^{-\int f(x)dx} = g(x) \Leftrightarrow du = g(x) e^{\int f(x)dx} dx \Leftrightarrow \\ \int du &= \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx \Leftrightarrow u + C = \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx \Leftrightarrow \\ u &= C + \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx \quad (5). \end{aligned}$$

Со замена на u и v од (4) и (5) во (1), го добиваме општото решение:

$$y(x) = u(x)v(x) \Leftrightarrow y = e^{-\int f(x)dx} \left(C + \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx \right).$$

Втор начин*. (Метод на варијација на константи на Лагранж). Прво го наоѓаме општото решение на соодветната хомогена линеарна равенка:

$$\begin{aligned} y' + f(x)y &= 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -f(x)y \Leftrightarrow \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int f(x)dx \Leftrightarrow \ln|y| + \ln C_1 = -\int f(x)dx, C_1 > 0 \Leftrightarrow \\ \ln C_1|y| &= -\int f(x)dx \Leftrightarrow C_1|y| = e^{-\int f(x)dx} \Leftrightarrow |y| = C_1 e^{-\int f(x)dx} \Leftrightarrow \\ y &= \pm C_1 e^{-\int f(x)dx}, C_1 \neq 0 \Leftrightarrow y = C_1 e^{-\int f(x)dx}, C_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Лагранжовиот метод се состои во барање на општото решение на нехомогената линеарна равенка $y' + f(x)y = g(x)$ во облик како општото решение на хомогената линеарна равенка, освен што $C_1 = C_1(x)$ е функција од x , т.е $y = C_1(x) e^{-\int f(x)dx}$ (6). Тогаш:

$$\begin{aligned} y' &= C_1'(x) e^{-\int f(x)dx} + C_1(x) e^{-\int f(x)dx} \left(-\int f(x)dx \right)' \Leftrightarrow \\ y' &= C_1'(x) e^{-\int f(x)dx} + C_1(x) e^{-\int f(x)dx} (-f(x)) \Leftrightarrow \\ y' &= C_1'(x) e^{-\int f(x)dx} - f(x) C_1(x) e^{-\int f(x)dx} \quad (7). \end{aligned}$$

Ги заменуваме y и y' од (6) и (7) во $y' + f(x)y = g(x)$,

$$\begin{aligned} C_1'(x) e^{-\int f(x)dx} - f(x) C_1(x) e^{-\int f(x)dx} + f(x) C_1(x) e^{-\int f(x)dx} &= g(x) \Leftrightarrow \\ C_1'(x) e^{-\int f(x)dx} &= g(x) \Leftrightarrow \frac{dC_1(x)}{dx} = g(x) e^{\int f(x)dx} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\int dC_1(x) = \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx \Leftrightarrow C_1(x) = C + \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx ,$$

а потоа го заменуваме последниот идентитет во (6),

$$y = C_1(x)e^{-\int f(x)dx} \Leftrightarrow y = e^{-\int f(x)dx} \left(C + \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx \right). \blacksquare$$

Задача 4.4.1. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1 ,$$

која ги задоволува почетните услови $x = 1, y = e + 1$.

Решение. Дадената диференцијална равенка е линеарна. Нејзиното општо решение е:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int f(x)dx} \left(C + \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx \right) \Leftrightarrow y = e^{-\int \frac{1-2x}{x^2} dx} \left(C + \int e^{\int \frac{1-2x}{x^2} dx} dx \right) \Leftrightarrow \\ y &= e^{\int \left(-\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} \right) dx} \left(C + \int e^{\int \left(-\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} \right) dx} dx \right) \Leftrightarrow y = e^{\frac{1}{x} + 2\ln|x|} \left(C + \int e^{\frac{1}{x} - 2\ln|x|} dx \right) \Leftrightarrow \\ (2\ln|x| = \ln|x|^2 = \ln x^2, -2\ln|x| = \ln|x|^{-2} = \ln x^{-2}, \text{ бидејќи } |x|^2 = x^2) &\Leftrightarrow \\ y &= e^{\frac{1}{x}} e^{\ln x^2} \left(C + \int e^{\frac{1}{x}} e^{\ln x^{-2}} dx \right) \Leftrightarrow y = e^{\frac{1}{x}} x^2 \left(C + \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx \right) \Leftrightarrow \\ \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{x} = t \\ \frac{1}{x^2} dx = dt \end{array} \right) &\Leftrightarrow y = e^{\frac{1}{x}} x^2 \left(C + \int e^t dt \right) \Leftrightarrow \\ y &= e^{\frac{1}{x}} x^2 \left(C + e^{\frac{1}{x}} \right) \Leftrightarrow y = x^2 \left(C e^{\frac{1}{x}} + 1 \right). \end{aligned}$$

За да го определиме партикуларното решение кои ги задоволува почетните услови $x = 1, y = e + 1$, прво ја определуваме константата C :

$$e + 1 = C e + 1 \Leftrightarrow e C = e \Leftrightarrow C = 1 ;$$

од каде што партикуларниот интеграл е: $y = x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} + 1 \right)$.

• Класата на диференцијални равенки $y'(g(y) - f(y)x) = C$, со смената $y' = \frac{1}{x'}$ се сведува на линеарна диференцијална равенка по x . Имено:

$$\begin{aligned} y'(g(y) - f(y)x) = C &\Leftrightarrow \frac{1}{x'}(g(y) - f(y)x) = C \Leftrightarrow x' = C(g(y) - f(y)x) \\ &\Leftrightarrow x' = g_1(y) - f_1(y)x, \quad g_1(y) = Cg(y), \quad f_1(y) = Cf(y) \Leftrightarrow \\ &\quad x' + f_1(y)x = g_1(y). \end{aligned}$$

4.5. БЕРНУЛИЕВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

Дефиниција 4.5.1 Бернулиева диференцијална равенка се нарекува равенката:

$$y' + f(x)y = g(x)y^n \quad (1),$$

каде што $f(x)$ и $g(x)$ се функции од независната променлива x . ■

За $n = 0$ равенката се сведува на линеарна. За $n = 1$ равенката се сведува на равенка со раздвоиви променливи.

Интеграција. Бернулиевата диференцијална равенка се интегрира со сведување до линеарна равенка со смената:

$$z = y^{1-n}, \quad n \neq 0, 1 \quad (2),$$

од каде што следува дека:

$$z' = (1-n)y^{-n}y' = (1-n)\frac{y'}{y^n} \quad (3).$$

Тогаш од (1) и (3) добиваме:

$$\begin{aligned} y' + f(x)y = g(x)y^n / : y^n &\Leftrightarrow \frac{y'}{y^n} + f(x)y^{1-n} = g(x)/(1-n) \Leftrightarrow \\ (1-n)\frac{y'}{y^n} + (1-n)f(x)y^{1-n} &= (1-n)g(x) \Leftrightarrow z' + (1-n)f(x)z = (1-n)g(x). \end{aligned}$$

Последната равенка е линеарна и има општ интеграл:

$$z = e^{-\int (1-n)f(x)dx} \left(C + \int (1-n)g(x)e^{\int (1-n)f(x)dx} dx \right).$$

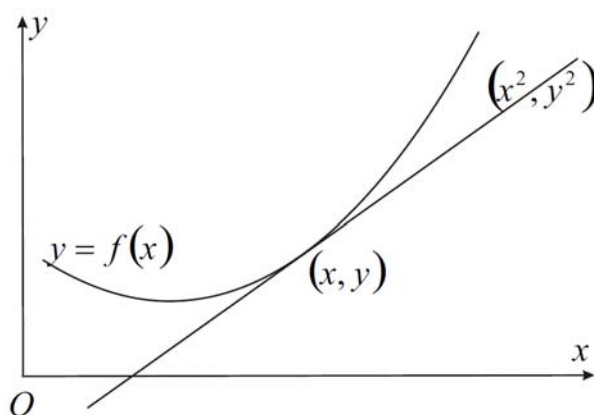
Со враќање на смената (2), го добиваме општото решение на бернулиевата диференцијална равенка:

$$y^{1-n} = e^{\int (n-1)f(x)dx} \left(C + \int (1-n)g(x)e^{\int (1-n)f(x)dx} dx \right).$$

Задача 4.5.2. Да се најде равенката на фамилијата графици на функции кај кои тангентата во точката (x, y) минува и низ точката (x^2, y^2) .

Решение. Од условот на задачата имаме:

$$Y - y = y'(X - x) \Leftrightarrow y^2 - y = y'(x^2 - x) \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x^2 - x}y = \frac{1}{x^2 - x}y^2.$$



Цртеж 4.5.2.

Значи, равенката е Бернулиева. Воведуваме смена:

$$z = y^{1-2} = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{1}{y^2}y',$$

од каде што добиваме:

$$\begin{aligned} -\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{x^2 - x} \frac{1}{y} &= -\frac{1}{x^2 - x} \Leftrightarrow \\ z' - \frac{1}{x^2 - x}z &= -\frac{1}{x^2 - x} \Leftrightarrow \\ z &= e^{-\int f(x)dx} \left(C + \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx \right) \Leftrightarrow \\ z &= e^{\int \frac{dx}{x^2 - x}} \left(C - \int \frac{1}{x^2 - x} e^{-\int \frac{dx}{x^2 - x}} dx \right). \end{aligned}$$

Го пресметуваме интегралот:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x} = \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}} \ln \left| \frac{x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C.$$

и го заменуваме во равенката:

$$\begin{aligned} z &= e^{\ln \left| \frac{x-1}{x} \right|} \left(C - \int \frac{1}{x^2 - x} e^{-\ln \left| \frac{x-1}{x} \right|} dx \right) \Leftrightarrow \\ z &= \left| \frac{x-1}{x} \right| \left(C - \int \frac{1}{x^2 - x} \left| \frac{x-1}{x} \right|^{-1} dx \right) \Leftrightarrow \\ z &= \frac{x-1}{x} \operatorname{sgn} \frac{x-1}{x} \left(C - \int \frac{1}{x^2 - x} \frac{x}{x-1} \operatorname{sgn} \frac{x}{x-1} dx \right) \Leftrightarrow \\ z &= \frac{x-1}{x} \left(C \operatorname{sgn} \frac{x-1}{x} - \int \frac{1}{x(x-1)} \frac{x}{x-1} dx \right) \Leftrightarrow \\ z &= \frac{x-1}{x} \left(C - \int \frac{dx}{(x-1)^2} \right) \Leftrightarrow z = \frac{x-1}{x} \left(C + \frac{1}{x-1} \right) \Leftrightarrow z = C \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Бидејќи $z = \frac{1}{y}$, добиваме:

$$\frac{1}{y} = \frac{C(x-1)+1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{x}{C(x-1)+1}.$$

4.6. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ВО ТОТАЛЕН ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

Дефиниција 4.6.1. Диференцијалната равенка од обликот:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

се нарекува диференцијална равенка во тотален диференцијал, ако постои функција $U = U(x, y)$ таква што левата страна на равенката да е еднаква на нејзиниот тотален диференцијал, односно:

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (2). \blacksquare$$

Општо решение. Ако условот (2) е исполнет тогаш равенката (1) гласи:

$$dU = 0.$$

Со интеграција на оваа равенка го добиваме општиот интеграл:

$$U(x, y) = C.$$

Во следната теорема се дадени условите под кои важи релацијата (2).

Торема 4.6.2. Нека функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ заедно со своите парцијални изводи $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, се непрекинати на областа D .

Потребен и доволен услов изразот:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (3)$$

да е тотален диференцијал на функцијата $U = U(x, y)$ е:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (4).$$

Доказ. • Ќе покажеме дека условот (4) е потребен. Нека $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ е тотален диференцијал на функцијата $U = U(x, y)$. Од релацијата $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$ и (2), следува дека:

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} \text{ и } Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (5).$$

Со диференцирање на (5) по y и по x , добиваме:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \text{ и } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}.$$

Поради непрекинатоста на функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и нивните парцијални изводи $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, следува дека мешаните изводи се еднакви, па:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

• Ќе покажеме дека условот (4) е доволен. Нека важи равенството (4). Ако постои функцијата U која ги исполнува равенствата (5), тогаш со интегрирање по x на равенството $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$, добиваме:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \varphi(y),$$

каде што x_0 е апциса на произволна фиксирана точка $(x_0, y_0) \in D$, додека интеграционата константа е од обликот $\varphi(y)$, бидејќи кога интегрираме по x променливата y ја сметаме за константа.

Функцијата $\varphi(y)$ ќе ја определиме од условот $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$,

од каде што:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \varphi(y) \right) = Q(x, y) \Leftrightarrow \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

Одовде, користејќи го идентитетот $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, добиваме:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx + \varphi'(y) &= Q(x, y) \Leftrightarrow Q(x, y) \Big|_{x_0}^x + \varphi'(y) = Q(x, y) \Leftrightarrow \\ Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y) &= Q(x, y) \Leftrightarrow \varphi'(y) = Q(x_0, y) \Leftrightarrow \\ \int_{y_0}^y \varphi'(y) dy &= \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy \Leftrightarrow \varphi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + \varphi(y_0), \end{aligned}$$

каде што y_0 е ординатата на произволно избраната фиксна точка $(x_0, y_0) \in D$. Следува дека функцијата $u(x, y)$ е:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + \varphi(y_0). \blacksquare$$

Функцијата U ќе ја добиевме и ако интегриравме прво по y па диференциравме по x . Во одредени задачи на еден начин

интегрирањето е потешко или невозможно, па задачата треба да се реши по другиот начин.

Интеграција. Вториот дел од доказот на теоремата ја дава постапката за интеграција на диференцијалната равенка во тотален диференцијал.

Според првиот начин почнуваме со интегрирање:

$$U(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y),$$

каде што P ја разгледуваме како функција од променливата x , додека y игра улога на параметар. Потоа диференцираме по y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\int P(x, y) dx \right)'_y + \varphi'(y), \text{ и заменуваме во: } \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Од последната равенка се изразува функцијата $\varphi'(y)$, се интегрира и $\varphi(y)$ се заменува во U . Општото решение е $U = C$.

Постапката според вториот начин е аналогна, само улогата на променливите е променета.

Задача 4.6.1. Да се реши диференцијалната равенка:

$$(y^2 + 6xy + 3x^2) dx + (4y^2 + 2xy + 3x^2) dy = 0.$$

Решение. Прв начин. Нека со:

$$P = y^2 + 6xy + 3x^2 \text{ и } Q = 4y^2 + 2xy + 3x^2$$

ги означиме функциите пред dx и dy , соодветно. Тогаш:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y + 6x \text{ и } \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + 6x.$$

Бидејќи $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, равенката е во тотален диференцијал, односно

постои функција $U = U(x, y)$ таква што:

$$dU = Pdx + Qdy, \text{ односно } \frac{\partial U}{\partial x} = P \text{ и } \frac{\partial U}{\partial y} = Q. \text{ Тогаш:}$$

$$U = \int Pdx = \int (y^2 + 6xy + 3x^2) dx = y^2x + 6\frac{x^2}{2}y + 3\frac{x^3}{3} + \varphi(y) =$$

$$xy^2 + 3x^2y + x^3 + \varphi(y).$$

За да ја определиме функцијата φ бараме:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + 3x^2 + \varphi'(y);$$

и ја изразуваме функцијата од равенството:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q \Leftrightarrow 2xy + 3x^2 + \varphi'(y) = 4y^2 + 2xy + 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(y) = 4y^2 \Leftrightarrow \varphi(y) = \int 4y^2 dy = \frac{4}{3}y^3.$$

Бидејќи $dU = 0$, општото решение е:

$$U = C \Leftrightarrow xy^2 + 3x^2y + x^3 + \frac{4}{3}y^3 = C \quad / \cdot 3 \Leftrightarrow$$

$$3x^3 + 3xy^2 + 9x^2y + 4y^3 = C.$$

Втор начин. Имаме:

$$U = \int Q dy = \int (4y^2 + 2xy + 3x^2) dy = 4\frac{y^3}{3} + 2x\frac{y^2}{2} + 3x^2y + \varphi(x) =$$

$$\frac{4}{3}y^3 + xy^2 + 3x^2y + \varphi(x), \text{ од каде што: } \frac{\partial U}{\partial x} = y^2 + 6xy + \varphi'(x).$$

Сега:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \Leftrightarrow y^2 + 6xy + \varphi'(x) = y^2 + 6xy + 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow \varphi(x) = 3 \int x^2 dx = 3\frac{x^3}{3} = x^3.$$

Следува:

$$U = C \Leftrightarrow \frac{4}{3}y^3 + xy^2 + 3x^2y + x^3 = C \Leftrightarrow$$

$$3x^3 + 3xy^2 + 9x^2y + 4y^3 = C.$$

4.7. ИНТЕГРАЛЕН МНОЖИТЕЛ

Дефиниција 4.7.1. Функцијата $\lambda = \lambda(x, y)$ е **интегрален множител** на диференцијалната равенка $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ ако диференцијалната равенка:

$$\lambda(x, y)P(x, y)dx + \lambda(x, y)Q(x, y)dy = 0,$$

е во тотален диференцијал. ■

Ќе разгледаме два интегрални множители:

$$\lambda = \lambda(x) \text{ и } \lambda = \lambda(y).$$

- Ако $\lambda = \lambda(x)$ е интегрален множител, тогаш равенката:

$$\lambda(x)P(x, y)dx + \lambda(x)Q(x, y)dy = 0$$

е во тотален диференцијал. Имајќи предвид дека:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda P) = \lambda \frac{\partial P}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial}{\partial x}(\lambda Q) = \lambda' Q + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x},$$

од идентитетот за тотален диференцијал $\frac{\partial}{\partial y}(\lambda P) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda Q)$ ја добиваме интеграционата константа $\lambda = \lambda(x)$,

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial P}{\partial y} &= \lambda' Q + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \lambda' Q = \lambda \frac{\partial P}{\partial y} - \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{d\lambda}{dx} Q = \lambda \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \Leftrightarrow \\ \frac{d\lambda}{\lambda} &= \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx \Leftrightarrow \int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx \Leftrightarrow \ln|\lambda| + \ln C = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx \\ \Leftrightarrow \ln C|\lambda| &= \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx \Leftrightarrow C|\lambda| = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx}. \end{aligned}$$

Оттука за $C = 1$ кога $\lambda > 0$ и $C = -1$ кога $\lambda < 0$ добиваме:

$$\lambda = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx}.$$

Задача 4.7.2. Да се интегрира диференцијалната равенка:

$$(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0,$$

ако се има предвид дека има интегрален множител $\lambda = \lambda(x)$.

Решение. Имаме, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y$;

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2y + 2y}{-2xy} = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x}, \text{ па:}$$

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx} = e^{-2 \int \frac{1}{x} dx} = e^{-2 \ln|x|} = e^{\ln|x|^{-2}} = \frac{1}{x^2}.$$

Диференцијалната равенка во тотален диференцијал е:

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0.$$

Навистина $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{x^2}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y}{x^2}$ т.е. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Следува:

$$U = \int Pdx = \int \left(1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)dx = x - \frac{y^2}{x} - \frac{1}{x} + \varphi(y).$$

За да ја определиме непознатата функција $\varphi(y)$, диференцираме по y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2\frac{y}{x} + \varphi'(y);$$

и заменуваме во равенката:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} = Q &\Leftrightarrow -2\frac{y}{x} + \varphi'(y) = -2\frac{y}{x} \Leftrightarrow \\ \varphi'(y) &= 0 \Leftrightarrow \varphi(y) = 0. \end{aligned}$$

Следува дека општото решение е:

$$U = C \Leftrightarrow x - \frac{y^2}{x} - \frac{1}{x} = C \Leftrightarrow x - \frac{y^2 + 1}{x} = C.$$

4. Диференцијални равенки од прв ред

- Ако $\lambda = \lambda(y)$ е интегрален множител, тогаш равенката:

$$\lambda(y)P(x, y)dx + \lambda(y)Q(x, y)dy = 0,$$

е во тотален диференцијал. Имајќи предвид дека:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda P) = \lambda'P + \lambda \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x}(\lambda Q) = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x}$$

од условот за тотален диференцијал $\frac{\partial}{\partial y}(\lambda P) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda Q)$ ја добиваме интеграционата константа $\lambda = \lambda(y)$:

$$\begin{aligned} \lambda'P + \lambda \frac{\partial P}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \lambda'P = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} - \lambda \frac{\partial P}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{d\lambda}{dy}P = \lambda \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Leftrightarrow \\ \frac{d\lambda}{\lambda} &= \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dx \Leftrightarrow \int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy \Leftrightarrow \ln|\lambda| + \ln C = \int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy \\ \Leftrightarrow \ln C|\lambda| &= \int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy \Leftrightarrow C|\lambda| = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy}. \end{aligned}$$

Оттука еден интегрален множител е $\lambda = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy}$.

Задача 4.7.3. Да се интегрира диференцијалната равенка:

$$\frac{y}{x}dx + (y - \ln x)dy = 0,$$

ако се има предвид дека има интегрален множител $\lambda = \lambda(y)$.

Решение. Имаме, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x}$. Интегралниот

множител е:

$$\lambda(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy}, \quad \text{каде што:} \quad \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}} = \frac{-\frac{2}{x}}{\frac{y}{x}} = -\frac{2}{y},$$

па:

$$\lambda(y) = e^{-2\int \frac{1}{y} dy} = e^{-2\ln|y| + \ln C} = \frac{C}{y^2}.$$

Избираме $\lambda(y) = \frac{1}{y^2}$. Тогаш равенката:

$$\frac{y}{x} dx + (y - \ln x) dy = 0 \quad / : y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{xy} dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{\ln x}{y^2} \right) dy = 0,$$

е во тотален диференцијал. Навистина $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{xy^2}$.

Нејзиното решение е:

$$U = \int P dx = \int \frac{1}{xy} dx \stackrel{x>0}{=} \frac{\ln x}{y} + \varphi(y),$$

од каде што:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\ln x}{y^2} + \varphi'(y),$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q \Leftrightarrow -\frac{\ln x}{y^2} + \varphi'(y) = \frac{1}{y} - \frac{\ln x}{y^2} \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \varphi(y) = \int \frac{1}{y} dy = \ln|y|.$$

Следува општото решение е:

$$U = C \Leftrightarrow \frac{\ln x}{y} + \ln|y| = C.$$

5. ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

5.0. ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Дефиниција 5.1. Нека:

$$a_0 = a_0(x) \neq 0, a_1 = a_1(x), \dots, a_n = a_n(x) \text{ и } f = f(x),$$

се функции дефинирани на D . Равенката:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

се нарекува **линеарна диференцијална равенка од n -ти ред**. Функциите $a_0, a_1, \dots, a_n$ се нарекуваат **коефициенти** на линеарната диференцијална равенка од n -ти ред.

Ние ќе го разгледуваме случајот кога $a_0 = 1$. Ако $a_0(x) \neq 0$, за секое $x \in D$, равенката може да се подели со $a_0(x)$ и да го добие истиот облик:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

Ако $f = 0$, тогаш линеарната диференцијална равенка се нарекува **хомогена**, а ако $f \neq 0$, тогаш равенката е **нехомогена**. Да забележиме дека хомогената линеарна диференцијална равенка од n -ти ред е различна од хомогената диференцијална равенка од прв ред, дефинирана во 4.3.

Ако $a_1, a_2, \dots, a_n$ се константи, тогаш равенката се нарекува **линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти**.

Ако диференцијалната равенка (1) е дефинирана на интервалот (a, b) , природно е решението да се бара во множеството $C^n(a, b)$, од функции што имаат непрекинат n -ти извод. Следната теорема ги дава условите за постоење и единственост на решението на Кошиевит проблем за равенката (1).

Теорема 5.2. (Кошиев проблем). Нека функциите $a_1, a_2, \dots, a_n$ и f се непрекинати на (a, b) , и нека се дадени броевите

$x_0 \in (a, b)$ и t_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$. Тогаш равенката $y = y(x)$ има единствено решение во $C^n(a, b)$, кое ги исполнува почетните услови: $y(x_0) = t_0$, $y'(x_0) = t_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = t_{n-1}$.

5.1. ХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Дефиниција 5.1.1. Функциите $y_1, y_2, \dots, y_n$ се **линеарно независни** на доменот D , ако за секои константи $C_1, C_2, \dots, C_n$,

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0 \text{ само кога } C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0.$$

Во спротивно, $y_1, y_2, \dots, y_n$ се **линеарно зависни**.

Притоа, функциите $y_1, y_2, \dots, y_n$ се линеарно зависни на D , ако и само ако една од нив може да се претстави како линеарна комбинација од останатите.

Специјално функциите y_1 и y_2 се линеарно зависни, ако и само ако $y_1 = k y_2$ или $y_2 = k y_1$ за некоја константа $k \in \mathbb{R}$. Ако не постои таква константа, тогаш y_1 и y_2 се линеарно независни. Овој став ќе го користиме понатаму за утврдување на линеарната независност на две функции.

За утврдување на линеарната независност на n функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ од $C^n(a, b)$, се користи детерминантата:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

наречена **детерминанта на Вронски** или Вронскијан.

Важи следнава теорема:

Теорема 5.1.2. Нека $y_1, y_2, \dots, y_n$ се решенија на хомогената линеарна диференцијална равенка $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$.

Тогаш функциите $y_1, y_2, \dots, y_n$ се линеарно независни, ако за секој $x \in (a, b)$,

$$W(x) \neq 0. \blacksquare$$

Ќе ја покажеме следнава теорема:

Теорема 5.1.3. Нека коефициентите $a_1, a_2, \dots, a_n$ се непрекинати функции на (a, b) . Тогаш постојат n линеарно независни решенија на равенката $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$.

Доказ. Нека $x_0 \in (a, b)$. Од теоремата 5.2 следува дека постојат n решенија $y_1, y_2, \dots, y_n$ на (1), кои ги исполнуваат следниве почетни услови:

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= 1, y_1'(x_0) = 0, \dots, y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ y_2(x_0) &= 0, y_2'(x_0) = 1, \dots, y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ y_n(x_0) &= 0, y_n'(x_0) = 0, \dots, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{aligned}$$

Тогаш вредноста на детерминантата на Вронски во точката x_0 , е:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следува дека $y_1, y_2, \dots, y_n$ се линеарно независни. $\blacksquare$

Ако $y_1, y_2, \dots, y_n$ се линеарно независни решенија на равенката $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$, тогаш тие формираат множество, наречено **фундаментален систем на решенија**.

Теорема 5.1.4. Ако $y_1, y_2, \dots, y_n$ формираат фундаментален систем на решенија на хомогената линеарна диференцијална равенка $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$ на (a, b) , тогаш општото решение е:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

Доказ. Нека $y_1, y_2, \dots, y_n$ се линеарно независни решенија на равенката: $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$.

Доволно е да покажеме дека и $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ е решение на истата равенка. Навистина од:

$$y^{(k)} = C_1 y_1^{(k)} + C_2 y_2^{(k)} + \dots + C_n y_n^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

следува дека:

$$\begin{aligned} & C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)} + a_1 (C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)}) + \dots + \\ & \quad + a_n (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) = 0 \Leftrightarrow \\ & C_1 \underbrace{\left(y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \dots + a_n y_1 \right)}_0 + C_2 \underbrace{\left(y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + \dots + a_n y_2 \right)}_0 + \dots + \\ & \quad C_n \underbrace{\left(y_n^{(n)} + a_1 y_n^{(n-1)} + \dots + a_n y_n \right)}_0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0, \end{aligned}$$

при што $y_i^{(n)} + a_1 y_i^{(n-1)} + \dots + a_n y_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, бидејќи $y_1, y_2, \dots, y_n$ се партикуларни решенија.

5.1.5. Општо решение на хомогени линеарни диференцијални равенки со константни коефициенти

- Да ја разгледаме хомогената линеарна диференцијална равенка од втор ред со константни коефициенти:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Општото решение ќе го најдеме, ако најдеме два линеарно независни партикуларни интеграла. Бараме партикуларен интеграл од вид $y = e^{rx}$. Тогаш $y' = r e^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$ и заради $e^{rx} > 0$, со замена во равенката добиваме:

$$r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_2 e^{rx} = 0 \Leftrightarrow e^{rx} (r^2 + a_1 r + a_2) = 0 \Leftrightarrow r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

Последната равенка се нарекува **карактеристична равенка** на диференцијалната равенка. За секое нејзино решение r , $y = e^{rx}$ е партикуларен интеграл на диференцијалната равенка. Според основната теорема на алгебрата, карактеристичната равенка има две комплексни решенија r_1 и r_2 , сметани со својата кратност. Затоа можни се следните случаи:

1. Корените на карактеристичната равенка $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ се реални и различни, $r_1 \neq r_2$. Тогаш:

$$y_1 = e^{r_1 x} \text{ и } y_2 = e^{r_2 x}$$

се партикуларни интегрални на диференцијалната равенка.

Притоа, y_1 и y_2 се линеарно независни, бидејќи нивниот количник не е константен.

(Втор начин на утврдување на линеарната независност е со помош на детерминантата на Вронски,

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0).$$

Следува дека општото решение е: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

2. Корените на карактеристичната равенка $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ се реални и еднакви $r_1 = r_2 = r$. Тогаш $y_1 = e^{rx}$ е решение на диференцијалната равенка. Ќе покажеме дека и $y_2 = x e^{rx}$ е решение.

$$y' = e^{rx} + r x e^{rx} = (1 + rx) e^{rx} \text{ и } y'' = r e^{rx} + r(1 + rx) e^{rx} = (2r + r^2 x) e^{rx}.$$

Со замена во диференцијалната равенка добиваме:

$$\begin{aligned} (2r + r^2 x) e^{rx} + a_1 (1 + rx) e^{rx} + a_2 x e^{rx} &= 0 \Leftrightarrow 2r + r^2 x + a_1 + a_1 rx + a_2 x = 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{2r + a_1}_0 + \underbrace{(r^2 + a_1 r + a_2)}_0 x &= 0 \Leftrightarrow 0 = 0, \end{aligned}$$

каде што $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ бидејќи r е корен на карактеристичната равенка, а од виетовите формули: $r + r = -a_1$, т.е.: $2r + a_1 = 0$.

Јасно интегралите $y_1 = e^{rx}$ и $y_2 = x e^{rx}$ се линеарно независни, бидејќи нивниот однос $y_2/y_1 = x$ не е константа, па општото решение е:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_2 x}.$$

3. Корените на карактеристичната равенка $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ се коњугирано комплексни, т.е.: $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, од каде што од Виетовите формули добиваме:

$$r_1 + r_2 = -a_1 \Leftrightarrow 2\alpha = -a_1 \Leftrightarrow 2\alpha + a_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{a_1}{2} \quad (1)$$

и

$$r_1 r_2 = a_2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = a_2 \Leftrightarrow \frac{a_1^2}{4} + \beta^2 = a_2 \Leftrightarrow \beta^2 = \frac{4a_2 - a_1^2}{4} \quad (2).$$

Ќе покажеме дека $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ се партикуларни интеграли. Имено:

$$y_1' = \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x = (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

и

$$y_1'' = \alpha e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + e^{\alpha x} (-\alpha \beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x) = \\ ((\alpha^2 - \beta^2) \cos \beta x - 2\alpha \beta \sin \beta x) e^{\alpha x}.$$

Ако замениме во диференцијалната равенка, добиваме:

$$e^{\alpha x} ((\alpha^2 - \beta^2) \cos \beta x - 2\alpha \beta \sin \beta x) + a_1 e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + \\ a_2 e^{\alpha x} \cos \beta x = 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2 + a_1 \alpha + a_2) \cos \beta x - (2\alpha \beta + a_1 \beta) \sin \beta x = 0,$$

каде што со замена на α и β од (1) и (2), добиваме:

$$\alpha^2 - \beta^2 + a_1 \alpha + a_2 = \frac{a_1^2}{4} - a_2 + \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{2} + a_2 = 0$$

и

$$2\alpha \beta + a_1 \beta = \beta (2\alpha + a_1) = 0.$$

Слично се покажува дека и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ е партикуларен интеграл. Притоа, $y_2/y_1 = \tan \beta x$ не е константа, па општото решение е:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x. \blacksquare$$

Задача 5.1.6. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' - 3y' - 4y = 0.$$

Решение. Карактеристичната равенка е:

$$r^2 - 3r - 4 = 0 \Leftrightarrow (r - 4)(r + 1) = 0 \Leftrightarrow r = 4 \vee r = -1;$$

на која ѝ одговараат партикуларните интеграли e^{4x} и e^{-x} .

Затоа општото решение е:

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}.$$

Задача 5.1.7. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

а потоа да се најде партикуларното решение кое ги исполнува условите $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.

Решение. Карактеристичната равенка:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 1,$$

има двоен реален корен, па партикуларните интегрални се e^x и xe^x , од каде што општото решение на равенката е:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Сега го определуваме партикуларното решение од условите:

$$y(0) = 4 \Leftrightarrow C_1 = 4 \quad (1).$$

За да го примениме вториот услов потребно е да се пресмета:

$$y' = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x = C_1 e^x + C_2 (1+x) e^x,$$

од каде што: $y'(0) = 2 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 2 \quad (2).$

Со замена на (1) во (2) добиваме:

$$C_2 = 2 - C_1 = 2 - 4 = -2.$$

Значи, партикуларно решение е:

$$y = 4e^x - 2xe^x = 2e^x(2 - x).$$

Задача 5.1.8. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' + 2y' + 10y = 0.$$

Решение. Карактеристичната равенка е:

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 10 &= 0 \Leftrightarrow \\ r_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i \Leftrightarrow \\ r_1 &= -1 + 3i, \quad r_2 = -1 - 3i. \end{aligned}$$

Следува дека општото решение е:

$$y = C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x.$$

Продолжение на 5.1.5. • Аналогно се определува општото решение на хомогена линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти од ред n ,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0.$$

Имено, прво се бараат корените на карактеристичната равенка:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Постојат n корени земени со својата кратност, така што:

1) На секој k -кратен реален корен r , му одговараат партикуларните интеграла:

$$e^{rx}, x e^{rx}, \dots, x^{k-1} e^{rx}.$$

2) На секој пар k -кратни комплексно коњуигирани корени $\alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$ им одговараат партикуларните интеграла:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Партикуларните интеграла формираат фундаментален систем на решенија $y_1, y_2, \dots, y_n$, па општото решение на диференцијалната равенка е:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

5.2. НЕХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

5.2.1. НЕХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Дефиниција 5.2.1.1. Нека е дадена нехомогената линеарна диференцијална равенка:

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = f(x) \neq 0.$$

Тогаш равенката:

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0,$$

се нарекува **хомогена линеарна диференцијална равенка соодветна на нехомогената линеарна диференцијална равенка.**

Теорема 5.2.1.2. Општото решение на нехомогената линеарна диференцијална равенка:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \text{ е } y = y_h + y_p,$$

каде што y_h е општо решение на равенката:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0,$$

додека y_p е партикуларно решение на:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x).$$

Доказ. • Ќе покажеме дека $y = y_h + y_p$ е решение на нехомогената равенка. Важи:

$$y^{(k)} = y_h^{(k)} + y_p^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ако замениме во нехомогената диференцијална равенка, добиваме:

$$\begin{aligned} (y_h^{(n)} + y_p^{(n)}) + a_1(y_h^{(n-1)} + y_p^{(n-1)}) + \dots + a_n(y_h + y_p) &= f \Leftrightarrow \\ (y_h^{(n)} + a_1y_h^{(n-1)} + \dots + a_ny_h) + (y_p^{(n)} + a_1y_p^{(n-1)} + \dots + a_ny_p) &= f \Leftrightarrow \\ f &= f \Leftrightarrow 0 = 0, \end{aligned}$$

каде што $y_h^{(n)} + a_1y_h^{(n-1)} + \dots + a_ny_h = 0$ бидејќи y_h е општо решение на хомогената равенка, и $y_p^{(n)} + a_1y_p^{(n-1)} + \dots + a_ny_p = f$ бидејќи y_p е партикуларно решение на нехомогената равенка.

• Ќе покажеме дека константите $C_1, C_2, \dots, C_n$ еднозначно можат да се изберат така што ги задоволуваат почетните услови:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Од:

$$y = y_h + y_p \text{ т.е. } y_h = y - y_p \text{ или } C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n = y - y_p,$$

добиваме:

$$C_1y_1^{(k)} + C_2y_2^{(k)} + \dots + C_ny_n^{(k)} = y^{(k)} - y_p^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Заменувајќи ги почетните услови го добиваме системот равенки:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y(x_0) - y_p(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y'(x_0) - y_p'(x_0) \\ \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) - y_p^{(n-1)}(x_0) \end{array} \right. ,$$

чијашто детерминанта е: $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$. Притоа,

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) \neq 0$$

бидејќи партикуларните интегрални $y_1, y_2, \dots, y_n$ формираат фундаментален систем на решенија на хомогената диференцијална равенка. Следува дека системот равенки има единствено решение по $C_1, C_2, \dots, C_n$.

5.2. МЕТОД НА ВАРИЈАЦИИ НА КОНСТАНТИ НА ЛАГРАНЖ

Ќе разгледаме метод за определување партикуларно решение на нехомогената линеарна диференцијална равенка, кога е познат еден фундаментален систем на решенија $y_1, y_2, \dots, y_n$ на соодветната хомогена диференцијална равенка. Наречен е метод на варијации на константи на Лагранж или само метод на варијации на константи.

- Ќе го разгледаме методот на варијации на константи за нехомогената линеарна диференцијална равенка од втор ред,

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (1),$$

Нека:

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

е општо решение на соодветната хомогена линеарна диференцијална равенка:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (2).$$

Методот на варијации на константи се состои во определување функции:

$$C_1 = C_1(x) \text{ и } C_2 = C_2(x),$$

такви што:

$$y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

би бил партикуларен интеграл на нехомогената линеарна диференцијална равенка.

Со диференцирање на последната равенка добиваме:

$$y'_p = C'_1 y_1 + C_1 y'_1 + C'_2 y_2 + C_2 y'_2 \Leftrightarrow y'_p = \underbrace{C'_1 y_1 + C'_2 y_2}_0 + C_1 y'_1 + C_2 y'_2.$$

Функциите $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$ ги избираме така што го задоволуваат условот:

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0.$$

Тогаш $y'_p = C_1 y'_1 + C_2 y'_2$, па за нејзиниот извод добиваме:

$$y''_p = C'_1 y'_1 + C_1 y''_1 + C'_2 y'_2 + C_2 y''_2 \Leftrightarrow y''_p = C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C_1 y''_1 + C_2 y''_2.$$

Со замена на y_p , y'_p и y''_p во диференцијалната равенка (1) добиваме:

$$\begin{aligned} C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + a_1 (C_1 y'_1 + C_2 y'_2) + a_2 (C_1 y_1 + C_2 y_2) &= f \Leftrightarrow \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C_1 \left(\underbrace{y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1}_0 \right) + C_2 \left(\underbrace{y''_2 + a_1 y'_2 + a_2 y_2}_0 \right) &= f \Leftrightarrow \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 &= f, \end{aligned}$$

каде што: $y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1 = 0$ и $y''_2 + a_1 y'_2 + a_2 y_2 = 0$ бидејќи y_1 и y_2 се решенија на хомогената линеарна диференцијална равенка (2).

На овој начин го добиваме системот:

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x)' \end{cases}$$

кој има единствено решение по C'_1 и C'_2 бидејќи детерминантата на системот:

$$D = W[y_1, y_2] \neq 0.$$

Оттука:

$$C_1(x) = \int C'_1(x) dx \text{ и } C_2(x) = \int C'_2(x) dx. \blacksquare$$

Забелешка. За да го најдеме општото решение доволно ни е едно партикуларно решение и затоа ја фиксираме константата C_i , $i = 1, 2$; најчесто $C_i = 0$ во интегралите:

$$\int C'_i(x) dx = \bar{C}_i(x) + C_i, \quad \bar{C}'_i(x) = C'_i(x); \quad i = 1, 2.$$

Тогаш општото решение е: $y = y_h + y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \bar{C}_1 y_1 + \bar{C}_2 y_2$.

• Аналогно се покажува точноста на методот на варијации на константи за нехомогени линеарни диференцијална равенка од ред n . Затоа важи следнава теорема:

Теорема 5.2.1. Нека $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ е општо решение на хомогената равенка:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0.$$

Ако место константите $C_1, C_2, \dots, C_n$, се стават функциите:

$$C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x), \dots, C_n = C_n(x),$$

што ги задоволуваат условите:

$$\left\{ \begin{array}{l} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0 \\ \dots \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x) \end{array} \right.,$$

тогаш:

$$C_1(x) = \int C'_1(x) dx, \quad C_2(x) = \int C'_2(x) dx, \quad \dots, \quad C_n(x) = \int C'_n(x) dx$$

и партикуларното решение на нехомогената равенка:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \text{ е:}$$

$$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n.$$

додека општото: $y = y_h + y_p$.

Општото решение на нехомогената равенка, всушност, е:

$$y = \sum_{i=1}^n (\bar{C}_i(x) + C_i) y_i,$$

каде што:

$$\bar{C}'_i(x) = C'_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Задача 5.2.2. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Прво ја решаваме соодветната хомогена равенка.

$$r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -1 \Leftrightarrow r_1 = \pm i.$$

Следува:

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x \quad \text{од каде што: } y_1' = -\sin x, \quad y_2' = \cos x.$$

Притоа:

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Определуваме партикуларен интеграл на равенката:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}.$$

Системот го решаваме со детерминанти.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x \quad \text{и} \quad \Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\text{од каде што: } C_1' = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -\operatorname{tg} x, \quad C_2' = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = 1.$$

Ги определуваме C_1 и C_2 :

$$C_1 = \int C_1'(x) dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left(\begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{matrix} \right) = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\cos x|$$

и

$$C_2 = \int C_2'(x) dx = \int dx = x.$$

$$\text{Следува дека: } y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 = \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x.$$

Значи, општото решение е:

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln |\cos x| + x \sin x.$$

5.2.3. МЕТОД НА НЕОПРЕДЕЛЕНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Методот на неопределени коефициенти се користи за определување **партикуларен** интеграл на нехомогени линеарни диференцијални равенки со константни коефициенти,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$$

ВО КОИШТО:

$$f(x) = P_{n'}(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{n''}(x)e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

каде што $P_{n'}(x)$ и $Q_{n''}(x)$ се полиноми, соодветно од ред n' и n'' , и α и β се константи.

Нека $r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0$ е карактеристичната равенка на соодветната хомогена линеарна диференцијална равенка.

1) Нека $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, каде што $P_n(x)$ е полином од ред n , и α е константа.

-Ако α не е корен на карактеристичната равенка, тогаш партикуларниот интеграл е:

$$y_p = \bar{P}_n(x)e^{\alpha x},$$

каде што $\bar{P}_n(x)$ е произволен полином од ред n , чии коефициенти треба да се одредат.

-Ако α е k -кратен корен на карактеристичната равенка, тогаш партикуларниот интеграл е:

$$y_p = x^k \bar{P}_n(x)e^{\alpha x},$$

каде што $\bar{P}_n(x)$ е произволен полином од ред n .

2) Нека: $f(x) = P_{n'}(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{n''}(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$, каде што $P_{n'}(x)$ и $Q_{n''}(x)$ се полиноми, соодветно од ред n' и n'' , и α и β се константи.

-Ако $\alpha \pm i\beta$ не е корен на карактеристичната равенка, тогаш партикуларниот интеграл е:

$$y_p = e^{\alpha x} (\overline{P}_n(x) \cos \beta x + \overline{Q}_n(x) \sin \beta x), \quad n = \max\{n', n''\};$$

каде што $\overline{P}_n(x)$ и $\overline{Q}_n(x)$ се произволни полиноми од ред n .

-Ако $\alpha \pm i\beta$ е k -кратен корен на карактеристичната равенка, тогаш партикуларниот интеграл е:

$$y_p = x^k e^{\alpha x} (\overline{P}_n(x) \cos \beta x + \overline{Q}_n(x) \sin \beta x), \quad n = \max\{n', n''\},$$

каде што $\overline{P}_n(x)$ и $\overline{Q}_n(x)$ се произволни полиноми од ред n .

Задача 5.2.3 (1.1). Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' - 3y' + 2y = x^2.$$

Решение. Решенијата на карактеристичната равенка се:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r - 2)(r - 1) = 0 \Leftrightarrow r = 1, \quad r = 2.$$

Соодветните партикуларни интеграл се e^x, e^{2x} .

Бидејќи $\alpha = 0$ не е корен на карактеристичната равенка, произволниот полином од втор ред е:

$$y = Ax^2 + Bx + C, \quad \text{од каде што: } y' = 2Ax + B \text{ и } y'' = 2A.$$

Заменуваме во равенката $y'' - 3y' + 2y = x^2$,

$$\begin{aligned} 2A \underline{\underline{Ax^2}} - 3B \underline{\underline{Ax}} + 2C &= x^2 \Leftrightarrow \\ 2A &= 1, \quad -6A + 2B = 0, \quad 2A - 3B + 2C = 0 \Leftrightarrow \\ A &= \frac{1}{2}, \quad B = 3A = \frac{3}{2}, \quad 1 - \frac{9}{2} + 2C = 0 \text{ т.е. } C = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Оттука, општото решение е:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{7}{4}.$$

6. ДВОЕН ИНТЕГРАЛ

6.1. ДЕФИНИЦИЈА НА ДВОЕН ИНТЕГРАЛ

Кривата $C: x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$ е **мазна** на $[t_1, t_2]$, ако функциите $x = x(t)$ и $y = y(t)$ заедно со своите изводи се непрекинати на $[t_1, t_2]$ и $\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \neq 0$ за секое $t \in [t_1, t_2]$. Кривата C е **по делови мазна** ако може да се претстави како конечна унија од мазни криви.

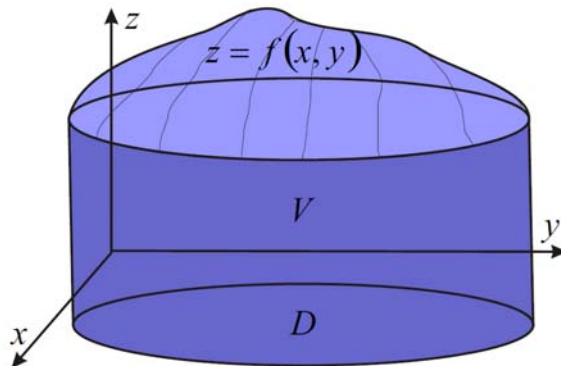
Двојниот интеграл ќе го дефинираме аналогно како што дефиниравме определен интеграл.

Нека $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$; е ненегативна и непрекината функција дефинирана на затворена и ограничена област D , чиј раб (∂D) е по делови мазна крива (цртеж 6.1.2).

Геометриското тело:

$$\{(x, y, z) | (x, y) \in D, z = tf(x, y), t \in [0, 1]\}$$

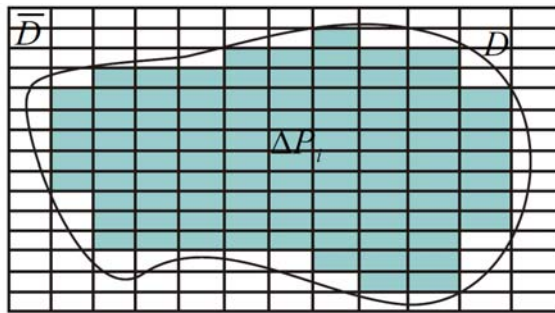
се нарекува **цилиндронд (на f)** (цртеж 6.1.1). Тоа е цилиндрично тело ограничено со областа D , графикот на f и со цилиндричната површина која е паралелна на z -оската.



Цртеж 6.1.1. Цилиндронд.

Ќе опишеме начин како да го пресметаме волументот на цилиндрондот. Бидејќи областа D е ограничена, следува дека

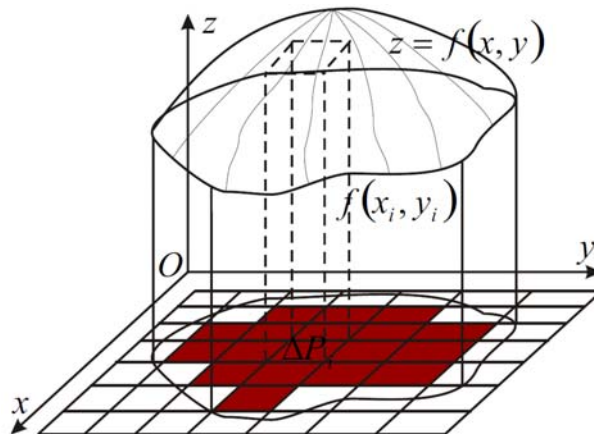
постои правоаголник $\bar{D} = [a, b] \times [c, d]$ што ја содржи D . Со помош на прави паралелни со x и y -оските, правоаголникот $\bar{D}$ се дели на правоаголници што се сместени целосно во D , делумно во D , или немаат пресек со D . Се подразбираат правоаголниците што не содржат помали правоаголници и попарно немаат заеднички внатрешни точки. Правоаголниците $D_1, D_2, \dots, D_n$ со плоштини $\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_n$, соодветно, што се сместени целосно во D (цр. 6.1.2) формираат внатрешна **поделба** $\mathcal{P}$ на D . Под поделба, ако поинаку не е нагласено, ќе ја подразбираме внатрешната поделба.



Цртеж 6.1.2. Поделба на област D .

Норма на поделбата $\mathcal{P}$, ознака $\|\mathcal{P}\|$ е должината на најголемата дијагонала на правоаголниците D_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Значи:

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{i=1,2,\dots,n} \text{diam} D_i.$$



Цртеж 6.1.3. Дефиниција на двоен интеграл

Да забележиме дека кога $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$, следува дека $n \rightarrow \infty$ (1).

Потоа избираме точки $(x_i, y_i) \in D_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Бројот:

$$f(x_i, y_i) \Delta P_i,$$

го дава волуменот на квадарот со основа P_i со плоштина ΔP_i и висина $f(x_i, y_i)$. Збирот од сите квадари:

$$f(x_1, y_1) \Delta P_1 + f(x_2, y_2) \Delta P_2 + \dots + f(x_n, y_n) \Delta P_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta P_i,$$

го дава волуменот на рабестото тело (цртеж 6.1.3) што го апроксимира волуменот на цилиндرويدот на f и се нарекува **Риманова** или **интегрална сума** на функцијата f , поделбата $\mathcal{P}$ и множеството точки (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Намерата волуменот на цилиндرويدот да се определи како граница на волумените на рабестите тела што го апроксимираат, доведува до поимот двоен интеграл даден во следнава дефиниција.

Се покажува дека кога функцијата f е непрекината над затворена и ограничена област D чиј раб е по делови мазна крива, тогаш постои секогаш иста гранична вредност:

$$I = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta P_i$$

за секоја поделба $\mathcal{P}$ на D и секој избор на точки $(x_i, y_i) \in D_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n = n(\mathcal{P})$.

Дефиниција 6.1.1. (Дефиниција на двоен интеграл).

Нека функцијата $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$; е дефинирана на затворена и ограничена област D . Ако за секоја поделба $\mathcal{P}$ на D и секој избор на точки $(x_i, y_i) \in D_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n = n(\mathcal{P})$; секогаш постои иста гранична вредност:

$$I = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta P_i$$

тогаш бројот I се нарекува **двоен интеграл** на f над D и се означува со:

$$\iint_D f(x, y) dP \text{ или } \iint_D f(x, y) dx dy. \blacksquare$$

Функцијата f во двојниот интеграл се нарекува интеграбилна на областа D . Бидејќи $\Delta P_i = \Delta x_i \Delta y_i$ (2) и Δx_i и Δy_i се должините на страните на правоаголникот со плошина ΔP_i , може да запишеме $dP = dx dy$, што ги објаснува двете варијанти на ознаката. Заради (1) и (2) може да се сретнат и записите:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \text{diam} D_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta P_i \text{ и} \\ \iint_D f(x, y) dx dy &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \text{diam} D_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i. \end{aligned}$$

Границата $I = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta P_i$ значи дека за секое $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$, такво што за секоја поделба $\mathcal{P}$ со својство $\|\mathcal{P}\| < \delta$ и секој избор на точките $(x_i, y_i) \in D_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; каде што D_i , $i = 1, 2, \dots, n$; се правоаголниците што се содржат во D , важи:

$$\left| \iint_D f(x, y) dP - \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta P_i \right| < \varepsilon.$$

Во дефиницијата за двоен интеграл, функцијата не мора да биде ненегативна. Тогаш интегралната сума не претставува апроксимација на волуменот на цилиндриодот. Функцијата не мора да биде ниту непрекината, но за да биде интеграбилна мора да задоволува одредени својства, на пример да биде ограничена.

Коментар*. Двојниот интеграл може да се дефинира и со помош на сумите на Дарбу кои ги претставуваат волумените на рабестите тела што се содржат и што го содржат цилиндриодот.

Нека f е непрекината ненегативна функција дефинирана на затворена и ограничена област D . Со прави паралелни на координатните оски го делиме правоаголникот $\bar{D}$ кој го содржи D на множество $\mathcal{P}$ од подправоаголници D_i , $i = 1, 2, \dots, p$ со плоштини ΔP_i , $i = 1, 2, \dots, p$. Множество $\mathcal{P}$ е поделба на D' , каде D' е областа

што се состои од правоаголниците D_i , $i = 1, 2, \dots, k$ што се содржат целосно во D , и D_i , $i = k+1, k+2, \dots, n$ делумно. Бидејќи f непрекината функција на секој правоаголник кој е затворена и ограничена област следува дека f достигнува максимум и минимум на правоаголникот. Нека: m_i и M_i , $i = 1, 2, \dots, n$; се минимумот и максимумот на f на D_i . Волуменот на рабестото тело што е унија од квадрати со основи ΔP_i и висини m_i , $i = 1, 2, \dots, k$; е:

$$s(\mathcal{P}) = m_1 \Delta P_1 + m_2 \Delta P_2 + \dots + m_k \Delta P_k = \sum_{i=1}^k m_i \Delta P_i,$$

додека волуменот на телото што е унија од квадрати со основи ΔP_i и висини M_i , $i = 1, 2, \dots, n$ е:

$$S(\mathcal{P}) = M_1 \Delta P_1 + M_2 \Delta P_2 + \dots + M_n \Delta P_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta P_i.$$

Сумата $s(\mathcal{P})$ се нарекува **долна сума на Дарбу за f на $\mathcal{P}$** , додека $S(\mathcal{P})$, **горна сума на Дарбу за f на $\mathcal{P}$** .

Бидејќи првото рабесто тело се содржи во цилиндриодот, а второто го содржи цилиндриодот со волумен V , важи:

$$s(\mathcal{P}) \leq V \leq S(\mathcal{P}).$$

Ако постои единствен број V што го исполнува горното равенство за секоја поделба $\mathcal{P}$, тогаш тој број е волуменот на цилиндриодот.

Дефиницијата на долна и горна сума може да се прошири на произволна ограничена функција f , така што m_i и M_i , ќе претставуваат соодветно инфимум и супремум на f на D_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Дефиниција 6.1.2. Нека $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ е ограничена функција на затворена и ограничена област D . Ако постои единствен број I таков што за секоја поделба $\mathcal{P}$ на секој правоаголник $\overline{D}$ што го содржи D да важи:

$$s(\mathcal{P}) \leq I \leq S(\mathcal{P}),$$

тогаш функцијата f се нарекува интегралбилна на D , додека бројот I , се нарекува **двоен интеграл** на функцијата f над областа D и се означува со: $\iint_D f(x, y) dx dy$. ■

Кога постои двојниот интеграл дефинициите 6.1.1. и 6.1.2. се совпаѓаат.

Условот областа D да е затворена и ограничена и ∂D да е по делови мазна крива, овозможува на ист начин со мрежи од правоаголници што се во областа и што ја содржат областа да се формираат низи што тежат кон ист број, плошината на D .

6.2*. НЕПРАВИ ДВОЈНИ И ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛИ

Дијаметар на множеството D , ознака $diam D$, е супремумот од должините на сите отсечки чии крајни точки се елементи од D .

Областа $D \subseteq \mathbb{R}^2$ е **неограничена**, ако $diam D = +\infty$.

Дефиниција 6.2.1. Нека D е неограничена област. Нека функцијата $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ е интегралбилна на секоја конечна подобласт од D . Ако постои единствен број:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

за секоја низа (D_n) од конечни подобласти D_n на D , такви што за секоја точка $(x, y) \in D$ да следува $(x, y) \in D_{n_0}$ за некоја подобласт D_{n_0} на D , тогаш бројот I се нарекува **неправ интеграл** на функцијата f на областа D и се означува со: $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Функцијата f се нарекува интегралбилна на D .

Дефиниција 6.2.2. Нека D е ограничена област. Нека функцијата $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ е интегралбилна на $D \setminus \{(x_0, y_0)\}$.

Ако постои единствен број:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

за секоја низа (D_n) од конечни подобласти D_n на $D \setminus \{(x_0, y_0)\}$, такви што за секоја точка $(x, y) \in D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ да следува $(x, y) \in D_{n_0}$ за некоја подобласт D_{n_0} , тогаш бројот I се нарекува **неправ интеграл** на функцијата f на областа D и се означува со: $\iint_D f(x, y) dx dy$. Функцијата f се нарекува интеграбилна на D .

Ако постои неправиот интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ и е конечен број, тогаш велиме дека неправиот интеграл **конвергира**. Во спротивно велиме дека неправиот интеграл **дивергира**.

6.3. СВОЈСТВА НА ДВОЕН ИНТЕГРАЛ

За да оперираме со двојните интеграли потребно е да ги определиме неговите својства. Двојниот интеграл поседува аналогни својства на единечниот.

Својства на двоен интеграл. Нека функциите $f = f(x, y)$ и $g = g(x, y)$ се непрекинати на затворена и ограничена област D . Тогаш важат следниве тврдења:

1. $\iint_D cf(x, y) dx dy = c \iint_D f(x, y) dx dy, \quad c = const;$
2. $\iint_D (f(x, y) + g(x, y)) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy;$
3. Ако $D = D_1 \cup D_2$ и $D_1 \cap D_2$ е крива, тогаш:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy;$$

4. Ако $f(x, y) \geq 0$ за сите $(x, y) \in D$, тогаш:

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0;$$

5. Ако $f(x, y) \geq g(x, y)$ за сите $(x, y) \in D$, тогаш:

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy ;$$

$$6. \iint_D |f(x, y)| dx dy \geq \left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| ;$$

7. Постои точка $(\xi, \eta) \in D$ таква што:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) P(D),$$

каде што $P(D)$ е плоштината на областа D . Последново својство се нарекува **теорема за средна вредност за двоен интеграл**.

Притоа, во наведените својства претпоставено е постоењето на двојните интеграли на D , D_1 и D_2 . ■

Точноста на тврдењата следува од дефиницијата на троен интеграл и својствата на граници и суми.

6.4. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ДВОЕН ИНТЕГРАЛ

Двојниот интеграл тешко се пресметува со помош на Римановата сума или со долната и горната сума на Дарбу. Затоа е потребно да се најде друг начин на негово пресметување. Ќе презентираме начин на пресметување на двојниот интеграл со сведување на два последователни единечни интеграла.

6.4.1. Итерирани интеграли. Интегралот $\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$ се

нарекува итериран (последователен) интеграл бидејќи неговата вредност се добива со последователно пресметување на два единечни (Риманови) интеграла. Прво се пресметува внатрешниот, а потоа надворешниот интеграл. Овој интеграл го означуваме со:

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy . \text{ Значи: } \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx .$$

$$\text{Аналогно, } \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy .$$

6.4.2. Правилни области. При пресметувањето на двојниот интеграл ќе се ограничине на два типа области во xOy -рамнината:

- Тип 1. Област D ограничена со кривите:

$$x = a, x = b, y_1 = y_1(x) \text{ и } y_2 = y_2(x) \quad (a \leq b, y_1 \leq y_2);$$

каде што y_1 и y_2 се непрекинати функции на $[a, b]$ (цртеж 6.4.1). Областа D се нарекува **правилна во правец на y -оската** (во однос на x -оската). Областа може да се запише и во вид:

$$D = \{(x, y) | x \in [a, b], y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}.$$

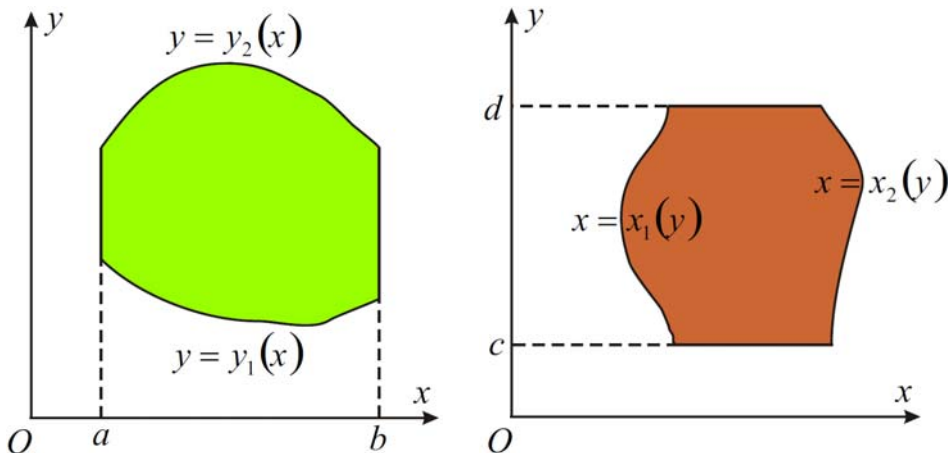
- Тип 2. Област D ограничена со кривите:

$$y = c, y = d, x = x_1(y) \text{ и } x = x_2(y) \quad (c \leq d, x_1 \leq x_2).$$

каде што x_1 и x_2 се непрекинати функции на $[c, d]$ (цртеж 6.4.2). Областа D се нарекува **правилна во правец на x -оската** (во однос на y -оската). Областа може да се запише и во видот:

$$D = \{(x, y) | y \in [c, d], x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}.$$

Областа D е **правилна** (во xOy -рамнината) ако е правилна во однос на x и y -оските.



Цртеж 6.4.1 (лево). Правилна област во правец на y -оската.

Цртеж 6.4.2 (десно). Правилна област во правец на x -оската.

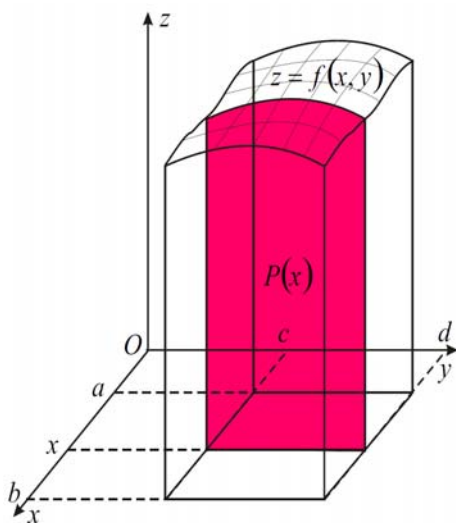
6.4.3. Пресметување двоен интеграл. Нека f е непрекината функција.

• Нека D е област од тип 1. Од Математика 1, плоштината на вертикалниот пресек во произволна точка $x \in [a, b]$, е

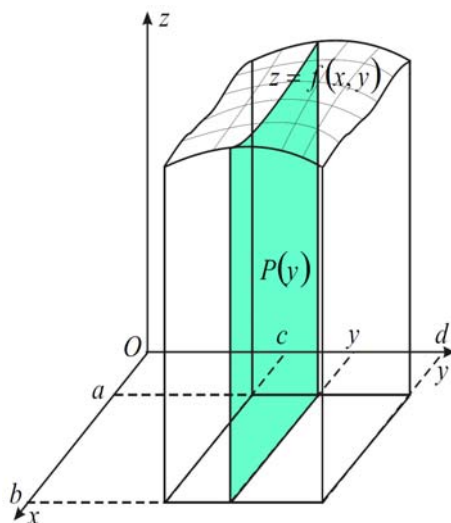
$$P(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad (\text{цртеж 6.4.3.}). \text{ Бидејќи } f \text{ е непрекината}$$

функција, важи: $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b P(x) dx$ (теорема од математичка анализа). Значи:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b P(x) dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$



Цртеж 6.4.3.



Цртеж 6.4.4.

• Нека D е област од тип 2. Плоштината на хоризонталниот пресек на цилиндриодот во произволна точка $y \in [c, d]$ е

$$P(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \quad (\text{цртеж 6.4.4.}). \text{ Бидејќи } f \text{ е непрекината,}$$

важи:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d P(y) dy. \text{ Значи:}$$

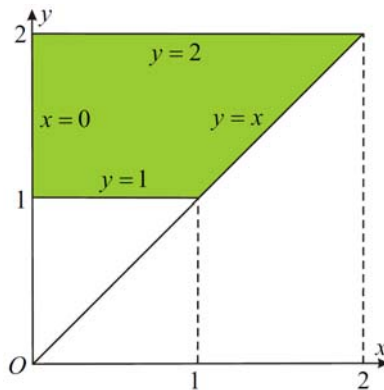
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d P(y) dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

Задача 6.4.4. Да се пресмета интегралот:

$$I = \iint_D \sqrt{y^2 - x^2} dx dy, \quad D: x = 0, x = y, y = 1, y = 2.$$

Решение. Имаме: $1 \leq y \leq 2$ и $0 \leq x \leq y$; од каде што:

$$I = \int_1^2 dy \underbrace{\int_0^y \sqrt{y^2 - x^2} dx}_{I_1} \text{ и}$$



Цртеж 6.4.4.

$$I_1 = \left(\begin{array}{ll} x = y \sin t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = y \cos t dt & x = y \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{y^2 - y^2 \sin^2 t} y \cos t dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{y^2 (1 - \sin^2 t)} y \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |y| |\cos t| y \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \cos^2 t dt =$$

$$y^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{y^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{y^2}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{y^2 \pi}{4}.$$

Следува:

$$I = \int_1^2 \frac{y^2 \pi}{4} dy = \frac{\pi}{4} \frac{y^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{12} (8 - 1) = \frac{7\pi}{12}.$$

6.4.5 Промена на редоследот на интеграција. Понекогаш е речиси невозможно да се пресмета интегралот $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ (1), додека постои и е лесно да се пресмета

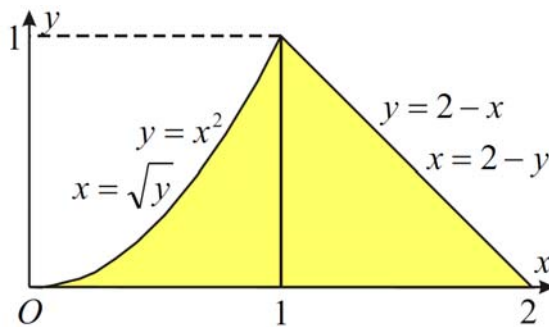
интегралот $\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$ (2), и обратно. Ако постои интегралот:

$$\iint_D f(x, y) dx dy, \text{ тогаш заради } \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx,$$

интегралот (1) ќе го пресметаме така што ќе го пресметаме интегралот (2), и обратно. Постапката се нарекува **промена на редоследот на интеграција** во двојниот интеграл.

Задача 6.4.6. Да се промени редоследот на интеграција на интегралот: $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx$.

Решение. Пресекот на $\sqrt{y} = x \Leftrightarrow y = x^2, x > 0$ и $x = 2 - y$ е во: $x = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.



Цртеж 6.4.6.

Значи, за $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x^2$ и за $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2 - x$. Следува:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$$

6.5. ДВОЕН ИНТЕГРАЛ ВО ПОЛАРНИ КООРДИНАТИ

Одредени рамнински криви како кружница и кардиоида, полесно може да се опишат во поларни, отколку во Декартови координати. Затоа логично е да очекуваме полесно да се пресмета двојниот интеграл користејќи ги поларните координати на области ограничени со вакви криви.

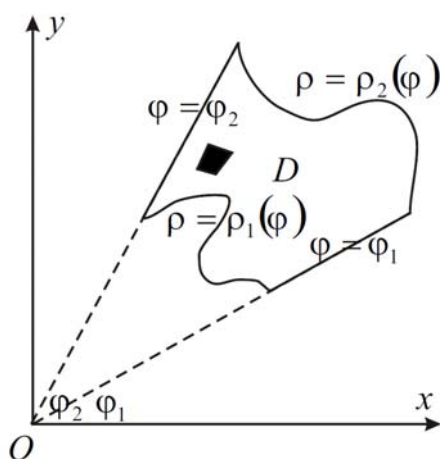
Нека D е областа ограничена со кривите (цртеж 6.5.1):

$$\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2 \quad (0 \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi), \quad \rho = \rho_1(\varphi) \text{ и } \rho = \rho_2(\varphi);$$

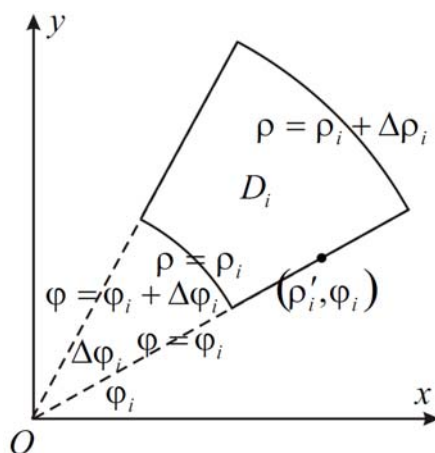
каде што ρ_1 и ρ_2 се непрекинати функции на $[\varphi_1, \varphi_2]$.

Нека f е непрекината функција на D . Секоја непрекината функција е интегрибилна, т.е. постои: $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Да забележиме дека областа D не мора да се дели само на правоаголници.



Цртеж 6.5.1.



Цртеж 6.5.2.

• Со помош на централни кружници и прави што минуваат низ координатниот почеток, ја делиме областа D со плошина ΔP (цртеж 6.5.1) на подобласти, така што подобластите:

$$D_i \text{ со плоштини } \Delta P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

целосно лежат во D . Нека подобласта D_i е ограничена со:

$\varphi = \varphi_i$, $\varphi = \varphi_i + \Delta\varphi_i$, $\rho = \rho_i$ и $\rho = \rho_i + \Delta\rho_i$ (цртеж 6.5.2).

Имајќи предвид дека плоштина на кружен исечок се пресметува со формулата $P = \frac{1}{2}r^2\varphi$, плоштината на D_i која е разлика на два кружни исечока е:

$$\Delta P_i = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \Delta\varphi_i - \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}(\rho_i^2 + 2\rho_i\Delta\rho_i + \Delta\rho_i^2 - \rho_i^2) \Delta\varphi_i =$$

$$\left(\rho_i + \frac{1}{2}\Delta\rho_i\right) \Delta\varphi_i \Delta\rho_i = \rho'_i \Delta\varphi_i \Delta\rho_i,$$

каде што ρ'_i е аритметичка средина на ρ_i и $\rho_i + \Delta\rho_i$.

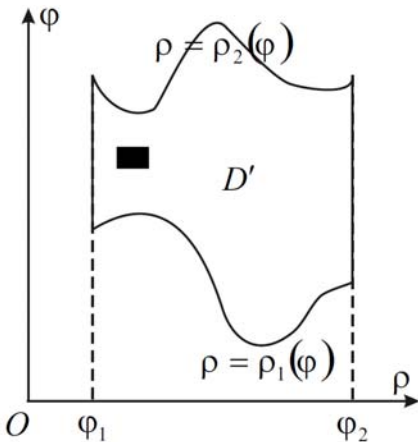
Ако $x_i = \rho'_i \cos \varphi_i$ и $y_i = \rho'_i \sin \varphi_i$, тогаш:

$$f(x_i, y_i) = f(\rho'_i \cos \varphi_i, \rho'_i \sin \varphi_i).$$

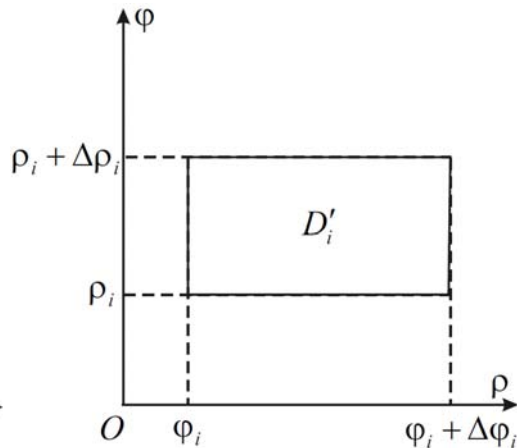
Затоа сумата:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta P_i = \sum_{i=1}^n f(\rho'_i \cos \varphi_i, \rho'_i \sin \varphi_i) \rho'_i \Delta\varphi_i \Delta\rho_i,$$

е интегрална сума за: $\iint_D f(x, y) dx dy$ (1).



Цртеж 6.5.3.



Цртеж 6.5.4.

• Нека на областа D ѝ придружине правилна област D' (цртеж 6.5.3) во $\varphi O \rho$ рамнината, ограничена со графиците на функциите:

$$\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2, \rho = \rho_1(\varphi) \text{ и } \rho = \rho_2(\varphi);$$

и на секоја подобласт D_i ѝ придружime правоаголник D'_i (цртеж 6.5.4) ограничен со граfiците на функциите:

$$\varphi = \varphi_i, \varphi = \varphi_i + \Delta\varphi_i, \rho = \rho_i \text{ и } \rho = \rho_i + \Delta\rho_i,$$

тогаш, заради $\Delta P_i = \Delta\varphi_i \Delta\rho_i$, сумата:

$$\sum_{i=1}^n f(\rho'_i \cos \varphi_i, \rho'_i \sin \varphi_i) \rho'_i \Delta\varphi_i \Delta\rho_i$$

е интегрална сума и за:

$$\iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho dP = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho \quad (2).$$

Значи, во (2) φ и ρ се Декартови координати во $\varphi O \rho$ -рамнината и бидејќи областа е правилна во правец на y -оската двојниот интеграл може да се претстави преку два итерирани интеграла.

Од (1) и (2) следува дека двата интеграла имаат иста интегрална сума, па тие се еднакви, т.е.:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Притоа, врската меѓу диференцијалите е: $dx dy = \rho d\rho d\varphi$.

Задача 6.5.1. Да се пресмета интегралот:

$$I = \iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9}, \quad x^2 + y^2 = \pi^2.$$

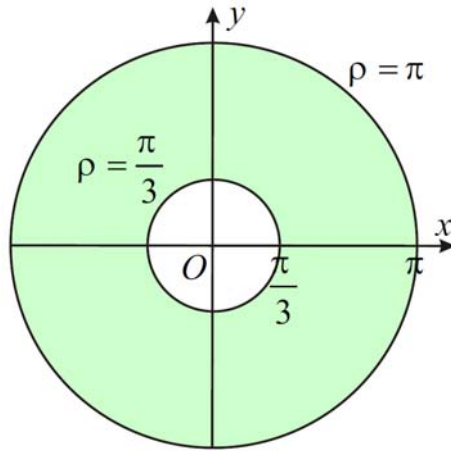
Решение. Воведуваме поларни координати:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi;$$

од каде што:

$$dx dy = \rho d\rho d\varphi \text{ и } x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Ја скицираме областа. Границите се: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $\frac{\pi}{3} \leq \rho \leq \pi$.



Цртеж 6.5.5.

Следува:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{\sin \rho}{\rho} \rho d\rho = 2\pi (-\cos \rho) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} =$$

$$-2\pi \left(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{3} \right) = -2\pi \left(-1 - \frac{1}{2} \right) = 3\pi .$$

Обопштени поларни (елиптични) координати и пресметување двоен интеграл со премин во обопштени поларни координати. Аналогно се дефинираат обопштени поларни (елиптични) координати:

$$x = a\rho \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \varphi \quad (a, b \neq 0).$$

$$\text{Важи: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2 \text{ и } \operatorname{tg} \varphi = \frac{ay}{bx}.$$

Ако ставиме $x = ax', \quad y = by', \quad z = z'$; тогаш:

$$x' = \rho \cos \varphi, \quad y' = \rho \sin \varphi$$

се поларни координати за кои важи претходното тврдење. Притоа: $dx = a dx', \quad dy = b dy'$. Важи:

$$\iint_{D'} f(x', y') dx' dy' = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$$

Следува:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = ab \iint_{D'} f(x', y') dx' dy' =$$

$$ab \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Затоа врската меѓу диференцијалите е:

$$dx dy = ab \rho d\rho d\varphi.$$

6.6. СМЕНА НА ПРОМЕНЛИВИ КАЈ ДВОЕН ИНТЕГРАЛ

Без доказ ќе дефинираме тврдење кое дава општа смена на променливи кај двоен интеграл, чии специјални случаи за поларни и обопштени поларни координати ги презентиравме во 6.5.

Нека:

$$u = u(x, y) \text{ и } v = v(x, y);$$

се функции дефинирани на затворена и ограничена област D . Нека множеството D^* се состои од точките:

$$(u(x, y), v(x, y)), (x, y, z) \in V.$$

По конструкција секој елемент на D^* е слика на елемент од D , т.е. пресликувањето $D \rightarrow D^*$, такво што $(x, y) \rightarrow (u, v)$ е сурјекција. Нека пресликувањето е и инјекција, т.е. различни елементи се пресликуваат во различни слики. Следува дека пресликувањето е бијекција и има инверзно пресликување $D^* \rightarrow D$, такво што: $(u, v) \rightarrow (x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

Теорема. 6.6.1. (Смена на променливи). Ако:

$$u = u(x, y) \text{ и } v = v(x, y);$$

имаат непрекинати парцијални изводи заклучно со втор ред на D , и

$$x = x(u, v), y = y(u, v)$$

ги имаат истите својства на D^* , тогаш:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv, \quad J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Функцијата J се нарекува Јакобијан за пресликувањето:

$$u = u(x, y) \text{ и } v = v(x, y).$$

Да покажеме дека формулите од 6.5. се специјален случај. Ако $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$; тогаш:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho.$$

па:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho dx dy = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \end{aligned}$$

Ако $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$; тогаш:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -a\rho \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b\rho \cos \varphi \end{vmatrix} = ab\rho \cos^2 \varphi + ab\rho \sin^2 \varphi = ab\rho.$$

па:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D^*} f(a\rho \cos \varphi, b\rho \sin \varphi) \rho dx dy = \\ &= ab \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \end{aligned}$$

6.7. ПРИМЕНА НА ДВОЕН ИНТЕГРАЛ

Двојните интеграли што ќе ги определиме во наредните поглавја се користат за дефинирање на волумени на тела, плоштини на рамнински ликови и плоштини на површини.

Други двојни интеграли дефинираат други својства, како што се маса на рамна плоча со променлива густина, координати на тежиште на рамна плоча, моменти на инерција на рамна плоча и.т.н., кои не се предвидени во наставната програма.

Во наредните пасуси од ова поглавје подинтегралната функција е непрекината и дефинирана на затворена и ограничена област D чиј раб е по делови мазна крива.

6.7.1. ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКИ ЛИК

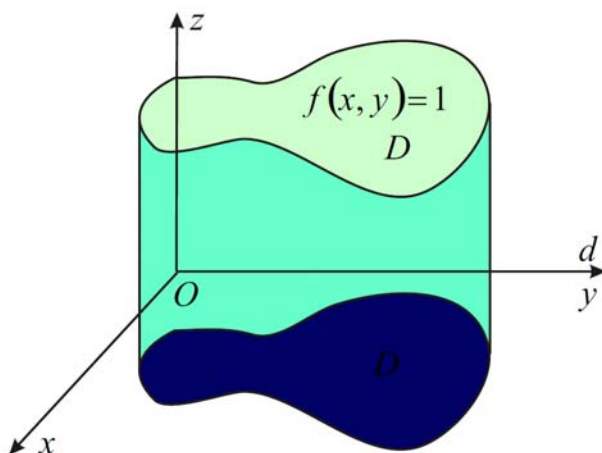
Теорема 6.7.1.1. (Плоштина на рамнински лик).

Плоштината на затворена и ограничена област D , чиј раб е по делови мазна крива, е:

$$P = \iint_D dx dy.$$

Доказ. Ја разгледуваме функцијата $f(x, y) = 1$ која е непрекината и ненегативна. Волуменот на цилиндроидот на f е:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D dx dy.$$



Цртеж 6.7.1.1. Плоштина на лик.

Од друга страна, волуменот е:

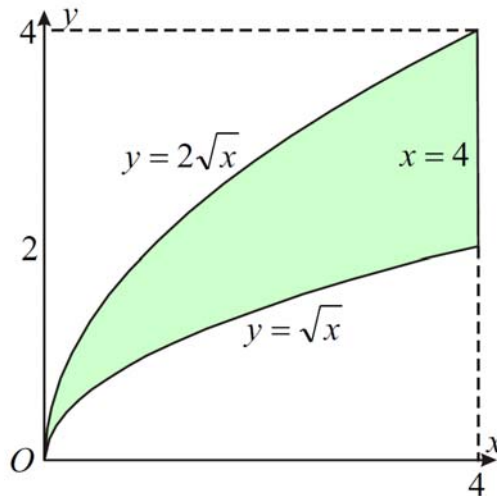
$$V = BH = P \cdot 1 = P,$$

каде што P е плоштината на областа D . Следува дека плоштината на D е:

$$P = \iint_D dx dy.$$

Задача 6.7.1.2. Да се пресмета плоштината на локот ограничен со кривите: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ и $x = 4$.

Решение. Прво ја скицираме областа.



Цртеж 6.7.1.2.

Следува:

$$\begin{aligned} P &= \iint_D dx dy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^4 dx y \Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} = \int_0^4 (2\sqrt{x} - \sqrt{x}) dx = \\ &= \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - 0 \right) = \frac{2}{3} 8 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

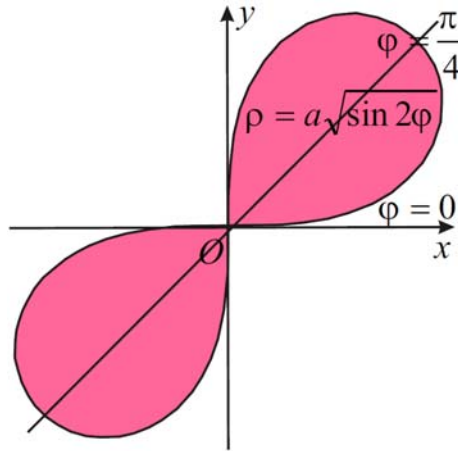
Задача 6.7.1.3. Да се пресмета плоштината на локот образуван со кривата $(x^2 + y^2)^2 = a^2 xy$.

Решение. За премин во поларни координати ги користиме равенствата:

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, од каде што $dxdy = \rho d\varphi d\rho$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Равенката на кривата во поларни координати е:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^2 &= a^2 xy \Leftrightarrow (\rho^2)^2 = a^2 \rho \cos \varphi \cdot \rho \sin \varphi \Leftrightarrow \\ \rho^2 &= a^2 \sin 2\varphi \Leftrightarrow \rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}.\end{aligned}$$



Цртеж 6.7.1.3.

Од скицата на ликот следува дека:

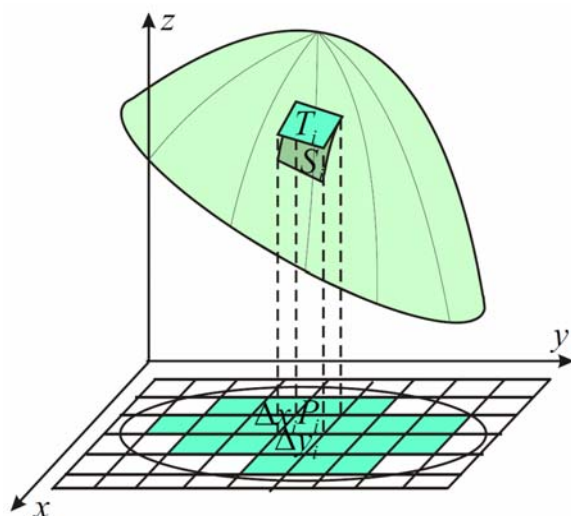
$$\begin{aligned}P &= 4 \iint_D dxdy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin 2\varphi d\varphi = 2a^2 \left. \frac{-\cos 2\varphi}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 \right) = a^2.\end{aligned}$$

6.7.2. ПЛОШТИНА НА ПОВРШИНА

Нека површината S е графикот на функцијата $z = f(x, y)$. Нека функцијата f е непрекината и има непрекинати парцијални изводи на D . Нека D е затворена и ограничена област чиј раб е по делови мазна крива. Нека $\bar{D}$ е правоаголник што го содржи D и $\mathcal{P}$ е поделба на $\bar{D}$ на подправоаголници

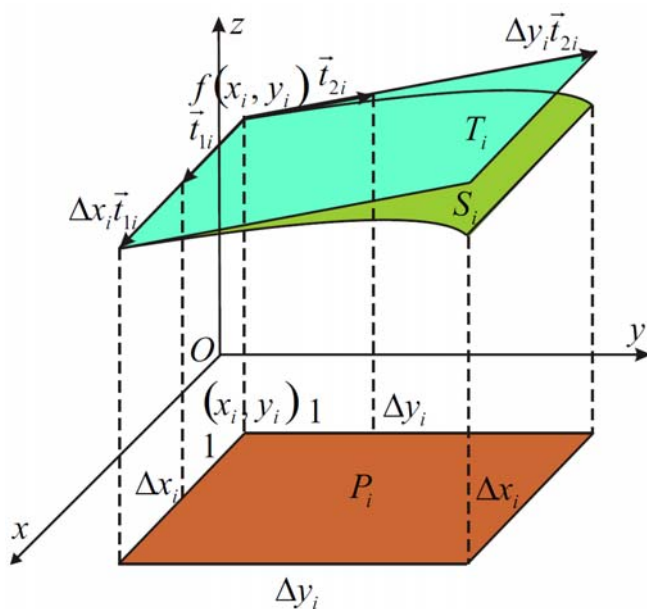
D_i со плоштини ΔP_i , $i = 1, 2, \dots, n$;

што целосно се содржат во D .



Цртеж 6.7.2.1. Плоштина на површина.

Нека (x_i, y_i) се темиња на D_i , со најмала вредност на координатите x_i и y_i .



Цртеж 6.7.2.2. Апроксимативен елемент на површина.

Цилиндричните површини паралелни на z -оската со директриси ∂D_i , отсекуваат од површината S елементи S_i со плоштини ΔS_i и од тангентните рамнини на површината S во точките $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ елементи T_i со плоштини ΔT_i , $i = 1, 2, \dots, n$; соодветно. Плоштините ΔS_i се апроксимираат со ΔT_i , т.е.

$$\Delta S_i \approx \Delta T_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ако Δx_i и Δy_i се должините на две непаралелни страни на D_i , тогаш $\Delta P_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Од делот за тангентна рамнина и нормала на површина знаеме дека векторите:

$$(1, 0, f'_x(x_i, y_i)) \text{ и } (0, 1, f'_y(x_i, y_i))$$

се паралелни со страните на D'_i , $i = 1, 2, \dots, n$; и нивните проекции на xOy рамнината рамнината се 1. Следува дека векторите:

$$\vec{t}_{1i} = (1, 0, f'_x(x_i, y_i)) \Delta x_i \text{ и } \vec{t}_{2i} = (0, 1, f'_y(x_i, y_i)) \Delta y_i$$

лежат на страните на правоаголникот T_i чијашто плоштина е:

$$\begin{aligned} \vec{t}_{1i} \times \vec{t}_{2i} &= \begin{vmatrix} 0 & f'_x(x_i, y_i) \\ 1 & f'_y(x_i, y_i) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f'_x(x_i, y_i) & 1 \\ f'_y(x_i, y_i) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Delta x_i \Delta y_i = \\ &= (-f'_x(x_i, y_i), -f'_y(x_i, y_i), 1) \Delta x_i \Delta y_i \end{aligned}$$

и

$$\Delta T_i = |\vec{t}_{1i} \times \vec{t}_{2i}| = \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)} \Delta x_i \Delta y_i.$$

Ако ги искористиме Монжовите ознаки:

$$p = f'_x(x, y) \text{ и } q = f'_y(x, y) \quad (p_i = f'_x(x_i, y_i) \text{ и } q_i = f'_y(x_i, y_i)),$$

тогаш:

$$\Delta T_i = \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \Delta x_i \Delta y_i,$$

Плоштината ΔS на површината S се апроксимира со сумата:

$$\Delta S \approx \sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n \Delta T_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \Delta x_i \Delta y_i,$$

која е интегрална сума за: $\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy$.

Последниов заклучок води до следнава дефиниција.

Дефиниција 6.7.2.1. Нека функцијата $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекината и има непрекинати парцијални изводи. Нека D е затворена и ограничена област чиј раб е по делови мазна крива. Ако S е графикот на функцијата f на D , тогаш плоштината P на површината S е:

$$P = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy.$$

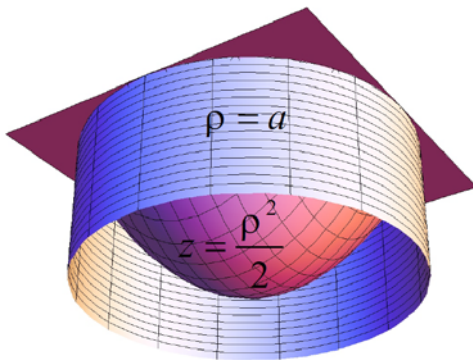
Задача 6.7.2.2. Да се пресмета плоштината на делот од параболоидот $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ отсечен од цилиндарот $x^2+y^2 = a^2$.

Решение. Забележуваме дека проекцијата на површината на xOy -рамнината е кружница и параболоидот го содржи членот x^2+y^2 . Затоа задачата полесно се решава со премин во поларни координати:

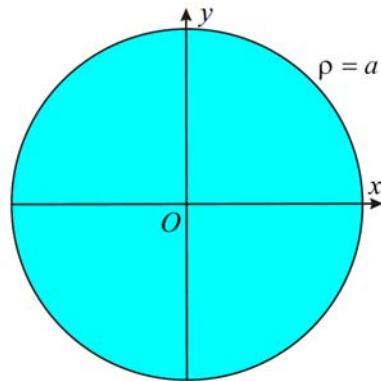
$x = \rho \cos \rho$, $y = \rho \sin \rho$ од каде што $dx dy = \rho d\rho d\varphi$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Ги пресметуваме изразите:

$$p = \frac{2x}{2} = x, \quad q = \frac{2y}{2} = y, \quad \sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+x^2+y^2} = \sqrt{1+\rho^2}.$$



Цртеж 6.7.2.2.1.



Цртеж 6.7.2.2.2.

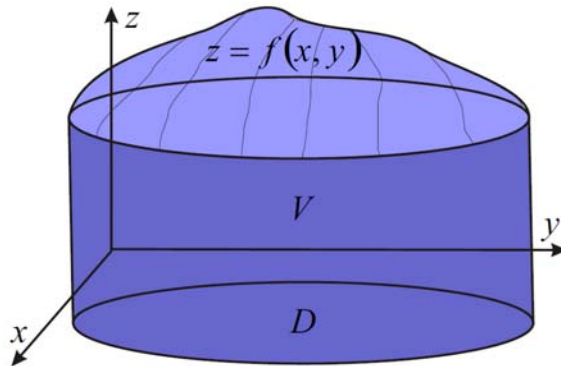
Границите се: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq a$. Затоа:

$$\begin{aligned}
 P &= \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{1+\rho^2} \rho d\rho = \\
 &= \left(\begin{array}{lll} \sqrt{1+\rho^2} = t & 2\rho d\rho = 2tdt & \rho=0 \Rightarrow t=1 \\ 1+\rho^2 = t^2 & \rho d\rho = tdt & \rho=a \Rightarrow t=\sqrt{1+a^2} \end{array} \right) = \\
 &= 2\pi \int_1^{\sqrt{1+a^2}} t \cdot t dt = 2\pi \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{1+a^2}} = \frac{2\pi}{3} \left(\sqrt{(1+a^2)^3} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

6.7.3. ВОЛУМЕН НА ТЕЛО

Теорема 6.7.3.1-2. Нека $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$; е непрекината функција дефинирана на затворена и ограничена област D чијшто раб е по делови мазна крива. Тогаш волуменот V на цилиндроидот на f е:

- 1) $V = \iint_D f(x, y) dx dy$ кога $f \geq 0$ на D .
- 2) $V = -\iint_D f(x, y) dx dy$ кога $f \leq 0$ на D .



Цртеж 6.7.3.1. Волумен на цилиндроид.

Доказ. При дефинирање на двојниот интеграл покажавме дека волуменот на цилиндроидот на ненегативната функција f е:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Ако $f \leq 0$, тогаш: $-f \geq 0$ и

$$V_{-f} = \iint_D (-f(x, y)) dx dy = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (-f(x_i, y_i)) \Delta P_i =$$

$$- \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta P_i = - \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Од друга страна, волумените на цилиндroidите на f и $-f$, кои се симетрични во однос на xOy -рамнината, се еднакви, т.е. $V_f = V_{-f}$.

Следува:

$$V_f = - \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Телото $V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, z_1 \leq z \leq z_2\}$, каде што:

$$z = z_1(x, y) \text{ и } z = z_2(x, y), \quad z_1 \leq z_2;$$

се непрекинати функции дефинирани на D која ги исполнува условите (1) се нарекува **цилиндroid на z_1 и z_2** . Телото V е ограничено со графичите на функциите z_1 и z_2 и цилиндричната површина паралелена на z -оската.

Теорема 6.7.3.3. Волуменот на цилиндroidот на z_1 и z_2 каде што $z_1 \leq z_2$ и z_1 и z_2 се непрекинати функции на затворена и ограничена област D , чијшто раб е по делови мазна крива, е:

$$V = \iint_D (z_2 - z_1) dx dy.$$

Доказ. Ако $z_2 \geq z_1 \geq 0$, тогаш волуменот на цилиндroidот на z_1 и z_2 е разлика од волумените на цилиндroidот на z_1 и цилиндroidот на z_2 , т.е.:

$$V = V_2 - V_1 = \iint_D z_2 dx dy - \iint_D z_1 dx dy = \iint_D (z_2 - z_1) dx dy.$$

Ако не важи $z_1 \geq 0$, тогаш бидејќи z_1 е непрекината функција на затворена и ограничена област, достигнува минимум $m < 0$.

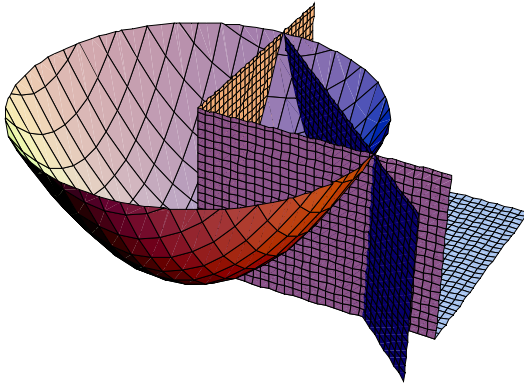
Волуменот на цилиндроидот на $z_1 - m \geq 0$ и $z_2 - m \geq z_1 - m \geq 0$ е еднаков со волуменот на цилиндроидот на z_1 и z_2 . Следува:

$$V = \iint_D (z_2 - m - (z_1 - m)) dx dy = \iint_D (z_2 - z_1) dx dy.$$

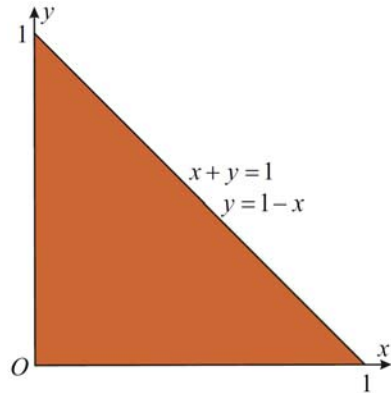
Задача 6.7.3.4. Да се пресмета волуменот на телото ограничено со површините:

$$z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad \text{и} \quad z = 0.$$

Решение. Го скицираме телото и проекцијата на телото на xOy -рамнината.



Цртеж 6.7.3.4.1.



Цртеж 6.7.3.4.2.

Границите се: $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1 - x$. Следува дека волуменот е:

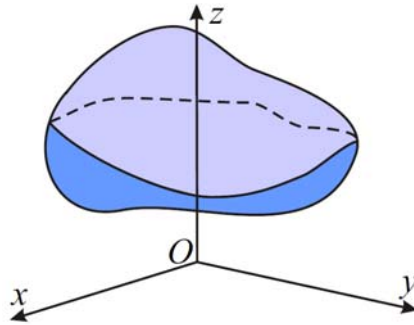
$$\begin{aligned} V &= \iint_D z dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy = \\ &= \int_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} = \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(1 - 3x + 3x^2 - x^3) \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{3} - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 \right) dx = \left(\frac{1}{3}x - \frac{x^2}{2} + 2\frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}\frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{-3+4}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

7. ТРОЕН ИНТЕГРАЛ

7.1. ДЕФИНИЦИЈА НА ТРОЕН ИНТЕГРАЛ

Тројниот интеграл ќе го дефинираме аналогно како што дефиниравме двоен и единечен интеграл.

Нека $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}^3$; е непрекината функција од три променливи дефинирана на затворена и ограничена област V чиј раб е по делови мазна затворена површина.



Слика 7.1.1.

Бидејќи телото V е ограничено, се содржи во квадар $\bar{V}$. Со рамнини паралелни на координатните рамнини го делиме квадарот $\bar{V}$ на множество подквадари (кои не содржат помали подквадари и попарно немаат заеднички внатрешни точки). Поделбата $\mathcal{P}$ ја сочинуваат сите подквадари

$$V_i \text{ со волумени } \Delta V_i, i = 1, 2, \dots, n;$$

кои се содржат целосно во V . $\|\mathcal{P}\| = \max_{i=1,2,\dots,n} \text{diam} V_i$ е должината на најголемата дијагонала на квадарите V_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Избираме точки $(x_i, y_i, z_i) \in V_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Сумата

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

е Риманова сума на функцијата f за поделбата $\mathcal{P}$ и изборот на точки (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Се покажува дека кога f е непрекината функција, секогаш постои иста гранична вредност: $I = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ за секоја поделба $\mathcal{P}$ на областа V и секој избор на точки $(x_i, y_i, z_i) \in V_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ова води до дефинирање на поимот троен интеграл.

Дефиниција 7.1.1. Нека $f: V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ е ограничена функција на затворена и ограничена област V чиј раб е по делови мазна затворена површина. Ако за секоја поделба $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ на областа V и секој избор на точки $(x_i, y_i, z_i) \in V_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; секогаш постои иста гранична вредност:

$$I = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i,$$

тогаш бројот I се нарекува **троен интеграл** на f над V и се означува со:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV \quad \text{или} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

Функцијата f се нарекува **интеграбилна** функција. ■

Заради $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$, каде што Δx_i , Δy_i и Δz_i се страните на квадарот, може да запишеме $dV = dx dy dz$. Оттука, потекнуваат двете варијанти на ознаката за троен интеграл.

Границата $I = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ значи дека за секое $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$, такво што за секоја поделба $\mathcal{P}$ со својство $\|\mathcal{P}\| < \delta$ и секој избор на точките $(x_i, y_i, z_i) \in V_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, каде што V_i , $i = 1, 2, \dots, n$; се квадарите што се содржат во V , важи:

$$\left| \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz - \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \right| < \varepsilon.$$

Коментар. Аналогно како кај двојниот, тројниот интеграл може да се дефинира со помош на сумите на Дарбу. Нека f е непрекината функција. Со рамнини паралелни на координатните

рамнини го делиме квадарот $\bar{V}$ што го содржи V на подквадари кои попарно немаат заеднички внатрешни точки и не содржат помали квадари. Нека квадарите:

$$V_1, V_2, \dots, V_k$$

се содржат целосно во V , додека:

$$V_{k+1}, V_{k+2}, \dots, V_n,$$

делумно. Бидејќи f е непрекината функција на затворена област D , следува дека f е ограничена. Нека m_i и M_i , $i=1,2,\dots,n$ се минимумот и максимумот на f на V_i и

$$s(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k m_i \Delta V_i \text{ и } S(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta V_i,$$

се долната и горната сума за f на $\mathcal{P}$. Се покажува дека кога f е непрекината функција, постои единствен број I , таков што $s(\mathcal{P}) \leq I \leq S(\mathcal{P})$ за секоја поделба $\mathcal{P}$ на секој квадар $\bar{V}$ што го содржи V .

Дефиницијата на долна и горна сума може да ја прошириме е за произволна ограничена функција f , така што m_i и M_i , $i=1,2,\dots,n$; соодветно ќе бидат инфимумот и супремумот на f на V_i . Последниве заклучоци водат до следнава дефиниција за троен интеграл.

Дефиниција 7.1.1. Нека $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}^3$; е ограничена функција на затворена и ограничена област V чиј раб е по делови мазна затворена површина.

Ако постои единствен број I , таков што за секоја поделба $\mathcal{P}$ на секој квадар $\bar{V}$ што го содржи V , важи:

$$s(\mathcal{P}) \leq I \leq S(\mathcal{P}),$$

тогаш функцијата f се нарекува интегрална на V , додека бројот I се нарекува **троен интеграл** на функцијата f над областа D и се означува со $\iiint_V f(x, y, z) dV$ или $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$. ■

7.2. СВОЈСТВА НА ТРОЕН ИНТЕГРАЛ

Тројниот интеграл поседува аналогни својства како двојниот.

Својства на двоен интеграл. Нека функциите $f = f(x, y, z)$ и $g = g(x, y, z)$ се непрекинати на затворена и ограничена просторна област V . Тогаш важат следниве тврдења:

$$1. \iiint_V cf(x, y, z) dx dy dz = c \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz, \quad c = \text{const};$$

$$2. \iiint_V (f(x, y, z) + g(x, y, z)) dx dy dz = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz;$$

3. Ако $V = V_1 \cup V_2$ и пресекот на V_1 и V_2 е по површина, тогаш:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dx dy dz;$$

4. Ако $f(x, y, z) \geq 0$ за сите $(x, y, z) \in V$, тогаш:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \geq 0;$$

5. Ако $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ за сите $(x, y, z) \in V$, тогаш:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \geq \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz;$$

$$6. \iiint_V |f(x, y, z)| dx dy dz \geq \left| \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \right|;$$

7. Постои точка $(x_0, y_0, z_0) \in V$, таква што:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = f(x_0, y_0, z_0) P(V),$$

каде што $P(V)$ е волуменот на областа V . Последново својство се нарекува **теорема за средна вредност за троен интеграл**.

Притоа, во наведените својства, претпоставено е постоењето на тројните интегралите на V , V_1 и V_2 . ■

Од (1) и (2) следува дека:

$$\iiint_V (cf(x, y, z) + dg(x, y, z)) dx dy dz = \\ c \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz + d \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz ,$$

$c, d = \text{const}$ (својство на линеарност).

Заради принципот на математичка индукција ќе важи тврдењето и кога подинтегралната функција е линеарна комбинација од конечен број функции. Истото се однесува и за својствата 2 и 3.

Точноста на тврдењата следува од дефиницијата на троен интеграл и својствата на граници и суми.

7.3. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ТРОЕН ИНТЕГРАЛ

Во општ случај, долната и горната сума на Дарбу или Римановата сума, не се ефективни во пресметувањето на тројниот интеграл. И во овој случај тројниот интеграл ќе се пресмета преку пресметување на три единечни интегралите.

Итерираните интегралите. Интегралот:

$$\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx ,$$

се нарекува итериран (последователен) интеграл бидејќи неговата вредност се добива со последователно пресметување на три единечни (Риманови) интегралите. Прво се пресметува внатрешниот интеграл по z , потоа по y и на крај надворешниот интеграл по x .

Овој интеграл го означуваме со: $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz$ т.е.:

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx .$$

Аналогно се означува:

$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx \right) dy .$$

Ако во внатрешниот интеграл место функциите од обликот $z = z(x, y)$ се разгледуваат функции $x = x(y, z)$ и $y = y(x, z)$ се добиваат уште два пара по два итерирани интеграла кои се означуваат аналогно.

Пресметување троен интеграл. При пресметувањето на тројниот интеграл на непрекината функција $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ќе се ограничине на специјални области V .

Теорема 7.3.1. Нека f е непрекината функција на:

$$V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\} \quad (1),$$

каде што D е област од тип 1 или тип 2 во xOy -рамнината и z_1 и z_2 се непрекинати функции на D . Тогаш:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy . \blacksquare$$

Ако областа D е правилна, тогаш областа (1) се нарекува **правилна област во правец на z -оската**. Аналогно се дефинира правилна област во правец на останатите оски. Ако областа V е правилна во правец на сите оски тогаш се нарекува **правилна област**.

- Ако D е област од тип 1, тогаш:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \\ &= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz . \end{aligned}$$

- Ако D е област од тип 2, тогаш:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \\ &= \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Аналогно се пресметува тројниот интеграл кога областа V се проектира на области, ако постојат, од тип 1 или тип 2 на xOz и yOz -рамнините. На пример ако:

$$V = \{(x, y, z) | x \in [a, b], z_1(x) \leq z \leq z_2(x), y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)\}$$

тогаш:

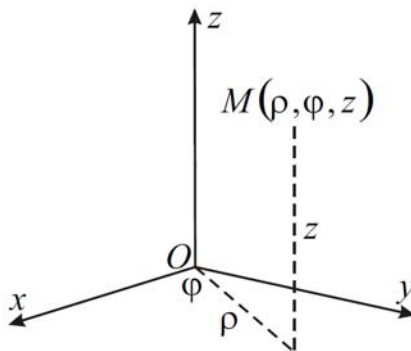
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} dy \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dz.$$

Промена на редоследот на интеграција во тројниот интеграл. Во општ случај кога проекциите на областа V на координатните рамнини се правилни рамнински области, тројниот интеграл може да се пресмета на 6 начина преку три последователни единечни интеграла. Понекогаш кога постои тројниот интеграл, но е тешко или невозможно да се пресмета еден од неговите итерирани интеграла, се пресметува (ако постои) друг од останатите пет итерирани интеграла. Постапката се нарекува **промена на редоследот на интеграција**.

7.4. ТРОЕН ИНТЕГРАЛ ВО ЦИЛИНДРИЧНИ КООРДИНАТИ

Како што некои двојни интеграли полесно може да се пресметаат во поларни, отколку во правоаголни (Декартови) координати, така и некои тројни интеграли полесно може да се пресметаат во координати различни од правоаголни. Едни од нив се цилиндричните координати кои претставуваат еден вид генерализација на поларните координати во простор така што двете координати се исти со поларните во $z = c$, а третата е Декартова.

Цилиндричен координатен систем. Нека (x, y, z) се правоаголни координати на точката M . Ако (ρ, φ) се поларни координати на точката (x, y) , тогаш (ρ, φ, z) се цилиндрични координати на точката (x, y, z) .



Цртеж 7.4.

Ако на точката M ги знаеме правоаголните координати (x, y, z) , тогаш од равенките:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \text{ и } \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \text{ (ако } x \neq 0 \text{)};$$

може да ги определиме цилиндричните координати. И обратно, за секоја подредена тројка (ρ, φ, z) од цилиндрични координати на една точка, со помош на равенките:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

може да ги определиме нејзините цилиндрични координати (x, y, z) .

Пресметување троен интеграл со премин во цилиндрични координати. Заради теорема 7.3.1, тројниот интеграл се сведува на двоен по формулата:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy ,$$

додека двојниот интеграл во поларни координати се пресметува по:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$$

Следува дека важи следнава теорема:

Теорема 7.4.1. Нека f е непрекината функција на цилиндричното тело V на z_1 и z_2 , каде што V ги исполнува условите од теоремата 7.1.1. и нејзината проекција D на xOy рамнината е ограничена со кривите:

$$\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2 \quad (0 \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi), \quad \rho = \rho_1(\varphi) \text{ и } \rho = \rho_2(\varphi), \quad \rho_1 \leq \rho_2.$$

Тогаш:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)}^{z_2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz$$

Врската меѓу диференцијалите е: $dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz$.

Со премин во цилиндрични координати најчесто полесно се решаваат интегралите во кои подинтегралната функција и (или) областа го содржи членот $x^2 + y^2$.

Задача 7.4.2. Да се пресмета тројниот интеграл:

$$I = \iiint_V y dx dy dz ,$$

каде што V е областа ограничена со:

$$z = 3 - x^2 - y^2, \quad z = -5 + x^2 + y^2, \quad x \geq 0 \text{ и } y \geq 0.$$

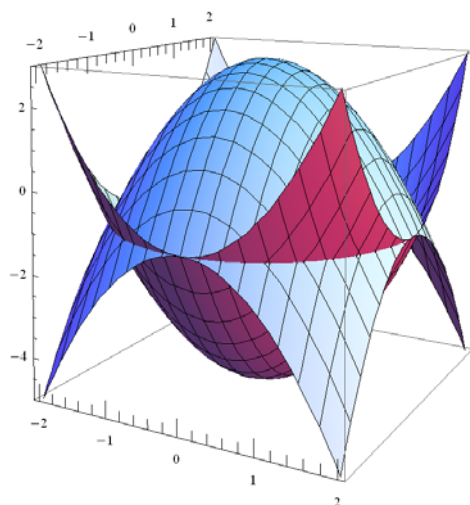
Решение. Пресекот на параболоидите е:

$$3 - x^2 - y^2 = -5 + x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

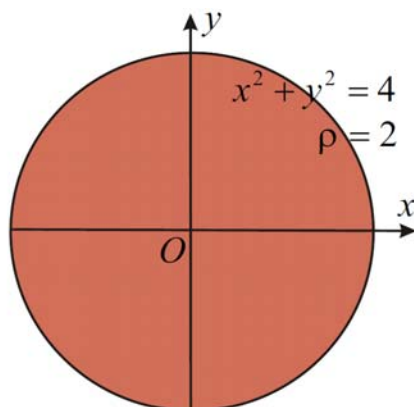
и

$$z = 3 - (x^2 + y^2) = 3 - 4 = -1.$$

Проекцијата на областа во xOy -рамнината е $x^2 + y^2 \leq 4$.



Цртеж 7.4.1.1.



Цртеж 7.4.1.2.

Прв начин (директно (со Декартови координати)).

Границите се:

$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \quad \text{и} \quad -5 + x^2 + y^2 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2.$$

Следува:

7. Троен интеграл

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^2 y dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-5+x^2+y^2}^{3-x^2-y^2} dz = \int_0^2 y dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (3-x^2-y^2 - (-5+x^2+y^2)) dx = \\
 &= \int_0^2 y dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (8-2(x^2+y^2)) dx = 2 \int_0^2 y dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4-x^2-y^2) dx = \\
 &= 2 \int_0^2 y dy \left(4x - \frac{x^3}{3} - y^2 x \right) \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} = \\
 &= 2 \int_0^2 y \left(\frac{4\sqrt{4-y^2}}{3} - \frac{(4-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - y^2 \sqrt{4-y^2} \right) dy = \\
 &= 2 \int_0^2 y \left((4-y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{(4-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) dy = 2 \int_0^2 y \frac{2}{3} (4-y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \\
 &= \left(\begin{array}{ll} 4-y^2 = t & y=0 \Rightarrow t=4 \\ -2y dy = dt & y=2 \Rightarrow t=0 \end{array} \right) = \\
 &= \frac{4}{3} \int_4^0 t^{\frac{3}{2}} \frac{dt}{-2} = -\frac{2}{3} \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \Big|_4^0 = -\frac{4}{15} \left(-4^{\frac{5}{2}} \right) \frac{4}{15} 32 = \frac{128}{15}.
 \end{aligned}$$

Втор начин (со премин во цилиндрични координати).

Преминуваме во цилиндрични координати:

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$; од каде што:

$$dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz \text{ и } x^2 + y^2 = \rho^2,$$

Кружницата во поларни координати има равенка $\rho = 2$, додека параболоидите во цилиндрични координати се:

$$z = 3 - \rho^2, \quad z = -5 + \rho^2.$$

Границите се:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2 \text{ и } -5 + \rho^2 \leq z \leq 3 - \rho^2.$$

Следува:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho \int_{-5+\rho^2}^{3-\rho^2} \rho \sin \varphi dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^2 \rho d\rho (3 - \rho^2 - (-5 + \rho^2)) = \\
 &= 2(-\cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho^2 (4 - \rho^2) d\rho = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 \right) \int_0^2 (4\rho^2 - \rho^4) d\rho = \\
 &= 2 \left(4 \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^2 = 2 \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = 2 \frac{160 - 96}{15} = \frac{128}{15}.
 \end{aligned}$$

Обопштени цилиндрични координати и пресметување троен интеграл со премин во обопштени цилиндрични координати. Аналогно се дефинираат обопштени цилиндрични координати:

$$x = a\rho \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (a, b \neq 0).$$

Првите две координати одговараат на обопштените поларни (елиптични) координати, а третата е Декартова. Затоа важи:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{ay}{bx}.$$

Ако ставиме $x = ax', \quad y = by', \quad z = z'$; тогаш:

$$x' = \rho \cos \varphi, \quad y' = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

се цилиндрични координати за кои важи теоремата 7.4.1. Притоа: $dx = a dx', \quad dy = b dy'$. Следува дека ако тројниот интеграл ги исполнува условите од теоремата 7.4.1:

$$\begin{aligned}
 \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= ab \iiint_{V'} f(x', y', z) dx' dy' dz = \\
 &= ab \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)}^{z_2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz.
 \end{aligned}$$

Врската меѓу диференцијалите е:

$$dx dy dz = ab \rho d\rho d\varphi dz.$$

Со премин во обопштени цилиндрични координати најчесто полесно се решаваат интегралите во кои подинтегралната функција и (или) областа го содржи членот $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

7.5*. СМЕНА НА ПРОМЕНЛИВИ КАЈ ТРОЕН ИНТЕГРАЛ

Аналогно тврдење на тврдењето за смена на променливи на двоен интеграл, важи и за троен интеграл. И ова тврдење ќе го презентираме без доказ. Нека:

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z) \quad \text{и} \quad w = w(x, y, z);$$

се функции дефинирани на затворена и ограничена област V . Нека множеството V^* се состои од точките:

$$(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)), \quad (x, y, z) \in V.$$

По конструкција секој елемент на V^* е слика на елемент од V , т.е. пресликувањето $V \rightarrow V^*$ такво што $(x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$ е сурјекција. Нека пресликувањето е и инјекција, т.е. различни елементи се пресликуваат во различни слики. Следува дека пресликувањето е бијекција и има инверзно пресликување $V^* \rightarrow V$, такво што:

$$(u, v, w) \rightarrow (x, y, z), \quad x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w).$$

Теорема. 7.5.1 (Смена на променливи). Ако:

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z) \quad \text{и} \quad w = w(x, y, z);$$

имаат непрекинати парцијални изводи заклучно со втор ред на V , а

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

ги имаат истите својства на V^* , тогаш:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw$$

$$\text{каде што: } J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Функцијата J се нарекува Јакобијан за пресликувањето:

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z) \quad \text{и} \quad w = w(x, y, z).$$

Лесно може да се провери дека навистина формулите за пресметување на троен интеграл со премин во цилиндрични и обопштени цилиндрични координати се специјален случај на формулата за смена на променливи.

7.6*. СФЕРНИ КООРДИНАТИ

Секоја точка $M(x, y, z)$ од просторот може да се запише со равенките:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta;$$

каде што ρ и φ имаат иста интерпретација како кај цилиндричните координати ($\rho \in [0, +\infty)$ е должината на радиус-векторот на точката, а $\varphi \in [0, 2\pi)$ е аголот што проекцијата на радиус-векторот ја гради со позитивната насока на x -оската), додека $\theta \in [0, \pi]$ е аголот што радиус-векторот го гради со позитивната насока на z -оската. За координатниот почеток важи $\rho = 0$, додека φ и θ се неодредени (по договор сметаме дека може да ги имаат сите вредности). За секоја друга точка $\rho \neq 0$. Секоја точка $M \neq 0$ може еднозначно да се претстави со помош на ρ , φ и θ и обратно секоја подредена тројка (ρ, θ, φ) , $\rho \neq 0$; каде што ρ , φ и θ припаѓаат на горенаведените интервали, определува единствена точка. Затоа точката M може да се запише во обликот $M(\rho, \theta, \varphi)$. Координатите се нарекуваат **сферни координати** бидејќи за фиксно $\rho \neq 0$ определуваат централна сфера со радиус ρ . Имено:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \theta = \\ &= \rho^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = \\ &= \rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \rho^2. \end{aligned}$$

Следува дека равенката на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ во сферни координати е $\rho = a$.

Јакобијанот на сферните координати е:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{\rho^2 \sin \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^3 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \sin \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi}{\rho^2 \sin \theta \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^3 \theta} = \rho^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho^2 \sin \theta.$$

Следува дека врската меѓу диференцијалите е:

$$dxdydz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi.$$

Затоа тројниот интеграл со премин во сферни координати се сведува на:

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 d\rho.$$

Со премин во сферни координати најчесто полесно се решаваат интегралите во кои подинтегралната функција и (или) областа го содржи членот $x^2 + y^2 + z^2$.

7.7. ПРИМЕНА НА ТРОЕН ИНТЕГРАЛ. ВОЛУМЕН НА ТЕЛО

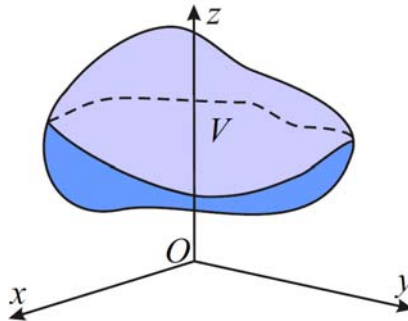
Теорема 7.7.1. Нека областа V ги исполнува условите од теоремата 7.1.1. Тогаш волуменот на V е:

$$V = \iiint_V dxdydz.$$

Доказ. Функцијата $f(x, y, z) = 1$ е непрекината и ненегативна на V . Следува дека постои тројниот интеграл

$\iiint_V dx dy dz$ и од неговата дефиниција тој е еднаков на волуменот на телото V , односно:

$$V = \iiint_V dx dy dz . \blacksquare$$



Цртеж 7.7.

Формулите за волумен што ги добивме во поглавјето за двоен интеграл може да се добијат на втор начин со помош на троен интеграл. Од теоремата 7.3.1 тројниот интеграл може да го сведеме на двоен:

$$\begin{aligned} V = \iiint_V dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \right) dx dy = \iint_D \left(z \Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \right) dx dy = \\ &= \iint_D (z_2(x,y) - z_1(x,y)) dx dy . \end{aligned}$$

Ако $z_1(x,y) = 0$, а $z = z_2(x,y)$, тогаш волуменот е:

$$V = \iint_D z(x,y) dx dy .$$

7.8*. НЕПРАВИ ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛИ*

Неправите тројни интегралите се дефинираат аналогно како двојните, со замена на рамнинската област со просторна; на подинтегралната функција од две променливи, со три; и на двојниот интеграл со троен.

8. КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛ

8.1. КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ПРВ ТИП

8.1.1. ДЕФИНИЦИЈА НА
КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ПРВ ТИП

За решавање на некои практични проблеми, се јавува потреба од обопштување на поимот определен интеграл, така што место на сегментот $[a, b]$ интегралот ќе се дефинира на по делови мазна крива C .

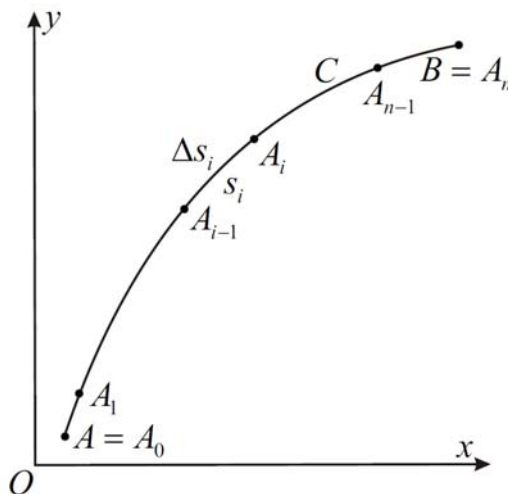
Ако кривата C ги поврзува точките A и B , тогаш ќе ја означиме со $\widehat{AB}$. Координатите на точките A и B се добиваат за $t = t_1$ и $t = t_2$. Ако $A \equiv B$, тогаш кривата C е **затворена**.

Нека е дадена по делови мазната крива

$$C: x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2].$$

Нека функцијата f е дефинирана на C .

Со помош на точките $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ определуваме поделба $\mathcal{P}$ на лакот $\widehat{AB}$, што се состои од елементарните лази: s_i , со соодветни должини: $\Delta s_i, i = 1, 2, \dots, n$.



Цртеж 8.1.1. Криволиниски интеграл од прв тип.

Избираме произволни точки $(x_i, y_i) \in S_i$ и ја формираме сумата:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i .$$

Нека со $\text{diam} \Delta s_i$ ја означиме должината на најдолгиот лак на поделбата $\mathcal{P}$, т.е. $\|\mathcal{P}\| = \max_{i=1,2,\dots,n} \text{diam} D_i$. Ако постои границата:

$$I := \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i$$

за секоја поделба $\mathcal{P}$ и секој избор на точките $(x_i, y_i) \in S_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, тогаш I се нарекува **криволииниски интеграл од I тип на функцијата f по рамнинската крива C** (криволииниски интеграл по кривата C) и се означува со $\int_C f(x, y) ds$. Значи:

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i \blacksquare$$

Се покажува дека кога f е непрекината функција на по делови мазната рамнинска крива C , тогаш постои криволиинискиот интеграл од I тип. Ако должината на кривата е конечна, интегралот постои како конечен број.

Слично се дефинира **криволииниски интеграл од I тип по просторна** по делови **мазна** крива C .

Ако постои границата:

$$I := \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i$$

за секоја поделба $\mathcal{P}$ и секој избор на точките $(x_i, y_i, z_i) \in \Delta s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; тогаш I се нарекува **криволииниски интеграл од I тип на функцијата f по просторната крива C** (криволииниски интеграл по кривата C) и се означува со $\int_C f(x, y, z) ds$. Значи:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i . \blacksquare$$

И во овој случај се покажува дека кога f е непрекината функција на по делови мазна просторна крива C , тогаш постои криволиинискиот интеграл од I тип.

8.1.2. СВОЈСТВА НА КРИВОЛИИНСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ПРВ ТИП

Нека функцијата f е дефинирана на кривата $C \subseteq \mathbb{R}^2$, така што постојат $\int_C f(x, y) ds$ и $\int_C g(x, y) ds$. Тогаш:

$$1. \int_C kf(x, y) ds = k \int_C f(x, y) ds, \quad k = const;$$

$$2. \int_C (f(x, y) + g(x, y)) ds = \int_C f(x, y) ds + \int_C g(x, y) ds;$$

3. Ако кривата C е поделена на кривите C_1 и C_2 , тогаш:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds.$$

$$4. \int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \int_{\widehat{BA}} f(x, y) ds.$$

*Имајќи ги предвид својствата на сумите, на границите и принципот на математичка индукција, својствата 1) и 2) може да се генерализираат во едно својство кое вели дека интеграл од линеарна комбинација на функции е линеарна комбинација од интегралите на функциите, т.е. ако $f_1, f_2, \dots, f_n$ се непрекинати функции на C и $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ се константи, тогаш:

$$\begin{aligned} \int_C (k_1 f_1(x, y) + k_2 f_2(x, y) + \dots + k_n f_n(x, y)) ds = \\ k_1 \int_C f_1(x, y) ds + k_2 \int_C f_2(x, y) ds + \dots + k_n \int_C f_n(x, y) ds. \end{aligned}$$

Истото се однесува на својството 3. Ако C се состои од мазните криви $C_1, C_2, \dots, C_n$, тогаш интегралот по кривата C е збир од интегралите по нејзините делови, т.е.

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) ds .$$

Нека функцијата f е дефинирана на кривата $C \subseteq \mathbb{R}^3$, така што постојат $\int_C f(x, y, z) ds$ и $\int_C g(x, y, z) ds$. Тогаш:

1. $\int_C kf(x, y, z) ds = k \int_C f(x, y, z) ds$, $k = \text{const}$;
2. $\int_C (f(x, y, z) + g(x, y, z)) ds = \int_C f(x, y, z) ds + \int_C g(x, y, z) ds$;
3. Ако кривата C е поделена на кривите C_1 и C_2 , тогаш:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{C_1} f(x, y, z) ds + \int_{C_2} f(x, y, z) ds .$$

$$4. \int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) ds = \int_{\widehat{BA}} f(x, y, z) ds .$$

*Притоа, ако $f_1, f_2, \dots, f_n$ се непрекинати функции на C и $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ се константи, тогаш:

$$\begin{aligned} & \int_C (k_1 f_1(x, y, z) + k_2 f_2(x, y, z) + \dots + k_n f_n(x, y, z)) ds = \\ & k_1 \int_C f_1(x, y, z) ds + k_2 \int_C f_2(x, y, z) ds + \dots + k_n \int_C f_n(x, y, z) ds . \end{aligned}$$

Ако C се состои од мазните криви $C_1, C_2, \dots, C_n$, тогаш:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{C_1} f(x, y, z) ds + \int_{C_2} f(x, y, z) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y, z) ds ;$$

8.1.3. ПРЕСМЕТУВАЊЕ КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ПРВ ТИП

Од Математика 1 имаме дека кога:

$$C: x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2];$$

е по делови мазна крива, тогаш елементот на лакот е:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Ако кривата е зададена со равенката $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, тогаш таа може да ја разгледаме како параметарска равенка $x = x$, $y = y(x)$, $x \in [a, b]$; во однос на параметарот x , каде што елементот на лакот е $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$. Сличен е случајот кога кривата е зададена со равенката $x = x(y)$, $y \in [c, d]$. Тогаш: $ds = \sqrt{1 + x'^2(y)} dy$.

Ако кривата е просторна и е зададена со равенките:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_1, t_2],$$

тогаш аналогно се покажува дека елементот на лакот е:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

Имајќи предвид дека Римановите интегрални суми на криволинискиот интеграл од прв тип, кога истиот постои, може да се разгледаат како интегрални суми на определени интеграли, доаѓаме до следниве заклучоци:

- Нека кривата C е зададена со равенката:

$$y = y(x), x \in [a, b];$$

тогаш елементот на лакот е:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx,$$

и криволинискиот интеграл е:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

• Нека кривата C е зададена со равенката $C: x = x(y)$, $y \in [c, d]$, тогаш елементот на лакот е:

$$ds = \sqrt{1 + x'^2(y)} dy,$$

и криволиинискиот интеграл е:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + x'^2(y)} dy.$$

• Нека $C: x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$ е рамнинска по делови мазна крива. Тогаш елементот на лакот е:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

и криволиинискиот интеграл е:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

• Нека $C: x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_1, t_2]$ е просторна по делови мазна крива. Тогаш елементот на лакот е:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$$

и криволиинискиот интеграл е:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

Задача 8.1.3. Да се пресмета криволиинискиот интеграл:

$$I = \int_C y ds,$$

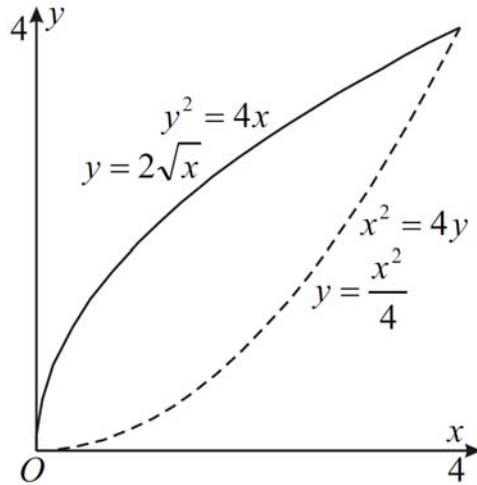
каде што C е лакот од параболата $y^2 = 4x$ што го отсекува параболата: $x^2 = 4y$.

Решение. Го определуваме пресекот параболите:

$$y^2 = 4x, x^2 = 4y \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}, y^2 = 4x \Rightarrow$$

$$\frac{x^4}{16} = 4x \Leftrightarrow x^4 - 64x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 64) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

За $x = 0$, $y^2 = 0$ т.е. $y = 0$. За $x = 4$, $y = \frac{16}{4} = 4$.



Цртеж 8.1.3.

Од $y^2 = 4x$ и $y \geq 0$ добиваме $y = 2\sqrt{x}$, што претставува равенка на десниот крак на параболата. Првиот извод е:

$$y' = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

Елементот на лакот и границите се:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx \text{ и } 0 \leq x \leq 4.$$

Конечно, интегралот е:

$$I = \int_0^4 2\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 2 \int_0^4 \sqrt{x+1} dx = 2 \cdot \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{4}{3} (5\sqrt{5} - 1).$$

8.1.4. ПРИМЕНА НА КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ПРВ ТИП

8.1.4.1. ПЛОШТИНА НА ОМОТАЧ

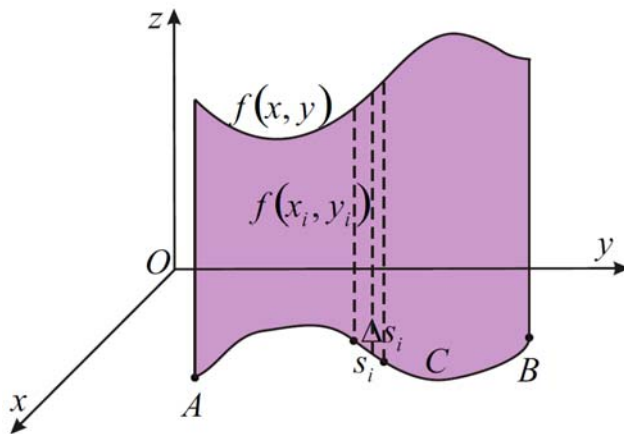
- Ако $f(x, y) \geq 0$, тогаш:

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$$

е плоштината на делот од вертикалната цилиндрична површина чија директриса е кривата C , и е ограничена со xOy -рамнината и графикот на функцијата f .

Имено, секој собирок во интегралната сума $f(x_i, y_i) \Delta S_i$ е елемент од цилиндричната површина. Следува:

$$P = \int_C f(x, y) ds.$$



Цртеж 8.1.4.1. Плоштина на омотач.

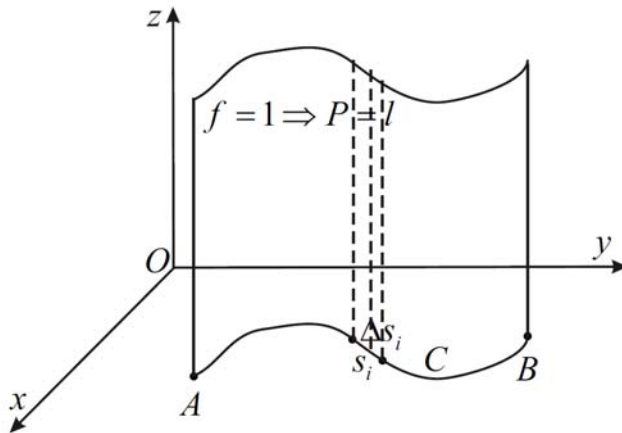
8.1.4.2. ДОЛЖИНА НА ЛАК НА КРИВА

Од дефиницијата за криволинискиот интеграл од прв тип, ако функцијата $f(x, y) = 1$ ($f(x, y, z) = 1$), добиваме дека бројот:

$$\int_C ds = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = l,$$

ја дава должината на кривата C . Значи:

$$l = \int_C ds.$$



Цртеж 8.1.4.2. Должина на лак на крива.

8.2. КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ВТОР ТИП

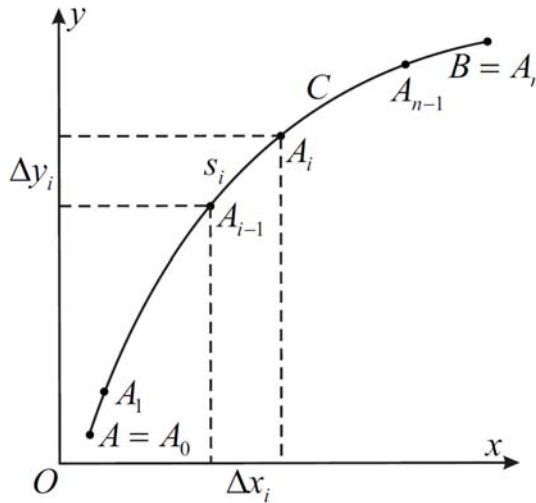
8.2.1. ДЕФИНИЦИЈА НА КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ВТОР ТИП

Нека за функцијата f и кривата C важат истите услови како кај криволиниски интеграл од I тип.

Ориентација на крива. Кривата C е **позитивно ориентирана**, ако движењето по кривата е спротивно од движењето на стрелките на часовникот. Во спротивно кривата е **негативно ориентирана**. Ако не е дадена ориентацијата се подразбира дека кривата C е позитивно ориентирана. Позитивно ориентираната крива ја означуваме со C или C^+ , додека негативно ориентираната крива со C^- .

Ако при формирањето на интегралната сума, наместо ΔS_i ги користиме нејзините проекции Δx_i и Δy_i на x и y -оските,

соодветно, може да дефинираме две варијанти на уште еден вид криволиински интеграл.



Цртеж 8.2.1. Криволиински интеграл од втор тип.

Нека е дадена по делови мазната крива C со конечна должина: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$.

Нека функцијата f е дефинирана на C .

Со помош на точките $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ определуваме поделба $\mathcal{P}$ на лакот $\widehat{AB}$, што се состои од елементарните лаци:

s_i , со должини Δs_i , $i = 1, 2, \dots, n$; соодветно.

Нека проекциите на s_i на x и y -оските соодветно се:

$$\Delta x_i \text{ и } \Delta y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Избираме произволни точки:

$$(x_i, y_i) \in s_i$$

и ги формираме сумите:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \text{ и } \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta y_i.$$

Ако постои границата:

$$I := \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i$$

за секоја поделба $\mathcal{P}$ и секој избор на точките $(x_i, y_i) \in s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; тогаш I се нарекува **криволиниски интеграл од II тип** (по координати), **на функцијата f по рамнинската крива C во однос на x** , и се означува со:

$$\int_C f(x, y) dx.$$

Ако постои границата:

$$I := \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta y_i,$$

за секоја поделба $\mathcal{P}$ и секој избор на точките $(x_i, y_i) \in \Delta s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; тогаш I се нарекува **криволиниски интеграл од II тип** (по координати), **на функцијата f по рамнинската крива C во однос на y** , и се означува со:

$$\int_C f(x, y) dy. \blacksquare$$

Во пракса криволинискиот интеграл од втор тип често се среќава во (општ) вид:

$$\int_C P(x, y) dx + \int_C Q(x, y) dy$$

и се означува со:

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Аналогно во тридимензионалниот случај, ако наместо должините на елементот на лакот Δs_i на просторната крива C , ги користиме нејзините проекции на x , y и z -оските соодветно, може да дефинираме:

$$\int_C f(x, y, z) dx, \int_C f(x, y, z) dy \text{ и } \int_C f(x, y, z) dz.$$

Притоа, криволинискиот интеграл од втор тип од општ вид:

$$\int_C P(x, y, z)dx + \int_C Q(x, y, z)dy + \int_C R(x, y, z)dz$$

ќе го означиме со:

$$\int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz .$$

8.2.2. СВОЈСТВА НА КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ВТОР ТИП

Нека функцијата f е дефинирана на кривата $C \subseteq \mathbb{R}^2$, така што постојат $\int_C f(x, y)dx$, $\int_C f(x, y)dy$, $\int_C g(x, y)dx$ и $\int_C g(x, y)dy$.

Тогаш:

$$1. \int_C kf(x, y)dx = k \int_C f(x, y)dx, \int_C kf(x, y)dy = k \int_C f(x, y)dy,$$

$k = const$.

$$2. \int_C (f(x, y) + g(x, y))dx = \int_C f(x, y)dx + \int_C g(x, y)dx,$$

$$\int_C (f(x, y) + g(x, y))dy = \int_C f(x, y)dy + \int_C g(x, y)dy$$

3. Ако кривата C е поделена на кривите C_1 и C_2 , тогаш:

$$\int_C f(x, y)dx = \int_{C_1} f(x, y)dx + \int_{C_2} f(x, y)dx$$

и

$$\int_C f(x, y)dy = \int_{C_1} f(x, y)dy + \int_{C_2} f(x, y)dy.$$

$$4. \int_{\widehat{AB}} f(x, y)dx = - \int_{\widehat{BA}} f(x, y)dx$$

и

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y)dy = - \int_{\widehat{BA}} f(x, y)dy.$$

Од својствата следува дека ако постои:

$$\int_{C^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \text{ или } \int_{C^-} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

каде што C^+ е позитивно, додека C^- негативно ориентирана крива, тогаш постои и другиот интеграл и

$$\int_{C^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{C^-} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Исто така:

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{C_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{C_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

каде што C_1 и C_2 се деловите на кривата C .

8.2.3. ПРЕСМЕТУВАЊЕ КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ВТОР ТИП

- Нека кривата C е зададена со равенката:

$$C: y = y(x), x \in [a, b], \text{ тогаш } dy = y'(x) dx \text{ и}$$

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx, \int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x, y(x)) y'(x) dx.$$

- Нека кривата C е зададена со равенката:

$$C: x = x(y), y \in [c, d], \text{ тогаш } dx = x'(y) dy \text{ и}$$

$$\int_C f(x, y) dx = \int_c^d f(x(y), y) x'(y) dy, \int_C f(x, y) dy = \int_c^d f(x(y), y) dy.$$

- Нека $C: x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$ е рамнинска по делови мазна крива. Тогаш:

$$dx = \dot{x}(t) dt, dy = \dot{y}(t) dt;$$

и

$$\int_C f(x, y) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt,$$

и

$$\int_C f(x, y) dy = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt.$$

• Нека $C: x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_1, t_2]$; е просторна по делови глатка крива. Тогаш елементот на лакот е:

$$dx = \dot{x}(t) dt, \quad dy = \dot{y}(t) dt, \quad dz = \dot{z}(t) dt;$$

и

$$\int_C f(x, y, z) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) dt,$$

$$\int_C f(x, y, z) dy = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) dt,$$

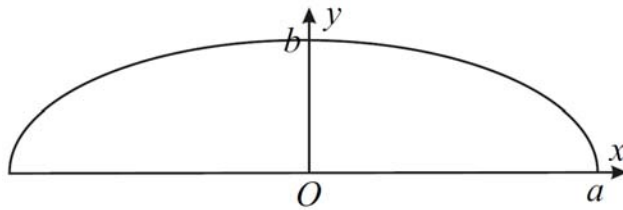
$$\int_C f(x, y, z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t) dt.$$

Задача 8.2.3. Да се пресмета криволиинскиот интеграл:

$$I = \int_C y dx + x dy,$$

каде што C е кривата: $x = a \cos t, y = b \sin t, t \in [0, \pi]$.

Решение. Имаме, $dx = -a \sin t dt$ и $dy = b \cos t dt$; од каде што:



Цртеж 8.2.3.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi b \sin t (-a \sin t) dt + a \cos t \cdot b \cos t dt = ab \int_0^\pi (-\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \\ &= ab \int_0^\pi \left(-\frac{1 - \cos 2t}{2} + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = ab \int_0^\pi \cos 2t dt = ab \left. \frac{\sin 2t}{2} \right|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

8.2.4*. ВРСКА МЕЃУ КРИВОЛИИНСКИТЕ ИНТЕГРАЛИ
ОД ПРВ И ВТОР ТИП

Нека $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ и $R = R(x, y, z)$ се непрекинати функции над кривата C која е по делови глатка и со конечна должина. Тогаш:

$$dx = \cos \alpha ds, \quad dy = \cos \beta ds \quad \text{и} \quad dz = \cos \gamma ds;$$

и

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \int_C (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds,$$

каде што:

$$\alpha = \alpha(x, y, z), \quad \beta = \beta(x, y, z) \quad \text{и} \quad \gamma = \gamma(x, y, z), \quad \alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi];$$

се соодветните агли меѓу ориентираната тангента и ортовите на x , y и z -оските; во точката (x, y, z) (види [16] од литература).

Ако точката (x, y) од рамнината ја поистовестиме со $(x, y, 0)$, ќе следува точноста на аналогно тврдење за криволииниски интеграл на рамнинска крива.

8.3. ГРИНОВА ФОРМУЛА

Гриновата формула ја дава врската меѓу криволиинискиот интеграл од втор тип по затворена, едноставна и по делови глатка крива C и двојниот интеграл на едноставна област D , чиј раб е кривата C .

Криволиинискиот интеграл $\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ по затворена крива C често го означуваме со $\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$.

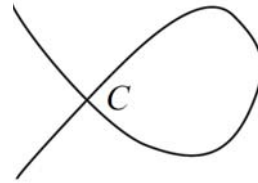
Едноставна крива, пат, едноставна област. Кривата е **едноставна** ако пресликувањето: $f: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ е обратно еднозначно, освен можеби за $t = t_1$ и $t = t_2$. Геометриски тоа значи дека кривата нема самопресекувачки точки.

Кривата C е **пат** ако е по делови мазна и едноставна.

Аналогно се дефинираат поимите со ист назив за просторна крива: $C: x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_1, t_2]$;



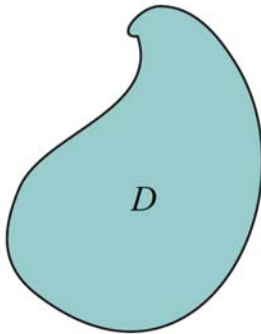
Цртеж 8.4.2.1. Едноставна (непресекувачка) крива.



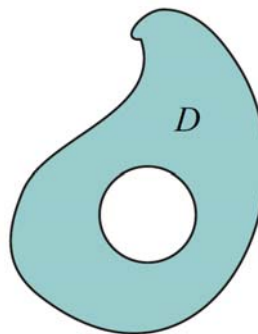
Цртеж 8.4.2.2. Неодноставна (самопресекувачка) крива.

Областа $D \subseteq \mathbb{R}^2$ е **едноставна** ако секој затворен пат C е раб на множество $D(C)$ што се содржи во D . Со други зборови областа е едноставна ако нема „дупки“.

Аналогно се дефинира **едноставна просторна област**.



Цртеж 8.4.2.3. Едноставна област.



Цртеж 8.4.2.4. Неодноставна област.

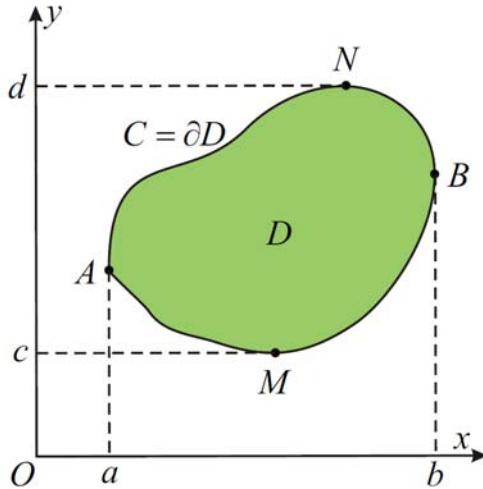
Теорема 8.3.1. (Гринова формула). Нека C е позитивно ориентирана, едноставна, по делови мазна крива и D е едноставна затворена област чиј раб е C . Нека функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имаат непрекинати парцијални изводи на D . Тогаш:

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy \text{ т.е.}$$

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Доказ. Теоремата ќе ја докажеме за крива којашто правите паралелени на координатните оски ја сечат во најмногу две точки.

Го трансформираме двојниот интеграл:



Цртеж 8.3.1. Гринова формула.

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy = \int_a^b P(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \\
 &= \int_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) dx = \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx = \\
 &= \int_{\overline{ANB}} P(x, y) dx - \int_{\overline{AMB}} P(x, y) dx = \int_{\overline{ANB}} P(x, y) dx + \int_{\overline{BMA}} P(x, y) dx = \\
 &= \int_{C^-} P(x, y) dx = - \int_C P(x, y) dx \quad (1).
 \end{aligned}$$

На сличен начин:

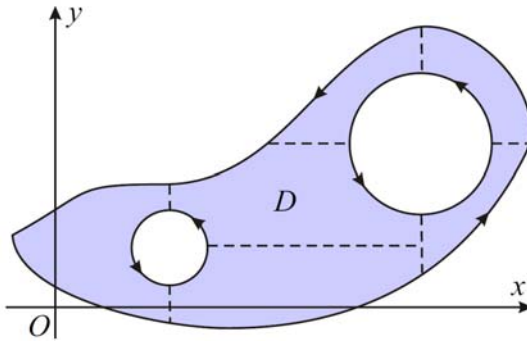
$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy &= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx = \int_c^d Q(x, y) \Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy = \\
 &= \int_c^d (Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)) dy = \int_c^d Q(x_2(y), y) dy - \int_c^d Q(x_1(y), y) dy = \\
 &= \int_{\overline{MBN}} Q(x, y) dy - \int_{\overline{MAN}} Q(x, y) dy = \int_{\overline{MBN}} Q(x, y) dy + \int_{\overline{NAM}} Q(x, y) dy = \\
 &= \int_C Q(x, y) dy \quad (2).
 \end{aligned}$$

Од (1) и (2) имаме:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy =$$

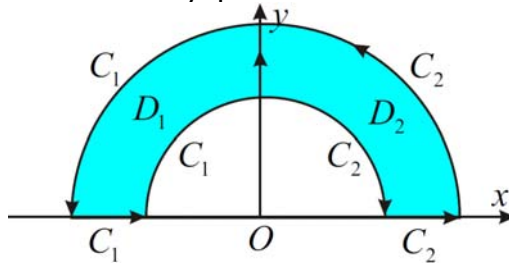
$$\int_C Q(x, y) dy + \int_C P(x, y) dx = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy . \blacksquare$$

*Доказот е аналоген во случај кога областа е правилна во xOy -рамнината. Тогаш се јавуваат и интеграли на отсечки паралелни на оските чија вредност е нула. Понатаму, Гриновата формула може да се обопшти да важи на елементарни области, односно области што не мора да се правилни, но може да се претстават како унија од правилни области. Доказот на теоремата во најопштиот случај кога областа е едноставна не е предвиден во овој курс.



Цртеж 8.3.2.1. Елементарна област која не е правилна

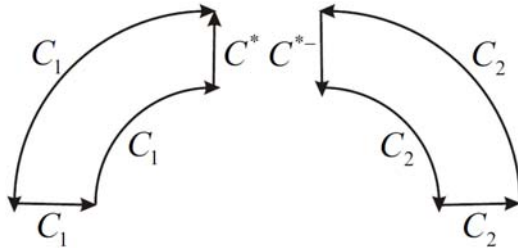
Пример 8.3.2*. Покажи дека Гриновата формула важи во случај кога областа D е полупрстен.



Цртеж 8.3.2.2.

Решение. Имаме:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy =$$



Цртеж 8.3.2.3-4. Гринова формула на полупрстен

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_1 \cup C^{*+}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \oint_{C_2 \cup C^{*-}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\
 \oint_{C_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \oint_{C^{*+}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \\
 \oint_{C_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \oint_{C^{*-}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\
 \oint_{C_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \oint_{C_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\
 \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy.
 \end{aligned}$$

Задача 8.3.3. Со примена на Гриновата формула да се пресмета криволинискиот интеграл:

$$I = \int_C y^2 dx + (x + y^2) dy,$$

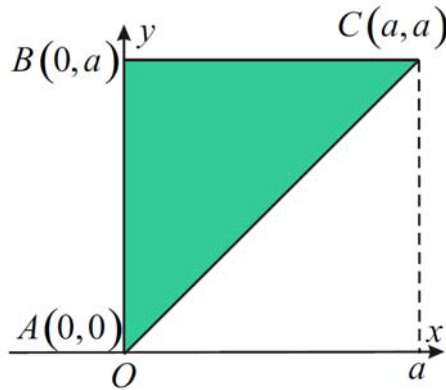
каде што C е триаголникот: $A(0, 0)$, $B(0, a)$, $C(a, a)$.

Решение. Подинтегралните функции се:

$$P = y^2 \text{ и } Q = (x + y^2) \text{ од каде што: } \frac{\partial P}{\partial y} = 2y \text{ и } \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Интегралот се сведува на:

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (1 - 2y) dx dy = \int_0^a dx \int_x^a (1 - 2y) dy = \\
 &= \int_0^a dx \left(y - y^2 \right) \Big|_x^a = \int_0^a \left(a - x - (a^2 - x^2) \right) dx = \int_0^a \left((a - a^2) + x^2 - x \right) dx = \\
 &= \left((a - a^2)x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a = a^2 - a^3 + \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{2a^3}{3}.
 \end{aligned}$$



Цртеж 8.3.3.

8.4. НЕЗАВИСНОСТ ОД ПАТОТ НА ИНТЕГРАЦИЈА

Велиме дека криволинскиот интеграл:

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (1),$$

не зависи од патот на интеграција над областа D ако за секои две точки $A, B \in D$ и секоја крива $C = \widehat{AB}$ во D , чија почетна точка е A а крајна B , секогаш постои (1) и има иста вредност.

Во тој случај интегралот над D , чија почетна точка е $A(x_0, y_0)$ а крајна $B(x_1, y_1)$, го означуваме со:

$$\int_A^B P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \text{или} \quad \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Теорема 8.4.1. Нека D е област и $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ заедно со своите парцијални изводи се непрекинати на D . Тогаш:

Криволинискиот интеграл од втор тип: $\int P(x, y)dx + Q(x, y)dy$,

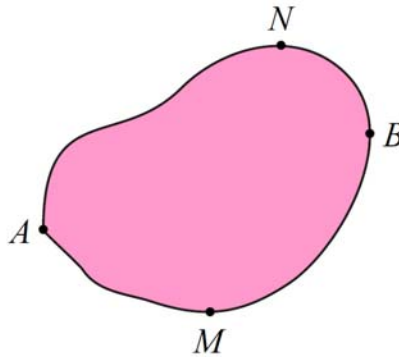
не зависи од патот на интеграција над D ако и само ако за секоја затворена крива C во D важи: $\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Доказ. $\Rightarrow$) Нека криволиинскиот интеграл не зависи од патот на интеграција и C е затворен пат во D . Избираме точки A , B , M и N како на цртежот 8.4.1. Тогаш:

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$\int_{\widehat{AMB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{\widehat{BNA}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$\int_{\widehat{AMB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \int_{\widehat{ANB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \stackrel{\text{услов}}{=} 0.$$



Цртеж 8.4.1. Независност од патот на интеграција.

$\Leftarrow$) Нека $\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ по секоја затворена крива C во D . Нека $C_1 = \widehat{ANB}$ и $C_2 = \widehat{AMB}$ се два пата од A до B , во D и $C = \widehat{AMB} \cup \widehat{ANB}$. Тогаш C е затворена крива, па:

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{\widehat{AMB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{\widehat{BNA}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{\widehat{AMB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \int_{\widehat{ANB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{\widehat{AMB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\widehat{ANB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Од точноста на првото равенство и еквивалентноста на чекорите следува точноста на последното равенство. ■

Теорема 8.4.2*. Нека функциите $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ имаат непрекинати парцијални изводи на едноставна област D . Тогаш:

Криволинискиот интеграл од втор тип: $\int P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, не зависи од патот на интеграција над D ако и само ако постои функција U на D , таква што $dU = Pdx + Qdy$.

Доказ. Теоремата ќе ја докажеме само во една насока. Нека постои функција U , таква што $dU = Pdx + Qdy$. Бидејќи:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy, \text{ важи: } P = \frac{\partial U}{\partial x} \text{ и } Q = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Нека $C: x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$; е затворен пат во D и $D(C)$ е област чиј раб е C . Тогаш:

$$\begin{aligned} \oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \oint_C \frac{\partial U}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y)dy = \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \right) dt = \\ &= \int_a^b \frac{dU^*}{dt} dt = U^* \Big|_a^b = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)) \quad (2). \end{aligned}$$

каде што: $U^*(t) = U(x(t), y(t))$ и (1) важи бидејќи:

$$\frac{dU^*}{dt} = \frac{dU(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

Значи интегралот зависи само од вредностите на функцијата U во почетната и крајната точка, кои се исти за секоја крива. ■

Во случај кога интегралот $\int P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависи од патот на интеграција, ако означиме со:

$$x_0 = x(a), y_0 = y(a), x_1 = x(b) \text{ и } y_1 = y(b);$$

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy;$$

и

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} dU = U \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0);$$

равенствата (2) може да се запишат во вид:

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} dU(x, y) = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0).$$

Последната формула која важи во рамнина, односно се однесува на дводимензионален случај, е аналогна на формулата на Њутн-Лајбниц за едnodимензионален случај.

Теорема 8.4.3*. Нека функциите $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ имаат непрекинати парцијални изводи на едноставна област D .

Тогаш:

Криволинискиот интеграл од втор тип: $\int P(x, y) dx + Q(x, y) dy$,
не зависи од патот на интеграција над D ако и само ако:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ на } D.$$

Доказ. Да забележиме дека за секој затворен пат C во D , таков што $D(C) \subseteq D$, формира затворена едноставна област $D(C)$ чиј раб е C , односно ги исполнува условите од Гриновата формула.

- Нека $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ на областа D . Тогаш, од Гриновата

формула, криволинискиот интеграл по C во D е:

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{D(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{D(C)} 0 dx dy = 0.$$

- Нека $\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$. Од Гриновата формула

имаме:

$$\iint_{D(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Заради произволноста на кривата C , следува дека:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (1) \text{ т.е. } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ на } D.$$

(1*) Имено, нека:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$$

во некоја точка $(x_0, y_0) \in D$. Нека:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) > \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ (аналогно е: } \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) < \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \text{)}.$$

Тогаш, бидејќи парцијалните изводи се непрекинати, постои отворен круг со центар во (x_0, y_0) , таков што:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) > \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \text{ за сите } (x, y) \in D,$$

при што бидејќи областа D е отворена, радиусот на кругот може да се избере така што кругот ќе се содржи во D . Тогаш кружницата со радиус кој е половина од радиусот на кругот е затворена крива која се содржи во D , на која двојниот интеграл е поголем од нула. Последното противречи на условот во теоремата. ■

Коментар. 1) Функцијата U може да се определи од:

$$U(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y),$$

каде што P ја разгледуваме како функција од променливата x , додека y игра улога на параметар. Потоа диференцираме по y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\int P(x, y) dx \right)'_y + \varphi'(y), \text{ и заменуваме во } \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Од последната равенка се изразува функцијата $\varphi'(y)$, се интегрира да се добие $\varphi(y)$ и се заменува во U .

2) Функцијата U може да се определи и ако се интегрира по y :

$$U(x, y) = \int Q(x, y) dy + \varphi(x),$$

па се диференцира по x : $\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\int P(x, y) dx \right)'_x + \varphi'(x)$, од каде што со замена во $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ се добива $\varphi'(x)$. Со интегрирање се добива $\varphi(x)$ и на крај се заменува во U .

1-2) Тогаш интегралот е:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = U \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0).$$

3) Интегралот може да се добие и ако за пат на интеграција се земат отсечките паралелни на координатните оски. Тогаш:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y) dy.$$

4) Интегралот може да се добие и ако се интегрира по друга крива, на пример по отсечката што ги поврзува крајните точки, но најчесто пресметките би биле покомплицирани.

Задача 8.4.4. Да се пресмета интегралот:

$$I = \int_{(0,1)}^{(1,0)} \cos y dx - x \sin y dy.$$

Решение. Имаме:

$$P = \cos y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y, \quad Q = -x \sin y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin y, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Следува дека интегралот не зависи од патот на интеграција. Понатаму,

$$U = \int P dx + \varphi(y) = \int \cos y dx + \varphi(y) = x \cos y + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q \Leftrightarrow x \cos y + \varphi(y) = -x \sin y \Leftrightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = 0.$$

Значи, $U = x \cos y$, од каде што:

$$I = U \Big|_{(0,1)}^{(1,0)} = x \cos y \Big|_{(0,1)}^{(1,0)} = 1.$$

9. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ

Глатка површина*. Нека површината S е определена со функцијата $z = z(x, y)$ која е непрекината и има непрекинати парцијални изводи на D . Функцијата може параметарски да се запише преку два параметра:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v).$$

Тангентите на површината во произволна точка (u, v) , што се добиваат како пресек со $x = u$ и $y = v$ рамнините се:

$$\vec{t}_1 = (1, 0, p) \quad \text{и} \quad \vec{t}_2 = (0, 1, q),$$

каде што p и q се Монжовите ознаки, и нивниот векторски производ:

$$\vec{n} = \vec{t}_1 \times \vec{t}_2 = (-p, -q, 1) \neq 0$$

е ненулт нормален вектор. Исто така, од $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D$, такви што: $(u_1, v_1, f(u_1, v_1)) = (u_2, v_2, f(u_2, v_2))$, следува дека: $u_1 = u_2$ и $v_1 = v_2$. Геометриски тоа значи дека површината не се сече самата себе односно е **самонепресекувачка** површина.

Аналогно, нормалниот вектор $\vec{n}$ постои и е ненулт и површината е самонепресекувачка кога е определена со равенките:

$$x = x(y, z) \quad \text{или} \quad y = y(x, z).$$

Велиме дека површината е **глатка**. Интуитивно, значи дека површината нема острици.

Нека површината S параметарски е определена со функциите:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad \text{и} \quad z = z(u, v)$$

кои се непрекинати и имаат непрекинати парцијални изводи на некоја област D , тогаш постојат и се непрекинати векторите:

$$\vec{t}_1 = (x'_u, y'_u, z'_u) \quad \text{и} \quad \vec{t}_2 = (x'_v, y'_v, z'_v)$$

Ако уште $\vec{n} = \vec{t}_1 \times \vec{t}_2 \neq 0$ и површината е самонепресекувачка, т.е.:

$(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D$ такви што барем една точка е внатрешна и

$$(x(u_1, v_1), y(u_1, v_1), z(u_1, v_1)) = (x(u_2, v_2), y(u_2, v_2), z(u_2, v_2)),$$

тогаш велиме дека површината е **мазна**.

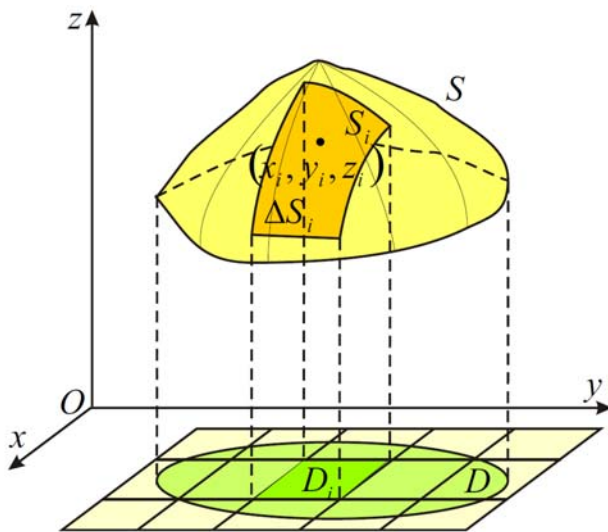
Ако површината може да се претстави како унија од мазни површини што се сечат најмногу по крива, тогаш е **по делови мазна**.

Ќе разгледаме аналогни интеграли на криволиниските интеграли, овојпат во дводимензионален случај, наречени површински интеграли. Истите имаат широка примена во праксата опишувајќи повеќе физички законитости.

9.1. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ПРВ ТИП

9.1.1. ДЕФИНИЦИЈА НА ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ПРВ ТИП

Нека површината S е график на функцијата $z = z(x, y)$ дефинирана на затворена и ограничена област D чиј раб е по делови глатка затворена крива. Нека функцијата z е непрекината и има непрекинати парцијални изводи на D (што значи дека површината е глатка). Нека $f = f(x, y, z)$ е непрекината функција дефинирана на S (9.1.1).



Цртеж 9.1.1. Површински интеграл од прв тип.

Нека $\bar{D}$ е правоаголник што го содржи D и $\mathcal{P}$ е поделба на $\bar{D}$ што се состои од подправоаголници

$$D_i \text{ со плоштини } \Delta P_i, i = 1, 2, \dots, n$$

соодветно, што целосно се содржат во D .

Нека S_i се елементи од површината S чии проекции на D , соодветно се D_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Нека:

$$(x_i, y_i, z(x_i, y_i))$$

се произволни точки од S_i , $i = 1, 2, \dots, n$ соодветно.

Ја формираме сумата:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i.$$

Кога $\|\mathcal{P}\| = \max_{i=1,2,\dots,n} \text{diam} S_i \rightarrow 0$ за која било поделба $\mathcal{P}$ на $\bar{D}$ и кој било избор на точките $(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \in S_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; тогаш бројот $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$ тежи кон нејзината граница.

Последниов заклучок води до следнава дефиниција:

Дефиниција 9.1.1. Нека површината S е график на функцијата $z = z(x, y)$ која е непрекината и има непрекинати парцијални изводи на затворена и ограничена област D чиј раб е по делови глатка затворена крива. Нека функцијата $f(x, y, z)$ е ограничена на S . **Површински интеграл од прв тип на f над D** , ознака $\iint_S f(x, y, z) dS$, е бројот:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\max_{i=1,2,\dots,n} \text{diam} S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i.$$

9.1.2. СВОЈСТВА НА ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ПРВ ТИП

За површински интеграл од прв тип важат аналогни својства како за другите интеграли. На пример, ако површината S е унија од површините S_i , $i = 1, 2, \dots, n$; кои се сечат најмногу по глатка крива и f е непрекината функција на S , тогаш површинскиот интеграл на површината S , ако постои, е збир од површинските интеграли на површините од кои се состои, т.е.:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS + \dots + \iint_{S_n} f(x, y, z) dS.$$

9.1.3. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ПРВ ТИП

- Од делот за плошина на површина следува дека ако $f = f(x, y, z)$ е непрекината функција над S и $z = z(x, y)$ има непрекинати парцијални изводи $p = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ и $q = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ над D , тогаш елементот на површината е:

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

и површинскиот интеграл од прв тип е:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$$

- Ако $f = f(x, y, z)$ е непрекината функција над S и постои функцијата $y = y(x, z)$ која има непрекинати парцијални изводи $p = \frac{\partial y}{\partial x}(x, z)$ и $q = \frac{\partial y}{\partial z}(x, z)$ над $D = D_{xz}$, каде D_{xz} е проекцијата на S на xOz рамнината, која ги исполнува условите од теоремата, тогаш елементот на површината е:

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \text{ и:}$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dz.$$

• Аналогно ако $S: x = x(y, z); f = f(x, y, z)$ е непрекината на S , $p = \frac{\partial x}{\partial y}(y, z)$ и $q = \frac{\partial x}{\partial z}(y, z)$, тогаш:

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

и:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dy dz.$$

Задача 9.1.3. Да се пресмета површинскиот интеграл:

$$I = \iint_S (x^2 + y^2) dS,$$

каде што S е долниот дел на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение. Равенката на сферата ја изразуваме експлицитно:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow z^2 = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Долниот дел на сферата има равенка: $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, од каде што:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-2y}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

и:

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}} dx dy = \\ &= \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

При премин во поларни координати:

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$; од каде што: $dx dy = \rho d\varphi d\rho$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$;

границите се: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 1$.

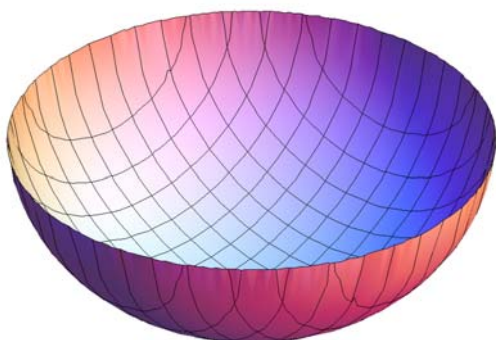
Сега го пресметуваме на интегралот:

$$I = \iint_D \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} \rho d\rho =$$

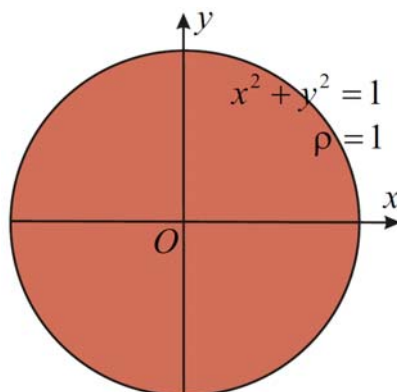
$$\left(\begin{array}{l} 1 - \rho^2 = t^2 \quad 2\rho d\rho = -2tdt \quad \rho = 0 \Rightarrow t = 1 \\ \rho^2 = 1 - t^2 \quad \rho d\rho = -tdt \quad \rho = 1 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right) =$$

$$2\pi \int_1^0 \frac{1-t^2}{t} (-t) dt = 2\pi \int_0^1 (1-t^2) dt =$$

$$2\pi \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 2\pi \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$



Цртеж 9.1.3.1.



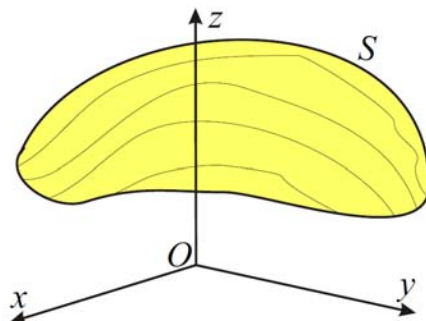
Цртеж 9.1.3.2.

9.1.4. ПРИМЕНА НА ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ПРВ ТИП. ПЛОШТИНА НА ПОВРШИНА

Ако $f(x, y, z) = 1$, тогаш површинскиот интеграл:

$$P = \iint_S dS$$

претставува плоштината P на површината S .



Цртеж 9.1.4.

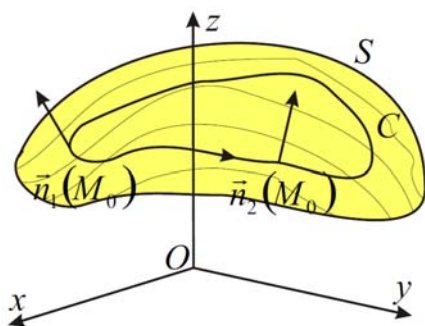
9.2. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ВТОР ТИП

Површинските интеграли од втор тип се дефинираат со помош на површинските интеграли од прв тип така што се избира ориентацијата на површината, аналогно како што се избира ориентацијата на кривата и место плоштините на елементите на површината се разгледуваат плоштините на елементите на нивните проекции на координатните рамнини.

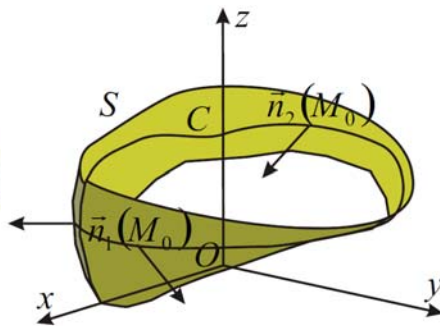
9.2.1. ЕДНОСТРАНИ И ДВОСТРАНИ ПОВРШИНИ

Нека површината S е график на функцијата $z = z(x, y)$ која е непрекината и има непрекинати парцијални изводи (т.е. површината е глатка) и S е ограничена со по делови глатка затворена крива ∂S .

Бидејќи површината е глатка, постојат два единечни вектора на нормалата на површината, $\vec{n}$ и $-\vec{n}$ во произволна точка $M_0 \in S \setminus \partial S$. Векторот се нормализира, $\vec{n}/|\vec{n}|$, да биде единечен. Нека C е крива во $S \setminus \partial S$ што ја содржи M_0 . Тогаш векторот $\vec{n}(M)$, $M \in C$ е непрекината функција. Ако за секоја почетна точка M_0 од $S \setminus \partial S$ и секоја затворена крива C во $S \setminus \partial S$, почетниот вектор на нормалата $\vec{n} = \vec{n}_1(M_0)$ е еднаков на векторот на нормалата $\vec{n} = \vec{n}_2(M_0)$ на крајот на непрекинатото движење по кривата C , тогаш површината се нарекува **двострана**. Во спротивно, површината се нарекува **еднострана**.



Цртеж 9.2.1.1.
Двострана површина.



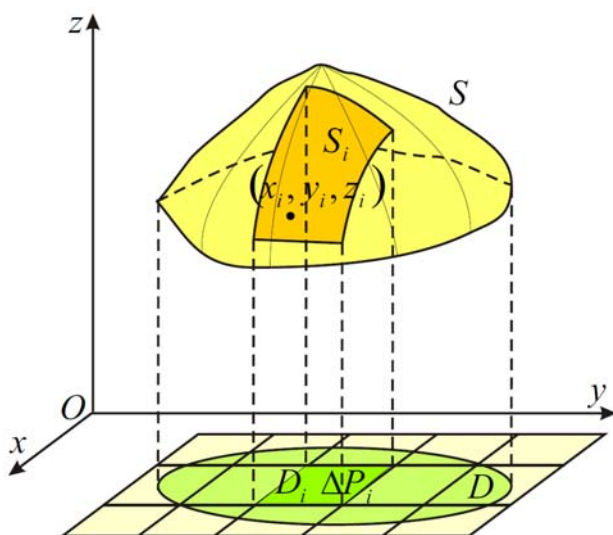
Цртеж 9.2.1.2.
Еднострана површина.

Површините што досега ги среќававме, како сфера, параболоид, хиперболоид итн., се двострани површини. Пример за еднострана површина е **Мебиусовиот лист** кој се добива кога страните AB и CD на правоаголникот $ABCD$, чии темиња се означени во правец спротивен од движењето на стрелките на часовникот, ќе се спојат така што точката B ќе се поклопи со D , а C со A .

Единечниот вектор на нормалата $\vec{n}$ ја одредува **ориентацијата** на двостраната површина. **Позитивна страна** на двостраната површина S е страната што се гледа од крајот на нормалниот вектор $\vec{n}$, добиен како векторски производ на двата тангентни вектора. Другата страна се нарекува **негативна страна**.

Ако не е нагласена ориентацијата на површината, тогаш под страна на површината ја подразбираме позитивната страна. Кај затворените површини разликуваме **надворешна** страна кога векторот е насочен надвор од телото што го гради површината, во спротивно страната е **внатрешна**. Ако векторот во секоја точка гради остар агол со z -оската тогаш таа страна ја нарекуваме **горна**, додека другата страна е **долна**.

9.2.2. ДЕФИНИЦИЈА НА ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ВТОР ТИП



Цртеж 9.2.1. Површински интеграл од втор тип.

• Нека површината S и функцијата $f = f(x, y, z)$ ги исполнуваат условите од 9.1.1.

Нека $\bar{D}$ е правоаголник што го содржи D и $\mathcal{P}$ е поделба на $\bar{D}$ што се состои од подправоаголници:

$$D_i \text{ со плоштини } \Delta P_i, i = 1, 2, \dots, n;$$

соодветно, што целосно се содржат во D . Нека S_i се елементи од површината S чии проекции, соодветно се $D_i, i = 1, 2, \dots, n$. Нека:

$$(x_i, y_i, z(x_i, y_i))$$

се произволни точки од $S_i, i = 1, 2, \dots, n$; соодветно.

Ја формираме сумата:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta P_i.$$

Кога $\|\mathcal{P}\| = \max_{i=1,2,\dots,n} \text{diam} P_i \rightarrow 0$ за која било поделба $\mathcal{P}$ на $\bar{D}$ и за кој било избор на точките $(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \in S_i, i = 1, 2, \dots, n$; тогаш $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta P_i$ тежи кон нејзиниот лимес.

Последниов заклучок води до следнава дефиниција.

Дефиниција 9.2.2. Нека површината S е график на функцијата $z = z(x, y)$ која е непрекината и има непрекинати парцијални изводи затворена и ограничена област D чиј раб е по делови глатка затворена крива. Нека функцијата $f(x, y, z)$ е непрекината на S . **Површински интеграл од втор тип на f над D** , ознака $\iint_S f(x, y, z) dx dy$, е бројот:

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta P_i.$$

• Аналогно се дефинираат:

$$\iint_S f(x, y, z) dx dz \text{ и } \iint_S f(x, y, z) dy dz.$$

Во пракса се среќава **општиот** (потполн) **облик** на површински интеграл од втор тип:

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + \iint_S Q(x, y, z) dx dz + \iint_S R(x, y, z) dx dy,$$

и се означува со:

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy.$$

9.2.3. СВОЈСТВА НА ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ВТОР ТИП

Површинскиот интеграл од втор тип поседува аналогни својства како останатите интеграли.

9.2.4. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ВТОР ТИП

Нека површината S проектира на секоја од координатните рамнини и f е непрекината функција на S .

Површинскиот интеграл од втор тип се пресметува со сведување на двоен интеграл.

$$\bullet \iint_S f(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xOy}} f(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

каде што знакот „+“ се избира ако аголот меѓу нормалниот вектор $\vec{n}$ и ортот $\vec{k}$ на z -оската е остар. Во спротивно се избира знакот „-“.

Аналогно се пресметуваат:

$$\bullet \iint_S f(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{xOz}} f(x, y(x, z), z) dx dz, \text{ каде што:}$$

„+“ се избира ако $\angle(\vec{n}, \vec{j}) \leq \frac{\pi}{2}$, или „-“ ако $\angle(\vec{n}, \vec{j}) > \frac{\pi}{2}$, и:

$$\bullet \iint_S f(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yOz}} f(x(y, z), y, z) dy dz, \text{ каде што:}$$

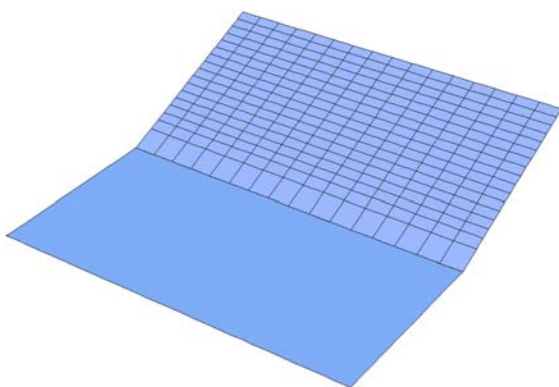
„+“ се избира ако $\angle(\vec{n}, \vec{i}) \leq \frac{\pi}{2}$, или „-“ ако $\angle(\vec{n}, \vec{i}) > \frac{\pi}{2}$.

Задача 9.2.4. Да се пресмета површинскиот интеграл:

$$I = \iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy,$$

по горната страна на делот од рамнината $x + 2z = 2$ што лежи во првиот октант и е отсечен со рамнината $y = 4$.

Решение. Делот од рамнината $x + 2z = 2$ во прв октант ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), претставува неограничена од една страна правоаголна лента. Од $2z \leq x + 2z = 2$ следува: $z \leq 1$, т.е. $z \in [0, 1]$.



Цртеж 9.2.4.1.

Рамнината $y = 4$ отсекува правоаголник:

$$x + 2z = 2, \quad y \in [0, 4], \quad z \in [0, 1]$$

кој ја определува бараната површина.

Површинскиот интеграл е во општ облик и може да се претстави како збир на површинските интеграли:

$$I = \iint_S xdydz + \iint_S ydxdz + \iint_S zdxdy$$

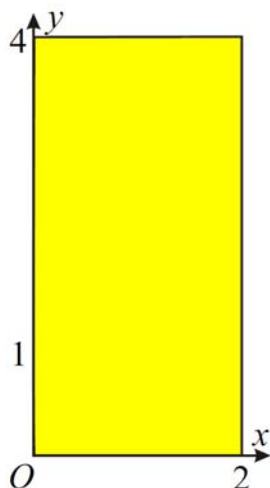
кои соодветно ќе ги означиме со I_1 , I_2 и I_3 . Притоа:



Цртеж 9.2.4.2.

$$I_1 = \int_0^4 dy \int_0^1 2(1-z) dz = 2y \Big|_0^4 \left(z - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 2 \cdot 4 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 4;$$

$I_2 = 0$ бидејќи проекцијата на xOz рамнината е отсечка, т.е. има мера (плоштина) нула;



Цртеж 9.2.4.3.

$$I_3 = \int_0^2 dx \int_0^4 \frac{2-x}{2} dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (2-x) dx \int_0^4 dy = \frac{1}{2} \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 \cdot 4 = 2(4-2) = 4.$$

Конечно:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 4 + 0 + 4 = 8.$$

9.2.5*. ВРСКА МЕЃУ ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ПРВ И ВТОР ТИП

Нека:

$$P = P(x, y, z), \quad Q = Q(x, y, z) \quad \text{и} \quad R = R(x, y, z)$$

се непрекинати функции во околина на површината S која исполнува одредени услови меѓу кои биективно да се пресликува на координатните рамнини на области D_{xy} , D_{xz} и D_{yz} кои заедно со своите рабови, исто така ги исполнуваат услови што овозможуваат постоење на интегралите наведени подолу. Тогаш, ако S е зададена со равенката $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$; важи:

$$\vec{n} = (-p, -q, 1), \quad |\vec{n}| = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad \text{и} \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{1}{|\vec{n}|}, -\frac{p}{|\vec{n}|}, -\frac{q}{|\vec{n}|} \right).$$

Од друга страна: $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, каде што $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$; се аглите што нормалниот вектор ги зафаќа со ортовите на x, y, z -оските соодветно во точката (x, y, z) , па:

$$\cos \alpha = \cos \alpha(x, y) = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos \beta = \cos \beta(x, y) = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad \text{и}$$

$$\cos \gamma = \cos \gamma(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Елементот на површината S е $dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, од каде
ШТО:

$$\begin{aligned} \iint_S R(x, y, z) dx dy &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy = \\ \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy &= \\ \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \cos \gamma(x, y) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy &= \\ \iint_{D_{xy}} \bar{R}(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy &= \iint_{D_{xy}} \bar{R}(x, y, z(x, y)) dS = \\ \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma dS, \quad \text{каде} \quad \bar{R}(x, y, z(x, y)) &= R(x, y, z(x, y)) \cos \gamma(x, y). \end{aligned}$$

Ако $\vec{n} = (p, q, -1)$ е спротивниот вектор, тогаш:

$$\cos \alpha = \cos \alpha(x, y) = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos \beta = \cos \beta(x, y) = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad \text{и}$$

$$\cos \gamma = \cos \gamma(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

од каде што, бидејќи $\cos \alpha < 0$, важи $\angle(\vec{n}, \vec{k}) \geq \frac{\pi}{2}$, па:

$$\begin{aligned} \iint_{S^-} R(x, y, z) dx dy &= - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy = \\ \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \cos \gamma(x, y) \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy &= \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma dS. \end{aligned}$$

Значи:

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma dS.$$

Со аналогни постапки се покажува дека:

$$\begin{aligned} \iint_S Q(x, y, z) dx dz &= \iint_S Q(x, y, z) \cos \beta dS \text{ и} \\ \iint_S P(x, y, z) dy dz &= \iint_S P(x, y, z) \cos \alpha dS, \end{aligned}$$

од каде што врската меѓу општ површински интеграл од прв и втор тип е дадена со формулата:

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy &= \\ \iint_S (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) dS. \end{aligned}$$

Меѓу елементите на областите и површината важат равенствата:

$$dy dz = \cos \alpha dS, \quad dz dx = \cos \beta dS \text{ и } dx dy = \cos \gamma dS.$$

9.3. ФОРМУЛА НА ГАУС-ОСТРОГРАДСКИ

Формулата на Гаус-Остроградски ја дава врската меѓу тројниот интеграл на затворена област V и површинскиот интеграл на затворена површина S , таква што $\partial V = S$.

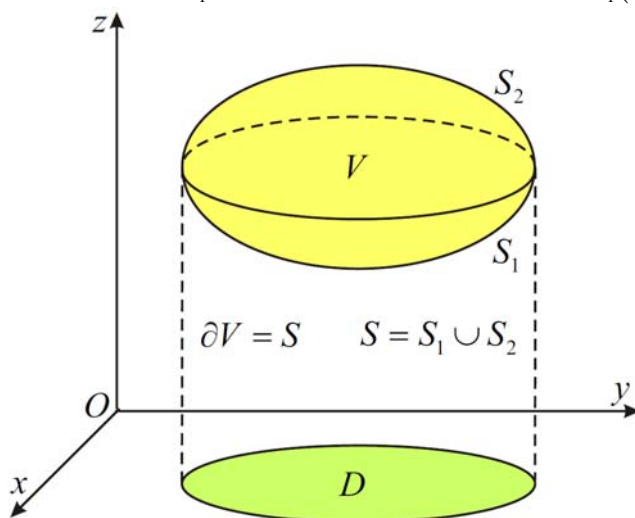
Теорема 9.3.1. (Формула на Гаус-Остроградски). Нека V е затворена, едноставна просторна област таква што $\partial V = S$ е по делови глатка затворена, едноставна површина со стандардна ориентација. Нека функциите:

$$P = P(x, y, z), \quad Q = Q(x, y, z) \quad \text{и} \quad R = R(x, y, z),$$

заедно со своите парцијални изводи, се непрекинати на V . Тогаш:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oiint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy.$$

Доказ. Ќе дадеме доказ само на случајот кога областа V е правилна како на цртежот 9.3.1. Нека D е проекцијата на површината S на xOy -рамнината. Нека површината S е поделена на горен дел, површината S_2 зададена со равенката $z = z_2(x, y)$, и долен дел, површината S_1 зададена со равенката $z = z_1(x, y)$.



Цртеж 9.3.1. Формула на Гаус-Остроградски.

Тогаш:

$$\begin{aligned}
 & \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz = \\
 & \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dz = \\
 & \iint_D R(x, y, z) \Big|_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dx dy = \\
 & \iint_D (R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))) dx dy = \\
 & \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy = \\
 & \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy = \\
 & \oiint_S R(x, y, z) dx dy .
 \end{aligned}$$

Добивме дека:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz = \oiint_S R(x, y, z) dx dy \quad (1).$$

Аналогно се покажува дека:

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) dx dy dz = \oiint_S P(x, y, z) dy dz \quad (2)$$

и

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) dx dy dz = \oiint_S Q(x, y, z) dx dy \quad (3).$$

Со собирање на (1)-(3) добиваме:

$$\begin{aligned}
 & \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) \right) dx dy dz = \\
 & \oiint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy . \blacksquare
 \end{aligned}$$

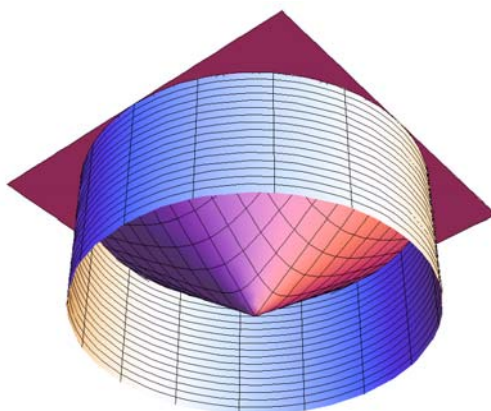
Задача 9.3.2. Да се пресмета површинскиот интеграл:

$$I = \iint_S xz dydz + x^2 y dx dz + y^2 z dx dy,$$

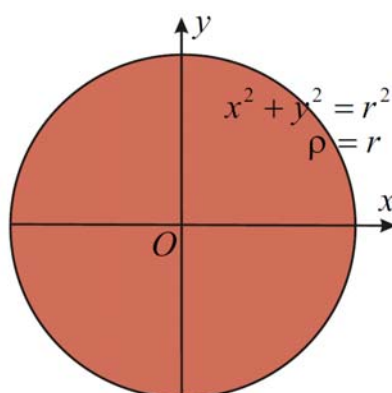
каде што S е надворешната страна на површината на телото во прв октант ограничено со површините:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad \text{и} \quad z = 0.$$

Решение. Ја скицираме површината.



Цртеж 9.3.2.1.



Цртеж 9.3.2.2.

Имаме:

$$I = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V (z + x^2 + y^2) dx dy dz =$$

$$\iint_D \left(\frac{z^2}{2} + (x^2 + y^2)z \right) \Big|_0^{\sqrt{x^2 + y^2}} = \iint_D \left(\frac{x^2 + y^2}{2} + (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx dy =$$

($x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ од каде што $dx dy = \rho d\varphi d\rho$, $x^2 + y^2 = \rho^2$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^r \left(\frac{\rho^2}{2} + \rho^3 \right) \rho d\rho = \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r \left(\frac{\rho^3}{2} + \rho^4 \right) d\rho =$$

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^r = \left(\frac{r^4}{8} + \frac{r^5}{5} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{(5r^4 + 8r^5)\pi}{80}.$$

9.4. ШТОКСОВА ФОРМУЛА

Штоксовата формула ја дава врската меѓу криволинискиот интеграл од втор тип по просторна крива C и површинскиот интеграл од втор тип по површината S чиј раб е кривата C .

Штоксовата формула е обопштување на Гриновата формула.

Согласна (индуцирана) ориентација на крива.

Ориентацијата на површината S индуцира ориентација на кривата $C = \partial S$, така што при движење низ површината од позитивната страна, ако површината е од лева страна тогаш насоката на кривата е позитивна, во спротивно е негативна. Во тој случај, ако со десната рака се држи нормалниот вектор на површината S така што палецот е во насока на векторот, тогаш четирите прсти ја даваат позитивната насока на кривата C .

Теорема 9.4.1. (Штоксова формула). Нека S е по делови глатка, ориентирана површина, ограничена со едноставна, по делови глатка, затворена крива $C = \partial S$, чија ориентација е согласна со ориентацијата на S . Нека функциите:

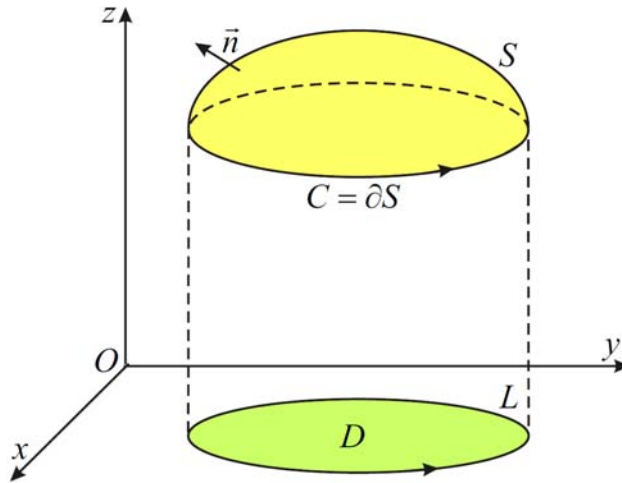
$$P = P(x, y, z), \quad Q = Q(x, y, z) \quad \text{и} \quad R = R(x, y, z),$$

заедно со своите парцијални изводи, се непрекинати во околина на S . Тогаш:

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Доказ. Ќе покажеме специјален случај на теоремата илустриран со цртежот 9.2.6.

Нека површината S е график на непрекинатата функција $z = z(x, y)$, на едноставна област D во xOy -рамнината, таква што $\partial D = L$. Нека парцијалните изводи на z се непрекинати. Нека D е проекција на површината S на xOy -рамнината. Тогаш кривата L е проекција на C .



Цртеж 9.4.1. Штоксова формула.

Нека $P^*(x, y) = P(x, y, z(x, y))$. Тогаш:

$$I = \oint_C P(x, y, z) dx = \oint_L P(x, y, z(x, y)) dx = \oint_L P^*(x, y) dx.$$

Ставајќи во Гриновата формула $Q = 0$ и $P = P$, добиваме:

$$I = - \iint_D \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial y} dx dy = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy.$$

Векторот:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right) \text{ е колинеарен со } (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

па важи:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\cos \beta} = \frac{-1}{\cos \gamma} \text{ од каде што следува дека: } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos \beta}{\cos \gamma}.$$

Исто така:

$$dy dz = \cos \alpha dS, \quad dz dx = \cos \beta dS \text{ и } dx dy = \cos \gamma dS.$$

Затоа:

$$I = - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) \cos \gamma dS = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS =$$

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta dS - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma dS = \iint_D \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy .$$

Притоа, $P = P(x, y, z)$ на површината S и $P = P(x, y, z(x, y))$ кога интегрираме на областа D . Добивме дека:

$$\oint_C P dx = \iint_D \frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (1).$$

Аналогно, со проекција на S на другите рамнини, се добиваат равенствата:

$$\oint_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz \quad (2)$$

и

$$\oint_C R dz = \iint_D \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx \quad (3).$$

Со собирање на равенствата (1)-(3) ја добиваме равенката:

$$\oint_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy . \blacksquare$$

Ако:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

го означиме со:

$$\begin{vmatrix} dy dz & dx dz & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

тогаш:

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} dy dz & dx dz & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Задача 9.4.2. Со примена на Штоксовата формула да се пресмета криволинискиот интеграл:

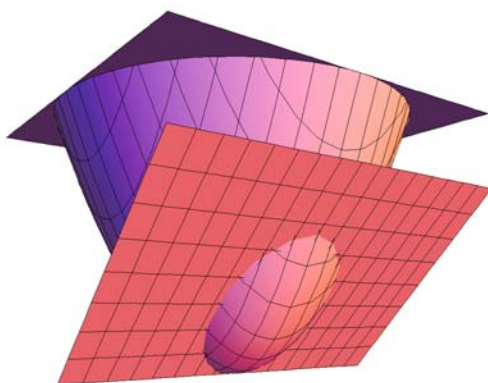
$$I = \int_C xy dx + x^2 dy + z^2 dz ,$$

каде што C е просторната крива $x^2 + y^2 = z$, $z = y$.

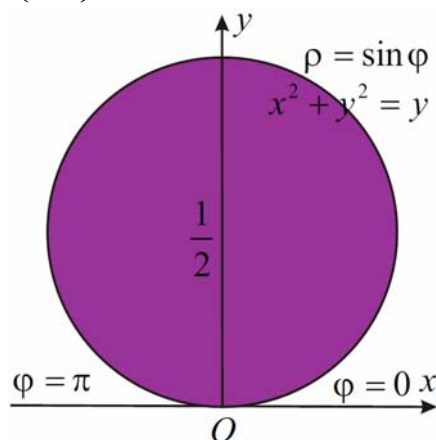
Решение. Проекцијата на кривата на xOy -рамнината е:

$$x^2 + y^2 = y \Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};$$

и претставува кружница со центар $C\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и радиус $R = \frac{1}{2}$.



Цртеж 9.4.2.1.



Цртеж 9.4.2.2.

Ги определуваме парцијалните изводи:

$$P = xy$$

$$Q = x^2$$

$$R = z^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0.$$

Следува:

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$\iint_S (2x - x) dx dy = \iint_S x dx dy = - \iint_D x dx dy.$$

Во поларни координати:

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ од каде што: $dx dy = \rho d\varphi d\rho$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$; равенката на кривата е:

$$x^2 + y^2 = y \Leftrightarrow \rho^2 = \rho \sin \varphi \Leftrightarrow \rho = \sin \varphi.$$

Затоа границите се: $0 \leq \varphi \leq \pi$ и $0 \leq \rho \leq \sin \varphi$. Следува:

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^\pi d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho \cos \varphi \rho d\rho = -\int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho^2 d\rho = -\int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^{\sin \varphi} = \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^\pi \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi = \begin{pmatrix} \sin \varphi = t & \varphi = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \cos \varphi d\varphi = dt & \varphi = \pi \Rightarrow t = 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \int_0^0 t^3 dt = 0. \end{aligned}$$

*Од Штоксовата формула се добиваат аналогни резултати за независност од патот на интеграција на просторни криви.

Ако интегралот $\oint_C Pdx + Qdy + Rdz$ има иста вредност по

секоја крива C во V која има иста почетна точка A и крајна B , велиме дека интегралот **не зависи од патот на интеграција** во

V и го означуваме со $\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz$.

Теорема 9.4.3*. Нека функциите:

$$P = P(x, y, z), \quad Q = Q(x, y, z) \text{ и } R = R(x, y, z);$$

заедно со своите парцијални изводи, се непрекинати во некоја околина на правилната просторна област V . Тогаш следниве тврдења се еквивалентни:

1) Интегралот $\oint_C Pdx + Qdy + Rdz$ не зависи од патот на интеграција на кривата C во V .

2) $\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$ за секоја затворена крива C во V .

3) Постои функција $U = U(x, y, z)$, таква што:

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz \text{ т.е. } P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y} \text{ и } R = \frac{\partial U}{\partial z} \text{ на } V.$$

4) Во сите точки од областа V важи:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

10. ВЕКТОРСКА АНАЛИЗА

10.1. ВЕКТОРСКИ ФУНКЦИИ

Дефиниција на векторска функција (вектор).

Претходно проучувавме функции чии кодомени се реални броеви. Во овој пасус ќе ги проучиме функциите чии кодомени се вектори кои ги користевме во темата Аналитичка геометрија од Математика 1. Овие функции имаат значајна примена во техниката.

Дефиниција 10.1.1. Нека се дадени функциите:

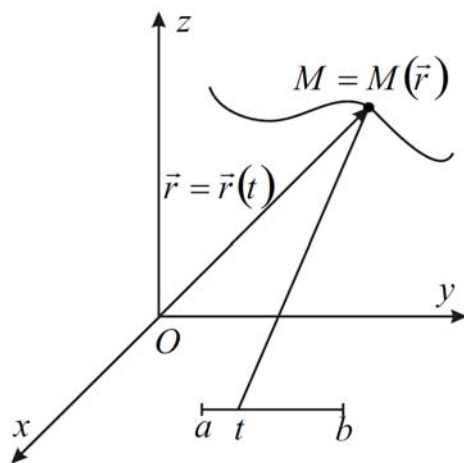
$$x, y, z : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}.$$

Функцијата $\vec{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, определена со:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t)),$$

се нарекува **векторска функција** (од три променливи).

Функциите x, y и z се нарекуваат **компоненти** на $\vec{r}$.



Цртеж 10.1.1. Векторска функција.

Доменот на векторската функција е множество броеви кои ќе ги означуваме со малите латински букви. Најчесто се користи буквата t , бидејќи во многу функции што што имаат практична примена доменот е интервал, а t го означува поминатото време (time). Правилата на пресликувањата ги означуваме со малите латински букви со знак за вектор, како што означуваме вектори.

Најчесто се зема буквата $\vec{r}$. Ако векторската функција е зададена со формула, освен кога има дополнителни ограничувања, доменот е множеството од сите броеви за кои формулата има смисла. Графикот на векторската функција не може да се скицира, бидејќи ни се потребни 4 димензии, една за доменот и три за кодоменот (рангот). Затоа векторските функции ги определуваме само со скицирање на нивниот кодомен.

Векторската функција се нарекува константна ако нејзините компоненти се константни функции.

Една крива во простор може да се определи или со векторска функција или со параметарски равенки. Со стрелка на кривата ја означуваме насоката на нејзиното исцртување, при растење на параметарот t .

Пример 10.1.1. Кривата:

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \quad t \in [0, 2\pi] ;$$

може да се запише со векторската функција:

$$\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, t), \quad t \in [0, 2\pi] .$$

Граница и непрекинатост на векторска функција.

Поимите граница, извод и интеграл на векторска функција се аналогни на соодветните поими за скаларни функции.

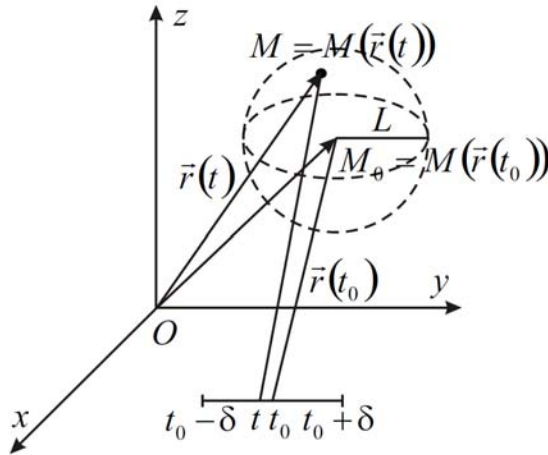
Дефиниција 10.1.2. Нека $\vec{r}$ е векторска функција дефинирана во околина на точката t_0 . Векторот $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ е **граница на $\vec{r}(t)$ кога t тежи кон t_0** (во точката t_0) ако за секое $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$, така што од:

$$0 < |t - t_0| < \delta \quad \text{да следува} \quad \|\vec{r}(t) - \vec{L}\| < \varepsilon .$$

Означуваме со $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{L}$.

Притоа, $\|\vec{r}(t) - \vec{L}\|$ е растојанието меѓу точките $M = M(\vec{r}(t))$ и $M_0 = M(\vec{r}(t_0))$, т.е.:

$$\|\vec{r}(t) - \vec{L}\| = \sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2 + (z(t) - z(t_0))^2} .$$



Цртеж 10.1.2. Граница на векторска функција.

Интуитивно, $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{L}$ значи дека може да го избереме $\vec{r}(t)$ колку сакаме блиску до $\vec{L}$, со избор на доволно блиску t до t_0 . Ако $\vec{r}(t)$ и $\vec{L}$ ги гледаме како точки во простор, тогаш неравенството $\|\vec{r}(t) - \vec{L}\| < \varepsilon$ значи дека $\vec{r}(t)$ лежи во внатрешноста на топка со центар во $\vec{L}$ радиус ε .

Аналогно се дефинира лева и десна граница на $\vec{r}(t)$ **кога** t **тежи кон** t_0^- (t_0^+).

Следната теорема покажува дека границата на векторската функција може да се определи преку границите на нејзините компоненти.

Теорема 10.1.3. (Критериум за пресметување граница на векторска функција). Нека $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Тогаш $\vec{r}$ има граница во t_0 ако и само ако x, y и z имаат граница во t_0 и

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) \right).$$

Доказ. $\Rightarrow$) Нека $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{L}$, каде $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$. Значи за секое $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ такво што:

$$\|\vec{r}(t) - \vec{L}\| < \varepsilon \text{ кога } 0 < |t - t_0| < \delta.$$

Но, тогаш:

$$\begin{aligned} & |x(t) - L_x|, |y(t) - L_y|, |z(t) - L_z| \leq \\ & \sqrt{\left(|x(t) - L_x|\right)^2 + \left(|y(t) - L_y|\right)^2 + \left(|z(t) - L_z|\right)^2} = \|\vec{r}(t) - \vec{L}\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Следува:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = L_x, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = L_y \text{ и } \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = L_z.$$

$\Leftarrow$) Нека $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ и постојат границите $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = L_x$,

$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = L_y$ и $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = L_z$. Значи, за секое $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$

такво што од $0 < |t - t_0| < \delta$ следува:

$$|x(t) - L_x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, |y(t) - L_y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \text{ и } |z(t) - L_z| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

Тогаш:

$$\begin{aligned} \|\vec{r}(t) - \vec{L}\| &= \sqrt{\left(|x(t) - L_x|\right)^2 + \left(|y(t) - L_y|\right)^2 + \left(|z(t) - L_z|\right)^2} < \\ & \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)^2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Според дефиниција 10.1.2, следува дека постои $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t)$ и

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) \right). \blacksquare$$

Пример 10.1.2. Да се најде: $\vec{L} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(t \sin t, \frac{\sin t}{t}, t^2 + 2 \right).$

Решение. $\vec{L} = \left(\lim_{t \rightarrow 0} t \sin t, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}, \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 + 2) \right) = (0, 1, 2).$

Следнава теорема овозможува пресметување граница на векторска функција добиена преку други векторски функции.

Теорема 10.1.4. (Својства на граница на векторска функција). Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се векторски функции, и f и g се реални функции. Ако постојат:

$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t)$ и $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{b}(t)$, како и $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ и $\lim_{s \rightarrow s_0} g(s) = t_0$, тогаш:

$$1) \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{a} \pm \vec{b})(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{b}(t);$$

$$2) \lim_{t \rightarrow t_0} f\vec{a}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t);$$

$$3) \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{a} \cdot \vec{b})(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{b}(t);$$

$$4) \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{a} \times \vec{b})(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{b}(t);$$

$$5) \lim_{s \rightarrow s_0} (\vec{a} \circ g)(s) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t).$$

Доказ. Ќе го докажеме само 3). Докажете на останатите тврдења се аналогни. Нека:

$$\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) \text{ и } \vec{b}(t) = (b_x(t), b_y(t), b_z(t)).$$

Бидејќи постојат границите на a_x, a_y, a_z, b_x, b_y и b_z во t_0 , може да го примениме правилото за пресметување граница на функција од претходната теорема, според кое:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{a} \cdot \vec{b})(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} (a_x(t)b_x(t) + a_y(t)b_y(t) + a_z(t)b_z(t)) = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} a_x(t) \lim_{t \rightarrow t_0} b_x(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} a_y(t) \lim_{t \rightarrow t_0} b_y(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} a_z(t) \lim_{t \rightarrow t_0} b_z(t) = \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow t_0} a_x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} a_y(t), \lim_{t \rightarrow t_0} a_z(t) \right) \cdot \left(\lim_{t \rightarrow t_0} b_x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} b_y(t), \lim_{t \rightarrow t_0} b_z(t) \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{b}(t). \blacksquare \end{aligned}$$

Аналогно тврдење важи за лев и за десен лимес.

Пример 10.1.3. Нека:

$$\vec{r}_1(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t, \sqrt{t}) \text{ и } \vec{r}_2(t) = \left(\frac{4}{\pi} \arctgt, \frac{4}{\pi} \arcsin t, \ln t \right).$$

Да се најде: $\lim_{t \rightarrow 1^-} (\vec{r}_1 \vec{r}_2)(t)$ и $\lim_{t \rightarrow 1^-} (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)(t)$.

Решение. За пресметувањето на секоја граница имаме два начина. Да го најдеме производот (скаларен и векторски) на $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, а потоа да ја пресметаме неговата лева граница кога $t \rightarrow 1^-$, или да ги најдеме левите граници на $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ кога $t \rightarrow 1^-$, а потоа да го пресметаме нивниот производ. Според првиот начин добиваме:

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \vec{r}_1(t) = (-1, 0, 1) \text{ и } \lim_{t \rightarrow 1^-} \vec{r}_2(t) = (1, 2, 0), \text{ од каде што:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (\vec{r}_1 \vec{r}_2)(t) = -1$$

и

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)(t) = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2, 1, -2). \blacksquare$$

Откако го проучивме поимот граница на векторска функција, ќе го дефинираме поимот непрекинатост и ќе дадеме критериум за определување непрекинатост на векторска функција преку нејзините компоненти. Повторно, дефиницијата е аналогна со дефиницијата за реалните функции.

Дефиниција 10.1.5. Векторската функција $\vec{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ е **непрекината** во точката $t_0 \in D$ ако $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Од критериумот за пресметување граница на векторска функција, и дефинициите за непрекинатост на скаларна функција директно следува точноста на следнава теорема:

Теорема 10.1.6. (Критериум за непрекинатост на векторска функција). Векторската функција $\vec{r}$ е непрекината во точката t_0 ако и само ако нејзините компоненти се непрекинати во t_0 .

Една векторска функција е **непрекината на интервалот** I ако и само ако е непрекината во секоја точка од интервалот I . Заради претходната теорема, векторската функција е непрекината на интервалот I ако и само ако нејзините компоненти се непрекинати на I .

Извод на векторска функција. Ќе дефинираме извод на векторска функција, аналогно на извод на скаларна функција.

Дефиниција 10.1.7. Нека векторската функција $\vec{r}$ е дефинирана во околина на точката t_0 . **Извод на $\vec{r}$ во t_0** , ознака

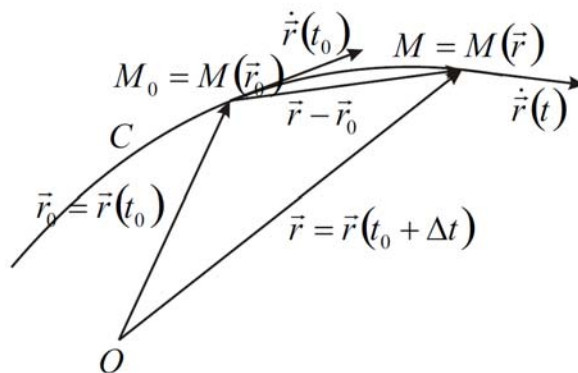
$\dot{\vec{r}}(t_0)$ ($\vec{r}'(t_0)$, $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$), е границата (ако постои):

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

Геометриска интерпретација на извод на векторска функција. Нека C е крива определена со $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Нека M_0 и M се точки на кривата C на кои соодветствуваат на радиус-векторите $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ и $\vec{r}(t)$, соодветно. Правата што минува низ точките M_0 и M се нарекува **секанта** на кривата C . Векторот:

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \vec{r} - \vec{r}_0$$

е носач на секантата и се нарекува **секантен** вектор.



Цртеж 10.1.8. Тангентен вектор.

Моментална брзина. Количникот $\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$ се нарекува **средна брзина на $\vec{r}$ меѓу t_0 и t** . Границата $\dot{\vec{r}}(t_0)$ се вика **(моментална) брзина на $\vec{r}$ во t_0** . За $t > t_0$, брзината има иста насока со $\overrightarrow{M_0M}$, додека за $t < t_0$ има иста насока со $\overrightarrow{MM_0}$. Следува дека векторот $\dot{\vec{r}}(t_0)$ е граница на векторите што имаат:

- 1) ист правец со секантните вектори $\overrightarrow{M_0M}$;
- 2) насоките кои се совпаѓаат со позитивната насока на C ; и
- 3) должина која е еднаква на должината на:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) \text{ врз } \overrightarrow{M_0M}.$$

Тангентен вектор. Векторот $\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$, исто така, е секантен вектор, носач на секантата што минува низ M_0 и M . Границата на секантните вектори го дава векторот кој е носач на правата што е граница на сите секанти. Оваа права ќе ја наречеме **тангента**, а векторот **тангентен** вектор. Интуитивно, тангентата ја допира кривата во некоја околина на точката M_0 .

Бидејќи границата од векторска функција се пресметува преку границите на нејзините компоненти, следува дека изводот на векторската функција се добива директно од изводите на компонентните функции, т.е. точна е следнава теорема:

Теорема 10.1.8. (Критериум за извод од векторска функција). Нека $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Тогаш $\vec{r}$ е диференцијабилна во t_0 ако и само ако x , y и z се диференцијабилни во t_0 и

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)).$$

Векторската функција $\vec{r}$ е **диференцијабилна на интервалот (a, b)** , $a, b \in \mathbb{R}$ ако е диференцијабилна во секоја точка $t \in (a, b)$, односно ако нејзините компоненти се

диференцијабилни за секое $t \in (a, b)$. Ако интервалот е затворен, $[a, b]$, тогаш $\vec{r}$ е **диференцијабилна на $[a, b]$** ако е диференцијабилна на (a, b) и постојат соодветните еднострани изводи во a и b .

Бидејќи правилата за извод на векторска функција се сведуваат на правилата за извод од реална функција, точна е следнава теорема:

Теорема 10.1.9. (Правила на извод од векторска функција). Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се диференцијабилни векторски функции во t_0 , f е диференцијабилна скаларна функција во t_0 , g е диференцијабилна скаларна функција во s_0 , каде што $g(s_0) = t_0$, и $\vec{c}$ е константна функција. Тогаш:

$$1) \dot{\vec{c}}(t_0) = 0, (\dot{\vec{c}\vec{a}})(t_0) = \vec{c}\dot{\vec{a}}(t_0);$$

$$2) (\dot{\vec{a} \pm \vec{b}})(t_0) = \dot{\vec{a}}(t_0) \pm \dot{\vec{b}}(t_0);$$

$$3) (\dot{f\vec{a}})(t_0) = \dot{f}(t_0)\vec{a}(t_0) + f(t_0)\dot{\vec{a}}(t_0);$$

$$4) (\dot{\vec{a} \cdot \vec{b}})(t_0) = \dot{\vec{a}}(t_0) \cdot \vec{b}(t_0) + \vec{a}(t_0) \cdot \dot{\vec{b}}(t_0);$$

$$5) (\dot{\vec{a} \times \vec{b}})(t_0) = \dot{\vec{a}}(t_0) \times \vec{b}(t_0) + \vec{a}(t_0) \times \dot{\vec{b}}(t_0);$$

$$6) (\dot{\vec{a} \circ g})(s_0) = \dot{\vec{a}}(g(s_0))\dot{g}(s_0) = \dot{\vec{a}}(t_0)\dot{g}(s_0);$$

$$7) (\dot{\vec{a}(t_0), \vec{b}(t_0), \vec{c}(t_0)}) = (\dot{\vec{a}}(t_0), \dot{\vec{b}}(t_0), \dot{\vec{c}}(t_0)) + (\vec{a}(t_0), \dot{\vec{b}}(t_0), \dot{\vec{c}}(t_0)) + (\vec{a}(t_0), \vec{b}(t_0), \dot{\vec{c}}(t_0)).$$

Пример 10.1.4. Нека $\vec{r}_1(t) = (\arctgt, 0, 5)$ и $\vec{r}_2(t) = (1, \ln t, -2t)$.

Најди $(\vec{r}_1 \vec{r}_2)'(t)$.

Решение. $\vec{r}_1 \vec{r}_2 = \arctgt - 10t$, од каде што $(\vec{r}_1 \vec{r}_2)' = \frac{1}{1+t^2} - 10$.

Следнава теорема е елементарна, но значајна последица на теоремата 6.1.5.

Теорема 10.1.10. Нека функцијата $\vec{r} = \vec{r}(t)$ е диференцијабилна на интервалот I .

Ако за секое $t \in I$, $|\vec{r}(t)| = C$, $C = \text{const}$, тогаш:

$\vec{r}(t) = \vec{0}$, $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{0}$ или $\vec{r}(t)$ и $\dot{\vec{r}}(t)$ се заемно нормални.

Доказ. Нека $\vec{r}$ е вектор со константна должина, т.е. $|\vec{r}| = C$.

Тогаш, $\vec{r}^2 = |\vec{r}|^2 = C^2$. Со диференцирање на равенката $\vec{r}^2 = C^2$, добиваме:

$$2\vec{r}\dot{\vec{r}} = 0 \text{ т.е. } \vec{r}\dot{\vec{r}} = 0.$$

Од својство за скаларен производ, следува дека за секое $t \in I$, $\vec{r}(t) = \vec{0}$, $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{0}$ или $\vec{r}(t)$ и $\dot{\vec{r}}(t)$ се заемно нормални. ■

Интеграл на векторска функција. Бидејќи поимот неопределен интеграл е обратен од извод, аналогно на функции од една променлива дефинираме интеграл на векторска функција од три променливи.

Дефиниција 10.1.11. Нека $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ е непрекината векторска функција на $[a, b]$. **Неопределен интеграл на $\vec{r}$ на $[a, b]$** , ознака $\int \vec{r}(t) dt$, е множеството од сите функции $\vec{R}$ такви што $\dot{\vec{R}}(t) = \vec{r}(t)$.

Секоја од функциите $\vec{R}$ се нарекува **примитивна функција на $\vec{r}$ на $[a, b]$** .

Бидејќи $\dot{\vec{R}}$ е дефинирана покомпонентно, од својствата на неопределен интеграл за реални функции, следува дека сите примитивни функции се разликуваат за константен вектор.

Од дефиницијата за примитивна функција на векторска функција следува точноста на следнава теорема:

Теорема 10.1.12. Нека $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, каде што $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$ се интегрибилни функции на $[a, b]$. Тогаш:

$$\int \vec{r}(t) dt = \left(\int x(t) dt, \int y(t) dt, \int z(t) dt \right).$$

Во неопределениот интеграл се јавува интеграциона константа која претставува константен вектор $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$.

Дефиниција 10.1.13. Нека $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, каде што $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$ се интегрибилни функции на $[a, b]$.

Определен интеграл на $\vec{r}$ на $[a, b]$, ознака $\int_a^b \vec{r}(t) dt$, е векторската функција:

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt, \int_a^b z(t) dt \right).$$

Од дефиницијата за определен интеграл на векторски функции, следува дека важи аналогна формула на **формулата на Њутн-Лајбниц**. Имено, ако $\vec{r}$ е непрекината на $[a, b]$, и $\vec{R}$ е една нејзина примитивна функција, тогаш:

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \vec{R}(b) - \vec{R}(a).$$

10.2. СКАЛАРНО ПОЛЕ
(СКАЛАРНО ПОЛЕ, ГРАДИЕНТ, ИЗВОД НА ВЕКТОР ВО ПРАВЕЦ)

Дефиниција 10.2.1. Функцијата $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ определена со:

$$u = u(x, y, z)$$

се нарекува **скаларно поле**.

Значи, кај скаларното поле доменот е множество вектори, додека кодоменот е скалар. Правилото на пресликување u на секој елемент (x, y, z) од доменот, му придружува елемент $u(x, y, z)$ од кодоменот.

Дефиниција 10.2.2. Нека $F = F(x, y, z)$ е диференцијабилна функција во точката $M_0 = M(x_0, y_0, z_0)$. **Градиент на F во M_0** , ознака $\text{grad}F(M_0)$ или $\nabla F(M_0)$, е векторот:

$$\text{grad}F(M_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \Big|_{M_0}.$$

Во продолжение ќе наведеме неколку својства на градиентот.

Теорема 10.2.3. (Својства на градиент). Нека $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ се диференцијабилни скаларни функции, f е диференцијабилна функција и C е константа. Тогаш:

- 1) $\text{grad}C = 0$, $\text{grad}Cu = C\text{grad}u$;
- 2) $\text{grad}(u \pm v) = \text{grad}u \pm \text{grad}v$;
- 3) $\text{grad}(uv) = (\text{grad}u)v + u\text{grad}v$;
- 4) $\text{grad} \frac{u}{v} = \frac{(\text{grad}u)v - u\text{grad}v}{v^2}$, $v \neq 0$;
- 5) $\text{grad}f(u) = f'(u)\text{grad}u$.

Извод на вектор во правец. Ако $u = f(x, y, z)$ е диференцијабилна функција, тогаш парцијалните изводи:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \text{ и } \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)$$

соодветно, ја претставуваат брзината на промена на функцијата f во точката во M_0 во правец на x , y и z оската, односно во правец на единечните вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Природно е да се разгледаат брзините на промена на функцијата и во останатите правци.

Нека е даден единечниот вектор $\vec{l}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ и функцијата $u = f(x, y, z)$ која е диференцијабилна во околина на точката $M_0 = M(\vec{r}_0)$, каде што $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. За произволна точка $M = M(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y, z)$; која лежи на правата што минува низ M_0 и е паралелна на $\vec{l}_0$ важи:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{l}_0 \Leftrightarrow x = x_0 + t \cos \alpha, y = y_0 + t \cos \beta, z = z_0 + t \cos \gamma.$$

Количникот од промената на функцијата во точките M_0 и M во насока на векторот $\vec{l}_0$, и нивното растојание е:

$$V(M) = \frac{f(M_0) - f(M)}{\overline{M_0 M}} \text{ за } t < 0;$$

или

$$V(M) = \frac{f(M) - f(M_0)}{\overline{M_0 M}} \text{ за } t > 0.$$

Заради $\overline{M_0 M} = t\vec{l}_0$, односно $\overline{M_0 M} = |t|$, т.е.

$$\overline{M_0 M} = t \text{ за } t > 0 \text{ и } \overline{M_0 M} = -t \text{ за } t < 0,$$

добиваме:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} V(M) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}.$$

Дефиниција 10.2.4. Нека $u = f(x, y, z)$ е диференцијабилна функција во околина на точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Нека $\vec{l}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ е единечен вектор. **Извод во правец на векторот $\vec{l}_0$ во точката M_0** , ознака $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}_0}(M_0)$, е границата:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}_0}(M_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}.$$

Теорема 10.2.5. Нека $u = f(x, y, z)$ е диференцијабилна функција во околина на точката $M_0 = M(x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{l}_0$ е ненулт вектор. Тогаш:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}_0}(M_0) = \text{grad} f(M_0) \cdot \vec{l}_0.$$

Доказ. Нека $\vec{l}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ и:

$$x(t) = x_0 + t \cos \alpha, \quad y(t) = y_0 + t \cos \beta \quad \text{и} \quad z(t) = z_0 + t \cos \gamma.$$

Тогаш: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ и $z(0) = z_0$; и:

$$\frac{dx}{dt} = \cos \alpha = \frac{dx}{dt}(0), \quad \frac{dy}{dt} = \cos \beta = \frac{dy}{dt}(0) \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dt} = \cos \gamma = \frac{dz}{dt}(0),$$

па:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{l}_0}(M_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Според правилото за извод од сложена функција:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{l}_0}(M_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \frac{dy}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \frac{dz}{dt}(0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \cos \gamma = \text{grad} f(M_0) \cdot \vec{l}_0. \end{aligned}$$

10.3. ВЕКТОРСКО ПОЛЕ

Дефиниција 10.3.1. Функцијата $\vec{a} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ определена со:

$$\vec{a}(x, y, z) = (a_x, a_y, a_z)$$

каде што $a_x, a_y, a_z : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ се скаларни полиња, се нарекува **векторско поле**.

Значи, кај векторското поле доменот и кодоменот се множества вектори. Правилото на пресликување $\vec{a}$ на секој елемент (x, y, z) од доменот, му придружува елемент $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ од кодоменот. Скаларните функции $a_x, a_y, a_z : D \rightarrow \mathbb{R}$ се нарекуваат **компонентни функции**.

Ако $u = f(M_0)$, каде што со M_0 е означена точката (x_0, y_0, z_0) , е диференцијабилна функција, тогаш:

$$\text{grad}F(M_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(M_0), \frac{\partial F}{\partial y}(M_0), \frac{\partial F}{\partial z}(M_0) \right)$$

е векторско поле.

Дефиниција 10.3.2. Нека:

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

е векторско поле такво што постојат $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$. **Дивергенција**

на $\vec{F}$, ознака $\text{div}\vec{F}$ или $\nabla \vec{F}$, е скаларното поле дефинирано со:

$$\text{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Векторското поле $\vec{F}(x, y, z)$ се нарекува **соленоидно** ако:

$$\text{div}\vec{F} = 0.$$

Дефиниција 10.3.3. Нека:

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

е векторско поле такво што постојат $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$. **Ротација** на $\vec{F}$, ознака $rot\vec{F}$ или $\nabla \times \vec{F}$, е векторското поле дефинирано со:

$$rot\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Ротацијата на $\vec{F}$ формално се означува со детерминанта од

трет ред:
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Векторското поле $\vec{F}(x, y, z)$ се нарекува **потенцијално** ако:

$$div\vec{F} = 0.$$

Теорема 10.3.4. Нека:

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

и P , Q и R имаат парцијални изводи од втор ред на D .

Тогаш мешаните изводи се еднакви ако и само ако полето $rot\vec{F}$ е соленоидно, т.е. $div(rot\vec{F}) = 0$.

Доказ. Имаме:

$$\begin{aligned} div(rot\vec{F}) &= div\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}\right). \blacksquare \end{aligned}$$

Следува дека мешаните изводи се еднакви ако и само ако:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0. \blacksquare$$

Потенцијал на векторското поле $\vec{F}$ е векторската функција u таква што $\operatorname{grad} u = \vec{F}$. Ако полето има потенцијал којшто има непрекинати парцијални изводи од втор ред, тогаш:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{F} = \operatorname{rotgrad} u &= \operatorname{rot}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) = 0, \end{aligned}$$

односно полето е потенцијално.

Дефиниција 10.3.5. Криволинискиот интеграл од втор тип:

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_C \vec{F}d\vec{r},$$

каде што $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, се нарекува **циркулација на векторското поле $\vec{F} = (P, Q, R)$ низ кривата C** .

Дефиниција 10.3.6. Површинскиот интеграл од втор тип:

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

каде што S е ориентирана површина и $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ е ортот на површината, се нарекува **флукс (поток) на векторското поле $\vec{F} = (P, Q, R)$ низ површината S** .

Во согласност со претходните две дефиниции, векторските записи на Штоксовата формула и формулата на Гаус-Остроградски, соодветно се:

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \iint_S (\operatorname{rot}\vec{F}) \cdot \vec{n} dS \quad (\text{Штокс});$$

и

$$\iiint_V (\operatorname{div}\vec{F}) dV = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{Гаус-Остроградски}).$$

11. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ГЕОМЕТРИЈА

11.1. ТАНГЕНТА И НОРМАЛНА РАМНИНА

Нека кривата C зададена со равенката:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in [a, b];$$

каде што $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ е диференцијабилна векторска функција во околина на точката $t_0 \in [a, b]$. Нека:

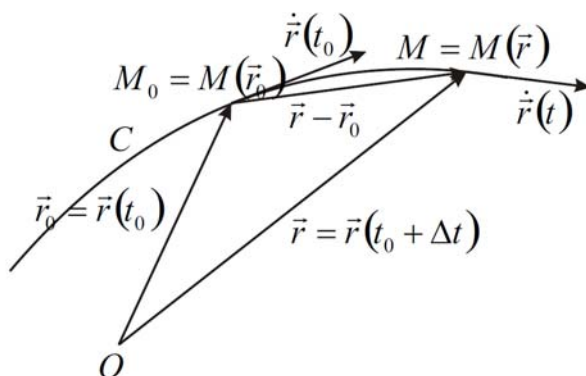
$$M_0 = M(\vec{r}_0), \quad \vec{r}_0 = \vec{r}(t_0).$$

Нека:

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0) \quad \text{и} \quad z_0 = z(t_0).$$

Следува:

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0).$$



Цртеж 11.1.1.

Промена на радиус-вектор и тангентен вектор на крива.

Во поглавјето векторска анализа ја видовме геометриската интерпретација на тангентниот вектор и потеклото на неговото име.

Дефиниција 11.1.1. Правата која минува низ M_0 и е паралелна на векторот $\dot{\vec{r}}(t_0)$ се нарекува **тангента** на кривата C во M_0 (или t_0). ■

Дефиниција 11.1.1. Нормална рамнина на кривата C во точката M_0 е рамнината која минува низ M_0 и е нормална на тангентата на C во M_0 . ■

Од дефиницијата следува дека нормалната рамнина на кривата C во M_0 , може да се определи и како рамнина во која лежат сите нормали на тангентата во M_0 .

Равенка на тангента и нормална рамнина. • Нека кривата C е зададена со параметарските равенки:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Од аналитичка геометрија следува дека равенката на правата што минува низ: $M(\vec{r}_0)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$; и е паралелна на:

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)),$$

има векторска равенка: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \dot{\vec{r}}(t_0)$ и скаларна равенка:

$$t : \frac{x-x_0}{t_1} = \frac{y-y_0}{t_2} = \frac{z-z_0}{t_3} \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y-y_0}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z-z_0}{\dot{z}(t_0)}.$$

Нормалната рамнина на кривата C во (x_0, y_0, z_0) е нормална на векторот $\dot{\vec{r}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$ и затоа нејзината равенка е:

$$\begin{aligned} N : A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) &= 0 \Leftrightarrow \\ \dot{x}(t_0)(x-x_0) + \dot{y}(t_0)(y-y_0) + \dot{z}(t_0)(z-z_0) &= 0. \end{aligned}$$

• *Нека кривата C е зададена имплицитно со равенките:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0 \quad (1).$$

Ако ја земеме променливата x за параметар, тогаш параметарските равенки на кривата се:

$$x = x, \quad y = y(x), \quad z = z(x),$$

од каде што имаме:

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = y'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad \dot{z} = z'(x) = \frac{dz}{dx}.$$

Со диференцирање на равенките во системот (1) по променливата x , го добиваме системот:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \dot{z} = -\frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \dot{z} = -\frac{\partial F_2}{\partial x} \end{cases}'$$

чиј решенија според Крамеровите формули се:

$$\dot{y} = D_{\dot{y}} / D \text{ и } \dot{z} = D_{\dot{z}} / D;$$

каде што:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad D_{\dot{y}} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix},$$

и

$$D_{\dot{z}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & -\frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & -\frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Оттука, равенката на тангентата во точката $M_0 = M(t_0)$, $t_0 = x_0$ е:

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y_0}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z_0}{\dot{z}(t_0)} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{D_{\dot{y}}(t_0) / D(t_0)} = \frac{z - z_0}{D_{\dot{z}}(t_0) / D(t_0)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x - x_0}{D(t_0)} = \frac{y - y_0}{D_{\dot{y}}(t_0)} = \frac{z - z_0}{D_{\dot{z}}(t_0)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}_{M_0}}.$$

и равенката на нормалната рамнина:

$$\dot{x}(t_0)(x - x_0) + \dot{y}(t_0)(y - y_0) + \dot{z}(t_0)(z - z_0) = 0$$

е:

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{array} \right\|_{M_0} (x - x_0) + \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{array} \right\|_{M_0} (y - y_0) + \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{array} \right\|_{M_0} (z - z_0) = 0 \\ & \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{array} \right\|_{M_0} = 0. \end{aligned}$$

11.2. КРИВИНА

Дефиниција 11.2.1. Параметарот s на кривата C што претставува должината на лакот $\widehat{M_0 M}$, т.е.

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt,$$

се нарекува **природен параметар**.

Својство 11.2.2. Ако s е природен параметар, тогаш:

$$|\vec{r}'(s)| = 1.$$

Доказ. Бидејќи $|\vec{r}'(s)| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right|$ и од математика 1:

$$\left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| \rightarrow 1 \text{ кога } \Delta s \rightarrow 0;$$

следеува:

$$|\vec{r}'(s)| = 1. \blacksquare$$

Заради равенството: $|\vec{r}'(s)| = 1$, означуваме $\vec{r}'(s) = \vec{t}(s)$, каде што $\vec{t}$ е единечен тангентен вектор и s е природен параметар.

Својство 11.2.3. Извод од единечен вектор е вектор нормален на него.

Доказ. Нека $\vec{t}$ е единечен вектор, т.е. $|\vec{t}| = 1$. Тогаш:

$$\vec{t}^2 = |\vec{t}|^2 = 1.$$

Со диференцирање на равенката $\vec{t}^2 = 1$, добиваме:

$$2\vec{t}\vec{t}' = 0 \text{ т.е. } \vec{t}\vec{t}' = 0.$$

Од критериумот за нормалност на два вектора со скаларен производ, следува дека векторот $\vec{t}'$ е нормален на $\vec{t}$. ■

Дефиниција 11.2.4. Кривина на кривата C во точката во која $s = s_0$ е бројот:

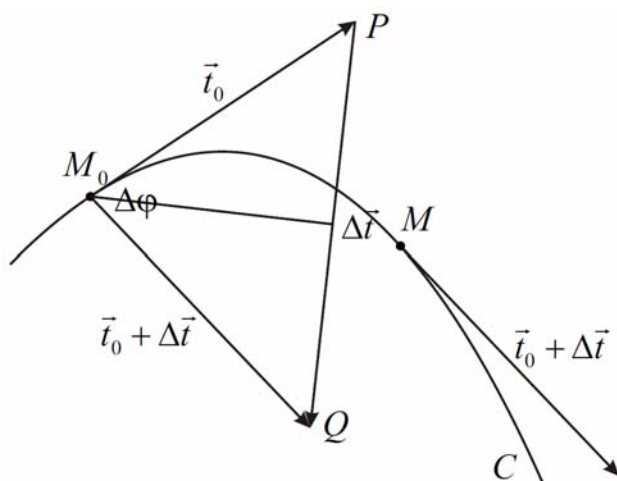
$$K(s_0) = |\vec{r}''(s_0)| \text{ т.е. } K = |\vec{r}''| \blacksquare$$

$$\text{Значи, } K(s) = |\vec{r}''(s)| = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \lim_{M_0M \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\vec{t}}{\Delta s} \right|.$$

Геометриска интерпретација на кривина на крива.

Триаголникот M_0PQ е рамнокрак бидејќи:

$$|\vec{t}_0| = |\vec{t}_0 + \Delta\vec{t}| = 1.$$



Цртеж 11.2.4. Промена на тангентен вектор на крива.

Нека $\Delta\varphi$ е аголот меѓу тангентните вектори во точките M_0 и M . Тогаш:

$$\left| \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right| = \frac{\overline{PQ}/2}{|\vec{t}_0|} = \frac{|\Delta\vec{t}|}{2} \text{ т.е. } |\Delta\vec{t}| = 2 \left| \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right|,$$

од каде што:

$$\left| \frac{\Delta\vec{t}}{\Delta s} \right| = \frac{2 \left| \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right|}{|\Delta s|} = \left| \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \right| \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| \rightarrow \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| \text{ кога } \Delta\varphi \rightarrow 0;$$

бидејќи:

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \right| = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \right| = 1.$$

Следува дека:

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\vec{t}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = |\varphi'(s)|.$$

Значи **кривината е мерка за закривеност на кривата**, односно за отстапување на кривата од правата во близина на M_0 .

Дефиниција 11.2.5. Радиус на кривина на кривата C во точката во која $s = s_0$ е бројот:

$$R(s_0) = \frac{1}{K(s_0)} \text{ т.е. } R = \frac{1}{K}.$$

Пресметување кривина на крива. • Ако кривата $C: \vec{r} = \vec{r}(s)$ е зададена со природен параметар, тогаш:

$$K(s) = |\vec{r}''(s)|.$$

• Нека кривата $C: \vec{r} = \vec{r}(t)$; е зададена со произволен параметар t . Тогаш според правилото за извод од параметарски зададена функција важи: $\vec{r}'(s) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\dot{s}(t)}$, од каде што:

$$\vec{r}'' = \frac{\dot{\vec{r}}'}{\dot{s}} = \frac{\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{s}} \right)}{\dot{s}} = \frac{1}{\dot{s}} \frac{\ddot{\vec{r}}\dot{s} - \dot{\vec{r}}\ddot{s}}{\dot{s}^2} = \frac{\ddot{\vec{r}}\dot{s} - \dot{\vec{r}}\ddot{s}}{\dot{s}^3}.$$

Имајќи предвид дека $\dot{s}$ и $\ddot{s}$ во дадена точка се броеви додека $\dot{\vec{r}}$ и $\ddot{\vec{r}}$ вектори (1), важи:

$$1 = |\vec{r}'| = \left| \frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{s}} \right|$$

од каде што:

$$|\dot{s}| = |\dot{\vec{r}}| \text{ или } \dot{s}^2 = \dot{\vec{r}}^2 \quad (2);$$

поради што:

$$2\dot{s}\ddot{s} = 2\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}} \text{ или } \dot{s}\ddot{s} = \dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}} \quad (3)$$

и

$$(\dot{s}\ddot{s})^2 = (\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2 \text{ т.е. } \dot{s}^2\ddot{s}^2 = (\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2 \text{ или } \ddot{s}^2 = \frac{(\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2}{\dot{s}^2};$$

од каде што:

$$\ddot{s}^2\dot{\vec{r}}^2 = \frac{(\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2}{\dot{s}^2}\dot{\vec{r}}^2 \stackrel{\dot{s}^2=\dot{\vec{r}}^2}{=} (\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2 \quad (4);$$

и

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}^2\ddot{\vec{r}}^2 - (\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2 &= |\dot{\vec{r}}|^2 |\ddot{\vec{r}}|^2 - (|\dot{\vec{r}}||\ddot{\vec{r}}|\cos\angle(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}))^2 = \\ |\dot{\vec{r}}|^2 |\ddot{\vec{r}}|^2 (1 - \cos^2\angle(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})) &= (|\dot{\vec{r}}||\ddot{\vec{r}}|\sin\angle(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}))^2 = |\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2 \quad (5); \end{aligned}$$

добиваме:

$$\begin{aligned} K^2 &= \left(\frac{\ddot{\vec{r}}\dot{s} - \dot{\vec{r}}\ddot{s}}{\dot{s}^3} \right)^2 = \frac{(\ddot{\vec{r}}\dot{s})^2 - 2(\ddot{\vec{r}}\dot{s})(\dot{\vec{r}}\ddot{s}) + (\dot{\vec{r}}\ddot{s})^2}{\dot{s}^6} \stackrel{1}{=} \frac{\dot{s}^2\ddot{\vec{r}}^2 - 2\dot{s}\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}\ddot{s} + \dot{s}^2\ddot{s}^2}{|\dot{s}|^6} \stackrel{2,3,4}{=} \\ &= \frac{\dot{\vec{r}}^2\ddot{\vec{r}}^2 - 2(\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2 + (\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2}{|\dot{\vec{r}}|^6} = \frac{\dot{\vec{r}}^2\ddot{\vec{r}}^2 - (\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}})^2}{|\dot{\vec{r}}|^6} \stackrel{5}{=} \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}{|\dot{\vec{r}}|^6}. \end{aligned}$$

Со коренување на последното равенство добиваме: $K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}.$

11.3. ПРИРОДЕН ТРИЕДАР. ТОРЗИЈА

Дефиниција 11.3.1. Правата што минува низ точката M_0 во која $s = s_0$ и е паралелна со векторот $\frac{d\vec{t}}{ds}(s_0)$ се нарекува **главна нормала** на кривата C во M_0 .

Од $K = \left| \ddot{\vec{r}}(s) \right| = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|$, важи $\frac{d\vec{t}}{ds} = K\vec{n}$, каде што $\vec{n}$ е единечен вектор и K е кривина на крива. Заради $|\vec{t}| = 1$ и својство 11.2.3, следува дека векторот $\frac{d\vec{t}}{ds}$ е нормален на $\vec{t}$, т.е. $\vec{n}$ е нормален на $\vec{t}$.

Дефиниција 11.3.2. Правата нормална на тангентата и главната нормала во M_0 се нарекува **бинормала** M_0 . ■

Векторот $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$ е носечки вектор на бинормалата. Бидејќи $\vec{t}$ и $\vec{n}$ се единечни вектори, следува дека и $\vec{b}$ е единечен вектор, т.е. $|\vec{b}| = 1$. Притоа, векторите $\vec{t}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ формираат десна тројка вектори или десен триедар $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ на C во M_0 .

Триедарот $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ се нарекува **природен триедар** (цртеж 11.3.2, стр. 202). Од:

$$\vec{b}' = (\vec{t} \times \vec{n})' = \vec{t}' \times \vec{n} + \vec{t} \times \vec{n}' = (\vec{t}' = K\vec{n}) = \vec{t} \times \vec{n}'$$

следува дека $\vec{b}'$ е нормален на $\vec{t}$. Исто така $|\vec{b}| = 1$, па $\vec{b}'$ е нормален и на $\vec{b}$. Значи, $\vec{b}'$ е колинеарен со $\vec{t} \times \vec{b} = -\vec{n}$, т.е. постои број T таков што:

$$\vec{b}' = T\vec{n}.$$

Значи, покажавме дека векторите $\vec{b}'$ и $\vec{n}$ се колинеарни, односно дека постои бројот T .

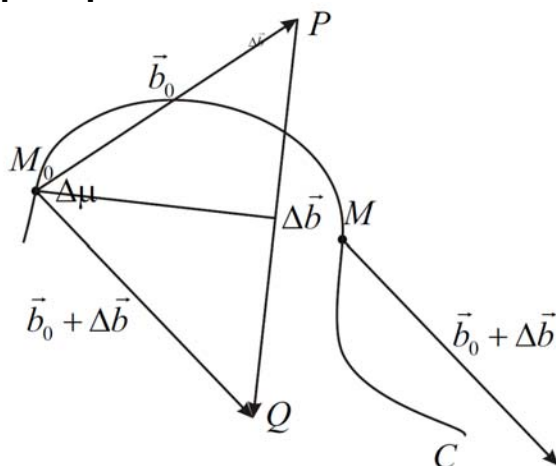
Дефиниција 11.3.3. Нека $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ е природен триедар на кривата C во точката M_0 . Бројот T таков што $\vec{b}' = T\vec{n}$ се нарекува **торзија** (втора кривина) на C во M . ■

За разлика од кривината K која е ненегативен број, торзијата T може да биде и негативна и позитивна.

Геометриска интерпретација на торзија. Слично како кај кривина на крива се добива дека:

$$|T| = |\vec{b}'| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mu}{\Delta s} \right|,$$

каде $\Delta \mu$ е аголот меѓу бинормалите во точките M_0 и M (цртеж 11.3.3). Следува дека **торзијата е мерка за закривеност на кривата во простор.**



Цртеж 11.3.3. Промена на вектор на бинормалата на крива.

Пресметување торзија на крива. • Нека кривата C е зададена со векторската равенка $\vec{r} = \vec{r}(s)$, каде што s е природен параметар. Тогаш:

$$\begin{aligned} T\vec{n} &= \vec{t} \times \vec{n}' (= \vec{b}') / \cdot \vec{n} \Leftrightarrow T\vec{n}^2 = (\vec{t} \times \vec{n}') \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \\ T &= (\vec{t}, \vec{n}', \vec{n}) \Leftrightarrow T = -(\vec{t}, \vec{n}, \vec{n}'). \end{aligned}$$

Притоа,

$$\vec{t} = \vec{r}', \quad \vec{t}' = K\vec{n} \quad \text{т.е.} \quad \vec{n} = \frac{1}{K} \vec{t}' = R\vec{r}''.$$

Со диференцирање на последната равенка добиваме:

$$\vec{n}' = R'\vec{r}'' + R\vec{r}'''.$$

Ако замениме во $T = -(\vec{t}, \vec{n}, \vec{n}')$, добиваме:

$$\begin{aligned} T &= -(\vec{r}', R\vec{r}'', R'\vec{r}'' + R\vec{r}''') = -((\vec{r}', R\vec{r}'', R'\vec{r}'') + (\vec{r}', R\vec{r}'', R\vec{r}''')) = \\ &= -(\vec{r}', R\vec{r}'', R\vec{r}''') = -R^2(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = -\frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{K^2} = -\frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|\vec{r}''|^2}. \end{aligned}$$

• Нека кривата C е зададена со векторската равенка $\vec{r} = \vec{r}(t)$, каде што t е произволен параметар. Тогаш заради:

$$\vec{r}' = \frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{s}},$$

$$\vec{r}'' = \frac{\ddot{\vec{r}}\dot{s} - \dot{\vec{r}}\ddot{s}}{\dot{s}^3} = \frac{\ddot{\vec{r}}}{\dot{s}^2} - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^3}\dot{\vec{r}} = \frac{\ddot{\vec{r}}}{\dot{s}^2} + A\dot{\vec{r}}, \text{ за некој број } A = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^3};$$

и

$$\vec{r}''' = \frac{(\vec{r}'')^\circ}{\dot{s}} = \frac{1}{\dot{s}}\left(\frac{\ddot{\vec{r}}}{\dot{s}^2} + A\dot{\vec{r}}\right) = \frac{1}{\dot{s}}\left(\frac{\ddot{\vec{r}}\dot{s}^2 - \ddot{s}\dot{\vec{r}}\dot{s}}{\dot{s}^4} + A\dot{\vec{r}} + A\dot{\vec{r}}\right) = \frac{\ddot{\vec{r}}}{\dot{s}^3} + B\ddot{\vec{r}} + C\dot{\vec{r}},$$

за некои броеви B и C .

Следува дека мешаниот производ $(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')$ се разложува на 6 собироци од кои 5 се нули бидејќи содржат колинеарни вектори како координати. Различен од нула е само членот:

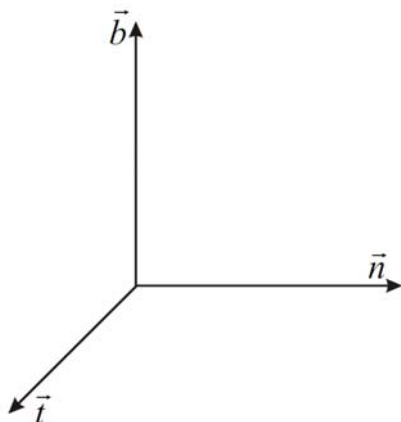
$$(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{s}}, \frac{\ddot{\vec{r}}}{\dot{s}^2}, \frac{\ddot{\vec{r}}}{\dot{s}^3}\right) = \frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})}{\dot{s}^6} = \frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}}|^6}.$$

Затоа:

$$T = -\frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|\vec{r}''|^2} = -\frac{\frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}}|^6}}{\left(\frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}\right)^2} = -\frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}.$$

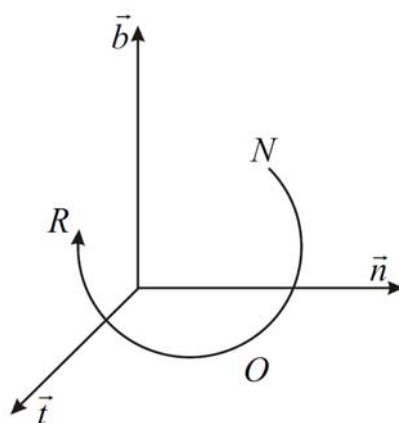
11.4. ОСНОВНИ ПРАВИ И РАМНИНИ

Дефиниција 11.4.1. Рамнините низ точката M_0 нормални на $\vec{t}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ соодветно, се нарекуваат **нормална, ректификациона и оскулаторна рамнина** (ознаки N , O и R соодветно). Правите низ M_0 паралелни на $\vec{t}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ соодветно, се нарекуваат **тангента, нормала и бинормала**. Правите и рамнините се нарекуваат **основни прави и рамнини**.



Цртеж 11.3.2.

Природен триедар.



Цртеж 11.4.2.

Основни прави и рамнини.

Редоследот на векторите $\vec{t}$, $\vec{b}$ и $\vec{n}$; кои формираат лева тројка вектори е соодветен на редоследот на соодветните рамнини по азбучен редослед на буквите, N , O и R . Бидејќи:

$$1) \vec{t} = \vec{r}' = \frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{s}} \text{ е колинеарен со } \dot{\vec{r}};$$

$$2) \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \vec{r}' \times R\vec{r}'' = \frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{s}} \times \left(R \left(\frac{\ddot{\vec{r}}}{\dot{s}^2} + A\dot{\vec{r}} \right) \right) \text{ е колинеарен со } \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}; \text{ и}$$

$$3) \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \text{ е колинеарен со } (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}} \text{ т.е. со } \dot{\vec{r}} \times (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}});$$

за да ги определиме основните прави и рамнини доволно е да ги најдеме векторите:

$$\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \text{ и } \dot{\vec{r}} \times (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}).$$

Задача 11.4.2. Да се најдат равенките на тангентата, нормалната рамнина, бинормалата, оскулаторната рамнина, главната нормала и ректификационата рамнина на кривата:

$$x = t^3 - t^2 - 5, \quad y = 3t^2 + 1, \quad z = 2t^3 - 16;$$

во точката во која $t = 2$.

Решение. Ги пределуваме вредностите на радиус-векторот и неговите први два извода во точката A во која $t = 2$.

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (t^3 - t^2 - 5, 3t^2 + 1, 2t^3 - 16) & A(-1, 13, 0); \\ \dot{\vec{r}} &= (3t^2 - 2t, 6t, 6t^2) & \dot{\vec{r}}(A) = (8, 12, 24) = 4(2, 3, 6); \\ \ddot{\vec{r}} &= (6t - 2, 6, 12t) & \ddot{\vec{r}}(A) = (10, 6, 24) = 2(5, 3, 12).\end{aligned}$$

Потоа ги наоѓаме единечните вектори:

$$\begin{aligned}\vec{t}(A) &= \frac{\dot{\vec{r}}(A)}{\|\dot{\vec{r}}(A)\|} = \frac{4(2, 3, 6)}{4\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{(2, 3, 6)}{\sqrt{49}} = \frac{(2, 3, 6)}{7}; \\ \vec{b}(A) &= \frac{\dot{\vec{r}}(A) \times \ddot{\vec{r}}(A)}{\|\dot{\vec{r}}(A) \times \ddot{\vec{r}}(A)\|} = \frac{4 \cdot 2 \left(\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \right)}{8(18, 6, 9)} = \frac{(2(3 \cdot 5 - 6 \cdot 12), 2(6 \cdot 3 - 5 \cdot 2), 2(2 \cdot 3 - 5 \cdot 5))}{8(18, 6, 9)} = \\ &= \frac{(2(-33), 2(8), 2(-17))}{8(18, 6, 9)} = \frac{(-33, 8, -17)}{4(18, 6, 9)} = \frac{(-33, 8, -17)}{72}; \\ \vec{n}(A) &= \frac{\ddot{\vec{r}}(A) \times \vec{t}(A)}{\|\ddot{\vec{r}}(A) \times \vec{t}(A)\|} = \frac{2 \cdot 4 \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right)}{96(21, -42, 14)} = \frac{(2(12 - (-18)), 2(-18 - 36), 2(18 - 12))}{96(21, -42, 14)} = \\ &= \frac{(2(30), 2(-54), 2(6))}{96(21, -42, 14)} = \frac{(30, -54, 6)}{48(21, -42, 14)} = \frac{(5, -9, 1)}{8(7, -14, 2)} = \frac{(5, -9, 1)}{56}.\end{aligned}$$

На крај ги запишуваме основните прави и рамнини:

$$\begin{aligned}t: \frac{x+1}{2} = \frac{y-13}{3} = \frac{z}{6}; & \quad N: \begin{cases} 2(x+1) + 3(y-13) + 6z = 0; \\ \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z - 37 = 0 \end{cases}; \\ \text{тангента} & \quad \text{нормална рамнина} \\ b: \frac{x+1}{6} = \frac{y-13}{2} = \frac{z}{-3}; & \quad O: \begin{cases} 6(x+1) + 2(y-13) - 3z = 0; \\ \Leftrightarrow 6x + 2y - 3z - 20 = 0 \end{cases}; \\ \text{бинормала} & \quad \text{оскулаторна рамнина} \\ n: \frac{x+1}{3} = \frac{y-13}{-6} = \frac{z}{2}; & \quad R: \begin{cases} 3(x+1) - 6(y-13) + 2z = 0; \\ \Leftrightarrow 3x - 6y + 2z + 81 = 0 \end{cases}. \\ \text{главна нормала} & \quad \text{ректификациона рамнина}\end{aligned}$$

II ДЕЛ. РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. ФУНКЦИИ ОД ДВЕ И ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

1.1. ФУНКЦИИ ОД ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ. ВОВЕД

Задача 1. Дадена е функцијата $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{2x - y}$. Да се најде:

$$f(1, 3), f(-2, 4).$$

Решение. Имаме:

$$f(1, 3) = \frac{1^2 + 3}{2 \cdot 1 - 3} = -4, \quad f(-2, 4) = \frac{(-2)^2 + 4}{2(-2) - 4} = -1.$$

Задача 2. Да се најде вредноста на функцијата:

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$$

во точките кои лежат на централна кружница со радиус r , $r \neq 1$.

Решение. За точките што лежат на централна кружница со радиус r важи $x^2 + y^2 = r^2$, од каде што:

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{1 - (x^2 + y^2)} = \frac{r^4}{1 - r^2}.$$

Задача 3. Дадена е функцијата $f(x, y) = xy + \frac{y}{x}$. Да се најде:

$$f(y, x), f(-x, -y), f(1, t), f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Решение. Имаме:

$$f(y, x) = yx + \frac{x}{y}; \quad f(-x, -y) = (-x)(-y) + \frac{(-y)}{(-x)} = xy + \frac{y}{x};$$

$$f(1, t) = 1 \cdot t + \frac{t}{1} = 2t; \quad f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{2y}{x}.$$

Задача 4. Да се докаже дека $f(2a, -a) = \frac{5}{4}$, $a \neq 0$; ако:

$$f(x, y) = \frac{2x - y}{x - 2y}.$$

Решение. Имаме:

$$f(2a, -a) = \frac{2(2a) - (-a)}{2a - 2(-a)} = \frac{5a}{4a} = \frac{5}{4}.$$

Задача 5. Да се најде $f(x + y, x - y) = xy + y^2$.

Решение. Ако ставиме $a = x + y$, $b = x - y$; добиваме:

$$a + b = 2x, \quad a - b = 2y \Leftrightarrow x = \frac{a + b}{2}, \quad y = \frac{a - b}{2}.$$

Оттука:

$$\begin{aligned} f(a, b) &= \frac{a + b}{2} \frac{a - b}{2} + \left(\frac{a - b}{2} \right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{4} + \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \\ &= \frac{2a^2 - 2ab}{4} = \frac{2(a^2 - ab)}{4} = \frac{a(a - b)}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Значи, } f(x, y) = \frac{x(x - y)}{2}.$$

1.2. ФОРМИРАЊЕ ФУНКЦИИ

Задача 1. Да се определи волуменот V на кружниот конус, како функција од генератрисата s и радиусот на основата r .

Решение. Волуменот на конусот е:

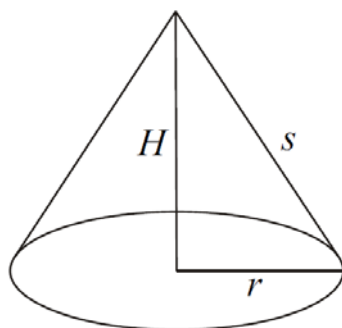
$$V = B \frac{H}{3} = r^2 \pi \frac{H}{3}.$$

Од Питагоровата теорема следува дека:

$$s^2 = H^2 + r^2 \text{ т.е. } H = \sqrt{s^2 - r^2}.$$

Значи:

$$V = \frac{r^2 \pi}{3} \sqrt{s^2 - r^2}.$$

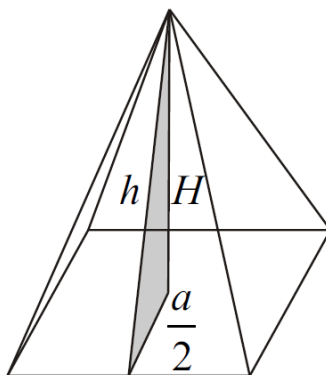


Цртеж 1.2.1.

Задача 2. Да се определи плоштината на правилна четиристрана пирамида како функција од нејзината висина H и работ на основата a .

Решение. Плоштината на пирамидата е:

$$P = B + M = a^2 + 4a \frac{h}{2} = a^2 + 2ah.$$



Цртеж 1.2.2.

Од Питагоровата теорема следува дека:

$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ т.е. } h = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

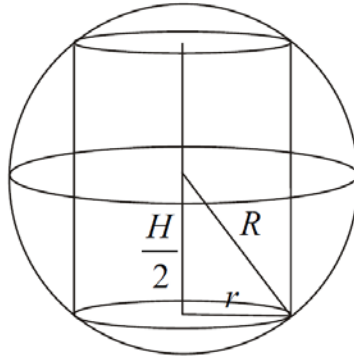
Оттука:

$$P = a^2 + 2a \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{4}} = a^2 + a \sqrt{a^2 + 4H^2}.$$

Задача 3. Во топка со произволен радиус R е впишан цилиндар. Да се изрази плоштината на цилиндарот како функција од неговата висина и од радиусот на топката, а потоа да се скицира дефиниционата област.

Решение: Од Питагоровата теорема важи:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2 \text{ т.е. } r^2 = R^2 - \frac{H^2}{4}.$$



Цртеж 1.2.5.

Следува дека плоштината на цилиндарот е:

$$P = 2B + M = 2r^2\pi + 2r\pi H = 2\left(R^2 - \frac{H^2}{4}\right)\pi + 2\sqrt{R^2 - \frac{H^2}{4}}\pi H = \left(2R^2 - \frac{H^2}{2} + H\sqrt{4R^2 - H^2}\right)\pi.$$

Функцијата $P = P(R, H)$ е функција од R и H . Притоа:

$$R > 0 \text{ и } 0 < H < 2R.$$

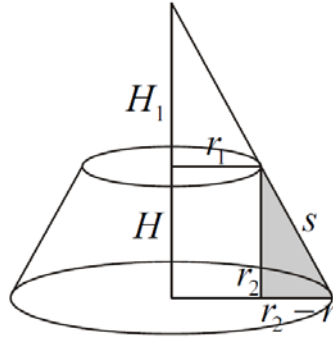
Задача 4*. Да се изрази генератрисата s на пресечен кружен конус, како функција од неговиот волумент V и радиусите r_1 и r_2 на неговите основи.

Решение. Нека r и r_1 се радиусите на долната и на горната основа на пресечениот конус, додека H неговата висина. Нека H_1 е висината на малиот конус.

Волуменот на пресечениот конус е разлика од волумените на големиот и на малиот конус, $V_2 = \frac{r_2^2 \pi H_2}{3}$ и $V_1 = \frac{r_1^2 \pi H_1}{3}$.

Од сличноста на обоениот триаголник со големиот и малиот бел триаголник важи:

$$\frac{H}{H_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_2} \text{ т.е. } H_2 = \frac{r_2}{r_2 - r_1} H; \text{ и } \frac{H}{H_1} = \frac{r_2 - r_1}{r_1} \text{ т.е. } H_1 = \frac{r_1}{r_2 - r_1} H.$$



Цртеж 1.2.4.

Следува дека волуменот на пресечениот конус е:

$$V = \frac{r_2^2 \pi}{3} \frac{r_2}{r_2 - r_1} H - \frac{r_1^2 \pi}{3} \frac{r_1}{r_2 - r_1} H = \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2 - r_1} \frac{\pi H}{3} = \frac{(r_2 - r_1)(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)}{r_2 - r_1} \frac{\pi H}{3} = (r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2) \frac{\pi H}{3},$$

од каде што:

$$H = \frac{3V}{\pi(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)}.$$

Од Питагоровата теорема за обоениот триаголник следува:

$$s^2 = (r_2 - r_1)^2 + H^2 \Leftrightarrow s^2 = (r_2 - r_1)^2 + \frac{9V^2}{\pi^2(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)^2},$$

од каде што:

$$s = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + \frac{9V^2}{\pi^2(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2(r_2 - r_1)^2(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)^2 + 9V^2}{\pi^2(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)^2}} = \frac{\sqrt{\pi^2(r_2^3 - r_1^3)^2 + 9V^2}}{\pi(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)}.$$

1.3. СКИЦИРАЊЕ ДЕФИНИЦИОНИ ОБЛАСТИ

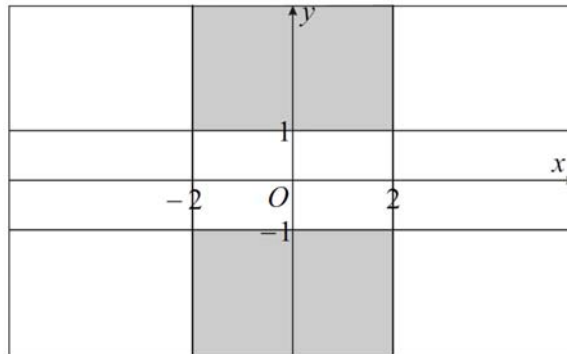
Задача 1-2. Да се скицираат дефиниционите области на функциите:

$$1) f(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}; \quad 2) f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Решение. Коренската функција е дефинирана ако аргументот е поголем или еднаков на нула.

1) Имаме:

$$4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 2]; \text{ и } \\ y^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \geq 1 \Leftrightarrow y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$



Цртеж 1.3.1.

2) За да постои коренот и количникот, соодветно треба да важи:

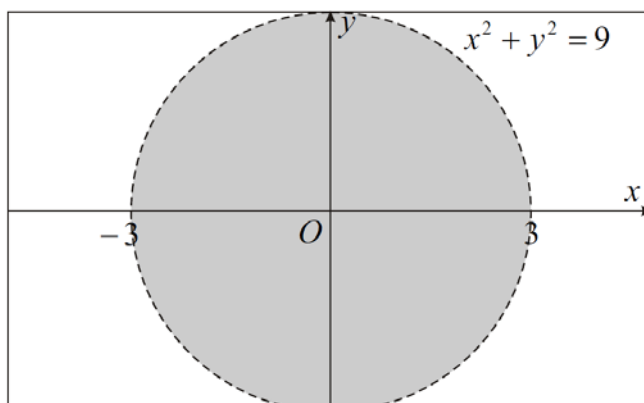
$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9;$$

и

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \neq 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 - y^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 9.$$

Од двата условия добиваме дека треба да важи: $x^2 + y^2 < 9$.

Следува дека дефиниционата област е внатрешноста на кружницата со центар во координатниот почеток и радиус 3.



Цртеж 1.3.2.

Задача 3-4. Да се скицираат дефиниционите области на функциите:

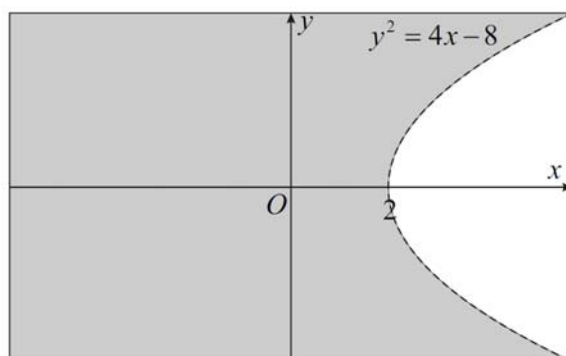
$$3) f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8); \quad 4) f(x, y) = \ln(x \ln(y - x)).$$

Решение. Логаритамската функција е дефинирана ако аргументот е поголем од нула, и има вредност поголема од 0, ако аргументот е поголем од 1. Следува:

$$3) y^2 - 4x + 8 > 0 \Leftrightarrow y^2 > 4x - 8. \text{ При тоа:}$$

$$y^2 = 4x - 8 \Leftrightarrow y^2 = 4(x - 2),$$

што претставува равенка на парабола со оска x -оската и теме $T(2, 0)$. Бидејќи за точката $O(0, 0)$ важи $0^2 > 4 \cdot 0 - 8$, следува дека $O \in D_f$, т.е. функцијата е дефинирана лево од параболата.



Цртеж 1.3.3.

4) Координатите на точките од дефиниционата област ги задоволуваат условите:

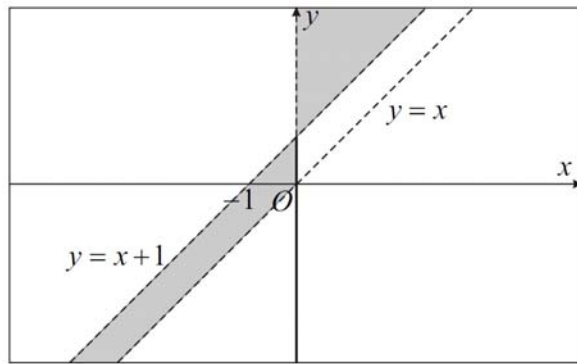
$$\text{а) } y - x > 0 \Leftrightarrow y > x$$

и

$$\text{б) } x \ln(y - x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \ln(y - x) > 0 \\ x < 0, \ln(y - x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0, y - x > 1 \\ x < 0, y - x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > x + 1 \\ x < 0, y < x + 1 \end{cases}.$$

Ги цртаме рабовите на областите $y = x$ и $y = x + 1$ и ја шрафираме бараната област.



Цртеж 1.3.4.

Задача 5-6. Да се скицираат дефиниционите области на функциите:

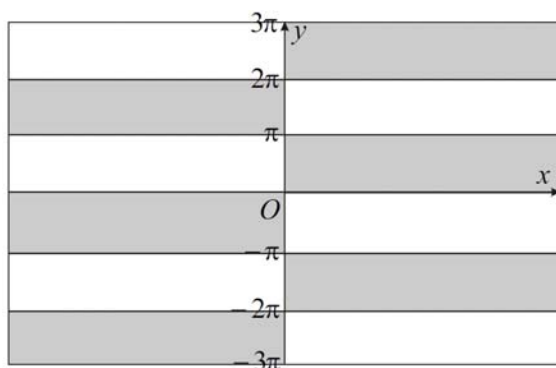
$$\text{5) } f(x, y) = \sqrt{x \sin y}; \quad \text{6) } f(x, y) = \ln \frac{x}{\cos y}.$$

Решение. Функциите синус и косинус се дефинирани на $\mathbb{R}$.

$$\text{5) } x \sin y \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \sin y \geq 0 \\ x \leq 0, \sin y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, y \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ x \leq 0, y \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k-1)\pi, 2k\pi] \end{cases}.$$

Притоа:

$$\sin y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Цртеж 1.1.3.5.

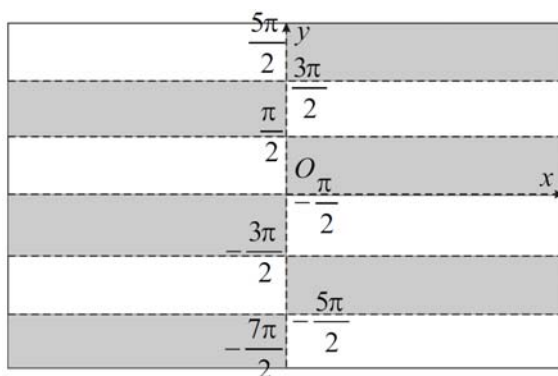
6) За да постои количникот $\cos y \neq 0$.

За да постои логаритмот треба да е исполнето:

$$\frac{x}{\cos y} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \cos y > 0 \\ x < 0, \cos y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \\ x < 0, y \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right) \end{cases}.$$

Притоа:

$$\cos y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Цртеж 1.3.6.

Задача 7-8. Да се скицираат дефиниционите области на функциите:

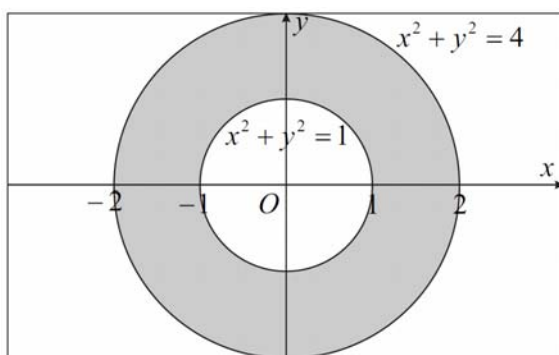
$$7) f(x, y) = \arcsin \frac{x^2 + y^2}{4} + \arccos \frac{1}{x^2 + y^2};$$

$$8) f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{1 - z^2}.$$

7) За да постои количникот треба: $x, y \neq 0$. Притоа:

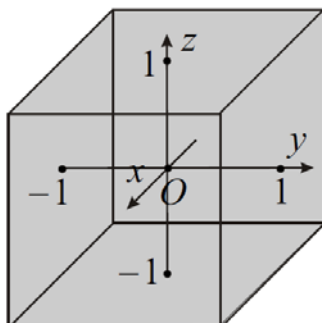
$$\left| \frac{x^2 + y^2}{4} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{4} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4;$$

$$\left| \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + y^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 1.$$



Цртеж 1.3.7.

8) Дефиниционата област на функцијата од 3 променливи може да формира тело. Имаме:



Цртеж 1.3.8.

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1];$$

$$1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 1 \Leftrightarrow y \in [-1, 1];$$

$$1 - z^2 \geq 0 \Leftrightarrow z^2 \leq 1 \Leftrightarrow z \in [-1, 1].$$

Значи, дефиниционата област е коцка со страна 2.

1.4. СКИЦИРАЊЕ ПОВРШИНИ СО НИВО ЛИНИИ

Задача 1. Види ја задача 1.2.2 од првиот дел.

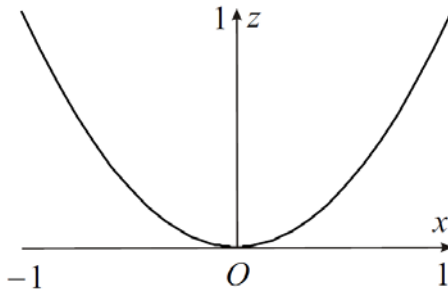
Задача 2. Да се скицира површината $z = x^2 + y^2$ со помош на главни пресеци и ниво линии.

Решение. Главни пресеци се:

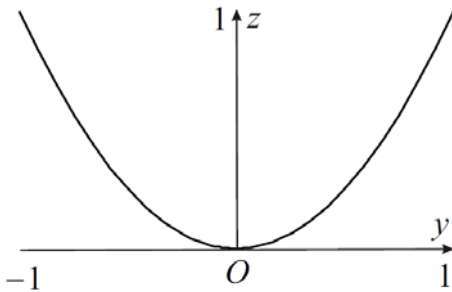
$$\text{за } x = 0, z = y^2;$$

$$\text{за } y = 0, z = x^2; \text{ и}$$

$$\text{за } z = 0; x^2 + y^2 = 0, \text{ т.е. точката } (0, 0, 0).$$



Цртеж 1.4.2.1.

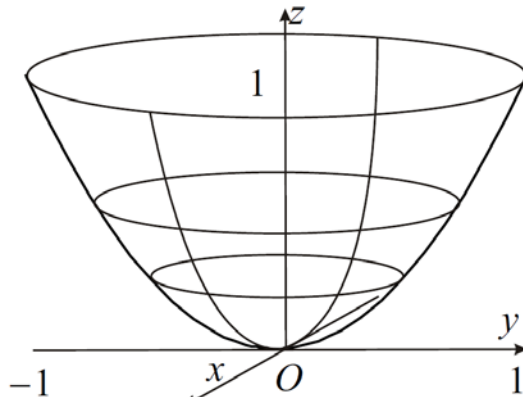


Цртеж 1.4.2.2.

Ниво линии се:

$$z = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c, c \geq 0;$$

односно кружници со центар $(0, 0)$ и радиус $\sqrt{c}$. Ги скицираме главните пресеци и неколку ниво линии $c \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ и преку графикот на површината го добиваме визуелниот приказ на површината.



Цртеж 1.4.2.3.

Задача 3-4. Да се испитаат ниво линиите на површините:

$$3) z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}; \quad 4) z = \sin(x^2 + y^2).$$

Решение. 3) Ниво линиите $z = c$ имаат равенки:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = C, \quad C \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2 C} + \frac{y^2}{b^2 C} = 1, \quad C > 0 \text{ и } (0,0) \text{ за } C = 0.$$

Значи, за $C > 0$ ниво линиите се централни елипси со полуоски $a\sqrt{C}$ и $b\sqrt{C}$.

Коментар. Ако во условот е даден параметар на квадрат, се подразбира дека параметарот е ненегативен.

4) За $z = C$,

$$\sin(x^2 + y^2) = C, \quad C \in [-1, 1] \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \text{Arcsin } C.$$

Значи, ниво линиите се кружници со центар во $(0,0)$ и радиус $\sqrt{\text{Arcsin } C}$.

1.5. СКИЦИРАЊЕ ПОВРШНИ СО ТРАНСЛАЦИЈА НА ПОЗНАТИ ПОВРШНИ

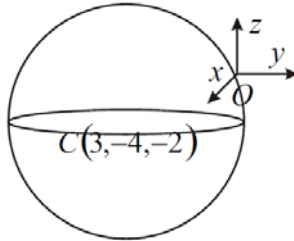
Задача 1-2. Со помош на translација на елементарните површини да се скицираат површините:

$$1) (x-3)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 25; \quad 2) z-1 = x^2 + y^2.$$

1) Прв начин. Равенката:

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 25$$

претставува сфера со центар во $C(3, -4, -2)$ и радиус $R = 5$.



Цртеж 1.5.1.

Втор начин. Ако ставиме:

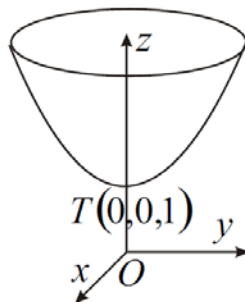
$$x' = x - 3, \quad y' = y + 4, \quad z' = z + 2 \Leftrightarrow$$

$$x = x' + 3, \quad y = y' - 4, \quad z = z' - 2;$$

тогаш бараната сфера може да ја добиеме и со translација на централната сфера $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 25$ за 3, -4 и -2 единици соодветно по x , y и z -оските. Тогаш центарот $C'(0,0,0)$ се пресликува во $C(3, -4, -2)$.

2) Заменуваме:

$$z' = z - 1 \Leftrightarrow z = z' + 1; \quad x' = x, \quad y' = y.$$



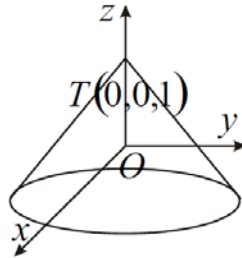
Цртеж 1.5.4.

Следува дека параболоидот $z - 1 = x^2 + y^2$ се добива ако $z' = x'^2 + y'^2$ се помести за една единица нагоре.

Задача 3-4. Со помош на транслација на елементарните површини да се скицираат следните површини:

$$3) 1 - z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad 4) x^2 + y^2 = x.$$

Решение. 3) Површината $1 - z = \sqrt{x^2 + y^2}$ е горниот дел од конусот $(1 - z)^2 = x^2 + y^2$ за кој $1 - z \geq 0$. Оваа фигура, исто така, се нарекува конус.



Цртеж 1.5.6.

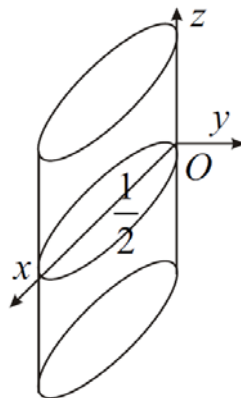
Заради:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = 1 - z \Leftrightarrow x = x', \quad y = y', \quad z = 1 - z';$$

горниот дел на конусот $z'^2 = x'^2 + y'^2$ го креваме за една единица нагоре и го превртуваме со темето нагоре (симетрично во однос на xOy -рамнината).

4) Имаме:

$$x^2 - x + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$



Цртеж 1.5.7.

Ако ставиме:

$$x' = x - \frac{1}{2}, \quad y' = y \Leftrightarrow x = x' + \frac{1}{2}, \quad y = y';$$

ја добиваме равенката $x'^2 + y'^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, која претставува кружен цилиндар со кружници паралелни со xOy -рамнината со центар во координатниот почеток и радиус $1/2$. Цилиндарот го поместуваме за $1/2$ по x -оската.

1.6. ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА

Задача 1. Со помош на дефиниција докажи дека:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 2}} (3x - 4y) = 1.$$

Решение. Прв начин. (со користење на $\varepsilon - \delta$ дефиниција).

Нека $f(x, y) = 3x - 4y$. Нека е дадено $\varepsilon > 0$. Избираме $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$.

Тогаш:

$$|x - 3|, |y - 2| \leq \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} < \delta = \frac{\varepsilon}{7};$$

и

$$\begin{aligned} |f(x, y) - L| &= |3x - 4y - 1| = |3(x - 3) - 4(y - 2) + 9 - 8 - 1| = \\ &= |3(x - 3) - 4(y - 2)| \leq 3|x - 3| + 4|y - 2| < 3\delta + 4\delta = 7\delta = \varepsilon, \end{aligned}$$

кога $0 < \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} < \delta$. Следува: $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 2}} (3x - 4y) = 1$.

Коментар. Во пракса, кога докажуваме, прво ја оценуваме $|f(x, y) - L|$ преку $|x - x_0|$ и $|y - y_0|$, т.е. преку δ .

Втор начин. (со користење на низовна дефиниција).

Нека (x_n, y_n) е низа во $D_f \setminus \{(3, 2)\}$, таква што:

$$x_n \rightarrow 3 \text{ и } y_n \rightarrow 2 \text{ кога } n \rightarrow \infty.$$

Тогаш:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = |3x_n - 4y_n| = 9 - 8 = 1.$$

Следува:

1. Функции од две и од повеќе променливи

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 2}} (3x - 4y) = 1.$$

Коментар. Забележуваме дека задачата полесно се решава со користење на втората дефиниција.

Задача 2-3. Пресметај ги границите:

$$2) L = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy} ; \quad 3) L = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{9+2xy} - 3}{4xy}.$$

Решение. 2) Воведуваме смена $xy \rightarrow t$. Ако $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$, тогаш јасно: $xy \rightarrow 0$. Бидејќи $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, добиваме: $L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Коментар. Задачата може да се реши и без експлицитен запис на смената: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\sin xy}{xy} = 1$.

$$3) L = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{9+2xy} - 3}{4xy} \cdot \frac{\sqrt{9+2xy} + 3}{\sqrt{9+2xy} + 3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{4xy(\sqrt{9+2xy} + 3)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{2(\sqrt{9+2xy} + 3)} = \frac{1}{2 \cdot 6} = \frac{1}{12}.$$

Задача 4-5. Пресметај ги границите:

$$4) L = \lim_{\substack{x \rightarrow 7 \\ y \rightarrow +\infty}} \left(1 + \frac{x}{2y}\right)^{3y} ; \quad 5) L = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} \frac{2 - x^2 y^2}{x^2 y^2 + 3x^2 y - 2xy^2 + 5xy - 7x}.$$

Решение. Имаме:

$$4) L = \lim_{\substack{x \rightarrow 7 \\ y \rightarrow +\infty}} \left(1 + \frac{1}{\frac{2y}{x}}\right)^{\frac{2y}{x} \cdot \frac{3x}{2}} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 7 \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{3x}{2}} = e^{\frac{21}{2}} = \sqrt{e^{21}}.$$

$$5) L = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} \frac{\frac{2}{x^2 y^2} - 1}{1 + \frac{3x^2 y}{x^2 y^2} - \frac{2xy^2}{x^2 y^2} + \frac{5xy}{x^2 y^2} - \frac{7x}{x^2 y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} \frac{\frac{2}{x^2 y^2} - 1}{1 + \frac{3}{y} - \frac{2}{x} + \frac{5}{xy} - \frac{7}{xy^2}} = -1.$$

Задача 6. Пресметај ја границата: $L = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{2x - 3y}{x^2 + y^2}$.

Решение. Имаме: $L = \left(\begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \quad x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty \\ y = \rho \sin \varphi \quad \Rightarrow \rho \rightarrow +\infty \end{array} \right) =$

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{2\rho \cos \varphi - 3\rho \sin \varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos \varphi - 3 \sin \varphi}{\rho} = 0.$$

Задача 7-8. Види ги задачи 1.3.1-2. од првиот дел.

Задача 9. Да се докаже дека не постои границата:

$$L = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x - 3y + x^2 + y^2}{x + y}.$$

Решение. Прв начин. Ги разгледуваме низите точки:

$$A_n \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \text{ и } B_n \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right);$$

преку кои точките $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, кога $n \rightarrow +\infty$. Имаме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{2}{n}}{2} = -\frac{1}{2};$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n} - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n} + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{3}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{3} = \frac{1}{3}.$$

Следува дека границата не постои бидејќи зависи од начинот на доближување до граничната точка.

Втор начин. Со премин во поларни координати добиваме:

$$L = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho \cos \varphi - 3\rho \sin \varphi + \rho^2}{\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi} =$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2 \cos \varphi - 3 \sin \varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi} + \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2 \cos \varphi - 3 \sin \varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi}.$$

Од произволноста на аголот φ следува дека границата не постои.

Коментар. Бидејќи едната граница во збирот постои, тогаш границата од левата страна постои ако и само ако постои другата граница во збирот.

Задача 10. Пресметај ја границата: $L = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \ln L &= \ln \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 y^2 x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \ln (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 y^2 x^2 + y^2}} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \ln (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \ln e = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \ln e = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{\rho^2} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = 0. \text{ Следува: } L = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Задача 11-14. Види ги примерите 1.3.3-5. и 1.4.1 од првиот дел.

Задача 15. Испитај ја непрекинатоста на функцијата:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Заради непрекинатоста на гранките, функцијата е непрекината во секоја точка различна од $(0, 0)$. За $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2(\varphi) \rho \sin \varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin \varphi \cos^2 \varphi = 0. \end{aligned}$$

Исто така $f(0, 0) = 0$. Бидејќи двете вредности постојат и се еднакви, следува дека функцијата е непрекината и во $(0, 0)$.

2-3. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ

2. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ

2.1. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ ОД ЕКСПЛИЦИТНО ЗАДАДЕНИ ФУНКЦИИ

Задача 1-2. Да се најдат парцијалните изводи на функцијата $z = z(x, y)$, ако:

$$1) z = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1;$$

$$2) z = 3x^2y - y^3 + xy^2 - 3x + 6y - 9.$$

Решение. Имаме:

$$1) \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 8y + 2;$$

$$2) \frac{\partial z}{\partial x} = 6xy + y^2 - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 2xy + 6.$$

Задача 3-4. Да се најдат парцијалните изводи на функцијата $z = z(x, y)$, ако:

$$3) z = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}; \quad 4) z = \sqrt{x} \sqrt{\sin \frac{y}{x}}.$$

Решение. Имаме:

$$3) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} - \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3} + \frac{x}{y^2};$$

$$4) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{\sin \frac{y}{x}} + \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{\sin \frac{y}{x}}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \left(-\frac{y}{x^2}\right) =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sin \frac{y}{x}}{x}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sin \frac{y}{x}}{x}} \frac{x \cos \frac{y}{x}}{\sin \frac{y}{x}} \frac{y}{x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sin \frac{y}{x}}{x}} \left(1 - \frac{y}{x} \operatorname{ctg} \frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{\sin \frac{y}{x}}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{x} = \frac{\cos \frac{y}{x}}{2\sqrt{x \sin \frac{y}{x}}}.$$

Задача 5-6. Да се најдат парцијалните изводи на функцијата $z = z(x, y)$, ако:

$$5) z = e^{x^2+y^2}; \quad 6) z = (x^2 + y^2)e^x.$$

Решение. Имаме:

$$5) \frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} (x^2 + y^2)'_x = 2xe^{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2} (x^2 + y^2)'_y = 2ye^{x^2+y^2}.$$

$$6) \frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^x + (x^2 + y^2)e^x = (2x + x^2 + y^2)e^x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x.$$

Задача 7-8. Да се најдат парцијалните изводи на функцијата $z = z(x, y)$, ако:

$$7) z = \ln(x^2 + y^2); \quad 8) z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}.$$

Решение. Имаме:

$$7) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} 2x = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2} 2y = \frac{2y}{x^2 + y^2};$$

$$8) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y} \cos^2 \frac{x}{y}} \frac{1}{y} = \frac{1}{y \sin \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y} \cos^2 \frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{y^2 \sin \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}} = -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}.$$

Задача 9-10. Да се најдат парцијалните изводи на функцијата $z = z(x, y)$, ако:

$$9) z = x^y; \quad 10) z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}.$$

9) Прв начин. $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$

Втор начин. За да го пресметаме изводот ја логаритмираме равенката:

$$\ln z = \ln x^y \Leftrightarrow \ln z = y \ln x.$$

Оттука:

$$\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x} x^y = y x^{y-1}, \quad \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} = \ln x \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

$$\mathbf{10)} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + (\sqrt{x^y})^2} \left(\sqrt{x^y} \right)'_x = \frac{1}{1 + x^y} \frac{1}{2\sqrt{x^y}} (x^y)'_x =$$

$$\frac{1}{1 + x^y} \frac{1}{2x^{\frac{y}{2}}} y x^{y-1} = \frac{yx^{\frac{y-2}{2}}}{2(1 + x^y)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (\sqrt{x^y})^2} \left(\sqrt{x^y} \right)'_y = \frac{1}{1 + x^y} \frac{1}{2\sqrt{x^y}} (x^y)'_y =$$

$$\frac{1}{1 + x^y} \frac{1}{2x^{\frac{y}{2}}} x^y \ln x = \frac{x^{\frac{y}{2}} \ln x}{2(1 + x^y)}.$$

Задача 11. Да се пресмета:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}(0,0), \text{ ако } z = \arcsin(x + y^2).$$

Решение. Имаме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} (x + y^2)'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} (x + y^2)'_y = \frac{2y}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \frac{2 \cdot 0}{\sqrt{1-0}} = 0.$$

Задача 12. Да се пресмета:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, 1\right), \text{ ако } z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{y} \right)'_x = \frac{1}{\frac{\sin \frac{x}{y}}{\cos \frac{x}{y}}} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} \right)'_x =$$

$$\frac{1}{\sin \left(\frac{x}{y} \right) \cos \frac{x}{y}} \frac{1}{y} \frac{2}{2} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\pi}{4}, 1 \right) = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{2}} = 2;$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{y} \right)'_y = \frac{1}{\frac{\sin \frac{x}{y}}{\cos \frac{x}{y}}} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} \right)'_y =$$

$$\frac{1}{\sin \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2} \right) \frac{2}{2} = -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\pi}{4}, 1 \right) = -\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}.$$

Задача 13. Да се докаже дека функцијата: $z = \sqrt{y} \sin \frac{x}{y}$ ја исполнува диференцијалната равенка: $2x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

Решение. Парцијалните изводи се:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y} \left(\cos \frac{x}{y} \right) \left(\frac{x}{y} \right)'_x = \sqrt{y} \left(\cos \frac{x}{y} \right) \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \cos \frac{x}{y},$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \sin \frac{x}{y} + \sqrt{y} \cos \frac{x}{y} \left(\frac{x}{y} \right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}} \sin \frac{x}{y} + \sqrt{y} \left(\cos \frac{x}{y} \right) \left(-\frac{x}{y^2} \right).$$

Ако замениме во диференцијалната равенка, добиваме:

$$2x \frac{1}{\sqrt{y}} \cos \frac{x}{y} + 2y \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} \sin \frac{x}{y} - \frac{x}{y\sqrt{y}} \cos \frac{x}{y} \right) = \sqrt{y} \sin \frac{x}{y} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{\sqrt{y}} \cos \frac{x}{y} + \sqrt{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{2x}{\sqrt{y}} \cos \frac{x}{y} = \sqrt{y} \sin \frac{x}{y} \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Задача 14. Да се докаже дека функцијата $z = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ ја исполнува диференцијалната равенка $z \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) = xy$.

Решение. Парцијалните изводи се:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \left(xy + \frac{x}{y} \right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \left(y + \frac{1}{y} \right), \text{ и}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \left(xy + \frac{x}{y} \right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \left(x - \frac{x}{y^2} \right).$$

Ако замениме во диференцијалната равенка, добиваме:

$$\sqrt{xy + \frac{x}{y}} \left(x \frac{y + \frac{1}{y}}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} + y \frac{x - \frac{x}{y^2}}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \right) = xy \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{xy + \frac{x}{y}} \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \left(xy + \frac{x}{y} + yx - \frac{x}{y} \right) = xy \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} 2xy = xy \Leftrightarrow xy = xy \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Задача 15-16. Види ги задачите 2.1.3. и 2.1.5. од првиот дел.

Задача 17-18. Види ги задачите 2.2.4. и 2.2.5. од првиот дел.

2.2. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ ОД ПОВИСОК РЕД

Задача 1. Да се најдат парцијалните изводи од прв и од втор ред за функцијата: $z = x \sin y - x^2 y^3 + x - 3y \cos 2x - 1$ во точката $M(0,0)$.

Решение. Имаме

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y - 2xy^3 + 1 + 6y \sin 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y - 3x^2 y^2 - 3 \cos 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y^3 + 12y \cos 2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos y - 6xy^2 + 6 \sin 2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = 1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x \sin y - 6x^2 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = 0.$$

Задача 2. Да се пресмета $\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^3}$ ако $z = x^3 \sin y + y^3 \sin x$.

Решение. Имаме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \sin y + y^3 \cos x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \sin y - y^3 \sin x,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6 \sin y - y^3 \cos x,$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y} = 6 \cos y - 3y^2 \cos x,$$

$$\frac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y^2} = -6 \sin y - 6y \cos x, \text{ и}$$

$$\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^3} = -6 \cos y - 6 \cos x = -6(\cos x + \cos y).$$

Задача 3. Да се пресмета $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ ако $z = \sin^2(x + 2y)$.

Решение. Имаме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \sin(x + 2y) \cos(x + 2y) = \sin(2(x + 2y)) = \sin(2x + 4y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \cos(2x + 4y) \text{ и } \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -2(\sin(2x + 4y))4 = -8 \sin(2x + 4y).$$

Задача 4. Да се пресмета $d^2 z$ ако $z = x^3 + x^2 y + y^3$.

Решение. Парцијалните изводи заклучно со втор ред се:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Од каде што диференцијалот е:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = 6x dx^2 + 4x dx dy + 6y dy^2.$$

2.3. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ ОД ИМПЛИЦИТНО ЗАДАДЕНИ ФУНКЦИИ

Задача 1. Да се најдат парцијалните изводи на имплицитно зададената функција $e^z - xyz = 0$.

Решение. Прв начин.

$$e^z - xyz = 0 \quad / \quad \frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow e^z \frac{\partial z}{\partial x} - y \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} (e^z - xy) = yz \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy};$$

и

$$e^z - xyz = 0 \quad / \quad \frac{\partial}{\partial y} \Leftrightarrow e^z \frac{\partial z}{\partial y} - x \left(z + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} (e^z - xy) = xz \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

Втор начин. $F(x, y, z) = e^z - xyz$, од каде што:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -yz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z - xy,$$

па:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial F}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{-yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{e^z - xy} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial F}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{-xz}{e^z - xy} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

Задача 2. Види ја задачата 2.4.2. од првиот дел.

Задача 3-4. Да се најдат парцијалните изводи на имплицитно зададените функции:

$$3) \quad xy - \ln y = a; \quad 4) \quad \arctg\left(\frac{x+y}{a}\right) - \frac{y}{a} = 0.$$

Решение. 3) Прв начин.

$$y + xy' - \frac{1}{y}y' = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{y}\right)y' = -y \Leftrightarrow y' = -\frac{y}{x - \frac{1}{y}} = -\frac{y}{\frac{xy-1}{y}} = \frac{y^2}{1-xy}.$$

Втор начин. $F(x, y) = xy - \ln y - a$, $\frac{\partial F}{\partial x} = y$ и $\frac{\partial F}{\partial y} = x - \frac{1}{y}$, па

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x}} \equiv \frac{dy}{dx} \equiv y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{y}{x - \frac{1}{y}} = -\frac{y}{\frac{xy-1}{y}} = \frac{y^2}{1-xy}.$$

4) Прв начин.

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{a}\right)^2} \frac{1+y'}{a} - \frac{1}{a}y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{a^2 + (x+y)^2}{a^2}} \frac{1+y'}{a} - \frac{1}{a}y' = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{a^2 + (x+y)^2} (1+y') - \frac{1}{a}y' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2 + (x+y)^2} + \left(\frac{a}{a^2 + (x+y)^2} - \frac{1}{a} \right) y' &\Leftrightarrow \\ \frac{a}{a^2 + (x+y)^2} + \frac{a^2 - (a^2 + (x+y)^2)}{a(a^2 + (x+y)^2)} y' &= 0 / a^2 + (x+y)^2 \Leftrightarrow \\ a - \frac{(x+y)^2}{a} y' &= 0 \Leftrightarrow a = \frac{(x+y)^2}{a} y' \Leftrightarrow y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}. \end{aligned}$$

Втор начин. $F(x, y) = \arctg\left(\frac{x+y}{a}\right) - \frac{y}{a}$, од каде што:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{a}\right)^2} \frac{1}{a} = \frac{a}{a^2 + (x+y)^2},$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{a}\right)^2} \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = \frac{a}{a^2 + (x+y)^2} - \frac{1}{a} = \\ &= \frac{a^2 - (a^2 + (x+y)^2)}{a(a^2 + (x+y)^2)} = -\frac{(x+y)^2}{a(a^2 + (x+y)^2)}. \end{aligned}$$

Оттука:

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{a}{a^2 + (x+y)^2}}{-\frac{(x+y)^2}{a(a^2 + (x+y)^2)}} = \frac{a^2}{(x+y)^2}.$$

Задача 5. Да се најде $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ако $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$.

Решение. Имаме:

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1 / \frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{z-x}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{z} \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{1}{z} - \frac{x}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{x+z}{z^2} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x+z}.$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1 / \frac{\partial}{\partial y} &\Leftrightarrow -x \frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z} \left(\frac{\frac{\partial z}{\partial y} y - z}{y^2} \right) \Leftrightarrow \\ -\frac{x}{z^2} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{y}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \frac{1}{y} - \frac{z}{y^2} \right) \Leftrightarrow -\frac{x}{z^2} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{y} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{y} &= \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{x+z}{z^2} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{x+z} \right) = \\ \frac{\frac{\partial z}{\partial y} (x+z) - z \frac{\partial z}{\partial y}}{(x+z)^2} &= \frac{x \frac{\partial z}{\partial y}}{(x+z)^2} = \frac{x \frac{z^2}{y(x+z)}}{(x+z)^2} = \frac{xz^2}{y(x+z)^3}. \end{aligned}$$

Задача 6 Да се најдат парцијалните изводи до втор ред на:

$$z = f(x, y), \text{ ако } \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1.$$

Решение. Од претходната задача:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x+z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)} \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{xz^2}{y(x+z)^3}.$$

Сега:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \left(\frac{z}{x+z} \right)'_x = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} (x+z) - z \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{(x+z)^2} = \frac{x \frac{\partial z}{\partial x} - z}{(x+z)^2} = \\ \frac{x \frac{z}{x+z} - z}{(x+z)^2} &= \frac{\frac{xz - xz - z^2}{x+z}}{(x+z)^2} = -\frac{z^2}{(x+z)^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \left(\frac{z^2}{y(x+z)} \right)'_y = \frac{2z \frac{\partial z}{\partial y} y(x+z) - z^2 \left(x+z + y \frac{\partial z}{\partial y} \right)}{y^2 (x+z)^2} = \\ &= \frac{\frac{\partial z}{\partial y} (2zy(x+z) - yz^2) - z^2 (x+z)}{y^2 (x+z)^2} = \\ &= \frac{\frac{z^2}{y(x+z)} z y (2x+2z-z) - z^2 (x+z)}{y^2 (x+z)^2} = \frac{z^3 (2x+2z-z) - z^2 (x+z)^2}{y^2 (x+z)^2} = \\ &= \frac{z^2 (2xz + z^2 - x^2 - 2xz - z^2)}{y^2 (x+z)^3} = -\frac{x^2 z^2}{y^2 (x+z)^3}.\end{aligned}$$

Задача 7. Да се најде $d^2 z$ ако $z^2 - xy = 0$.

Решение. Парцијалните изводи заклучно со втор ред се:

$$\begin{aligned}z^2 - xy = 0 /'_x &\Rightarrow 2z \frac{\partial z}{\partial x} - y = 0 \Leftrightarrow 2z \frac{\partial z}{\partial x} = y \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{2z}; \\ z^2 - xy = 0 /'_y &\Rightarrow 2z \frac{\partial z}{\partial y} - x = 0 \Leftrightarrow 2z \frac{\partial z}{\partial y} = x \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2z}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{2z} \right) = \frac{y}{2} \left(-\frac{1}{z^2} \right) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{2z^2} \frac{y}{2z} = -\frac{y^2}{4z^3}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{2z} \right) = \frac{2z - 2y \frac{\partial z}{\partial y}}{4z^2} = \frac{2z - 2y \frac{x}{2z}}{4z^2} = \\ &= \frac{\frac{2z^2 - xy}{z}}{4z^2} = \frac{z^2 + (z^2 - xy)}{4z^3} = \frac{z^2}{4z^3} = \frac{1}{4z}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{2z} \right) = \frac{x}{2} \left(-\frac{1}{z^2} \right) \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{2z^2} \frac{x}{2z} = -\frac{x^2}{4z^3}.\end{aligned}$$

Оттука тоталниот диференцијал од втор ред е:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 =$$

$$-\frac{y^2}{4z^3}dx^2 + 2\frac{1}{4z}dxdy - \frac{x^2}{4z^3}dy^2 = \frac{-y^2dx^2 + 2z^2dxdy - x^2dy^2}{4z^3}.$$

2.4. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ ОД СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА

Задача 1. Нека:

$$z = u + v^2, \quad u = x^2 + \sin y, \quad v = \ln(x + y). \quad \text{Да се најде: } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Решение. Прв начин. Имаме, $z = z(u(x, y), v(x, y))$, па:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2v \frac{1}{x+y} = 2x + \frac{2 \ln(x+y)}{x+y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \cos y + 2v \frac{1}{x+y} = \cos y + \frac{2 \ln(x+y)}{x+y}.$$

Втор начин. Заради $z = x^2 + \sin y + \ln^2(x + y)$, добиваме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2 \ln(x+y) \frac{1}{x+y} = 2x + \frac{2 \ln(x+y)}{x+y} \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + 2 \ln(x+y) \frac{1}{x+y} = \cos y + \frac{2 \ln(x+y)}{x+y}.$$

Задача 2. Да се најдат парцијалните изводи на функцијата:

$$z = \arctg \frac{u}{v}, \quad u = x - y, \quad v = x + y \quad \text{по } x \text{ и } y.$$

Решение. Прв начин. Имаме:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \frac{1}{v} = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \left(-\frac{u}{v^2} \right) = -\frac{u}{u^2 + v^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1;$$

од каде што:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{u^2 + v^2} - \frac{u}{u^2 + v^2} =$$

$$\frac{x+y}{(x-y)^2+(x+y)^2} - \frac{x-y}{(x-y)^2+(x+y)^2} =$$

$$\frac{x+y-x+y}{x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2} = \frac{2y}{2(x^2+y^2)} = \frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v}{u^2+v^2}(-1) - \frac{u}{u^2+v^2} =$$

$$- \frac{x+y}{(x-y)^2+(x+y)^2} - \frac{x-y}{(x-y)^2+(x+y)^2} =$$

$$- \frac{x+y+x-y}{x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2} = - \frac{2x}{2(x^2+y^2)} = - \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Втор начин. Имаме: $z = \arctg \frac{x-y}{x+y}$, па:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \left(\frac{x-y}{x+y}\right)'_x = \frac{1}{\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2}} \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} =$$

$$\frac{1}{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2} 2y = \frac{2y}{2(x^2+y^2)} = \frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \left(\frac{x-y}{x+y}\right)'_y = \frac{1}{\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2}} \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} =$$

$$\frac{1}{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2} (-2x) = \frac{-2x}{2(x^2+y^2)} = - \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Задача 3. Да се најдат парцијалните изводи на функцијата:

$$z = x^2y - y^2x, \quad x = u \cos v, \quad y = u \sin v \quad \text{по } u \text{ и } v.$$

Решение. Прв начин. Заради:

$$z = z(x(u, v), y(u, v)),$$

добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = (2xy - y^2) \cos v + (x^2 - 2xy) \sin v = \\ &= (2u^2 \sin v \cos v - u^2 \sin^2 v) \cos v + (u^2 \cos^2 v - 2u^2 \sin v \cos v) \sin v = \\ &= \underline{2u^2 \sin v \cos^2 v} - u^2 \sin^2 v \cos v + \underline{u^2 \sin v \cos^2 v} - 2u^2 \sin^2 v \cos v = \\ &= 3u^2 \sin v \cos^2 v - 3u^2 \sin^2 v \cos v = 3u^2 \sin v \cos v (\cos v - \sin v); \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = (2xy - y^2)(-u \sin v) + (x^2 - 2xy)u \cos v = \\ &= (2u^2 \sin v \cos v - u^2 \sin^2 v)(-u \sin v) + (u^2 \cos^2 v - 2u^2 \sin v \cos v)u \cos v = \\ &= u^3 (-2 \sin^2 v \cos v + \sin^3 v + \cos^3 v - 2 \sin v \cos^2 v) = \\ &= u^3 ((\sin^3 v + \cos^3 v - 2(\sin^2 v \cos v + \sin v \cos^2 v))) = \\ &= u^3 ((\sin v + \cos v)(\underline{\sin^2 v} - \sin v \cos v + \underline{\cos^2 v}) - 2 \sin v \cos v (\sin v + \cos v)) = \\ &= u^3 (\sin v + \cos v)(1 - 3 \sin v \cos v). \end{aligned}$$

Втор начин. Имаме:

$$z = u^3 \sin v \cos^2 v - u^3 \sin^2 v \cos v = u^3 (\sin v \cos^2 v - \sin^2 v \cos v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2 \sin v \cos v (\cos v - \sin v)$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= u^3 (\cos v \cos^2 v + (\sin v) 2(\cos v)(-\sin v) - \\ &- (2(\sin v)(\cos v)(\cos v) + \sin^2 v(-\sin v))) = \\ &= u^3 ((\sin^3 v + \cos^3 v - 2(\sin^2 v \cos v + \sin v \cos^2 v))) = \\ &= u^3 ((\sin v + \cos v)(\underline{\sin^2 v} - \sin v \cos v + \underline{\cos^2 v}) - 2 \sin v \cos v (\sin v + \cos v)) = \\ &= u^3 (\sin v + \cos v)(1 - 3 \sin v \cos v). \end{aligned}$$

Задача 4. Да се најде $\frac{dz}{dx}$ ако $z = \arcsin \frac{x}{y}$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Решение. Прв начин. Во овој случај $z(x) = f(x, y(x))$, па

$$\begin{aligned}
 z' = \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} 2x = \\
 &= \frac{|y|}{\sqrt{y^2-x^2}} \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^2\sqrt{x^2+1}}\right) = \\
 &= \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1-x^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\right) = 1 - \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}.
 \end{aligned}$$

Втор начин. Имаме $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, од каде што:

$$\begin{aligned}
 z' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1-x^2}} \frac{\sqrt{x^2+1}-x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} (x^2+1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x^2+1}.
 \end{aligned}$$

Задача 5. Да се најде:

$$\frac{dz}{dt} \text{ ако } z = \operatorname{tg}(3t + 2x^2 - y), \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = \sqrt{t}.$$

Решение. Прв начин. Имаме:

$$z = z(t) \text{ и } z = f(x(t), y(t), t),$$

поради што:

$$\begin{aligned}
 z' &= \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \\
 &= \frac{1}{3\cos^2(3t+2x^2-y)} 4x \left(-\frac{1}{t^2}\right) + \frac{1}{3\cos^2(3t+2x^2-y)} (-1) \frac{1}{2\sqrt{t}} + \\
 &= \frac{1}{\cos^2(3t+2x^2-y)} 3 =
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\cos^2\left(3t + 2x^2 - y\right)}\left(3 - \frac{4x}{t^2} - \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{3 - \frac{4}{t^3} - \frac{1}{2\sqrt{t}}}{\cos^2\left(3t + \frac{2}{t^2} - \sqrt{t}\right)}.$$

Втор начин. Од $z = tg\left(3t + \frac{2}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ добиваме:

$$z' = \frac{1}{\cos^2\left(3t + \frac{2}{t^2} - \sqrt{t}\right)}\left(3 + 2\frac{-2}{t^3} - \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{3 - \frac{4}{t^3} - \frac{1}{2\sqrt{t}}}{\cos^2\left(3t + \frac{2}{t^2} - \sqrt{t}\right)}.$$

Задача 6. Нека $z = f(x - y, y - x)$. Да се докаже дека:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Решение. Нека $u = x - y$, $v = y - x$;

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} (-1) = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} (-1) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 1 = -\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}$$

Ако замениме во диференцијалната равенка, добиваме:

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Задача 7. Да се покаже дека равенката:

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz,$$

има партикуларен интеграл $z = e^y f\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.

Решение. Имаме:

$$z(x, y) = a(y) \cdot f(u(x, y)) \quad \text{каде} \quad u(x, y) = ye^{\frac{x^2}{2y^2}}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= e^y f' \cdot y e^{\frac{x^2}{2y^2}} \frac{2x}{2y^2} = \frac{x}{y} e^{\frac{x^2}{2y^2}+y} f'; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= e^y f + e^y f' \cdot \left(e^{\frac{x^2}{2y^2}} + y e^{\frac{x^2}{2y^2}} \frac{x^2}{2} \left(\frac{-2}{y^3} \right) \right) = \\ &= e^y f + e^y e^{\frac{x^2}{2y^2}} \left(1 - \frac{x^2}{y^2} \right) f' = e^y f - \frac{x^2 - y^2}{y^2} e^{\frac{x^2}{2y^2}+y} f' .\end{aligned}$$

Ако замениме во диференцијалната равенка, добиваме:

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2) \frac{x}{y} e^{\frac{x^2}{2y^2}+y} f' + xy \left(e^y f - \frac{(x^2 - y^2)}{y^2} e^{\frac{x^2}{2y^2}+y} f' \right) &= xy e^y f \Leftrightarrow \\ \frac{x(x^2 - y^2)}{y} e^{\frac{x^2}{2y^2}+y} f' + xy e^y f - \frac{x(x^2 - y^2)}{y} e^{\frac{x^2}{2y^2}+y} f' &= xy e^y f \Leftrightarrow 0 = 0 .\end{aligned}$$

Коментар. Равенствата (*) и (**) постапно се запишани со следниве изрази:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y \frac{\partial f}{\partial x} = e^y \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = e^y f' \frac{\partial u}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^y f + e^y \frac{\partial f}{\partial y} = e^y f + e^y \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = e^y f + e^y f' \frac{\partial u}{\partial y} ,$$

при што, бидејќи f е функција од една променлива, важи:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{df}{du} = f' , \quad f' = f'(u) .$$

Задача 8. Да се докаже дека функцијата:

$$z = xy + x f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ја исполнува диференцијалната равенка $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

Решение. Заради

$$f = f\left(u(x, y)\right), \quad u = \frac{y}{x};$$

добиваме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + f + x \frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$y + f + x \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = y + f + x f' \left(-\frac{y}{x^2} \right) = y + f - \frac{y}{x} f'$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = x + x f' \frac{1}{x} = x + f'.$$

Ако замениме во диференцијалната равенка, добиваме:

$$x \left(y + f - \frac{y}{x} f' \right) + y (x + f') = xy + xy + xf \Leftrightarrow$$

$$xy + \underline{xf} - \underline{yf'} + xy + \underline{yf'} = 2xy + \underline{xf} \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Задача 9. Ако $z = x^2 \varphi \left(\frac{x}{y^2} \right)$, пресметај го изразот:

$$A = 2x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4z.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\varphi + x^2 \varphi' \frac{1}{y^2} = 2x\varphi + \frac{x^2}{y^2} \varphi',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \varphi' \cdot \left(x \frac{-2}{y^3} \right) = -\frac{2x^3}{y^3} \varphi';$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x^3 \frac{-3}{y^4} \varphi' + \left(-\frac{2x^3}{y^3} \right) \varphi'' \cdot \left(\frac{-2x}{y^3} \right) = \frac{6x^3}{y^4} \varphi' + \frac{4x^4}{y^6} \varphi''.$$

Оттука:

$$A = 2x \left(2x\varphi + \frac{x^2}{y^2} \varphi' \right) + y^2 \left(\frac{6x^3}{y^4} \varphi' + \frac{4x^4}{y^6} \varphi'' \right) - 4x^2 \varphi =$$

$$4x^2 \varphi + \frac{2x^3}{y^2} \varphi' + \frac{6x^3}{y^2} \varphi' + \frac{4x^4}{y^4} \varphi'' - 4x^2 \varphi = \frac{8x^3}{y^2} \varphi' + \frac{4x^4}{y^4} \varphi''.$$

Задача 10-11. Види ги задачите 2.3.3. и 2.3.4. од првиот дел.

3. ПРИМЕНА НА ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ

3.1. ТАНГЕНТНА РАМНИНА И НОРМАЛА НА ПОВРШИНА

Задача 1-2. Види ги задачите 3.1.1. и 3.1.2. од првиот дел.

Задача 3. Да се докаже дека тангентните рамнини на површината:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = a, \quad a \neq 0,$$

отсекуваат на координатните оски отсечки чиј збир е константен.

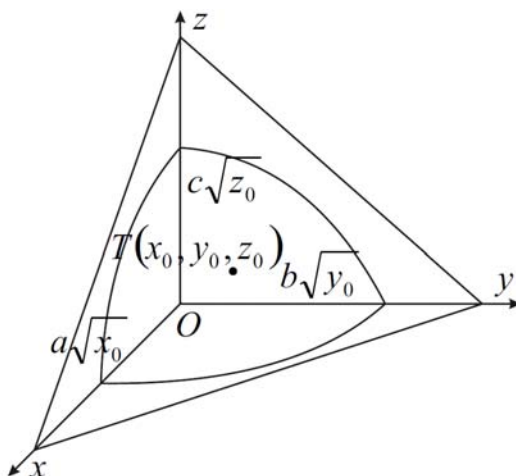
Решение. Парцијалните изводи на функцијата

$$F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - a:$$

$$F'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad F'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{и} \quad F'_z = \frac{1}{2\sqrt{z}};$$

во произволна точка $T(x_0, y_0, z_0)$ се:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \quad F'_y(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \quad \text{и} \quad F'_z(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\sqrt{z_0}}.$$



Цртеж 3.1.1.

Тангентната рамнина во T е:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0) &= 0 \quad / \cdot 2 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0) + \frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0) + \frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0) &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{x}{\sqrt{x_0}} - \sqrt{x_0} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} - \sqrt{y_0} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} - \sqrt{z_0} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} &= \underbrace{\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}}_a. \end{aligned}$$

Бидејќи точката T припаѓа на површината, важи:

$$\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = a,$$

па:

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = a \Leftrightarrow \frac{x}{a\sqrt{x_0}} + \frac{y}{a\sqrt{y_0}} + \frac{z}{a\sqrt{z_0}} = 1.$$

Последната равенка е равенка на рамнина во сегментен облик, каде што: $a\sqrt{x_0}$, $a\sqrt{y_0}$ и $a\sqrt{z_0}$ се отсекоците на x , y и z -оските, соодветно. Нивниот збир е:

$$S = a\sqrt{x_0} + a\sqrt{y_0} + a\sqrt{z_0} = a \left(\underbrace{\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}}_a \right) = a^2 = \text{const},$$

што требаше да се покаже.

Задача 4. Да се докаже дека тангентната рамнина на површината $xyz = a^3$ формира со координатните рамнини тетраедар со константен волумен.

Решение. Парцијалните изводи на функцијата:

$$F(x, y, z) = xyz - a^3$$

се:

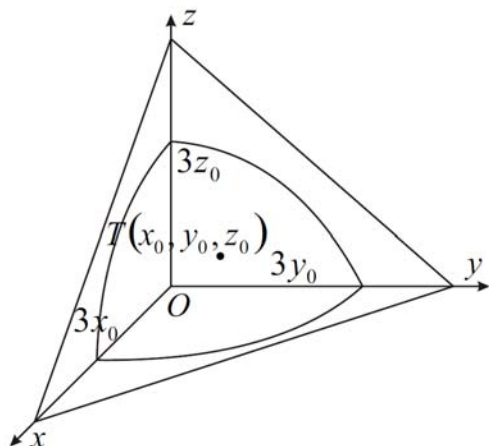
$$F'_x = yz, \quad F'_y = xz \quad \text{и} \quad F'_z = xy,$$

од каде што:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) = y_0 z_0, \quad F'_y(x_0, y_0, z_0) = x_0 z_0, \quad F'_z(x_0, y_0, z_0) = x_0 y_0.$$

Следува дека равенката на тангентната рамнина е:

$$\begin{aligned}
 F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) &= 0 \Leftrightarrow \\
 y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) &= 0 \Leftrightarrow \\
 y_0 z_0 x - x_0 y_0 z_0 + x_0 z_0 y - x_0 y_0 z_0 + x_0 y_0 z - x_0 y_0 z_0 &= 0 \Leftrightarrow \\
 y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z &= 3x_0 y_0 z_0 \Leftrightarrow \\
 \frac{y_0 z_0}{3x_0 y_0 z_0} x + \frac{x_0 z_0}{3x_0 y_0 z_0} y + \frac{x_0 y_0}{3x_0 y_0 z_0} z &= 1 \Leftrightarrow \\
 \frac{x}{3x_0} + \frac{y}{3y_0} + \frac{z}{3z_0} &= 1.
 \end{aligned}$$



Цртеж 3.1.5.

Следува дека отсечоците се: $3x_0$, $3y_0$ и $3z_0$. Бидејќи точката $T(x_0, y_0, z_0)$ лежи на површината, важи $a^3 = x_0 y_0 z_0$.

Значи, волуменот на тетраедарот е:

$$V = \frac{1}{6} |\overline{abc}| = \frac{1}{6} |3x_0 3y_0 3z_0| = \frac{27}{6} |x_0 y_0 z_0| = \frac{9}{2} |a|^3 = \text{const}.$$

Задача 5. На површината $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, најди ги равенките на тангентните рамнини паралелни со рамнината:

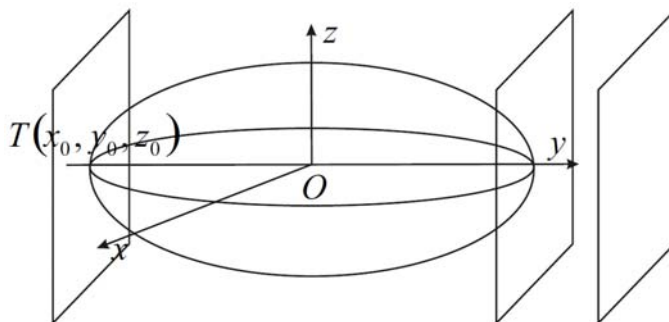
$$x + 4y + 6z = 0.$$

Решение. За $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$, важи:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) = 2x_0, \quad F'_y(x_0, y_0, z_0) = 4y_0 \quad \text{и} \quad F'_z(x_0, y_0, z_0) = 6z_0.$$

Затоа тангентната рамнина во $T(x_0, y_0, z_0)$ има равенка:

$$\begin{aligned} F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) &= 0 \Leftrightarrow \\ 2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + 6z_0(z - z_0) &= 0 \quad / : 2 \Leftrightarrow \\ x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 3z_0(z - z_0) &= 0 \Leftrightarrow \\ x_0x - x_0^2 + 2y_0y - 2y_0^2 + 3z_0z - 3z_0^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ x_0x + 2y_0y + 3z_0z = \underbrace{x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2}_{21} &\Leftrightarrow x_0x + 2y_0y + 3z_0z = 21 \quad (1). \end{aligned}$$



Цртеж 3.1.6.

Значи дека тангентната рамнина е нормална на векторот: $\vec{n}_1 = (x_0, 2y_0, 3z_0)$, додека дадената рамнина на: $\vec{n}_2 = (1, 4, 6)$.

Рамнините се паралелни ако нивните нормални вектори се колинеарни, т.е.:

$$\vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \Leftrightarrow x_0 = k, 2y_0 = 4k, 3z_0 = 6k \Leftrightarrow x_0 = k, y_0 = 2k, z_0 = 2k.$$

Бидејќи T лежи на тангентната рамнина, важи:

$$\begin{aligned} x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21 &\Leftrightarrow k^2 + 8k^2 + 12k^2 = 21 \Leftrightarrow \\ 21k^2 = 21 &\Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1. \end{aligned}$$

За $k = 1$; $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ и $z_0 = 2$, па од (1) рамнината е:

$$x + 4y + 6z = 21.$$

За $k = -1$; $x_0 = -1$, $y_0 = -2$ и $z_0 = -2$, па од (1) рамнината е:

$$-x - 4y - 6z = 21 \text{ т.е. } x + 4y + 6z = -21.$$

Значи, тангентните рамнини се $x + 4y + 6z = \pm 21$.

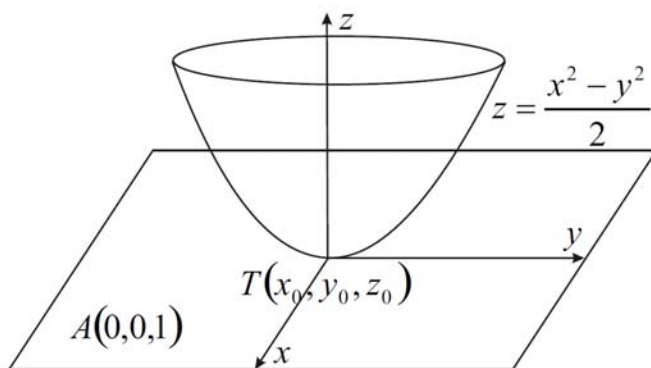
Задача 6. На површината $2z = x^2 - y^2$, повлечи тангентна рамнина што минува низ точката $A(0,0,1)$ и е паралелна со правата:

$$x = y = z.$$

Решение. Допирната точка $T(x_0, y_0, z_0)$ лежи на тангентната рамнина, па:

$$2z_0 = x_0^2 - y_0^2 \quad (1).$$

Со помош на условите на задачата, променливите y_0 и z_0 ќе ги изразиме преку x_0 .



Цртеж 3.1.7.

- Ја запишуваме површината во експлицитен вид:

$$z = \frac{x^2 - y^2}{2}.$$

Бидејќи:

$$z'_x = x, \quad z'_x(x_0, y_0) = x_0; \quad z'_y = y \quad \text{и} \quad z'_y(x_0, y_0) = -y_0;$$

нејзината тангентна равенка е:

$$\begin{aligned} z - z_0 &= z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \Leftrightarrow \\ z - z_0 &= x_0(x - x_0) - y_0(y - y_0) \Leftrightarrow z - z_0 = x_0x - x_0^2 - y_0y + y_0^2 \Leftrightarrow \\ x_0x - y_0y - z + z_0 - \underbrace{(x_0^2 - y_0^2)}_{2z_0} &= 0 \Leftrightarrow x_0x - y_0y - z - z_0 = 0 \quad (2). \end{aligned}$$

Точката $A(0,0,1)$ лежи на тангентната рамнина. Следува дека нејзината равенка ќе биде исполнета за $x=0, y=0, z=1$, од каде што со замена во равенката добиваме:

$$-1 - z_0 = 0 \Leftrightarrow z_0 = -1 \quad (3).$$

• Рамнината е паралелна со правата. Следува дека нормалниот вектор на рамнината:

$$\vec{n} = (z'_x(x_0, y_0), z'_y(x_0, y_0), -1) = (x_0, -y_0, -1),$$

е нормален на паралелниот вектор $\vec{p} = (1,1,1)$ на правата, т.е.:

$$\vec{p}\vec{n} = 0 \Leftrightarrow x_0 - y_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow y_0 = x_0 - 1 \quad (4).$$

• Сега со замена на (3) и (4) во (1) добиваме:

$$\begin{aligned} 2z_0 &= x_0^2 - y_0^2 \Leftrightarrow -2 = x_0^2 - (x_0 - 1)^2 \Leftrightarrow \\ -2 &= x_0^2 - x_0^2 + 2x_0 - 1 \Leftrightarrow 2x_0 = -1 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Оттука:

$$y_0 = x_0 - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} \text{ и јасно: } z_0 = -1.$$

Значи, равенката на тангентната рамнина (2) е:

$$-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y - z + 1 = 0 \quad /-2 \Leftrightarrow x + 3y + 2z - 2 = 0.$$

Задача 7. Докажи дека површините:

$$x + 2y - \ln z + 4 = 0 \text{ и } x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0;$$

се допираат т.е. имаат заедничка тангентна рамнина.

Решение. Нормалните вектори:

$$(F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)),$$

на тангентните рамнини на површините се:

$$\vec{n}_1 = \left(1, 2, -\frac{1}{z_0}\right) \text{ и } \vec{n}_2 = (2x_0 - y_0 - 8, -x_0, 1).$$

Во допирните точки важи:

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_2 = \kappa \vec{n}_1 \Leftrightarrow 2x_0 - y_0 - 8 = k, -x_0 = 2k, 1 = -\frac{k}{z_0} \Leftrightarrow$$

$$x_0 = -2k, -y_0 = k + 4k + 8, z_0 = -k \Leftrightarrow$$

$$x_0 = -2k, y_0 = -5k - 8, z_0 = -k.$$

Точката $T(-2k, -5k - 8, -k)$ лежи на втората површина ако:

$$4k^2 + 2k(-5k - 8) + 16k - k + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4k^2 - 10k^2 - 16k + 16k - k + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-6k^2 - k + 5 = 0 \Leftrightarrow 6k^2 + k - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{12} \Leftrightarrow k_{1,2} = \frac{-1 \pm 11}{12} \Leftrightarrow k_1 = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}, k_2 = -1.$$

Од дефиниционата област на $\ln z = \ln(-k)$, следува дека $k < 0$. За $k = -1$ се добива точката $T(2, -3, 1)$, која е допирна точка бидејќи лежи и на првата површина. Навистина:

$$2 + 2(-3) - \ln 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Задача 8*. Да се најде равенката на тангентната рамнина и нормала на површината:

$$x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t;$$

во точката во која $t = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Во точката во која $t = \frac{\pi}{4}$ важи:

$$x = a \sin^2 \frac{\pi}{4} = a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{a}{2},$$

$$y = b \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = b \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b}{2} \text{ и } z = c \cos^2 \frac{\pi}{4} = c \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{c}{2}.$$

Параметарските изводи:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2a \sin t \cos t, \\ \dot{y} &= b(\cos^2 t - \sin^2 t) = b \cos 2t, \text{ и} \\ \dot{z} &= c 2 \cos t (-\sin t) = -c \cos 2t; \end{aligned}$$

во $t = \frac{\pi}{4}$ имаат вредност:

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2a \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 2a \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = a,$$

$$\dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = b \cos \frac{\pi}{2} = 0, \text{ и } \dot{z}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -c \sin \frac{\pi}{2} = -c.$$

Следува дека равенката на тангентната рамнина е:

$$\dot{x}(t_0)(x - x_0) + \dot{y}(t_0)(y - y_0) + \dot{z}(t_0)(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a\left(x - \frac{a}{2}\right) - c\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow ax - \frac{a^2}{2} - cz + \frac{c^2}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2ax - 2cz + c^2 - a^2 = 0.$$

Оттука, нормалата е: $\frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{y - \frac{b}{2}}{0} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c}.$

3.2. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

Задача 1. Функцијата:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy,$$

развиј ја во Тејлоров полином во околина на точката $A(1,1)$.

Решение. Членовите на Тејлоровиот ред се:

$$f(1,1) = 1 + 1 - 3 = -1,$$

$$f'_x = 3x^2 - 3y, \quad f'_x(1,1) = 3 - 3 = 0; \quad f'_y = 3y^2 - 3x, \quad f'_y(1,1) = 3 - 3 = 0;$$

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xx}(1,1) = 6; \quad f''_{xy} = -3, \quad f''_{xy}(1,1) = -3; \quad f''_{yy} = 6y, \quad f''_{yy}(1,1) = 6; \text{ и}$$

$$f'''_{xxx} = 6, \quad f'''_{xxx} = 0, \quad f'''_{xyy} = 0, \quad f'''_{yyy} = 6.$$

Бидејќи сите изводи од ред $n \geq 4$ се нули, следува дека: $R_3(x, y) = 0$. Според Тејлоровата формула добиваме:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} (f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)) +$$

$$\frac{1}{2!} (f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) +$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3!} (f'''_{xxx}(x_0, y_0)(x-x_0)^3 + 3f'''_{xxy}(x_0, y_0)(x-x_0)^2(y-y_0) + \\ & 3f'''_{xyy}(x_0, y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + f'''_{yyy}(x_0, y_0)(y-y_0)^3) + R_3(x, y) = \\ & -1 + \frac{1}{2} (6(x-1)^2 + 2(-3)(x-1)(y-1) + 6(y-1)^2) + \frac{1}{6} (6(x-1)^3 + 6(y-1)^3) = \\ & -1 + 3(x-1)^2 - 3(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2 + (x-1)^3 + (y-1)^3. \end{aligned}$$

Задача 2. Види ја задачата 3.2.2. од првиот дел.

Задача 3. Во околина на точката $A(0,0)$ да се апроксимира функцијата:

$$f(x, y) = \ln(1 + x + y)$$

со Тејлоров полином од втор ред.

Решение. Имаме: $f(0,0) = \ln 1 = 0$.

Ги пресметуваме парцијалните изводи заклучно со втор ред:

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{1}{1+x+y}, \quad f'_y = \frac{1}{1+x+y}, \\ f''_{xx} &= \frac{-1}{(1+x+y)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{-1}{(1+x+y)^2} \text{ и } f''_{yy} = \frac{-1}{(1+x+y)^2}; \end{aligned}$$

како и нивните вредности во точката A :

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= f'_y(0,0) = 1 \text{ и} \\ f''_{xx}(0,0) &= f''_{yy}(0,0) = f''_{xy}(0,0) = -1. \end{aligned}$$

Оттука:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \\ & \frac{1}{2} (f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2) = \\ & x + y + \frac{1}{2} (-x^2 - 2xy - y^2) = x + y - \frac{1}{2} x^2 - xy - \frac{1}{2} y^2. \end{aligned}$$

Задача 4. Да се апроксимира со Маклоренов полином, заклучно со членовите од втор ред, функцијата:

$$f(x, y) = \frac{\cos y}{\cos x}.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
 f(0,0) &= \frac{\cos 0}{\cos 0} = 1; \\
 f'_x &= -\frac{\cos y}{\cos^2 x}(-\sin x) = \frac{\sin x \cos y}{\cos^2 x}, \quad f'_x(0,0) = \frac{\sin 0 \cos 0}{\cos^2 0} = 0; \\
 f'_y &= \frac{-\sin y}{\cos x}, \quad f'_y(0,0) = -\frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0; \\
 f''_{xx} &= \cos y \frac{\cos x \cos^2 x - \sin x \cdot 2 \cos x (-\sin x)}{\cos^4 x} = \\
 &= \cos y \frac{\cos x (\cos^2 x + 2 \sin^2 x)}{\cos^4 x} = \cos y \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}, \\
 f''_{xx}(0,0) &= \cos 0 \frac{1 + \sin^2 0}{\cos^3 0} = 1; \\
 f''_{xy} &= \frac{\sin x}{\cos^2 x}(-\sin y) = -\frac{\sin x \sin y}{\cos^2 x}, \quad f''_{xy}(0,0) = -\frac{\sin 0 \sin 0}{\cos^2 0} = 0; \\
 f''_{yy} &= \frac{-\cos y}{\cos x} = -\frac{\cos y}{\cos x}, \quad f''_{yy}(0,0) = -\frac{\cos 0}{\cos 0} = -1.
 \end{aligned}$$

Следува:

$$\begin{aligned}
 f(x,y) &\approx f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \\
 &\frac{1}{2}(f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2) = 1 + \frac{1}{2}(x^2 - y^2).
 \end{aligned}$$

Задача 5. Функцијата $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$ да се претстави преку Маклоренов полином, заклучно со членовите од трет ред.

Решение. Маклореновата формула гласи:

$$\begin{aligned}
 f(x,y) &= f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \\
 &\frac{1}{2!}(f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2) + \\
 &\frac{1}{3!}(f'''_{xxx}(0,0)x^3 + 3f'''_{xxy}(0,0)x^2y + 3f'''_{xyy}(0,0)xy^2 + f'''_{yyy}(0,0)y^3) + R_3(x,y).
 \end{aligned}$$

Притоа,

$$\begin{aligned}
 f(0,0) &= e^0 \ln 1 = 0; \\
 f'_x &= e^x \ln(1+y), \quad f'_x(0,0) = 0; \quad f'_y = \frac{e^x}{1+y}, \quad f'_y(0,0) = 1;
 \end{aligned}$$

$$f''_{xx} = e^x \ln(1+y), \quad f'''_{xx}(0,0) = 0; \quad f''_{xy} = \frac{e^x}{1+y}, \quad f'''_{xy}(0,0) = 1;$$

$$f''_{yy} = -\frac{e^x}{(1+y)^2}, \quad f'''_{yy}(0,0) = -1;$$

$$f'''_{xxx} = e^x \ln(1+y), \quad f'''_{xxx}(0,0) = 0; \quad f'''_{xxy} = \frac{e^x}{1+y}, \quad f'''_{xxy}(0,0) = 1;$$

$$f'''_{xyy} = -\frac{e^x}{(1+y)^2}, \quad f'''_{xyy}(0,0) = -1; \text{ и}$$

$$f'''_{yyy} = -e^x \frac{-2}{(1+y)^3} = \frac{2e^x}{(1+y)^3}, \quad f'''_{yyy}(0,0) = 2.$$

Следува:

$$f(x, y) = y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \frac{1}{6}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3) + R_3(x, y) = \\ y + xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + R_3(x, y).$$

Задача 6. Функцијата $f(x, y) = x^y$ да се апроксимира со Тејлоров полином од втор степен во околина на точката $A(1,1)$, а потоа да се пресмета $1,1^{1,02}$.

Решение. Имаме:

$$f(1,1) = 1; \quad f'_x = yx^{y-1}, \quad f'_x(1,1) = 1; \quad f'_y = x^y \ln x, \quad f'_y(1,1) = 0; \\ f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f''_{xx}(1,1) = 0; \quad f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x, \quad f''_{xy}(1,1) = 1; \\ f''_{yy} = x^y \ln^2 x, \quad f''_{yy}(1,1) = 0.$$

Следува:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ \frac{1}{2}(f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) = \\ 1 + x - 1 + \frac{1}{2}2(x-1)(y-1) = 1 + x - 1 + (x-1)(y-1).$$

Оттука, за:

$$x = 1,1, \quad y = 1,02; \quad x_0 = 1 \text{ и } y_0 = 1;$$

добиваме:

$$1,1^{1,02} \approx 1 + 1,1 - 1 + (1,1 - 1)(1,02 - 1) = 1,1 + 0,1 \cdot 0,02 = 1,102.$$

Задача 7. Функцијата $z = z(x, y)$ дефинирана со равенката $z^3 - 2xz + y = 0$, каде што $z(1,1) = 1$, да се апроксимира со Тејлоров полином од втор степен во околина на точката $A(1,1)$.

Решение. Ги наоѓаме парцијалните изводи имајќи ја предвид зависноста $z = z(x, y)$, а потоа ја пресметуваме нивната вредност во точката $(1,1)$. Прво од условот на задачата $z(1,1) = 1$. Потоа:

$$X : 3z^2 z'_x - 2(z + xz'_x) = 0 \Leftrightarrow \underline{(3z^2 - 2x)z'_x - 2z = 0},$$

од каде што: $z'_x(1,1) - 2 = 0 \Leftrightarrow z'_x(1,1) = 2$.

$$Y : 3z^2 z'_y - 2xz'_y + 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{(3z^2 - 2x)z'_y + 1 = 0},$$

од каде што: $z'_y(1,1) + 1 = 0 \Leftrightarrow z'_y(1,1) = -1$.

$$XX : (6zz'_x - 2)z'_x + (3z^2 - 2x)z''_{xx} - 2z'_x = 0,$$

од каде што: $(12 - 2)2 + z''_{xx}(1,1) - 4 = 0 \Leftrightarrow z''_{xx}(1,1) = -16$;

$$XY : 6zz'_y z'_x + (3z^2 - 2x)z''_{xy} - 2z'_y = 0,$$

од каде што: $-12 + z''_{xy}(1,1) + 2 = 0 \Leftrightarrow z''_{xy}(1,1) = 10$.

$$YY : 6zz'^2_y + (3z^2 - 2x)z''_{yy} = 0,$$

од каде што: $6 + z''_{yy}(1,1) = 0 \Leftrightarrow z''_{yy}(1,1) = -6$.

Конечно:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &\frac{1}{2} \left(f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) = \\ &1 + 2(x - 1) - (y - 1) + \frac{1}{2} \left(-16(x - 1)^2 + 2 \cdot 10(x - 1)(y - 1) - 6(y - 1)^2 \right) = \\ &1 + 2(x - 1) - (y - 1) - 8(x - 1)^2 + 10(x - 1)(y - 1) - 3(y - 1)^2. \end{aligned}$$

3.3. ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ

Задача 1. Да се најдат екстремните вредности на функцијата:

$$f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

Решение. Ги наоѓаме парцијалните изводи и ги прирамнуваме на 0,

$$\begin{aligned} f'_x &= 4 - 2x; \quad f'_x = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2; \\ f'_y &= -4 - 2y; \quad f'_y = 0 \Rightarrow -4 = 2y \Leftrightarrow y = -2. \end{aligned}$$

Следува дека единствена стационарна точка е $E(2, -2)$.

Притоа,

$$A = f''_{xx} = -2, \quad B = f''_{xy} = 0, \quad C = f''_{yy} = -2.$$

Бидејќи $AC - B^2 = 4 > 0$ и $A < 0$, следува дека E е точка на локален максимум за функцијата f .

Задача 2. Да се најдат екстремните вредности на функцијата:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Решение: Парцијалните изводи до втор ред се:

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 - 3y, \quad f'_y = 3y^2 - 3x, \\ f''_{xx} &= 6x, \quad f''_{xy} = -3, \quad f''_{yy} = 6y. \end{aligned}$$

Притоа,

$$\begin{aligned} f'_x = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow y = x^2; \text{ и} \\ f'_y = 0 &\Leftrightarrow 3y^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = y^2 \end{aligned}$$

Од $y = x^2$ (следува: $y^2 = x^4$) и $x = y^2$ добиваме:

$$\begin{aligned} x &= x^4 \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ x(x-1)(x^2+x+1) &= 0 \stackrel{x^2+x+1 > 0}{\Leftrightarrow} x = 0, \quad x = 1. \end{aligned}$$

Тогаш за:

$$x = 0, \text{ важи: } y = 0^2 = 0 \text{ и за } x = 1, \text{ важи: } y = 1^2 = 1.$$

Значи, стационарни точки се:

$$E_1(0,0) \text{ и } E_2(1,1).$$

За точката $E_1(0,0)$,

$$A = 0, B = -3 \text{ и } C = 0; \text{ од каде што: } AC - B^2 = -9 < 0.$$

Следува дека E_1 не е локален екстрем.

За точката $E_2(1,1)$, $A = 6$, $B = -3$ и $C = 6$. Следува:

$$AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0 \text{ и } A > 0,$$

односно E_2 е локален минимум.

Задача 3. Да се разложи бројот $a > 0$ на три позитивни собироци, така што нивниот производ да биде максимален.

Решение. Бараме екстрем од функцијата:

$$P = xyz, \quad x, y, z > 0.$$

Од условот:

$$x + y + z = a \Leftrightarrow z = a - x - y$$

добиваме функција од две променливи:

$$P = xy(a - x - y) = axy - x^2y - xy^2,$$

така што:

$$P'_x = ay - 2xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow y(a - 2x - y) = 0 \stackrel{y>0}{\Leftrightarrow} \\ a - 2x - y = 0 \Leftrightarrow y = a - 2x;$$

$$P'_y = ax - x^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow x(a - x - 2y) = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \\ a - x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = a - 2y.$$

Стационарните точки се решение на системот:

$$y = a - 2x, \quad x = a - 2y.$$

Со замена на првата во втората равенка добиваме:

$$x = a - 2(a - 2x) \Leftrightarrow x = -a + 4x \Leftrightarrow 3x = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Оттука: } y = a - 2\frac{a}{3} = \frac{a}{3} \text{ и } z = a - x - y = \frac{a}{3}.$$

На работ од дефиниционата област која се состои од делот од координатните рамнини во прв октант, $P = 0$ бидејќи една од

координатите е 0. Следува дека точката $E\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ е единствен кандидат за екстрем, а според условот во задачата функцијата има максимална вредност. Затоа во $\bar{E}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ функцијата има максимум. Значи, бројот a треба да се разложи на три еднакви собироци за да нивниот производ биде максимален.

Забелешка. 1) Според критериумот за одредување локални екстреми со изводи, може директно да се покаже екстремната вредност на функцијата во точката E . Имено:

$$P''_{xx} = -2y, \quad P''_{xy} = a - 2x - 2y \quad \text{и} \quad P''_{yy} = -2x;$$

и

$$P''_{xx}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{2a}{3}, \quad P''_{xy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{a}{3} \quad \text{и} \quad P''_{yy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{2a}{3}.$$

Оттука:

$$AC - B^2 = \frac{4a^2}{9} - \left(-\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3} > 0 \quad \text{и} \quad A = -\frac{2a}{3} < 0.$$

Следува дека во E функцијата $P = xy(a - x - y)$ има локален максимум, од каде што во $\bar{E}$, $P = xyz$ има локален максимум.

2) Условот $x, y, z > 0$ е битен, бидејќи инаку функцијата нема максимална вредност. Имено, кога $x \rightarrow +\infty$, $y = -1$ и $z = a + 1 - x$, тогаш $P = x(x - a - 1) \rightarrow +\infty$.

Задача 4. Во сфера со радиус R , да се впише квадар со најголем волумен.

Решение. Волуменот на квадарот е $V = abc$. Бидејќи просторната дијагонала во впишаниот квадар е дијаметар на сферата, важи:

$$(2R)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{4R^2 - b^2 - c^2}$$

Следува:

$$V = bc\sqrt{4R^2 - b^2 - c^2}.$$

Оттука:

$$V'_b = c\sqrt{4R^2 - b^2 - c^2} + bc \frac{1}{2\sqrt{4R^2 - b^2 - c^2}}(-2b) =$$

$$\frac{c(4R^2 - b^2 - c^2 - b^2)}{\sqrt{4R^2 - b^2 - c^2}} = \frac{c(4R^2 - 2b^2 - c^2)}{\sqrt{4R^2 - b^2 - c^2}};$$

$$V'_c = b\sqrt{4R^2 - b^2 - c^2} + bc \frac{1}{2\sqrt{4R^2 - b^2 - c^2}}(-2c) =$$

$$\frac{b(4R^2 - b^2 - c^2 - c^2)}{\sqrt{4R^2 - b^2 - c^2}} = \frac{b(4R^2 - b^2 - 2c^2)}{\sqrt{4R^2 - b^2 - c^2}}.$$

Имајќи предвид дека $a, b, c > 0$; имаме:

$$V'_b = 0 \Leftrightarrow 4R^2 = 2b^2 + c^2;$$

$$V'_c = 0 \Leftrightarrow 4R^2 = b^2 + 2c^2.$$

Со прирамнување на двете равенки добиваме:

$$2b^2 + c^2 = b^2 + 2c^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = c.$$

Следува:

$$4R^2 = 3b^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{4R^2}{3} \stackrel{b, R > 0}{\Leftrightarrow} b = \frac{2R}{\sqrt{3}},$$

од каде што:

$$c = \frac{2R}{\sqrt{3}} \text{ и } a = \sqrt{4R^2 - \frac{4}{3}R^2 - \frac{4}{3}R^2} = \sqrt{\frac{4}{3}R^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Кога една од страните тежи кон 0 и волуменот тежи кон 0.

Затоа за $a = b = c = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ функцијата достигнува максимален волумен:

$$V = abc = \frac{2}{\sqrt{3}}R \frac{2}{\sqrt{3}}R \frac{2}{\sqrt{3}}R = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}.$$

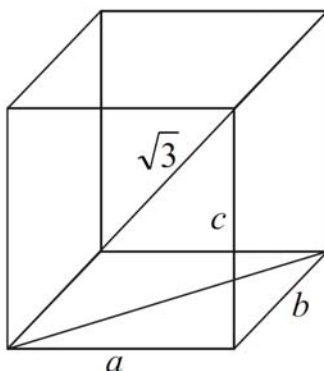
3.4. УСЛОВЕН ЕКСТРЕМ

Во задачите во кој бараме екстрем ја определуваме стационарната точка (x, y, z) . Бидејќи има само една стационарна точка, а во текстот е нагласено дека функцијата има екстрем и е кажан видот на екстремот, тогаш таа стационарната точка е бараниот екстрем.

Задача 1. Од сите квадрати со дијагонала $\sqrt{3}$, да се определи оној што има најголем волумен.

Решение. Нека a , b и c се страни на квадратот. Тогаш:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 3.$$



Цртеж 3.4.1.

Бараме екстрем на функцијата $V = abc$ при услов $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.
Функцијата на Лагранж е:

$$F = abc + \lambda(a^2 + b^2 + c^2 - 3), \text{ каде што:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} \equiv bc + 2\lambda a = 0 \Leftrightarrow 2\lambda a = -bc \Leftrightarrow \lambda = -\frac{bc}{2a} \quad (1);$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} \equiv ac + 2\lambda b = 0 \Leftrightarrow 2\lambda b = -ac \Leftrightarrow \lambda = -\frac{ac}{2b} \quad (2);$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} \equiv ab + 2\lambda c = 0 \Leftrightarrow 2\lambda c = -ab \Leftrightarrow \lambda = -\frac{ab}{2c} \quad (3);$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv a^2 + b^2 + c^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 3 \quad (4).$$

Од (1) и (2) и (1) и (3) добиваме:

$$\frac{bc}{2a} = \frac{ac}{2b} \Leftrightarrow b^2 = a^2 \stackrel{a,b>0}{\Leftrightarrow} a = b; \text{ и } \frac{bc}{2a} = \frac{ab}{2c} \Leftrightarrow c^2 = a^2 \Leftrightarrow c = a.$$

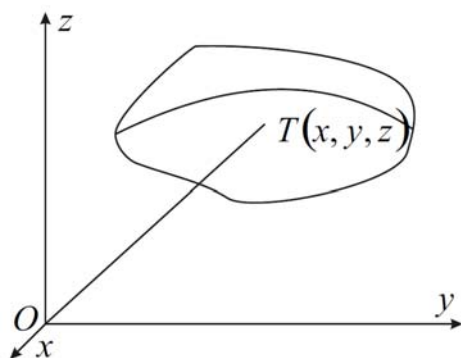
Со замена во (4) добиваме:

$$a^2 + a^2 + a^2 = 3 \Leftrightarrow 3a^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1.$$

Оттука, $b = c = 1$. Значи, квадратот со најголем волумен е коцка со страна $a = 1$.

Задача 2. Определи го најмалото растојание од точка од површината $xy + 2xz = 5\sqrt{5}$ до координатниот почеток.

Решение. Растојанието од произволна точка на површината $T(x, y, z)$ до координатниот почеток $O(0,0,0)$ е $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, и според условите од задачата растојанието е функцијата од која бараме екстрем, при услов: $xy + 2xz - 5\sqrt{5} = 0$.



Цртеж 3.4.2.

Затоа функцијата на Лагранж е:

$$F(x, y, z, \lambda) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \lambda(xy + 2xz - 5\sqrt{5}),$$

од каде што го добиваме системот равенки:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \equiv \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \lambda(y + 2z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(y + 2z) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-x}{(y + 2z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \equiv \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \lambda x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda x = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-y}{x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} \equiv \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\lambda x = \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-z}{2x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial F_2}{\partial \lambda} \equiv xy + 2xz - 5\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow xy + 2xz = 5\sqrt{5}.$$

За точките од површината важи:

$$x \neq 0, \quad y + 2z \neq 0 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + z^2 \neq 0,$$

односно при делењето не се скратува дефиниционата област.

Од првата и втората равенка имаме:

$$\frac{-x}{(y+2z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{-y}{x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Leftrightarrow \frac{x}{(y+2z)} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow$$

$$x^2 = y^2 + 2yz;$$

од втората и третата равенка имаме:

$$\frac{-y}{x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{-z}{2x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Leftrightarrow y = \frac{z}{2} \Leftrightarrow z = 2y,$$

од каде што:

$$x^2 = y^2 + 2y \cdot 2y = 5y^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}y.$$

Со замена во условот добиваме:

$$xy + 2xz = 5\sqrt{5} \Leftrightarrow \pm\sqrt{5}y^2 \pm 2 \cdot 2\sqrt{5}y^2 = 5\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\pm 5\sqrt{5}y^2 = 5\sqrt{5} \Leftrightarrow \pm y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1.$$

Тогаш : $x^2 = 5$, $z^2 = 4$; од каде што најмалото растојание е:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{5+1+4} = \sqrt{10}.$$

Задача 3. Во полусфера со радиус R да се впише паралелопипед со најголем волумен.

Решение. Равенката на централна сфера е $R^2 = a^2 + b^2 + c^2$. За секој впишан паралелопипед постои квадар со ист волумен, затоа може да сметаме дека паралелопипедот со најголем волумен е квадар. Неговите страни се $2a$, $2b$ и c , додека волуменот, односно функцијата од која бараме екстрем е $V=4abc$.

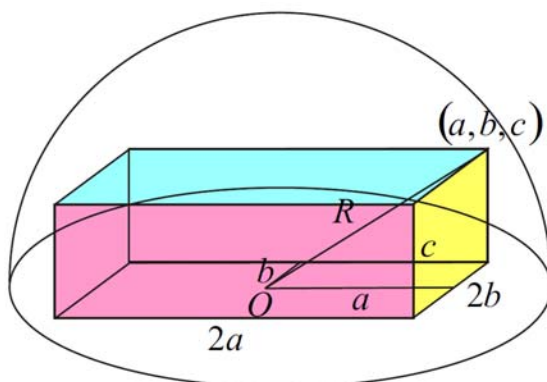
Ја спроведуваме постапката за определување екстрем на функцијата:

$$F = 4abc + \lambda(R^2 - a^2 - b^2 - c^2):$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 4bc - 2\lambda a = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2bc}{a};$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 4ba - 2\lambda b = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2ac}{b};$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 4ab - 2\lambda c = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2ab}{c};$$



Цртеж 3.4.3.

$$\frac{2bc}{a} = \frac{2ac}{b} \Leftrightarrow b^2 = a^2 \Leftrightarrow a = b; \quad \frac{2bc}{a} = \frac{2ab}{c} \Leftrightarrow c^2 = a^2 \Leftrightarrow c = a.$$

$$R^2 = 3a^2 \Leftrightarrow a = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Значи, паралелопипедот има страни: $\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}$ и $\frac{R}{\sqrt{3}}.$

Задача 4. Даден е елипсоидот:

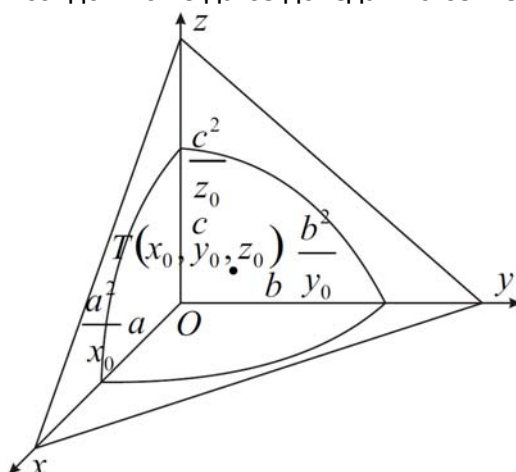
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Да се определи минималната вредност на волуменот на тетраедарот што го образуваат тангентните рамнини на елипсоидот во произволна точка со координатните рамнини.

Решение. Заради симетрија доволно е допирната точка да биде во прв октант, т.е. за нејзините координати да важи:

$$x_0, y_0, z_0 \geq 0.$$

За да тангентните рамнини образуваат тетраедар со координатните рамнини треба: $x_0, y_0, z_0 \neq 0$. Тогаш тангентните рамнини на елипсоидот може да се доведат во сегментен вид:



Цртеж 3.4.4.

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0 \quad / : 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{\frac{a^2}{x_0}} + \frac{y}{\frac{b^2}{y_0}} + \frac{z}{\frac{c^2}{z_0}} = \underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}}_1 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{a^2}{x_0}} + \frac{y}{\frac{b^2}{y_0}} + \frac{z}{\frac{c^2}{z_0}} = 1.$$

Следува дека отсечоците се: $\frac{a^2}{x_0}$, $\frac{b^2}{y_0}$ и $\frac{c^2}{z_0}$.

Бидејќи волуменот е една шестина по производот на должините на отсечоците, важи:

$$V = \frac{1}{6} \frac{a^2}{x_0} \frac{b^2}{y_0} \frac{c^2}{z_0} = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}.$$

Поради тоа што допирната точка е произволна, нејзините координати место со (x_0, y_0, z_0) , ќе ги означиме со (x, y, z) . Тогаш

функцијата од која бараме екстрем е: $V = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{xyz}$, додека условот е:

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

од каде што Лангражовата функција е:

$$F = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{xyz} + \lambda \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right).$$

Ги определуваме координатите на точката во која волуменот има минималната вредност:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{x^2 yz} + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda x}{a^2} = -\frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{x^2 yz} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{12} \frac{a^4 b^2 c^2}{x^3 yz};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{xy^2 z} + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda y}{b^2} = -\frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{xy^2 z} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{12} \frac{a^2 b^4 c^2}{xy^3 z};$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{xyz^2} + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda z}{c^2} = -\frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{xyz^2} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{12} \frac{a^2 b^2 c^4}{xyz^3}.$$

Следува:

$$-\frac{1}{12} \frac{a^4 b^2 c^2}{x^3 yz} = -\frac{1}{12} \frac{a^2 b^4 c^2}{xy^3 z} \Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{y^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2; \text{ и}$$

$$-\frac{1}{12} \frac{a^4 b^2 c^2}{x^3 yz} = -\frac{1}{12} \frac{a^2 b^2 c^4}{xyz^3} \Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} = \frac{c^2}{z^2} \Leftrightarrow z^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2.$$

Ако замениме во равенката на елипсоидот добиваме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} \frac{x^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

Оттука: $y = \frac{b}{a} x = \frac{b}{\sqrt{3}}$ и $z = \frac{c}{a} x = \frac{c}{\sqrt{3}}$. Значи, волуменот е:

$$V = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{\frac{a}{\sqrt{3}} \frac{b}{\sqrt{3}} \frac{c}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{6} 3\sqrt{3} abc = \frac{\sqrt{3}}{2} abc.$$

Задача 5. Види ја задачата 3.4.1. од првиот дел.

4-5. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

4. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПРВ РЕД

4.1. ФОРМИРАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Задача 1. Да се формира диференцијалната равенка на фамилијата криви: $y = x^2 + 2Cx$.

Решение. Изводот на диференцијалната равенка е:

$$y' = 2x + 2C.$$

Го изразуваме параметарот C како функција од x и y ,

$$C = \frac{y' - 2x}{2},$$

и го заменуваме во диференцијалната равенка: $y = x^2 + 2Cx$,

$$y = x^2 + 2 \frac{y' - 2x}{2} x \Leftrightarrow y = x^2 + y'x - 2x^2 \Leftrightarrow y = y'x - x^2.$$

Задача 2. Види ја задачата 4.1.1. од првиот дел.

Задача 3. Да се покаже дека функцијата $y = \frac{1}{2}x \sin x$ е партикуларен интеграл на диференцијалната равенка:

$$y'' + y = \cos x.$$

Решение. Имаме:

$$y' = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} x \cos x \text{ и}$$

$$y'' = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} (\cos x - x \sin x) = \cos x - \frac{1}{2} x \sin x.$$

Ако замениме во диференцијалната равенката, добиваме:

$$\cos x - \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} x \sin x = \cos x \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Следува дека функцијата $y = \frac{1}{2}x \sin x$ е партикуларен интеграл на диференцијалната равенка.

Задача 4. Да се провери дали функцијата $y = C_1x + \frac{C_2}{x}$ е општ интеграл за диференцијалната равенка $x^2y'' + xy' - y = 0$.

Решение. Имаме:

$$y' = C_1 - \frac{C_2}{x^2} \text{ и } y'' = -C_2 \frac{-2}{x^3} = \frac{2C_2}{x^3}.$$

Ако замениме во диференцијалната равенка, добиваме:

$$\begin{aligned} x^2 \frac{2C_2}{x^3} + x \left(C_1 - \frac{C_2}{x^2} \right) - \left(C_1x + \frac{C_2}{x} \right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{2C_2}{x} + \underline{C_1x} - \frac{C_2}{x} - \underline{C_1x} - \frac{C_2}{x} &= 0 \Leftrightarrow 0 = 0. \end{aligned}$$

Функцијата ја задоволува равенката од втор ред и содржи две независни константи, од каде што следува дека е општ интеграл на диференцијалната равенка.

4.2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ СО РАЗДВОИВИ ПРОМЕНЛИВИ

Задача 1-2. Види ги задачите 4.2.1. и 4.2.2. од првиот дел.

Задача 3. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}.$$

Решение. Го запишуваме првиот извод y' во облик dy/dx , потоа членовите што го содржат x ги префрламе од десната, а што го содржат y од левата страна на равенството, и интегрираме.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} &\Leftrightarrow \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} \Leftrightarrow \\ \arctan y &= \arctan x + C. \end{aligned}$$

Задача 4. Да се реши диференцијалната равенка:

$$xy^3 + 2yy' = 0.$$

Решение. Со проверка се заклучува дека $y = 0$ е решение на диференцијалната равенка. За $y \neq 0$ равенката е еквивалентна со:

$$xy^2 + 2y' = 0,$$

чие општо решение е:

$$\begin{aligned} xy^2 + 2y' = 0 &\Leftrightarrow 2 \frac{dy}{dx} = -xy^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{2} x dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{2} \int x dx \Leftrightarrow \\ &-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C \quad / -4 \Leftrightarrow \frac{4}{y} = x^2 + C \Leftrightarrow y = \frac{4}{x^2 + C}. \end{aligned}$$

Значи равенката има општо решение: $y = \frac{4}{x^2 + C}$ и сингуларно решение: $y = 0$.

Коментар. Во некои задачи сингуларните решенија нема да ги наоѓаме, само ќе ги подразбираме.

Задача 5. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y' = \sin y.$$

Решение. Заради:

$$\sin y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

Значи, за $y = k\pi$, $y' = 0$, па $y = k\pi$ е решение на равенката.

За $\sin y \neq 0$ равенката е еквивалентна со:

$$\frac{dy}{dx} = \sin y \Leftrightarrow \frac{dy}{\sin y} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{\sin y} = \int dx \Leftrightarrow \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| = x + C,$$

бидејќи:

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \int \frac{dy}{2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2}} = \int \frac{dy}{2 \operatorname{tg} \frac{y}{2} \cos^2 \frac{y}{2}} =$$

$$\left(\operatorname{tg} \frac{y}{2} = t \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \frac{y}{2}} \frac{1}{2} dy = dt \right) = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| + C.$$

Значи, општото решение е: $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| = x + C$, а сингуларни решенија се: $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. Да се реши диференцијалната равенка:

$$(\sqrt{xy} - \sqrt{x}) dy + y dx = 0.$$

Решение. За да равенката се сведе на раздвоиви променливи се трансформира изразот:

$$\sqrt{xy} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\sqrt{y} - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{y} - 1),$$

каде што $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$, бидејќи од условот постојат $\sqrt{x}$ и $\sqrt{xy}$ што е можно само кога $x, y \geq 0$. Затоа равенката е еквивалентна на:

$$\sqrt{x}(\sqrt{y} - 1) dy + y dx = 0,$$

чие решение е:

$$y dx = \sqrt{x}(1 - \sqrt{y}) dy \stackrel{x, y \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1 - \sqrt{y}}{y} dy \Leftrightarrow$$

$$2 \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = \ln |y| - 2\sqrt{y} + C \quad (1) \Leftrightarrow$$

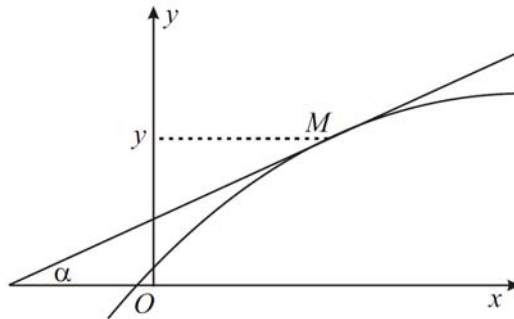
$$\sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln y - \sqrt{y} + C \quad (2) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \ln \sqrt{y} + C.$$

Се проверува дека правите $x = 0$ и $y = 0$ се сингуларни решенија на равенката.

Коментар. Записите (1) и (2) се равенки меѓу фамилии функции. Секоја крива што се добива за $C = C_0$ со првата равенка се добива и за $C = \frac{C_0}{2}$ со втората, и обратно. Затоа равенките ги опишуваат истите фамилии функции.

Задача 7. Да се најде крива што минува низ точката $A(0, -2)$ и има својство тангенсот од аголот што го зафаќа тангентата повлечена од која било точка, со x -оската, да е еднаков на ординатата на точката зголемена за 3.

Решение. Од условот на задачата: $\operatorname{tg} \alpha = y + 3$.



Цртеж 4.2.7.

Имајќи предвид дека тангенсот од аголот што го зафаќа тангентата е еднаков на коефициентот на правецот на тангентата, ја добиваме диференцијалната равенка:

$$y' = y + 3,$$

чие општо решение е:

$$\frac{dy}{dx} = y + 3 \Leftrightarrow \frac{dy}{y+3} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y+3} = \int dx \Leftrightarrow \ln|y+3| = x + C.$$

Решението може да се сведе на:

$$\ln|y+3| = x + \ln C, C > 0 \Leftrightarrow e^{\ln|y+3|} = e^{x+\ln C} \Leftrightarrow |y+3| = Ce^x \Leftrightarrow$$

$$y+3 = \pm Ce^x, C > 0 \Leftrightarrow y = Ce^x - 3, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Решение е и правата $y = -3$, кое не е сингуларно бидејќи се добива од општото за $C = 0$. Значи, општото решение е:

$$y = Ce^x - 3, C \in \mathbb{R}.$$

Ја бираме константата од условот кривата да минува низ $A(0, -2)$,

$$-2 = Ce^0 - 3 \Leftrightarrow C = 1.$$

Следува дека бараната крива е: $y = e^x - 3$.

4.3. ХОМОГЕНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Задача 1. Види ја задачата 4.3.1. од првиот дел.

Задача 2. Да се најде партикуларниот интеграл на диференцијалната равенка:

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0,$$

што го задоволува условот: $x = 1, y = 2$.

Решение. Равенката е хомогена бидејќи секоја од равенките $2xy$ и $x^2 - y^2$ има ист ред 2. Равенката ќе ја поделиме со $x^2 dx$,

$$\frac{2xydx}{x^2 dx} + \frac{(x^2 - y^2)dy}{x^2 dx} = 0 \Leftrightarrow 2\frac{y}{x} + \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)y' = 0.$$

Воведуваме смена $\frac{y}{x} = z$, од каде што следува дека:

$$y = zx \text{ и } y' = z'x + z,$$

па равенката се сведува на равенка со раздвоиви променливи,

$$\begin{aligned} 2z + (1 - z^2)(z'x + z) &= 0 \Leftrightarrow \\ 2z + (1 - z^2)z'x + z - z^3 &= 0 \Leftrightarrow (1 - z^2)z'x = z^3 - 3z. \end{aligned}$$

Притоа, $z' = \frac{dz}{dx}$. Ја интегрираме равенката за $x, z^3 - 3z \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1 - z^2}{z^3 - 3z} dz &= \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{1 - z^2}{z^3 - 3z} dz = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \\ \left(\begin{array}{ll} z^3 - 3z = t & -3(1 - z^2) dz = dt \\ (3z^2 - 3) dz = dt & (1 - z^2) dz = -\frac{dt}{3} \end{array} \right) &\Leftrightarrow \\ \int \frac{1}{t} \left(-\frac{dt}{3} \right) &= \ln|x| + C \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \ln|t| = \ln|x| + C \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \ln|z^3 - 3z| = \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Со враќање во смената $\frac{y}{x} = z$ го добиваме решението на хомогената равенка кога $x \neq 0$,

4. Диференцијални равенки од прв ред

$$-\frac{1}{3} \ln \left| \frac{y^3}{x^3} - 3 \frac{y}{x} \right| = \ln |x| + C.$$

За $x = 1$ и $y = 2$, добиваме:

$$-\frac{1}{3} \ln |8 - 6| = C \Leftrightarrow C = -\frac{\ln 2}{3}.$$

Значи партикуларното решение во имплицитен вид е:

$$-\frac{1}{3} \ln \left| \frac{y^3}{x^3} - 3 \frac{y}{x} \right| = \ln |x| - \frac{\ln 2}{3}.$$

Коментар 1. Општото решение од претходната задача не е определено на целата дефинициона област, бидејќи тоа не е потребно за определување на конкретниот партикуларен интеграл. Ако сакаме да го определиме на целата област, тогаш постапката е:

$$\begin{aligned} \ln |z^3 - 3z| + |x|^3 = \ln C, C > 0 &\Leftrightarrow |(z^3 - 3z)x^3| = C, C > 0 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{y^3}{x^3} - 3 \frac{y}{x} \right) x^3 = \pm C, C > 0 &\Leftrightarrow y^3 - 3x^2y = C, C \neq 0. \end{aligned}$$

Се покажува дека и $y^3 - 3x^2y = 0$ е решение на хомогената равенка. Имено,

$$\begin{aligned} y^3 - 3x^2y = 0 &\Leftrightarrow y(y^2 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ или} \\ (y^2 = 3x^2 \text{ т.е. } y = \pm\sqrt{3}x). \end{aligned}$$

Ако $y = 0$, следува дека $dy = 0$, па равенката е исполнета. Слично се добива кога $y = \pm\sqrt{3}x$, од каде што: $dy = \pm\sqrt{3}dx$. Затоа решението е:

$$y^3 - 3x^2y = C, C \in \mathbb{R}.$$

Коментар 2. Како контролен услов може да се направи проверка со диференцирање:

$$\begin{aligned} 3y^2y' - 6xy - 3x^2y' &= 0 \text{ } / : (-3) \Leftrightarrow \\ 2xy - (x^2 - y^2)y' &= 0 \Leftrightarrow 2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0. \end{aligned}$$

Задача 3. Да се најде реши диференцијалната равенка:

$$\left(x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x}\right) y dx - \left(y \sin \frac{y}{x} - x \cos \frac{y}{x}\right) x dy = 0.$$

Решение. Ако помножине со $\frac{1}{x^2 dx}$, равенката се сведува

на:

$$\begin{aligned} \left(x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x}\right) \frac{y dx}{x dx} - \left(y \sin \frac{y}{x} - x \cos \frac{y}{x}\right) \frac{x dy}{x dx} &= 0 \Leftrightarrow \\ \left(\cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x}\right) \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} - \cos \frac{y}{x}\right) y' &= 0. \end{aligned}$$

Воведуваме смена $\frac{y}{x} = z$, од каде што: $y = zx$ и $y' = z'x + z$.

Добиваме:

$$(\cos z + z \sin z) z - (z \sin z - \cos z)(z'x + z) = 0.$$

Равенката ја решаваме според стандардната постапка за интеграција на равенка со раздвоиви променливи,

$$\begin{aligned} (\cos z + z \sin z - z \sin z + \cos z) z - (z \sin z - \cos z) z'x &= 0 \Leftrightarrow \\ 2z \cos z = (z \sin z - \cos z) \frac{dz}{dx} x \Leftrightarrow 2 \frac{dx}{x} &= \frac{z \sin z - \cos z}{z \cos z} dz \Leftrightarrow \\ 2 \int \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{\sin z}{\cos z} - \frac{1}{z} \right) dz \Leftrightarrow \begin{cases} \cos z = t \\ -\sin z dz = dt \\ \sin z dz = -dt \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$2 \ln|x| = -\int \frac{dt}{t} - \ln|z| + C \Leftrightarrow 2 \ln|x| = -\ln|\cos z| - \ln|z| + C.$$

Ако се среди интегралот, се добива:

$$\begin{aligned} \ln|x|^2 + \ln|\cos z| + \ln|z| &= \ln C, \quad C > 0 \Leftrightarrow \ln|x^2 z \cos z| = \ln C, \quad C > 0 \Leftrightarrow \\ |x^2 z \cos z| &= C, \quad C > 0 \Leftrightarrow x^2 z \cos z = \pm C \Leftrightarrow x^2 z \cos z = C, \quad C \neq 0. \end{aligned}$$

Со враќање во смената го добиваме решението на равенката:

$$x^2 \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} = C \Leftrightarrow xy \cos \frac{y}{x} = C.$$

4.4. ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

Задача 1. Види ја задача 4.4.1. од првиот дел.

Задача 2. Да се реши диференцијалната равенка:

$$x^2 y' + y - 1 = 0.$$

Решение. За да равенката биде диференцијална треба $x \neq 0$. За $x = 0$ равенката се сведува на линеарната равенка $y = 1$, односно $(1, 0)$ е решение. За $x \neq 0$ равенката ја сведуваме на линеарна, така што ќе ја поделиме со x^2 . Потоа членовите што ја содржат само променливата x ги префрламе од десната страна на равенката. Добиваме: $y' + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{f(x)} y = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)}$. На крај, ја применуваме

формулата за определување на општо решение на линеарна диференцијална равенка:

$$y = e^{-\int f(x) dx} \left(C + \int g(x) e^{\int f(x) dx} dx \right) \Leftrightarrow y = e^{-\int \frac{1}{x^2} dx} \left(C + \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{1}{x^2} dx} dx \right) \Leftrightarrow$$

$$y = e^{\frac{1}{x}} \left(C + \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} = t \\ \frac{1}{x^2} dx = dt \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = e^{\frac{1}{x}} \left(C + \int e^t dt \right) \Leftrightarrow$$

$$y = e^{\frac{1}{x}} (C + e^t) \Leftrightarrow y = e^{\frac{1}{x}} \left(C + e^{-\frac{1}{x}} \right) \Leftrightarrow y = Ce^{\frac{1}{x}} + 1.$$

Задача 3. Да се реши диференцијалната равенка:

$$xy' + y = x^3 e^{x^2}.$$

Решение. Равенката е диференцијална ако $x \neq 0$. Следува:

$$xy' + y = x^3 e^{x^2} \quad / : x \quad \Leftrightarrow \quad y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} y = \underbrace{x^2 e^{x^2}}_{g(x)} \Leftrightarrow$$

$$y = e^{-\int f(x) dx} \left(C + \int g(x) e^{\int f(x) dx} dx \right) \Leftrightarrow y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(C + \int x^2 e^{x^2} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right) \Leftrightarrow$$

4. Диференцијални равенки од прв ред

$$\begin{aligned}
 y &= e^{-\ln|x|} \left(C + \int x^2 e^{x^2} e^{\ln|x|} dx \right) \Leftrightarrow y = e^{\ln|x|^{-1}} \left(C + \int x^2 e^{x^2} |x| dx \right) \Leftrightarrow \\
 y &= \frac{1}{|x|} \left(C + \int x^2 e^{x^2} |x| dx \right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x \operatorname{sgn}(x)} \left(C + \int x^2 e^{x^2} x \operatorname{sgn}(x) dx \right) \Leftrightarrow \\
 y &= \frac{1}{x} \left(C \operatorname{sgn}(x) + \int x^3 e^{x^2} dx \right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \left(C + \int x^3 e^{x^2} dx \right).
 \end{aligned}$$

Интегралот од последната формула се решава со парцијална интеграција:

$$\begin{aligned}
 \int x^3 e^{x^2} dx &= \left(\begin{array}{ll} x^2 = t & x dx = \frac{1}{2} dt \\ 2x dx = dt & \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int t e^t dt = \left(\begin{array}{ll} u = t & dv = e^t dt \\ du = dt & v = e^t \end{array} \right) = \\
 \frac{1}{2} \left(t e^t - \int e^t dt \right) &= \frac{1}{2} (t e^t - e^t) = \frac{1}{2} (t - 1) e^t = \frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2}.
 \end{aligned}$$

Оттука:

$$y = \frac{1}{x} \left(C + \frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2} \right) = \frac{C}{x} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) e^{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Коментар. Задачата нема општо решение на $\mathbb{R}$, туку на секој од интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Константата C не мора да биде иста на секој од интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

4.5. РАВЕНКА ШТО СЕ СВЕДУВА НА ЛИНЕАРНА СО СМЕНАТА: $y' = \frac{1}{x'}$

Задача 1. Да се најде општото решение на диференцијалната равенка: $(x - 2xy - y^2) y' + y^2 = 0$.

Решение. Воведуваме смена: $y' = \frac{1}{x'}$. Следува:

$$\begin{aligned}
 (x - 2xy - y^2) \frac{1}{x'} + y^2 &= 0 \quad / \cdot x' \Leftrightarrow x - 2xy - y^2 + y^2 x' = 0 \Leftrightarrow \\
 y^2 x' + (1 - 2y)x &= y^2 \quad / : y^2 \Leftrightarrow x' + \underbrace{\left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y} \right)}_{f(y)} x = \underbrace{\frac{1}{y^2}}_{g(y)} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

4. Диференцијални равенки од прв ред

$$\begin{aligned}
 x &= e^{-\int f(y) dy} \left(C + \int g(y) e^{\int f(y) dy} dy \right) \Leftrightarrow x = e^{-\int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y} \right) dy} \left(C + \int e^{\int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y} \right) dy} dy \right) \\
 &\Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{y} + 2 \ln|y|} \left(C + \int e^{-\frac{1}{y} - 2 \ln|y|} dy \right) \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{y}} e^{\ln y^2} \left(C + \int e^{-\frac{1}{y}} e^{-\frac{\ln y^2}{y^2}} dy \right) \Leftrightarrow \\
 x &= y^2 e^{\frac{1}{y}} \left(C + \int e^{-\frac{1}{y}} \frac{1}{y^2} dy \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{y} = t \\ \frac{1}{y^2} dy = dt \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y^2 e^{\frac{1}{y}} \left(C + \int e^t dt \right) \Leftrightarrow \\
 x &= y^2 e^{\frac{1}{y}} (C + e^t) \Leftrightarrow x = y^2 e^{\frac{1}{y}} \left(C + e^{-\frac{1}{y}} \right) \Leftrightarrow x = y^2 \left(C e^{\frac{1}{y}} + 1 \right).
 \end{aligned}$$

Задача 2. Да се најде општото решение на диференцијалната равенка: $y' = \frac{y}{2y \ln|y| + y - x}$.

Решение. Воведуваме смена: $y' = \frac{1}{x'}$. Следува:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x'} &= \frac{y}{2y \ln|y| + y - x} \Leftrightarrow x' = \frac{2y \ln|y| + y - x}{y} \Leftrightarrow \\
 x' + \frac{1}{y} x &= 2 \ln|y| + 1 \Rightarrow x = e^{-\int f(y) dy} \left(C + \int g(y) e^{\int f(y) dy} dy \right) \Leftrightarrow \\
 x &= e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left(C + \int (2 \ln|y| + 1) e^{\int \frac{1}{y} dy} dy \right) \Leftrightarrow \\
 x &= e^{-\ln|y|} \left(C + \int (2 \ln|y| + 1) e^{\ln|y|} dy \right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{|y|} \left(C + \int (2 \ln|y| + 1) |y| dy \right) \Leftrightarrow \\
 x &= \frac{1}{y \operatorname{sgn} y} \left(C + \int (2 \ln|y| + 1) y \operatorname{sgn} y dy \right) \Leftrightarrow \\
 x &= \frac{1}{y} \left(C \operatorname{sgn} y + \int (2 \ln|y| + 1) y dy \right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \left(C + \int (2 \ln|y| + 1) y dy \right).
 \end{aligned}$$

Каде што:

$$\int (2 \ln |y| + 1) y dy = \int (2y \ln |y| + y) dy = \begin{pmatrix} u = \ln |y| & dv = 2y \\ du = \frac{1}{y} & v = y^2 \end{pmatrix} =$$

$$y^2 \ln |y| - \int y^2 \frac{1}{y} dy + \frac{y^2}{2} = y^2 \ln |y| - \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = y^2 \ln |y|.$$

Следува дека општото решение е:

$$x = \frac{1}{y} (C + y^2 \ln |y|) \Leftrightarrow x = \frac{C}{y} + y \ln |y|.$$

4.6. БЕРНУЛИЕВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

Задача 1. Да се најде општото решение на диференцијалната равенка: $y' + y \sin x = y^3 \sin x$.

Решение. Воведуваме смена:

$$z = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}, \text{ од каде што: } z' = \frac{-2}{y^3} y'.$$

За полесно да се направи смената, равенката ја делиме со y^3 и множиме со -2 .

$$y' + y \sin x = y^3 \sin x \quad / : y^3 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} \sin x = \sin x \quad / \cdot (-2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{-2y'}{y^3} - 2 \frac{1}{y^2} \sin x = -2 \sin x \Leftrightarrow z' - 2z \sin x = -2 \sin x.$$

Новодобиената равенка е линеарна. Го наоѓаме општото решение, а потоа со враќање на првобитната променлива го добиваме бараниот интеграл:

$$z = e^{-\int f(x) dx} \left(C + \int g(x) e^{\int f(x) dx} dx \right) \Leftrightarrow$$

$$z = e^{2 \int \sin x dx} \left(C - 2 \int \sin x e^{-2 \int \sin x dx} dx \right) \Leftrightarrow z = e^{-2 \cos x} \left(C - 2 \int \sin x e^{2 \cos x} dx \right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cos x = t \\ -2 \sin x dx = dt \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = e^{-2 \cos x} \left(C + \int e^t dt \right) \Leftrightarrow z = e^{-2 \cos x} (C + e^t) \Leftrightarrow$$

$$z = e^{-2 \cos x} (C + e^{2 \cos x}) \Leftrightarrow z = \frac{C}{e^{2 \cos x}} + 1 \Leftrightarrow$$

4. Диференцијални равенки од прв ред

$$\frac{1}{y^2} = \frac{C}{e^{2\cos x}} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} = \frac{C + e^{2\cos x}}{e^{2\cos x}} \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{e^{2\cos x}}{C + e^{2\cos x}}}.$$

Задача 2. Да се најде партикуларниот интеграл на диференцијалната равенка:

$$xy' - (x-1)y = -x^2 e^{-x} y^2,$$

што го исполнува почетниот услов: $y = e$ за $x = 1$.

Решение. Имаме:

$$xy' - (x-1)y = -x^2 e^{-x} y^2 : x \Leftrightarrow y' - \left(1 - \frac{1}{x}\right)y = -x e^{-x} y^2 / \left(-\frac{1}{y^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$-\frac{y'}{y^2} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{y} = x e^{-x} \Leftrightarrow \left(z = y^{1-n} = y^{1-2} = \frac{1}{y}, z' = -\frac{1}{y^2} y'\right) \Leftrightarrow$$

$$z' + \left(1 - \frac{1}{x}\right)z = x e^{-x} \Rightarrow z = e^{-\int f(x)dx} \left(C + \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx\right) \Leftrightarrow$$

$$z = e^{\int \left(\frac{1}{x}-1\right)dx} \left(C + \int x e^{-x} e^{\int \left(1-\frac{1}{x}\right)dx} dx\right) \Leftrightarrow z = e^{\ln|x|-x} \left(C + \int x e^{-x} e^{x-\ln|x|} dx\right) \Leftrightarrow$$

$$z = |x| e^{-x} \left(C + \int x e^{-x} e^x \frac{1}{|x|} dx\right) \Leftrightarrow z = x \operatorname{sgn}(x) e^{-x} \left(C + \int x \frac{1}{x \operatorname{sgn}(x)} dx\right)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{x}{e^x} \left(C \operatorname{sgn}(x) + \int dx\right) \Leftrightarrow z = \frac{x}{e^x} (C + x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{y} = \frac{x(C+x)}{e^x} \Leftrightarrow y = \frac{e^x}{x(C+x)};$$

за $x \in (-\infty, 0)$ и $x \in (0, +\infty)$. За $x = 0$, следува $y = 0$.

Сега за $x = 1$ и $y = e$ важи:

$$e = \frac{e}{C+1} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{C+1} \Leftrightarrow C+1=1 \Leftrightarrow C=0.$$

Следува дека партикуларниот интеграл е: $y = \frac{e^x}{x^2}$.

Задача 3. Види ја задачата 4.5.1. од првиот дел.

4.7. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ВО ТОТАЛЕН ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

Задача 1. Види ја задачата 4.6.1. од првиот дел.

Задача 2. Да се реши диференцијалната равенка:

$$(y^2 + 6xy + 3x^2)dx + (4y^2 + 2xy + 3x^2)dy = 0.$$

Решение. Прв начин. Нека со:

$$P = y^2 + 6xy + 3x^2 \text{ и } Q = 4y^2 + 2xy + 3x^2$$

ги означиме функциите пред dx и dy , соодветно. Тогаш:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y + 6x \text{ и } \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + 6x.$$

Бидејќи $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, равенката е во тотален диференцијал, односно постои функција $U = U(x, y)$ таква што:

$$dU = Pdx + Qdy, \text{ односно } \frac{\partial U}{\partial x} = P \text{ и } \frac{\partial U}{\partial y} = Q. \text{ Тогаш:}$$

$$U = \int Pdx = \int (y^2 + 6xy + 3x^2)dx = y^2x + 6\frac{x^2}{2}y + 3\frac{x^3}{3} + \varphi(y) = xy^2 + 3x^2y + x^3 + \varphi(y).$$

За да ја определиме функцијата φ , бараме:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + 3x^2 + \varphi'(y);$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q \Leftrightarrow 2xy + 3x^2 + \varphi'(y) = 4y^2 + 2xy + 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(y) = 4y^2 \Leftrightarrow \varphi(y) = \int 4y^2 dy = \frac{4}{3}y^3.$$

Бидејќи $dU = 0$, општото решение е:

$$U = C \Leftrightarrow xy^2 + 3x^2y + x^3 + \frac{4}{3}y^3 = C \Leftrightarrow 3x^3 + 3xy^2 + 9x^2y + 4y^3 = C.$$

Задача 3. Да се реши диференцијалната равенка:

$$\left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = 0.$$

Решение. Имаме:

$$U = \int Q dy = \int \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = \frac{y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + \varphi(x),$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2 \sin x \cos x}{y} + \varphi'(x),$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} = P &\Leftrightarrow \frac{2 \sin x \cos x}{y} + \varphi'(x) = \frac{\sin 2x}{y} + x \Leftrightarrow \\ \frac{\sin 2x}{y} + \varphi'(x) &= \frac{\sin 2x}{y} + x \Leftrightarrow \varphi'(x) = x \Leftrightarrow \varphi(x) = \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Следува:

$$U = C \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2}{2} = C \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} = C.$$

4.8. ИНТЕГРАЛЕН МНОЖИТЕЛ

Задача 1-2. Види ги задачите 4.7.2. и 4.7.3. од првиот дел.

Задача 3. Да се интегрира диференцијалната равенка:

$$\left(\underbrace{x \sin y + y}_P \right) dx + \left(\underbrace{x^2 \cos y + x \ln|x|}_Q \right) dy = 0,$$

ако се има предвид дека има интегрален множител $\lambda = \lambda(x)$.

Решение. Интегралниот множител го определуваме според

формулата: $\lambda(x) = e^{\int \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} dx}$, каде што:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \cos y + 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \cos y + \ln|x| + x \frac{1}{x} = 2x \cos y + \ln|x| + 1; \text{ и}$$

4. Диференцијални равенки од прв ред

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{x \cos y + 1 - 2x \cos y - \ln|x| - 1}{x^2 \cos y + x \ln|x|} = \frac{-(x \cos y + \ln|x|)}{x(x \cos y + \ln|x|)} = -\frac{1}{x},$$

од каде што:

$$\lambda(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln|x| + \ln C} = \frac{C}{|x|} = \frac{C}{x \operatorname{sgn} x} \Leftrightarrow \lambda(x) = \frac{C}{x \operatorname{sgn} x}.$$

На секој од двата интервала го избираме C , така што:
 $\lambda = \frac{1}{x}$. Ако диференцијалната равенка од условот се помножи со λ ,
се добива равенката:

$$\begin{aligned} \frac{x \sin y + y}{x} dx + \frac{x^2 \cos y + x \ln|x|}{x} dy &= 0 \Leftrightarrow \\ \left(\underbrace{\sin y + \frac{y}{x}}_P \right) dx + \left(\underbrace{x \cos y + \ln|x|}_Q \right) dy &= 0, \end{aligned}$$

која е во тотален диференцијал, бидејќи:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y + \frac{1}{x} \text{ и } \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y + \frac{1}{x} \text{ т.е. } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

и има исто општо решение со првобитната равенка.

На крај, ја спроведуваме постапката за интеграција на равенка во тотален диференцијал.

$$U = \int P dx = \int \left(\sin y + \frac{y}{x} \right) dx = x \sin y + y \ln|x| + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x \cos y + \ln|x| + \varphi'(y);$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q \Leftrightarrow x \cos y + \ln|x| + \varphi'(y) = x \cos y + \ln|x| \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(y) = 0;$$

$$U = C \Leftrightarrow x \sin y + y \ln|x| = C.$$

Задача 4. Да се интегрира диференцијалната равенка:

$$(xy + y^2)dx + (xy - 1)dy = 0,$$

ако се има предвид дека има интегрален множител $\lambda = \lambda(y)$.

Решение. Имаме:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y \text{ и } \frac{\partial P}{\partial y} = x + 2y.$$

Интегралниот множител е:

$$\lambda(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy}, \text{ каде што: } \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{y - x - 2y}{xy + y^2} = \frac{-(x + y)}{y(x + y)} = -\frac{1}{y},$$

па:

$$\lambda(y) = e^{-\int \frac{1}{y} dy} = e^{-\ln|y|} = e^{\ln|y|^{-1}} = \frac{1}{|y|}.$$

Ја разгледуваме функцијата $\lambda(y) = \frac{1}{y}$. Тогаш равенката:

$$(x + y)dx + \left(x - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

е во тотален диференцијал. Навистина, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Следува дека

λ е интегрален множител. Решението на последната равенка е:

$$U = \int P dx = \int (x + y) dx = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + \varphi'(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q \Leftrightarrow x + \varphi'(y) = x - \frac{1}{y} \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{y} \Leftrightarrow \varphi(y) = -\int \frac{1}{y} dy = -\ln|y|.$$

$$U = C \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + xy - \ln|y| = C.$$

5. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР И ПОВИСОК РЕД

5.1. ХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Во првите три задачи се опфатени трите вида корени на карактеристичната равенка од втор ред. Во една од нив дополнително се бара партикуларно решение, кое се наоѓа откако ќе се најде општото. Во четвртата и во петтата задача се решени хомогени равенки од трет ред.

Задача 1. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' = -3y' + 4y.$$

Решение. Карактеристичната равенка на $y'' + 3y' - 4y = 0$ е:

$$r^2 + 3r - 4 = 0 \Leftrightarrow (r + 4)(r - 1) = 0 \Leftrightarrow r = -4 \vee r = 1,$$

на која ѝ одговараат партикуларните интегрални e^{-4x} и e^x . Затоа општото решение е:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \Leftrightarrow y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}.$$

Задача 2. Да се реши диференцијалната равенка:

$$2y'' + y' - y = 0,$$

а потоа да се најде партикуларното решение кое ги исполнува условите:

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = 2.$$

Решение. Карактеристичната равенка има решенија:

$$2r^2 + r - 1 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = -1;$$

на која ѝ одговараат интегралите $e^{\frac{1}{2}x}$ и e^{-x} , од каде што:

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x} = C_1 \sqrt{e^x} + \frac{C_2}{e^x}.$$

Сега го определуваме партикуларното решение.

$$y(0) = 4 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 4 \quad (1).$$

Првиот извод е: $y' = \frac{C_1}{2} e^{\frac{1}{2}x} - C_2 e^{-x}$, од каде што:

$$y'(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{C_1}{2} - C_2 = 2 \quad (2).$$

Со собирање на (1) и (2) добиваме: $\frac{3C_1}{2} = 6$ т.е. $C_1 = 4$, од каде што: $C_2 = 0$. Значи, партикуларно решение е: $y = 4\sqrt{e^x}$.

Задача 3. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Решение. Имаме:

$$r^2 + 4r + 13 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$$

Следува: $r_1 = -2 + 3i$ и $r_2 = -2 - 3i$, на кои им одговараат партикуларните интегрални: $e^{-2x} \cos 3x$ и $e^{-2x} \sin 3x$, од каде што:

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Задача 4-6. Види ги задачите 5.1.6-8. од првиот дел.

Задача 7. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y''' + y' - 10y = 0.$$

Решение. Карактеристичната равенка е: $r^3 + r - 10 = 0$. Од теоремата на Њутн следува дека ако r е рационален корен на равенката, тогаш $r|10$, т.е. $r \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 10\}$. Со проверка наоѓаме дека $r = 2$ е решение бидејќи $2^3 + 2 - 10 = 0$. Ја делиме равенката со $r - 2$ и добиваме количник $r^2 + 2r + 5$. Останатите две нули се:

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \Leftrightarrow r_1 = -1 + 2i, r_2 = -1 - 2i.$$

Партикуларните интеграли се: e^{2x} , $e^{-x} \cos 2x$ и $e^{-x} \sin 2x$, од каде што:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \cos 2x + C_3 e^{-x} \sin 2x.$$

$$\begin{array}{r} r^3 + r - 10 : (r - 2) = r^2 + 2r + 5 \\ \underline{\pm r^3 \mp 2r^2} \\ 2r^2 + r - 10 \\ \underline{\pm 2r^2 \mp 4r} \\ 5r - 10 \\ \underline{\pm 5r \mp 10} \\ = = \end{array}$$

Цртеж 5.1.7. Делење на полиномите.

Задача 8. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y''' + y'' + 9y' + 9y = 0.$$

Решение. Карактеристичната равенка е:

$$r^3 + r^2 + 9r + 9 = 0.$$

Притоа, $r \mid 9$ за $r \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$. Со проверка се утврдува дека $r = -1$ е решение. Затоа делиме со $r + 1$:

$$\begin{array}{r} r^3 + r^2 + 9r + 9 : (r + 1) = r^2 + 9 \\ \underline{\pm r^3 \pm r^2} \\ 9r + 9 \\ \underline{\pm 9r \pm 9} \\ = = \end{array}$$

Цртеж 5.1.7. Делење на полиномите.

Понатаму:

$$r^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 3i.$$

Еден независен систем од партикуларни интеграли е:

$$e^{-x}, e^0 \cos x = \cos x \text{ и } e^0 \sin x = \sin x.$$

Следува дека општото решение е:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

5.2-3. НЕХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ
СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

5.2. МЕТОД НА НЕОПРЕДЕЛЕНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Во задачите 1.1-1.3. се опфатени трите различни вида корени на карактеристичната равенка во кои функцијата е од облик $P(x)e^{\alpha x}$, каде што коефициентот α не е корен на карактеристичната равенка. Во задачите 2.1-2., α е корен со кратност 1, односно 2, во задачата 5 функцијата е и збир од две функции. Задачите 6-8 ја содржат најопштата функција во кои $\alpha + i\beta$ е корен на карактеристичната равенка во една и не е корен во две задачи.

Задача 1. Види ги задачите 5.2.3. (1.1) од првиот дел.

Задача 2 (1.2). Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' + 4y' + 4y = 2e^{3x}.$$

Решение. Корените на карактеристичната равенка се:

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = -2.$$

Следува дека еден систем на линеарно независни пртикуларни интеграл е: e^{-2x} и xe^{-2x} .

Бидејќи $\alpha = 3$ не е корен на карактеристичната равенка, партикуларниот интеграл е: $y = Ae^{3x}$, од каде што:

$$y' = 3Ae^{3x} \text{ и } y'' = 9Ae^{3x}.$$

Заменуваме во равенката:

$$9A + 4 \cdot 3A + 4A = 2 \Leftrightarrow 25A = 2 \Leftrightarrow A = \frac{2}{25}.$$

Следува дека општото решение е:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{2}{25} e^{3x}.$$

Задача 3 (1.3). Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' + y' + y = x^2 - 1.$$

Решение. Решенијата на карактеристичната равенка се:

$$r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

на која ѝ одговара системот од партикуларни интеграл:

$$e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \text{ и } e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Бидејќи $\alpha = 0$ не е корен на карактеристичната равенка, партикуларниот интеграл е:

$$y = Ax^2 + Bx + C; \text{ од каде што: } y' = 2Ax + B; y'' = 2A.$$

Со замена во равенката го добиваме идентитетот:

$$2A + \underline{2Ax} + B + \underline{Ax^2} + \underline{Bx} + C = x^2 - 1.$$

каде што:

$$\begin{aligned} A = 1, 2A + B = 0, 2A + B + C = -1 \Leftrightarrow \\ A = 1, B = -2, C = -1. \end{aligned}$$

Следува:

$$y_p = x^2 - 2x - 1.$$

од каде што општото решение е:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + C_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + x^2 - 2x - 1.$$

Задача 4 (2.1). Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x.$$

Решение. Решенијата на карактеристичната равенка се:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 1.$$

Соодветните партикуларни интеграл се: e^x, xe^x .

Бидејќи $\alpha = 1$ е корен на карактеристичната равенка со кратност 2, произволниот полином е полином од прв ред помножен со x^2 е:

$$y = x^2 (Ax + B)e^x = (Ax^3 + Bx^2)e^x ;$$

од каде што:

$$y' = (3Ax^2 + 2Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x ;$$

и

$$y'' = (6Ax + 2B)e^x + (3Ax^2 + 2Bx)e^x + (3Ax^2 + 2Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x .$$

Заменуваме во равенката $y'' - 2y' + y = 6xe^x$,

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{Ax^3 + Bx^2}} + \underline{\underline{6Ax^2 + 4Bx}} + \underline{\underline{6Ax + 2B}} \\ & - \underline{\underline{6Ax^2 - 4Bx}} - \underline{\underline{2Ax^3 - 2Bx^2}} + \underline{\underline{Ax^3 + Bx^2}} = 6x \Leftrightarrow \\ & 6Ax + 2B = 6x \Leftrightarrow 6A = 6, 2B = 0 \Leftrightarrow A = 1, B = 0 . \end{aligned}$$

Следува:

$$y_p = x^3 e^x \text{ и } y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^3 e^x .$$

Задача 5 (2.2). Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' - y = e^x + e^{2x} .$$

Решение. Решенијата на карактеристичната равенка се:

$$r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = \pm 1 .$$

Партикуларните интегрални на хомогената равенка се: e^{-x} , e^x , додека општиот: $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$.

Ја решаваме нехомогената равенка: $y'' - y = e^x$.

$\alpha = 1$ е 1-кратен корен на карактеристичната равенка. Следува:

$$y = A x e^x, \text{ од каде што: } y' = A e^x + A x e^x \text{ и } y'' = 2A e^x + A x e^x .$$

Заменуваме во равенката:

$$2A e^x + \underline{\underline{A x e^x}} - \underline{\underline{A x e^x}} = e^x \Leftrightarrow 2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} . \text{ Следува: } y_1 = \frac{1}{2} x e^x .$$

Ја решаваме нехомогената равенка: $y'' - y = e^{2x}$.

$\alpha = 2$ не е корен на карактеристичната равенка. Следува:

$$y = Ae^{2x}, \text{ од каде што: } y' = 2Ae^{2x} \text{ и } y'' = 4Ae^{2x}.$$

Оттука:

$$4Ae^{2x} - Ae^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow 3A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}. \text{ Следува: } y_2 = \frac{1}{3}e^{2x}.$$

Партикуларниот интеграл на бараната равенка е збир од партикуларните интегрални на: $y'' - y' = e^x$ и $y'' - y = e^{2x}$, односно:

$$y_p = \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{3}e^{2x};$$

од каде што:

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^x + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{3}e^{2x}.$$

Задача 6 (3.1). Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' + 2y = \cos x.$$

Решение. Решенијата на карактеристичната равенка се:

$$r^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i\sqrt{2},$$

а соодветните партикуларни интегрални

$$\cos \sqrt{2}x, \sin \sqrt{2}x.$$

Бидејќи $\alpha + i\beta = i$ не е корен на карактеристичната равенка, полиномот е:

$$y = A \cos x + B \sin x;$$

од каде што:

$$y' = -A \sin x + B \cos x; \quad y'' = -A \cos x - B \sin x.$$

Со замена во равенката добиваме:

$$-A \cos x - B \sin x + 2A \cos x + 2B \sin x = \cos x,$$

односно:

$$A = 1 \text{ и } B = 0 \text{ т.е. } y_p = \cos x.$$

Следува дека општото решение е:

$$y = C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x + \cos x.$$

Задача 7 (3.2). Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' + y = \sin x.$$

Решение. Решенијата на карактеристичната равенка се:

$$r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i,$$

на кои им одговараат партикуларни интегрални:

$$\cos x, \sin x.$$

Бидејќи $\alpha + i\beta = i$ е корен на карактеристичната равенка со кратност 1, произволниот полином од нулти ред се множи со x ,

$$y = Ax \cos x + Bx \sin x;$$

од каде што:

$$y' = A \cos x - Ax \sin x + B \cos x + Bx \sin x;$$

и

$$y'' = -A \sin x - A \sin x - Ax \cos x - B \sin x + B \sin x + Bx \cos x.$$

Заменуваме во равенката $y'' + y = \sin x$:

$$\underline{-2A \sin x - Ax \cos x} + Bx \cos x + \underline{Ax \cos x} + Bx \sin x = \underline{\sin x},$$

од каде што следува:

$$-2A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2} \text{ и } B = 0 \text{ т.е. } y_p = -\frac{1}{2}x \cos x.$$

Значи, општото решение е:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x.$$

Задача 8 (3.3). Да се реши диференцијалната равенка:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \cos x.$$

Решение. Ги определуваме решенијата на карактеристичната равенка:

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0.$$

Делители на два се $\pm 1, \pm 2$. Од нив $r = 1$ е корен на равенката. Го делиме полиномот со членот $r - 1$:

$$\begin{array}{r}
 r^3 - 2r^2 - r + 2 : r - 1 = r^2 - r - 2 \\
 \underline{\pm r^3 \mp r^2} \\
 -r^2 - r + 2 \\
 \underline{\mp r^2 \pm r} \\
 -2r + 2 \\
 \underline{2r - 2} \\
 = =
 \end{array}$$

Цртеж 5.2.8. Делење на полиномите.

Корените на количникот се:

$$r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow (r - 2)(r + 1) = 0 \Leftrightarrow r = -1, r = 2.$$

На соодветната хомогена равенка ѝ соодветствуваат интегралите:

$$e^x, e^{-x} \text{ и } e^{2x}.$$

Бидејќи $\alpha + i\beta = i$ не е корен на карактеристичната равенка, полиномот кој е партикуларен интеграл на равенката е:

$$y = A \cos x + B \sin x;$$

од каде што:

$$y' = -A \sin x + B \cos x;$$

и

$$y'' = -A \cos x - B \sin x \text{ и } y''' = A \sin x - B \cos x.$$

Со замена во диференцијалната равенка добиваме:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\underline{A \sin x} - B \cos x + 2 \underline{A \cos x} + \underline{2B \sin x} +$$

$$\underline{A \sin x} - B \cos x + 2 \underline{A \cos x} + \underline{2B \sin x} = \cos x \Leftrightarrow$$

$$2A + 4B = 0, -2B + 4A = 1 \Leftrightarrow A = -2B, -10B = 1 \Leftrightarrow B = -\frac{1}{10}, A = \frac{1}{5}.$$

Следува:

$$y_p = \frac{1}{5} \cos x - \frac{1}{10} \sin x.$$

Значи, општото решение е:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + \frac{1}{5} \cos x - \frac{1}{10} \sin x.$$

5.3. МЕТОД НА ВАРИЈАЦИИ НА КОНСТАНТИ НА ЛАГРАНЖ

Задача 1. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' - 3y' + 2y = x - 1.$$

Решение. Имаме:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r - 2)(r - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$r_1 = 1, r_2 = 2 \Leftrightarrow y_1 = e^x, y_2 = e^{2x},$$

од каде што:

$$y'_1 = e^x, y'_2 = 2e^{2x}.$$

Го решаваме системот:

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C'_1 e^x + C'_2 e^{2x} = 0 \\ C'_1 e^x + 2C'_2 e^{2x} = x - 1 \end{cases}.$$

Детерминантите на системот се:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x},$$

$$\Delta_{C'_1} = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ x-1 & 2e^{2x} \end{vmatrix} = (1-x)e^{2x} \text{ и } \Delta_{C'_2} = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)e^x.$$

Според Крамеровите формули:

$$C'_1 = \frac{\Delta_{C'_1}}{\Delta} = \frac{(1-x)e^{2x}}{e^{3x}} = \frac{1-x}{e^x}, \text{ и } C'_2 = \frac{\Delta_{C'_2}}{\Delta} = \frac{(x-1)e^x}{e^{3x}} = \frac{x-1}{e^{2x}}.$$

Ги определуваме C_1 и C_2 :

$$C_1 = \int C'_1(x) dx = \int (e^{-x} - xe^{-x}) dx = -e^{-x} - \int xe^{-x} dx =$$

$$\begin{pmatrix} u = x & dv = e^{-x} dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{pmatrix} =$$

$$-e^{-x} - \left(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx \right) = -e^{-x} + xe^{-x} - (-e^{-x}) = \frac{x}{e^x}.$$

$$C_2 = \int C'_2(x) dx = \int (xe^{-2x} - e^{-2x}) dx = \int xe^{-2x} dx - \frac{e^{-2x}}{-2} =$$

$$\left(\begin{array}{l} u = x \quad dv = e^{-2x} dx \\ du = dx \quad v = \frac{e^{-2x}}{-2} = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{array} \right) = -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx + \frac{1}{2} e^{-2x} =$$

$$-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} = -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} = \frac{1-2x}{4e^{2x}}.$$

Оттука:

$$y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 = \frac{x}{e^x} e^x + \frac{1-2x}{4e^{2x}} e^{2x} = x + \frac{1-2x}{4} = \frac{2x+1}{4}.$$

Конечно, општото решение е:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{2x+1}{4}.$$

Коментар. За вежба задачата може да се реши и со метод на неоопределени коефициенти.

Задача 2. Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' + y = tg^2 x.$$

Решение. Имаме:

$$r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -1 \Leftrightarrow r_1 = \pm i.$$

Следува:

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x; \text{ од каде што:}$$

$$y_1' = -\sin x, \quad y_2' = \cos x; \text{ и}$$

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Го решаваме системот равенки:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_{C_1} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^3 x}{\cos x} \text{ и } \Delta_{C_2} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x};$$

поради што:

$$C_1' = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}, \quad C_2' = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}.$$

Ги определуваме C_1 и C_2 :

$$C_1 = -\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)(-\sin x)}{\cos^2 x} dx = \left(\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right) =$$

$$\int \frac{1-t^2}{t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt = -\frac{1}{t} - t = -\frac{1}{\cos x} - \cos x;$$

и

$$C_2 = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{(1 - \sin^2 x)^2} dx =$$

$$\left(\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right) = \int t \frac{t}{(1-t^2)^2} dt = \left(\begin{array}{ll} u = t & dv = \frac{t}{(1-t^2)^2} \\ du = dt & v = \frac{1}{2(1-t^2)} \end{array} \right) =$$

$$\frac{t}{2(1-t^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{t}{2(1-t^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 1} =$$

$$\frac{\sin x}{2(1 - \sin^2 x)} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right|.$$

Следува:

$$y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 = -1 - \cos^2 x + \frac{1}{2} t g^2 x + \frac{1}{4} \ln \left(\left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \right) \sin x.$$

Значи, општото решение е:

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 1 - \cos^2 x + \frac{t g^2 x}{2} + \frac{\sin x}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right|.$$

Задача 3. Види ја задачата 5.2.2. од првиот дел.

6-7. ДВОЕН И ТРОЕН ИНТЕГРАЛ

6. ДВОЕН И ТРОЕН ИНТЕГРАЛ

6.1. ДВОЕН ИНТЕГРАЛ

6.1.1. ИТЕРИРАНИ ИНТЕГРАЛИ. ДЕФИНИЦИЈА НА ДВОЕН ИНТЕГРАЛ

Задача 1-2. Да се пресметаат итерираниите интеграли:

$$1) \int_0^2 dx \int_x^1 (2x - y) dy; \quad 2) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \sqrt{x + y} dx.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^2 dx \int_x^1 (2x - y) dy &= \int_0^2 dx \left(2xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^1 = \\ &= \int_0^2 \left(2x - 2x^2 - \frac{1}{2}(1 - x^2) \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(2x - 2x^2 - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(2x - \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{2} \right) dx = \left(2 \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} x - \frac{3}{2} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \left(x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{x^3}{2} \right) \Big|_0^2 = 4 - 1 - 4 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \sqrt{x + y} dx &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \sqrt{x + y} d(x + y) = \int_0^1 dy \frac{2}{3} (x + y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{1-y} = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 \left(1 - y^{\frac{3}{2}} \right) dy = \frac{2}{3} \left(y - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{5} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Задача 3*. Да се пресмета по дефиниција двојниот интеграл $\iint_D xy dx dy$, каде што D е областа ограничена со правите:

$$x = 0, x = 1, y = 0 \text{ и } y = 1.$$

Решение. Ја разбиваме областа D на квадрати со помош на правите:

$$x_i = \frac{i}{n}, i = 1, 2, \dots, n; \quad y_j = \frac{j}{n}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Притоа:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \text{ и } \Delta y_j = y_j - y_{j-1} = \frac{1}{n}.$$

Во секој од квадратите со страни $[x_{i-1}, x_i]$ и $[y_{j-1}, y_j]$ избираме точки:

$$(x_i, y_j), \quad x_i = \frac{i}{n}, \quad y_j = \frac{j}{n}.$$

Притоа:

$$f(x_i, y_j) = f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{ij}{n^2}.$$

Бидејќи подинтегралната функција е интегрална, важи:

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{ij}{n^2} \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1 + 2 + \dots + n)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

6.1.2. ОБЛАСТ И ГРАНИЦА НА ИНТЕГРАЦИЈА НА ДВОЕН ИНТЕГРАЛ

Задача 1. Да се скицира областа на интеграција на интегралот:

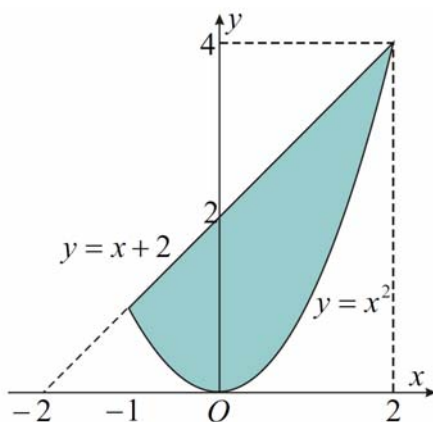
$$\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy.$$

Решение. Границите на интеграција се:

$$-1 \leq x \leq 2, \quad x^2 \leq y \leq x+2;$$

каде што долната и горната гранична крива се:

$$y = x^2, \quad y = x+2 \quad (\text{цртеж 6.2.1}).$$



Цртеж 6.1.2.1.

Задача 2. Да се скицира областа на интеграција на интегралот:

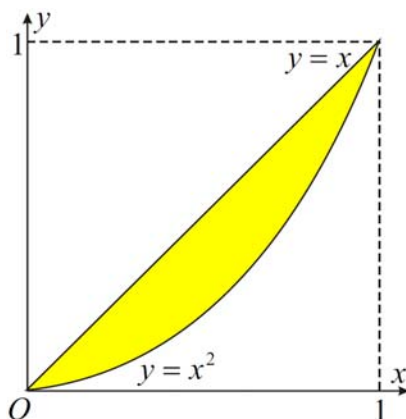
$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

Решение. Областа на интеграција е:

$$0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq \sqrt{y};$$

каде што левата и десната гранична крива се:

$$y = x \quad \text{и} \quad \sqrt{y} = x \Leftrightarrow y = x^2, \quad x > 0 \quad (\text{цртеж 6.2.2}).$$



Цртеж 6.1.2.2.

Задача 3. Да се определат границите на интеграција за двојниот интеграл:

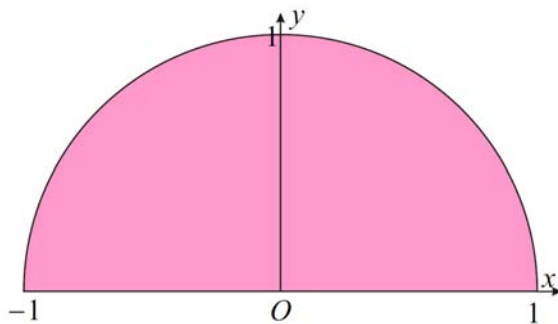
$$I = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

ако D е областа ограничена со кружницата $x^2 + y^2 = 1$ и полурамнината $y \geq 0$.

Решение. Прв начин. Имаме:

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Равенката на горната полукружница е: $y = \sqrt{1 - x^2}$.



Цртеж 6.1.2.3.

Следува дека границите на интеграција се:

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ и } 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2},$$

од каде што:

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

Втор начин. Левата и десната гранична крива се:

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1 - y^2}.$$

Следува дека границите на интеграција се:

$$0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2};$$

од каде што:

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

Задача 4. Да се определат границите на интеграција за двојниот интеграл:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

ако D е областа ограничена со кривите: $y = x$, $y = 2x$ и $y = 2$.

Решение. Прв начин. Границите на интеграција се:

за $0 \leq x \leq 1$ важи: $x \leq y \leq 2x$; и за $1 \leq x \leq 2$ важи: $x \leq y \leq 2$.

Следува:

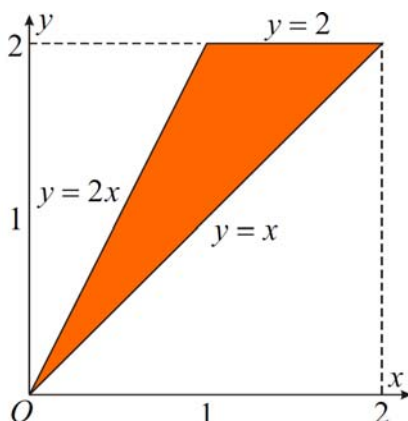
$$I = \int_0^1 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy.$$

Втор начин. Областа се запишува во вид:

$$0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq y;$$

од каде што:

$$I = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx.$$



Цртеж 6.1.2.4.

6.1.3. ПРОМЕНА НА РЕДОСЛЕД НА ИНТЕГРАЦИЈА

Задача 1-2. Да се промени редоследот на интеграција на следниве интеграли:

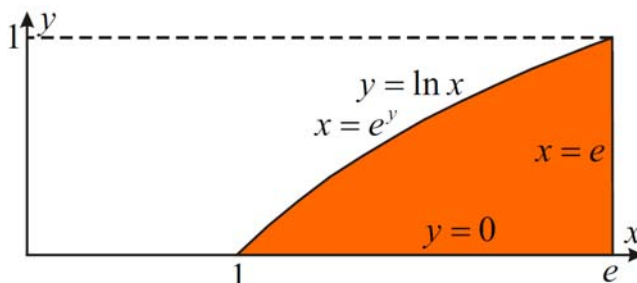
$$1) I = \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy; \quad 2) I = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x, y) dy.$$

Решение. 1) Ја скицираме областа (цртеж 6.3.1). Ако интегрираме по y па по x , границите ќе бидат:

$$0 \leq y \leq 1, \quad e^y \leq x \leq e,$$

од каде што интегралот е:

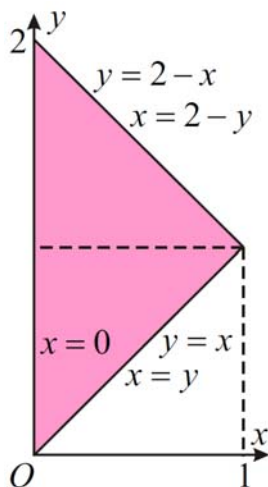
$$I = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$$



Цртеж 6.1.3.1.

2) Ја скицираме областа (цртеж 6.3.2). Пресекот на $y = x$ и $y = 2 - x$ е во точката со апциса:

$$x = 2 - x \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$



Цртеж 6.1.3.2.

Затоа за $0 \leq y \leq 1$ важи: $0 \leq x \leq y$ и за $1 \leq y \leq 2$ важи: $0 \leq x \leq 2 - y$.

Следува:

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx.$$

Задача 3-4. Да се промени редоследот на интеграција на следниве интеграли:

$$3) I = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx; \quad 4) I = \int_0^1 dy \int_y^{5-y} f(x, y) dx.$$

Решение. 3) Имаме:

$$x = 1 + \sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{1 - y^2} \stackrel{x \geq 1}{/2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Пресекот на $x = 2 - y$ со $x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$ е во точките со ординати:

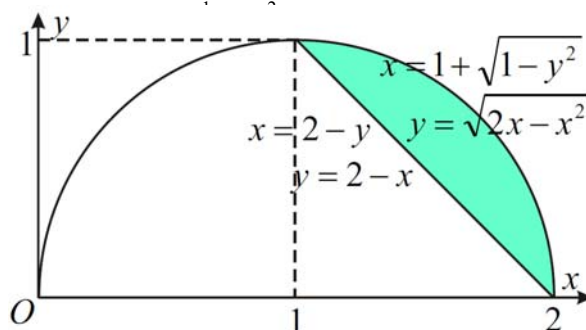
$$\begin{aligned} 2 - y &= 1 + \sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow (1 - y)^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow 1 - 2y + y^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow \\ 2y^2 - 2y &= 0 \Leftrightarrow 2y(y - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0, y = 1. \end{aligned}$$

Заради:

$(x-1)^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 - y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2x - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2x - x^2}$
горната полукружница ($y \geq 0$) има равенка $y = \sqrt{2x - x^2}$.

Следува за $1 \leq x \leq 2$, важи: $2 - x \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$, односно:

$$I = \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$$



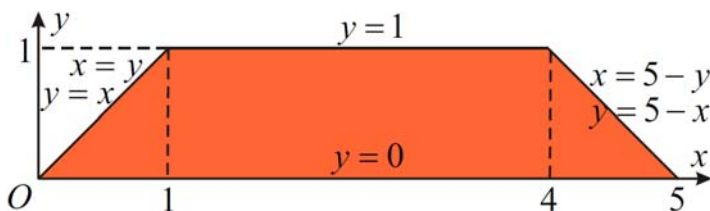
Цртеж 6.1.3.3.

4) Горната крива од областа (цртеж 6.3.4) аналитички е зададена со три равенки, и затоа ја делиме на три подобласти:

$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$; $1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1$; и $4 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5 - x$.

Следува:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_0^1 f(x, y) dy + \int_4^5 dx \int_0^{5-x} f(x, y) dy.$$



Цртеж 6.1.3.4.

6.1.4. ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ДВОЕН ИНТЕГРАЛ

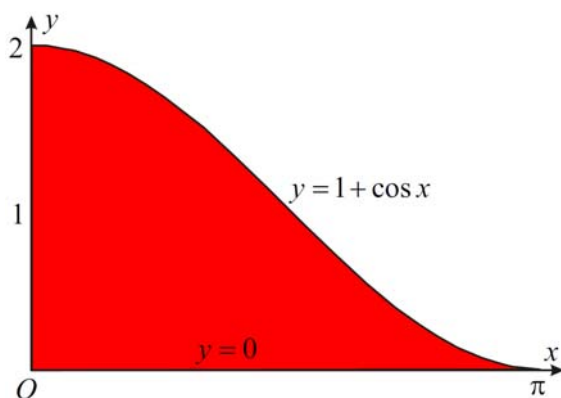
Задача 1. Види ја задачата 6.4.1 од првиот дел.

Задача 2. Да се пресмета интегралот:

$$I = \iint_D y^2 \sin x dx dy, \quad D: y = 1 + \cos x, y = 0, x = 0, x = \pi.$$

Решение. Областа на интеграција е:

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq 1 + \cos x.$$



Цртеж 6.1.4.2.

Следува:

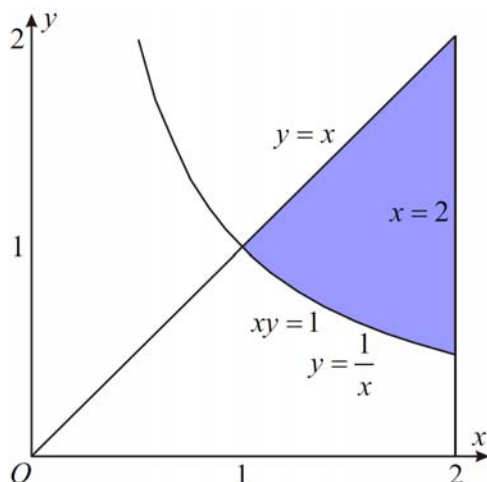
$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \sin x dx \int_0^{1+\cos x} y^2 dy = \int_0^\pi \sin x dx \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^{1+\cos x} = \frac{1}{3} \int_0^\pi (1 + \cos x)^3 \sin x dx = \\ &= \left(\begin{array}{l} 1 + \cos x = t \quad x = 0 \Rightarrow t = 1 + \cos 0 = 2 \\ -\sin x dx = dt \quad x = \pi \Rightarrow t = 1 + \cos \pi = 0 \end{array} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \int_2^0 t^3 (-dt) = \frac{1}{3} \int_0^2 t^3 dt = \left. \frac{1}{3} \frac{t^4}{4} \right|_0^2 = \frac{1}{12} 2^4 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Задача 3. Да се пресмета интегралот:

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy, \quad D: x = 2, y = x, xy = 1.$$

Решение. Имаме:

$$y = x, \quad xy = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$



Цртеж 6.1.4.3.

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 dx \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_{\frac{1}{x}}^x = \int_1^2 x^2 dx \left(-\frac{1}{x} + x \right) = \\ &= \int_1^2 (x^3 - x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{16-1}{4} - \frac{4-1}{2} = \frac{15}{4} - \frac{3}{2} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

6.1.5. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ДВОЕН ИНТЕГРАЛ СО ПРЕМИН ВО ПОЛАРНИ КООРДИНАТИ

Задача 1. Види ја задачата 6.5.1 од првиот дел.

Задача 2. Да се пресмета интегралот:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 = a^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Решение. Со равенките:

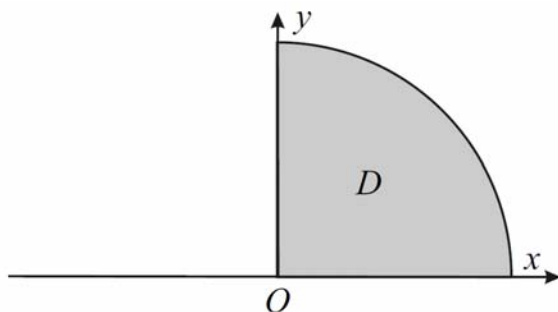
$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad dx dy = \rho d\rho d\varphi$; од каде што:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2$$

преминуваме во поларни координати.

Новата област на интерација е: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq a$. Следува:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \sqrt{\rho^2} \rho d\rho = \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} \frac{a^3}{3} = \frac{a^3 \pi}{6}.$$

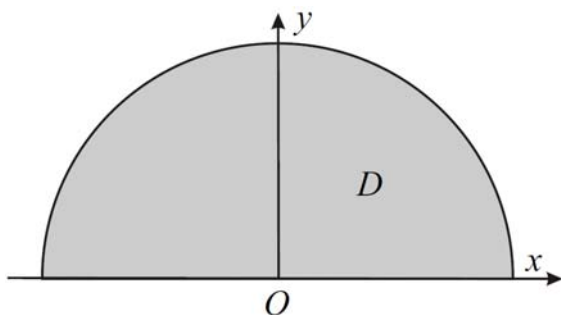


Цртеж 6.1.5.2.

Задача 3. Да се пресмета интегралот:

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1}, \quad D: y = \sqrt{1 - x^2}, y \geq 0.$$

Решение. Ја скицираме областа која е ограничена со горниот дел од централна кружница со радиус 1 и x -оската.



Цртеж 6.1.5.3.

Следува:

$$I = \left(\begin{array}{lll} x = \rho \cos \varphi & dx dy = \rho d\rho d\varphi & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ y = \rho \sin \varphi & x^2 + y^2 = \rho^2 & 0 \leq \rho \leq 1 \end{array} \right) =$$

$$\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + 1} = \left(\begin{array}{l} \rho^2 + 1 = t \\ 2\rho d\rho = dt \Rightarrow \rho d\rho = \frac{dt}{2} \end{array} \right) =$$

$$\varphi \Big|_0^{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{2t} = \pi \frac{1}{2} \ln t \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

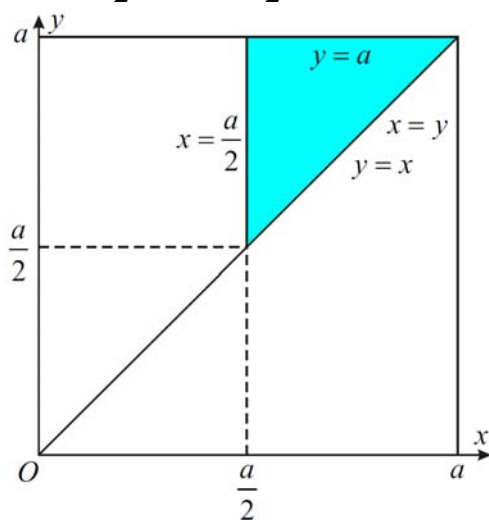
6.1.6. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ДВОЕН ИНТЕГРАЛ СО ПРОМЕНА НА РЕДОСЛЕДОТ НА ИНТЕГРАЦИЈА

Задача 1. Со промена на редоследот на интеграција, да се реши интегралот:

$$I = \int_{\frac{a}{2}}^a dx \int_{\frac{a}{2}}^a \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy, \quad a > 0.$$

Решение. Областа ја запишуваме во вид:

$$\frac{a}{2} \leq y \leq a, \quad \frac{a}{2} \leq x \leq y.$$



Цртеж 6.1.6.1.

Следува:

$$I = \int_{\frac{a}{2}}^a dy \underbrace{\int_{\frac{a}{2}}^y \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx}_{I_1}.$$

Го пресметуваме внатрешниот интеграл:

$$I_1 = \int_{\frac{a}{2}}^y \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \left(\begin{array}{ll} x^2 + y^2 = t & x = \frac{a}{2} \Rightarrow t = y^2 + \frac{a^2}{4} \\ 2x dx = dt & x = y \Rightarrow t = 2y^2 \end{array} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \int_{y^2 + \frac{a^2}{4}}^{2y^2} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \Big|_{y^2 + \frac{a^2}{4}}^{2y^2} \stackrel{y>0}{=} -\frac{1}{\sqrt{t}} \Big|_{y^2 + \frac{a^2}{4}}^{2y^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}y} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + \frac{a^2}{4}}}.$$

Затоа:

$$I = \int_{\frac{a}{2}}^a \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + \frac{a^2}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{2}y} \right) dy = \left(\ln \left(y + \sqrt{y^2 + \frac{a^2}{4}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln y \right) \Big|_{\frac{a}{2}}^a =$$

$$\ln \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} \right) - \ln \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln a - \ln \frac{a}{2} \right) =$$

$$\ln \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \right) a - \ln \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \right) a - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{a}{\frac{a}{2}} =$$

$$\ln \frac{2 + \sqrt{5}}{2} a - \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{2} a - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2 = \ln \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}} - \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}.$$

6.2. ТРОЕН ИНТЕГРАЛ

6.2.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛНИ ИНТЕГРАЛИ

Задача 1-2. Да се пресметаат следниве интеграли:

$$1) I = \int_1^7 dy \int_1^e dx \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} z \ln^2 x dz; \quad 2) I = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x + y + z) dz.$$

Решение. Имаме:

$$1) I = \int_1^7 dy \int_1^e \ln^2 x dx \frac{z^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2} y \Big|_1^7 \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx =$$

$$\left(\begin{array}{ll} \ln x = t & x=1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0 \\ \frac{1}{x} dx = dt & x=e \Rightarrow t = \ln e = 1 \end{array} \right) = \frac{1}{2}(7-1) \int_0^1 t^2 dt = 3 \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = 3 \frac{1}{3} = 1.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2)} \quad I &= \int_0^a dx \int_0^b dy \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^c = \int_0^a dx \int_0^b \left(xc + yc + \frac{c^2}{2} \right) dy = \\ &= \int_0^a dx \left(xcy + c \frac{y^2}{2} + \frac{c^2}{2} y \right) \Big|_0^b = \int_0^a \left(bcx + \frac{b^2c}{2} + \frac{bc^2}{2} \right) dx = \\ &= \left(bc \frac{x^2}{2} + \frac{b^2c}{2} x + \frac{bc^2}{2} x \right) \Big|_0^a = \frac{a^2bc}{2} + \frac{ab^2c}{2} + \frac{abc^2}{2} = \frac{abc(a+b+c)}{2}. \end{aligned}$$

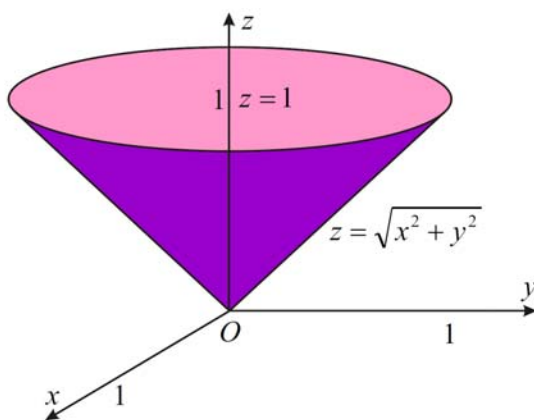
6.2.2. ПРОМЕНА НА РЕДОСЛЕДОТ НА ИНТЕГРАЦИЈА

Задача 1-2. Да се промени редоследот на интеграција во тројниот интеграл: $I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz$,

- 1) интегрирајќи по x, z, y ;
- 2) интегрирајќи по z, y, x .

Решение. Областа е:

$$-1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1.$$



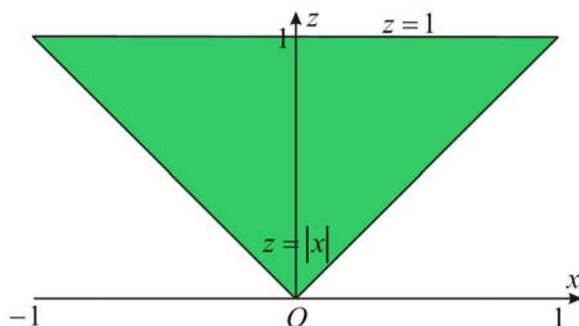
Цртеж 6.2.2.0.

Равенката $y = \sqrt{1-x^2}$ ја определува полукружницата $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$; додека $y = -\sqrt{1-x^2}$ полукружницата $x^2 + y^2 = 1, y \leq 0$. Равенката $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ го определува конусот $z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$. Ја скицираме областа (цртеж 6.2.2.0).

1) Интегрираме по x, z, y . Од скицата на областа на тројниот интеграл заклучуваме дека: $-1 \leq x \leq 1$.

Ако во равенките $z^2 = x^2 + y^2$ и $z = 1$ ставиме $y = 0$, ги добиваме граничните криви на проекцијата на областа во xOz -рамнината:

$$z = \sqrt{x^2 + 0^2} \text{ т.е. } z = |x| \text{ и } z = 1. \text{ Следува дека: } |x| \leq z \leq 1.$$



Цртеж 6.2.2.1.

Променливата y се движи од левиот до десниот полукокус. Бидејќи:

$$z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = z^2 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{z^2 - x^2},$$

важи:

$$-\sqrt{z^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{z^2 - x^2}.$$

Значи:

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^1 dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy.$$

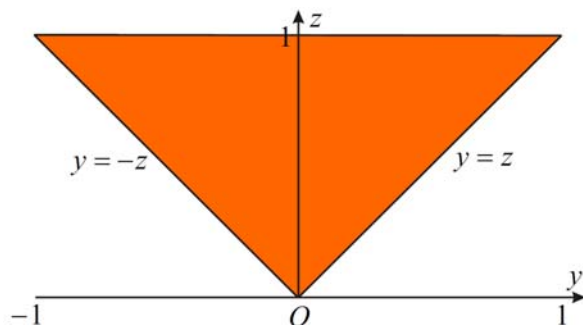
2) Интегрираме по z, y , па по x . За првата променлива важи $0 \leq z \leq 1$. Ако во граничните површини $z^2 = x^2 + y^2$ и $z = 1$ ставиме $x = 0$ ги добиваме граничните криви на проекцијата на

6. Двоен и троен интеграл

областа во zOy -рамнината, $z^2 = y^2$ т.е. $y = \pm z$ и $z = 1$. Следува: $-z \leq y \leq z$. Заради:

$$z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 = z^2 - y^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{z^2 - y^2},$$

за точките (x, y, z) од областа важи: $-\sqrt{z^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{z^2 - y^2}$.



Цртеж 6.2.2.2.

Затоа:

$$I = \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2 - y^2}}^{\sqrt{z^2 - y^2}} f(x, y, z) dx.$$

6.2.3. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ТРОЕН ИНТЕГРАЛ

Во декартови координати

Задача 1. Да се пресмета тројниот интеграл:

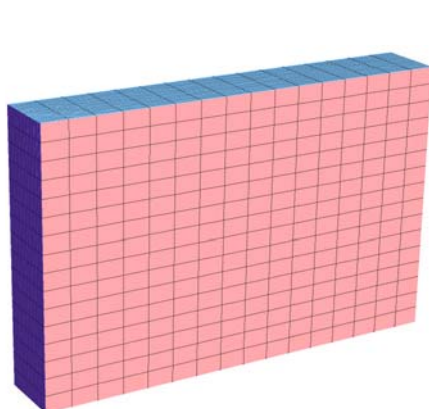
$$I = \iiint_V zx \sin(xy) dx dy dz,$$

каде што V е областа ограничена со рамнините:

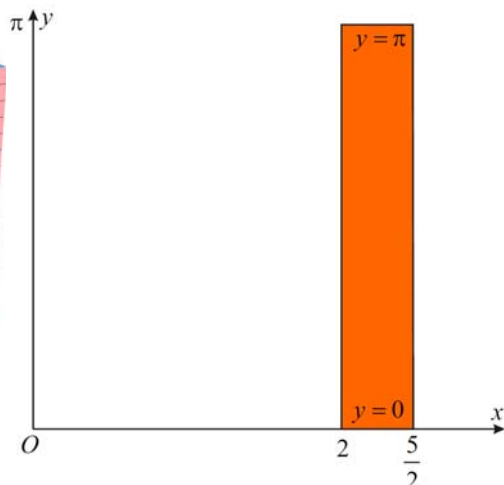
$$x = 2, \quad x = \frac{5}{2}, \quad y = 0, \quad y = \pi, \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = 2.$$

Решение. Го скицираме телото и неговата проекција на xOy рамнината. Границите се броеви. Следува дека интегралот е:

$$I = \int_2^{\frac{5}{2}} dx \int_0^{\pi} dy \int_0^2 zx \sin(xy) dz = \int_2^{\frac{5}{2}} x dx \int_0^{\pi} \sin(xy) dy \frac{z^2}{2} \Big|_0^2 =$$



Цртеж 6.2.3.1.1.



Цртеж 6.2.3.1.2.

$$\int_2^{\frac{5}{2}} x dx \frac{-\cos(xy)}{x} \Big|_0^{\pi} \frac{4}{2} = -2 \int_2^{\frac{5}{2}} (\cos \pi x - 1) dx = -2 \left(\frac{\sin \pi x}{\pi} - x \right) \Big|_2^{\frac{5}{2}} =$$

$$-2 \left(\frac{1}{\pi} \left(\sin \frac{5\pi}{2} - \sin 2\pi \right) - \left(\frac{5}{2} - 2 \right) \right) = -2 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

Задача 2. Да се пресмета тројниот интеграл:

$$I = \iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3},$$

каде што V е областа ограничена со рамнините:

$$x=0, y=0, z=0 \text{ и } x+y+z=1.$$

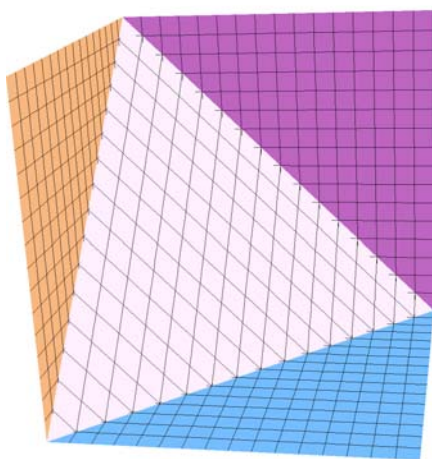
Решение. Го скицираме телото и неговата проекција на xOy -рамнината. Границите се:

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x \text{ и } 0 \leq z \leq 1-x-y.$$

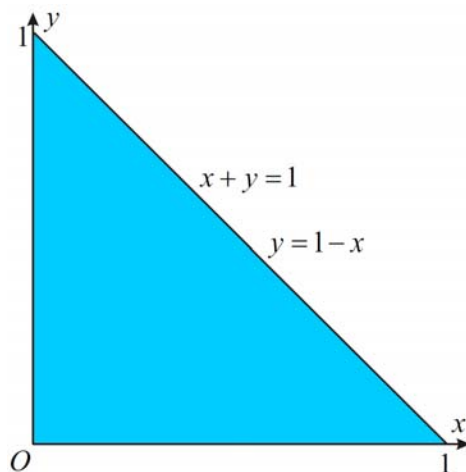
Следува:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{-2(1+x+y+z)^2} \Big|_0^{1-x-y} =$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{4} y + \frac{1}{1+x+y} \right) \Big|_0^{1-x} =$$



Цртеж 6.2.3.2.1.



Цртеж 6.2.3.2.2.

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{4}(1-x) + \frac{1}{1+x+1-x} - \frac{1}{1+x} \right) dx &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \\
 -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} - \ln|1+x| \right) \Big|_0^1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \ln 2 + \ln 1 \right) = \\
 -\frac{1}{2} \left(\frac{5}{8} - \ln 2 \right) &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}.
 \end{aligned}$$

Задача 3. Види ја задачата 7.4.2 од првиот дел.

Со премин во цилиндрични
или обопштени цилиндрични координати

Задача 4. Да се пресмета тројниот интеграл:

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

каде што V е областа ограничена со површините:

$$z = 0, \quad z = \frac{x^2 + y^2}{2} \text{ и } x^2 + y^2 = 4.$$

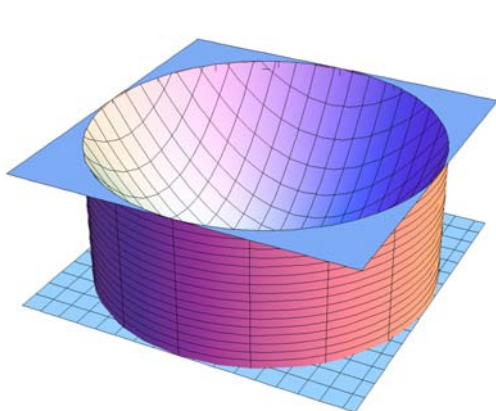
Решение. Ја скицираме областа и нејзината проекција во xOy -рамнината. Потоа преминуваме во цилиндрични координати:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z;$$

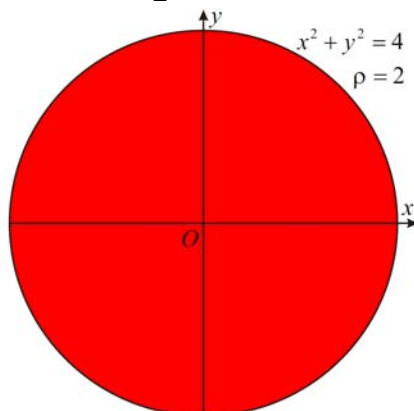
6. Двоен и троен интеграл

од каде што важи: $dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$. Параболоидот во цилиндрични координати има равенка: $z = \frac{\rho^2}{2}$. Границите се:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 2 \quad \text{и} \quad 0 \leq z \leq \frac{\rho^2}{2}.$$



Цртеж 6.2.3.4.1.



Цртеж 6.2.3.4.2.

Следува:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \rho d\rho \int_0^{\frac{\rho^2}{2}} dz = 2\pi \int_0^2 \rho^3 d\rho z \Big|_0^{\frac{\rho^2}{2}} = \\ &= 2\pi \int_0^2 \frac{\rho^2}{2} \rho^3 d\rho = \pi \int_0^2 \rho^5 d\rho = \pi \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^2 = \pi \frac{64}{6} = \frac{32\pi}{3}. \end{aligned}$$

Задача 5. Да се пресмета тројниот интеграл:

$$I = \iiint_V z dx dy dz,$$

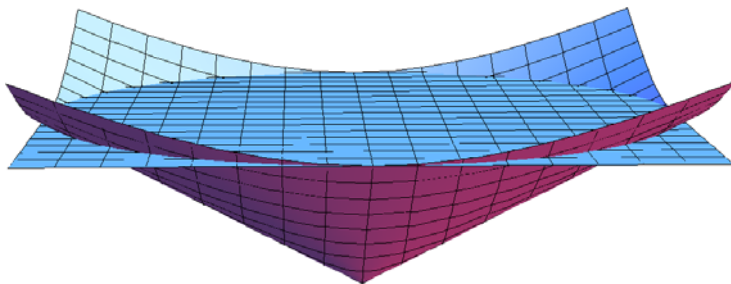
каде што V е областа ограничена со конусот $z = \frac{h}{r} \sqrt{x^2 + y^2}$ и рамнината $z = h$.

Решение. Може да сметаме дека $r > 0$ и $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. За $h = 0$ областа не е определена. **Прв случај:** $h > 0$.

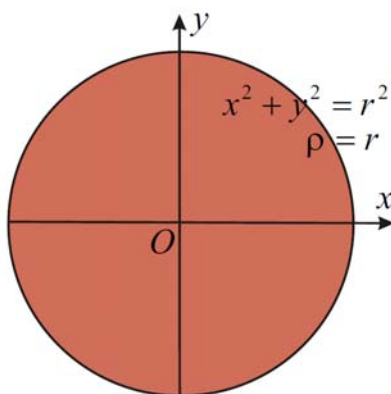
Пресекот на конусот и рамнината е определен од равенките:

$$h = \frac{h}{r} \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow \rho = r \quad \text{и} \quad z = h.$$

Поларната равенка на конусот е: $z = \frac{h}{r} \rho$. Следува:



Цртеж 6.2.3.5.1.



Цртеж 6.2.3.5.2.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho d\rho \int_{\frac{h}{r}\rho}^h z dz = 2\pi \int_0^r \rho d\rho \left[\frac{z^2}{2} \right]_{\frac{h}{r}\rho}^h = \\
 &= \pi \int_0^r \left(h^2 - \frac{h^2}{r^2} \rho^2 \right) \rho d\rho = \pi \int_0^r \left(h^2 \rho - \frac{h^2}{r^2} \rho^3 \right) d\rho = \\
 &= \pi \left(h^2 \frac{\rho^2}{2} - \frac{h^2}{r^2} \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^r = \pi \left(h^2 \frac{r^2}{2} - \frac{h^2}{r^2} \frac{r^4}{4} \right) = \frac{h^2 r^2 \pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Втор случај: $h < 0$. Подинтегралната функција и првите две граници се исти, само третите граници се во спротивен редослед, па интегралот има спротивна вредност на претходниот, т.е.:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho d\rho \int_h^{\frac{h}{r}\rho} z dz = -\frac{h^2 r^2 \pi}{4}.$$

7. ПРИМЕНА НА ДВОЕН И ТРОЕН ИНТЕГРАЛ

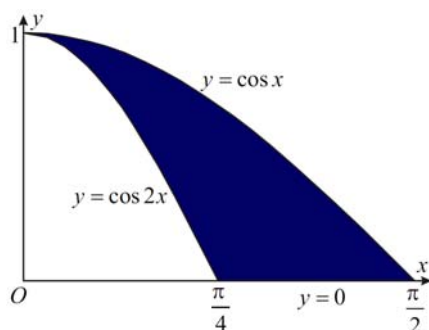
7.1. ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКИ ЛИК

Ограничен со графици на експлицитно зададени функции

Задача 1. Види ја задача 6.7.1.2. од првиот дел.

Задача 2. Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со кривите: $y = \cos x$, $y = \cos 2x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Ја скицираме областа.



Цртеж 7.1.1.2.

Од цртежот се определуваат границите на интеграција:

за $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, важи: $\cos 2x \leq y \leq \cos x$ и за $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \cos x$.

Следува:

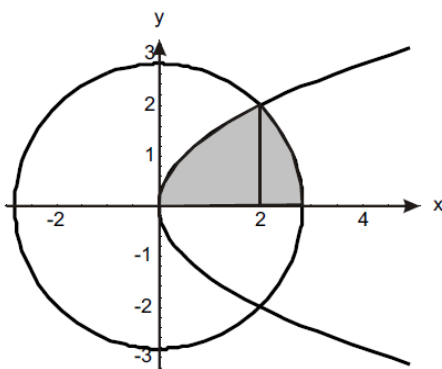
$$\begin{aligned}
 P &= \iint_D dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_{\cos 2x}^{\cos x} dy + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx y \Big|_{\cos 2x}^{\cos x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx y \Big|_0^{\cos x} = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \cos 2x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \sin \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Задача 3. Да се пресмета плоштината на помалата фигура ограничена со параболата $y^2 = 2x$ и кружницата $x^2 + y^2 = 8$.

Решение. Го бараме пресекот на параболата и кружницата:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 8, \quad y^2 = 2x &\Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \\ (x+4)(x-2) = 0 &\Leftrightarrow x = -4, \quad x = 2. \end{aligned}$$

Вредноста $x = -4$ отпаѓа бидејќи равенките од системот немаат смисла. За $x = 2$ добиваме $y = \pm 2$.



Цртеж 7.1.1.3.

Фигурата со x -оската е поделена на два еднакви дела. Затоа:

$$P = 2 \iint_D dx dy = 2 \left(\int_0^2 \sqrt{2x} dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2} dx \right) =$$

Првиот интеграл е табличен, а вториот се решава со тригонометриската смена $x = \sqrt{8} \sin t$, од каде што: $dx = \sqrt{8} \cos t dt$.

$$\text{За } x = 2 \Rightarrow 2 = 2\sqrt{2} \sin t \Rightarrow \sin t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4};$$

$$\text{за } x = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \sin t \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}; \text{ и}$$

$$\sqrt{8-x^2} = \sqrt{8-8\sin^2 t} = \sqrt{8(1-\sin^2 t)} = \sqrt{8}\sqrt{\cos^2 t} \stackrel{\cos t \geq 0}{=} \sqrt{8} \cos t.$$

Следува:

$$\begin{aligned}
 P &= 2\sqrt{2} \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8} \cos t \sqrt{8} \cos t dt = \frac{4\sqrt{2}}{3} \sqrt{8} + 16 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\
 &= \frac{16}{3} + 16 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{16}{3} + 8 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \frac{16}{3} + 8 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{16}{3} + 8 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{3} + 2\pi .
 \end{aligned}$$

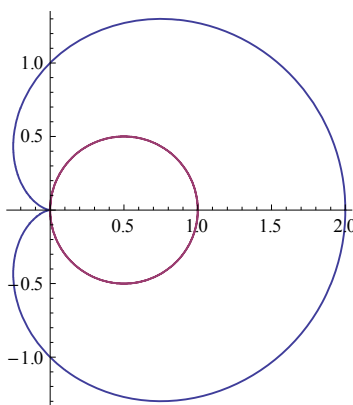
Ограничен со криви чии равенки се во поларни или обопштени поларни координати

Задача 4. Види ја задачата 6.7.1.3. од првиот дел.

Задача 5. Да се пресмета плоштината на ликот образуван од кривите: $\rho = 1 + \cos \varphi$ и $\rho = \cos \varphi$.

Решение. Важи:

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, од каде што: $dx dy = \rho d\varphi d\rho$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$.



Цртеж 7.1.2.3.

Плоштината на ликот е разлика од плоштините на кардиоидата и кружницата:

$$P_1 = 2 \iint_{D_1} dx dy = 2 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{1+\cos \varphi} \rho d\rho = 2 \int_0^{\pi} d\varphi \frac{\rho^2}{2} \bigg|_0^{1+\cos \varphi} = \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = (\varphi + 2 \sin \varphi) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$

$$\pi + \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2};$$

и

$$P_2 = 2 \iint_{D_2} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} \rho d\rho = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{\cos \varphi} =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

До заклучокот се доаѓа и директно бидејќи втората крива е кружница со радиус $r = \frac{1}{2}$, па $P_2 = r^2 \pi = \frac{\pi}{4}$. Конечно:

$$P = P_2 - P_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

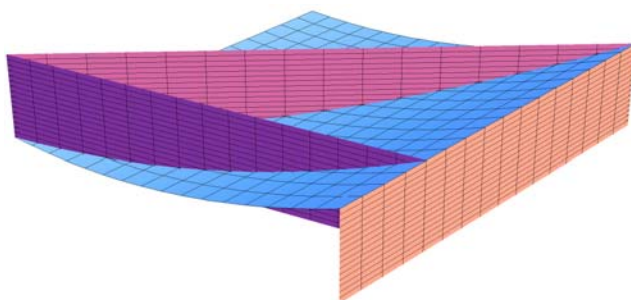
7.2. ПЛОШТИНА НА ПОВРШИНА

Задача 1. Да се пресмета плоштината на делот од цилиндарот:

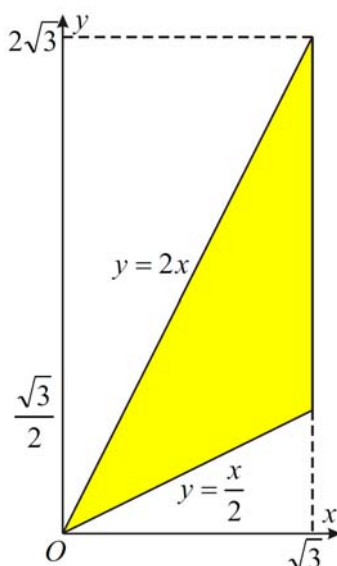
$$x^2 = 2z,$$

што го отсекуваат рамнините: $x - 2y = 0$, $y = 0$, $y = 2x$ и $x = \sqrt{3}$.

Решение. Ги скицираме површината и нејзината проекција на xOy -рамнината. Просторната скица е помалку значајна, треба само да утврди кој график на површина е горе, а кој долу.



Цртеж 7.2.1.1.



Цртеж 7.2.1.2.

За $z = \frac{1}{2}x^2$, $p = x$ и $q = 0$. Следува:

$$\begin{aligned}
 P &= \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx dy = \iint_D \sqrt{1+x^2} \, dx dy = \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} \sqrt{1+x^2} \, dy = \\
 &= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2} y \Big|_{\frac{x}{2}}^{2x} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{3x}{2} \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{3}{2} \int_0^{\sqrt{3}} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d(1+x^2)}{2} = \\
 &= \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \left((1+3)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{1}{2} (8-1) = \frac{7}{2}.
 \end{aligned}$$

Задача 2. Види ја задачата 6.7.2.2. од првиот дел.

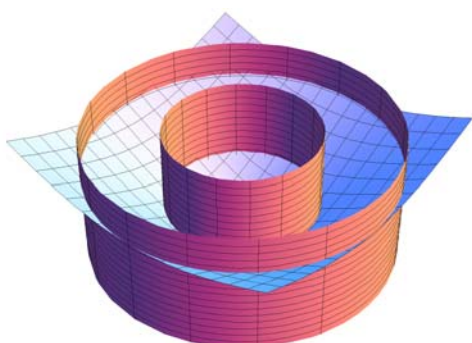
Задача 3. Да се пресмета плоштината на делот од конусот:

$$z = a\sqrt{x^2 + y^2}, \quad a > 0;$$

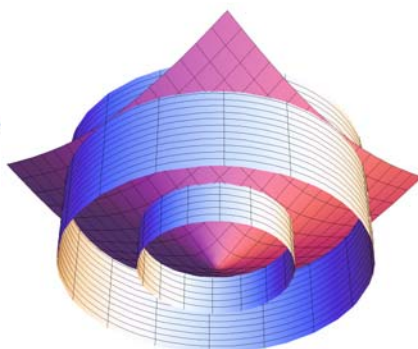
што го отсекуваат цилиндрите: $x^2 + y^2 = r^2$ и $x^2 + y^2 = R^2$, $r < R$.

Решение. Имаме:

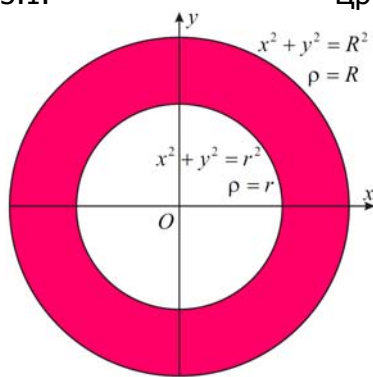
$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \text{од каде што: } dx dy = \rho d\rho d\varphi, \quad x^2 + y^2 = \rho^2.$$



Цртеж 7.2.3.1.



Цртеж 7.2.3.2.



Цртеж 7.2.3.3.

Површината се состои од 4 еднакви дела од кои еден е во првиот октант. Во овој случај интегралот не се усложнува ако се пресмета на целата област, т.е. нема потреба да ја користиме симетријата. Заради:

$$p = \frac{2x}{2a\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{a\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad q = \frac{2y}{2a\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{a\sqrt{x^2 + y^2}};$$

плоштината е:

$$\begin{aligned} P &= \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2(x^2 + y^2)} + \frac{y^2}{a^2(x^2 + y^2)}} \, dx dy = \\ &= \iint_D \sqrt{\frac{a^2(x^2 + y^2) + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} \, dx dy = \iint_D \sqrt{(a^2 + 1)} \, dx dy = \\ &= \sqrt{a^2 + 1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^R \rho d\rho = \sqrt{a^2 + 1} \cdot 2\pi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_r^R = \sqrt{a^2 + 1} (R^2 - r^2) \pi. \end{aligned}$$

Задача 4. Да се пресмета плоштина на делот од сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ограничен со рамнината $z = 0$.

Решение. Имаме:

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$; од каде што: $dx dy = \rho d\rho d\varphi$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$.

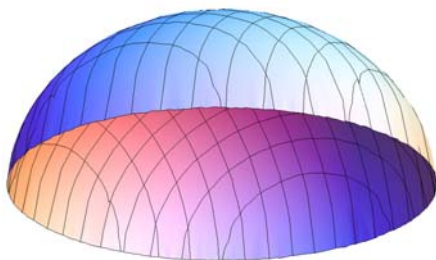
Во пресечните точки важи: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$; т.е. $x^2 + y^2 = 1$.

Равенките на полусферите што ги отсекува рамнината се:

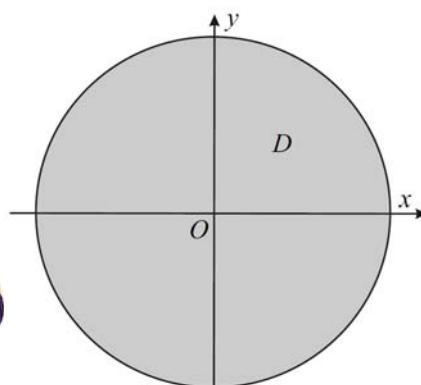
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow z^2 = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$$\text{За } z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad p = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{-2y}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \text{ и}$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$



Цртеж 7.2.4.1.



Цртеж 7.2.4.2.

Рамнината ја дели сферата на два еднакви дела. Во условот на задачата не е прецизирано на кој дел треба да се најде плоштината, но тој услов е ирелевантен бидејќи и двата дела имаат исти плоштини. Следува:

$$P = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \rho d\rho =$$

$$\left(\begin{array}{lll} 1 - \rho^2 = t^2 & -2\rho d\rho = 2tdt & \rho = 0 \Rightarrow t = 1 \\ \sqrt{1 - \rho^2} = t & \rho d\rho = -tdt & \rho = 1 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right) =$$

$$2\pi \int_1^0 \frac{-tdt}{t} = 2\pi \int_0^1 dt = 2\pi .$$

Задача 5. Да се пресмета плоштината на делот на сферата: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, што се наоѓа во цилиндарот $x^2 + y^2 = ay$, $a > 0$.

Решение. Поларните координати се:

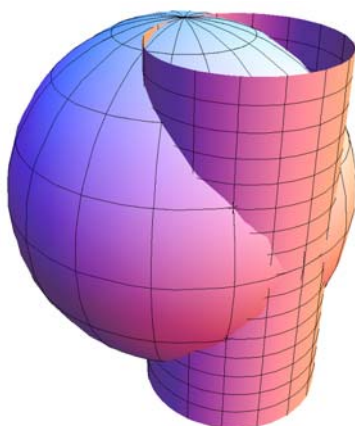
$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$; од каде што: $dx dy = \rho d\rho d\varphi$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Ја средуваме равенката на цилиндарот:

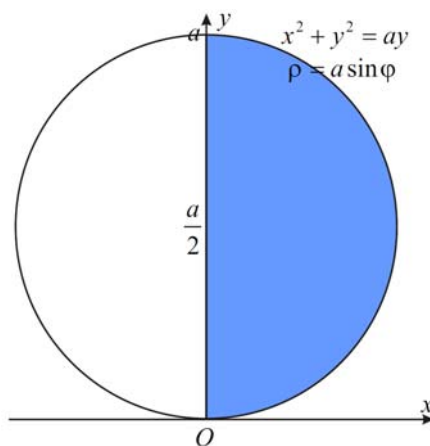
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = ay &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - ay = 0 \Leftrightarrow \\ x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

Равенките на цилиндарот и сферата во поларни координати се:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = ay &\Leftrightarrow \rho^2 = a\rho \sin \varphi \Leftrightarrow \rho = a \sin \varphi . \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 &\Leftrightarrow z^2 = a^2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow \\ z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} &\Leftrightarrow z = \pm \sqrt{a^2 - \rho^2} . \end{aligned}$$



Цртеж 7.2.5.1.



Цртеж 7.2.5.2.

Ги определуваме изразите кои се јавуваат во интегралот:

$$p = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{-2y}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

од каде што:

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{a^2-x^2-y^2+x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}.$$

Површината се состои од 4 еднакви дела, два во горниот и два во долниот дел од сферата. Границите на делот што се наоѓа во првиот октант се: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ и $0 \leq \rho \leq a \sin \varphi$. Затоа:

$$P = 4 \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sin \varphi} \frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} d\rho =$$

$$\left(\begin{array}{lll} \sqrt{a^2-\rho^2} = t & -2\rho d\rho = 2tdt & \rho = 0 \Rightarrow t = a \\ a^2-\rho^2 = t^2 & \rho d\rho = -tdt & \rho = a \sin \varphi \Rightarrow t = a \cos \varphi \end{array} \right)$$

$$\left(\sqrt{a^2-a^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 \varphi)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi} \stackrel{\cos \varphi \geq 0}{=} a \cos \varphi \right)$$

$$P = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_a^{a \cos \varphi} \frac{-tdt}{t} = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a \cos \varphi}^a dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi t \Big|_{a \cos \varphi}^a =$$

$$4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a - a \cos \varphi) d\varphi = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \varphi) d\varphi =$$

$$4a^2 (\varphi - \sin \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 2a^2 (\pi - 2).$$

Задача 6. Да се пресмета плоштината на површината на телото ограничено со цилиндрите: $x^2 + z^2 = a^2$ и $y^2 + z^2 = a^2$.

Решение. Пресечните прави на цилиндрите се:

$$x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + z^2 = y^2 + z^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y.$$

Ја изразуваме експлицитно равенката:

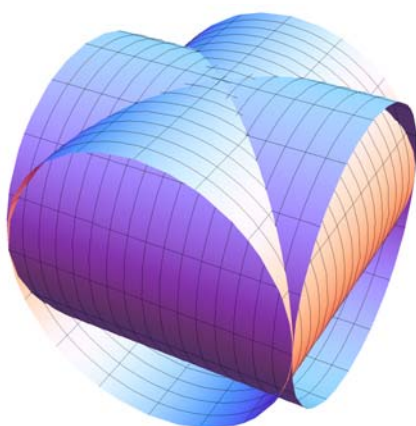
$$x^2 + z^2 = a^2 \Leftrightarrow z^2 = a^2 - x^2 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

Оттука:

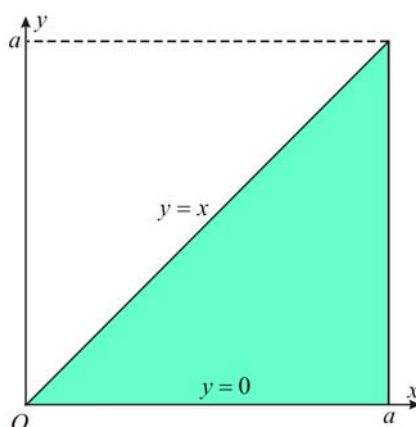
$$p = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad q = 0;$$

и

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$



Цртеж 7.2.6.1.



Цртеж 7.2.6.2.

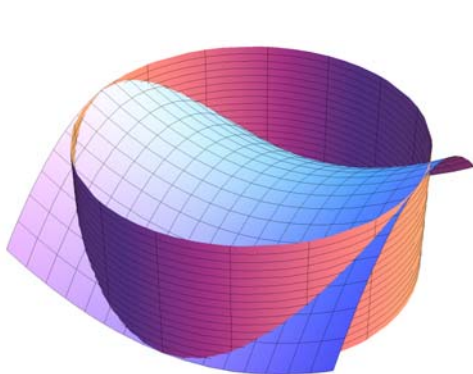
Телото се состои од 16 еднакви дела, по два во секој октант.
Затоа:

$$\begin{aligned} P &= 16 \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx dy = 16 \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx dy = \\ &= 16a \int_0^a dx \int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dy = 16a \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx \Big|_0^x = 16a \int_0^a \frac{-2x dx}{-2\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= 16a \left(-\sqrt{a^2 - x^2} \right) \Big|_0^a = 16aa = 16a^2. \end{aligned}$$

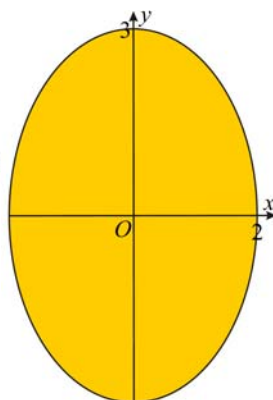
Задача 7. Да се пресмета плоштината на делот од параболоидот $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6}$ што го отсекува цилиндарот $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Решение. Го скицираме телото и неговата проекција на xOy -рамнината.

$$\text{Од } z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6}, \text{ следува дека: } p = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2} \text{ и } q = -\frac{2y}{6} = -\frac{y}{3}.$$



Цртеж 7.2.7.1.



Цртеж 7.2.7.2.

Обопштените поларни координати се: $x = 2\rho \cos \rho$ и $y = 3\rho \sin \rho$;
од каде што: $dxdy = 6\rho d\rho d\varphi$ и $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \rho^2$. Подинтегралната
функција е: $\sqrt{1 + \rho^2 + \rho^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} = \sqrt{1 + \rho^2}$. Равенката на
елипсата во обопштени координати е:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \rho^2 = 1 \Leftrightarrow \rho = 1.$$

Следува, плоштината е:

$$\begin{aligned} P &= \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho = \\ &= \left(\begin{array}{l} \sqrt{1 + \rho^2} = t \quad 2\rho d\rho = 2tdt \quad \rho = 0 \Rightarrow t = 1 \\ 1 + \rho^2 = t^2 \quad \rho d\rho = tdt \quad \rho = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2} \end{array} \right) = \\ &= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = 2\pi \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Задача 8. Да се пресмета плоштината на делот од хиперболоидот $z = xy$ што го отсекува цилиндарот: $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Поларните координати се:

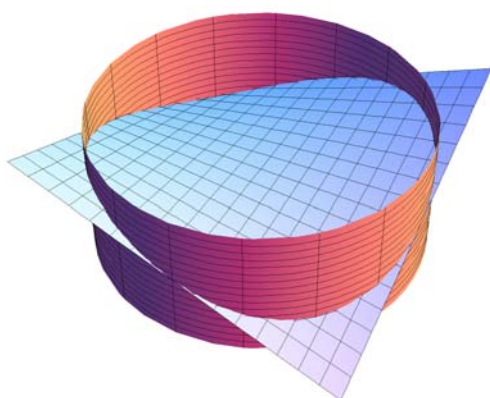
$$x = \rho \cos \rho, \quad y = \rho \sin \rho \quad \text{од каде што: } dxdy = \rho d\rho d\varphi \text{ и } x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Од $z = xy$ добиваме дека:

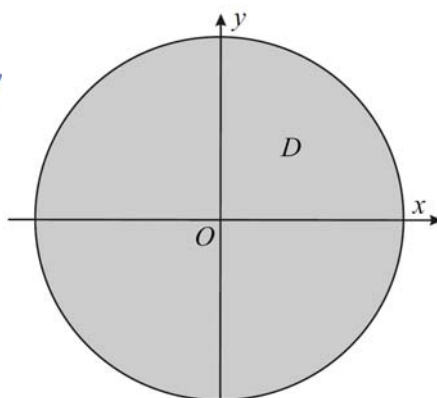
$$p = x, \quad q = y;$$

и

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+x^2+y^2} = \sqrt{1+\rho^2}.$$



Цртеж 7.2.8.1.



Цртеж 7.2.8.2.

Следува, плоштината е:

$$\begin{aligned} P &= \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx dy = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2} \, \rho d\rho = \\ &= \left(\begin{array}{lll} \sqrt{1+\rho^2} = t & 2\rho d\rho = 2t dt & \rho = 0 \Rightarrow t = 1 \\ 1+\rho^2 = t^2 & \rho d\rho = t dt & \rho = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2} \end{array} \right) = \\ &= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = 2\pi \left. \frac{t^3}{3} \right|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

7.3. ВОЛУМЕН НА ТЕЛО

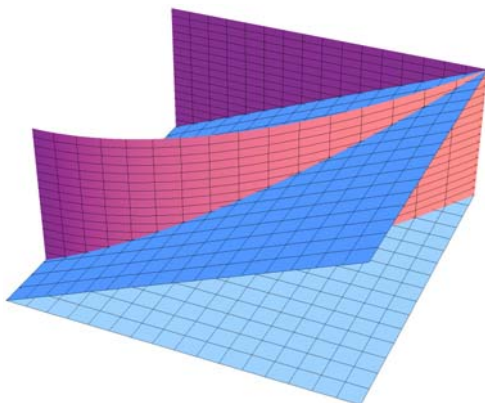
Задача 1. Види ја задачата 6.7.3.4 од првиот дел.

Задача 2. Да се пресмета волуменот на телото ограничено со површините: $y = 1+x^2$, $y = 5$, $z = 0$ и $z = 3x$.

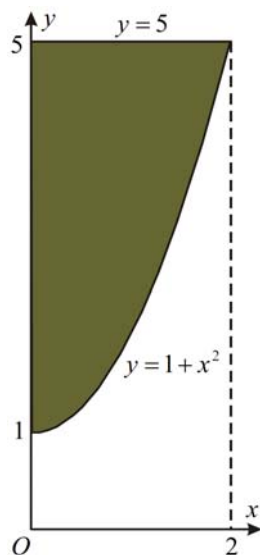
Решение. Пресекот на површините е:

$$y = 5, \quad y = 1+x^2 \Leftrightarrow 5 = 1+x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Значи пресекот е пар рамнини. Го скицираме телото.



Цртеж 7.3.2.1.



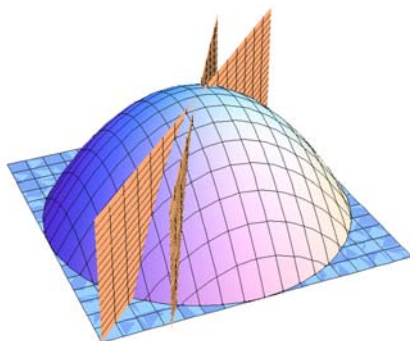
Цртеж 7.3.2.2.

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D z dx dy = 2 \int_0^2 dx \int_{1+x^2}^5 3x dy = 6 \int_0^2 x dx y \Big|_{1+x^2}^5 = 6 \int_0^2 x (5 - (1+x^2)) dx = \\
 &= 6 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 6 \left(4 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 6 \left(2 \cdot 2^2 - \frac{16}{4} \right) = 6(8-4) = 24.
 \end{aligned}$$

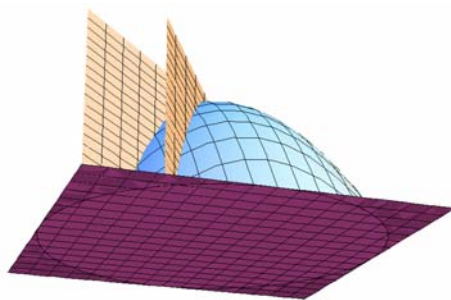
Задача 3. Да се пресмета волуменот на телото ограничено со површините: $y \geq x$, $y \leq \sqrt{3}x$, $z = 0$, и $z = 1 - x^2 - y^2$.

Решение. Имаме:

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, од каде што: $dx dy = \rho d\rho d\varphi$, $x^2 + y^2 = \rho^2$.



Цртеж 7.3.3.1.



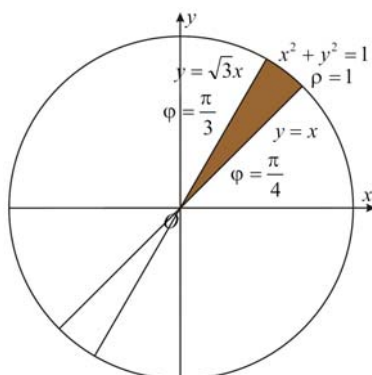
Цртеж 7.3.3.2.

Поларните равенки на површините се:

$$y = \sqrt{3}x \Leftrightarrow \rho \sin \varphi = \sqrt{3} \rho \cos \varphi \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3};$$

$$y = x \Leftrightarrow \rho \sin \varphi = \rho \cos \varphi \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}; \text{ и}$$

$$z = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow z = 1 - \rho^2.$$



Цртеж 7.3.3.3.

Површините $z = 1 - x^2 - y^2$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ и $z = 0$, формираат четири тела со конечен волумен, кои по парови се еднакви. Неравенките одредуваат дека се бара волуменот на телото што лежи во првиот октант:

$$V = \iint_D z dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho d\rho = \varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho =$$

$$\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{12} \frac{1}{4} = \frac{\pi}{48}.$$

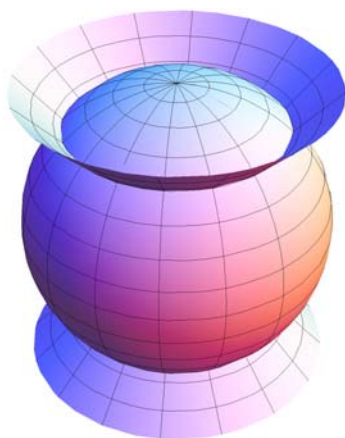
Задача 4. Да се пресмета волуменот на телото ограничено со сферата: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ и конусот: $z^2 = x^2 + y^2$ така што:

$$z^2 \geq x^2 + y^2.$$

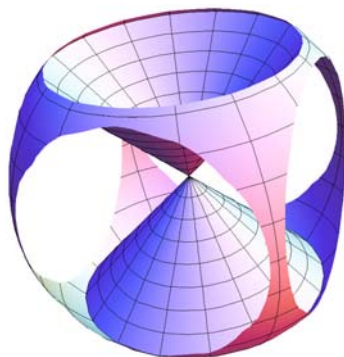
Решение. Пресекот на површините е во:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z^2 + z^2 = 2 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1.$$

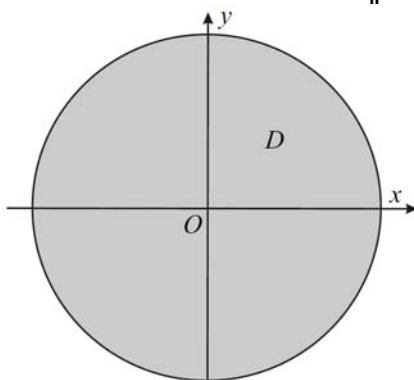
Оттука, $x^2 + y^2 = 1$. Проекцијата на пресечните криви ја определува областа на интеграција.



Цртеж 7.3.4.1.



Цртеж 7.3.4.2.



Цртеж 7.3.4.1.

Поларните координати се:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \text{од каде што: } dx dy = \rho d\rho d\varphi, \quad x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Равенките на сферата и конусот во поларни координати се:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 2 &\Leftrightarrow z^2 = 2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{2 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow \\ z = \pm \sqrt{2 - \rho^2} \text{ и } z^2 = x^2 + y^2 &\Leftrightarrow z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{\rho^2} = \rho. \end{aligned}$$

Следува:

$$V = 2 \iiint_D (z_2 - z_1) dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\sqrt{2 - \rho^2} - \rho) \rho d\rho =$$

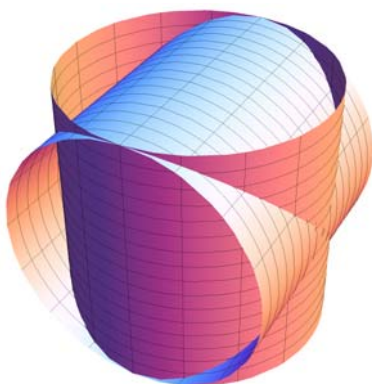
$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot 2\pi \left(\int_0^1 \sqrt{2-\rho^2} \rho d\rho - \int_0^1 \rho^2 d\rho \right) = \\
 & \left(\begin{array}{lll} \sqrt{2-\rho^2} = t & -2\rho d\rho = 2tdt & \rho=0 \Rightarrow t=\sqrt{2} \\ 2-\rho^2 = t^2 & \rho d\rho = -tdt & \rho=1 \Rightarrow t=1 \end{array} \right) = \\
 & 4\pi \left(\int_{\sqrt{2}}^1 t(-t)dt - \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 \right) = 4\pi \left(\int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt - \frac{1}{3} \right) = 4\pi \left(\frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \right) = \\
 & 4\pi \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} (2\sqrt{2}-2) = \frac{8(\sqrt{2}-1)\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Задача 5. Да се пресмета волуменот на телото ограничено со цилиндрите: $x^2 + y^2 = a^2$ и $x^2 + z^2 = a^2$.

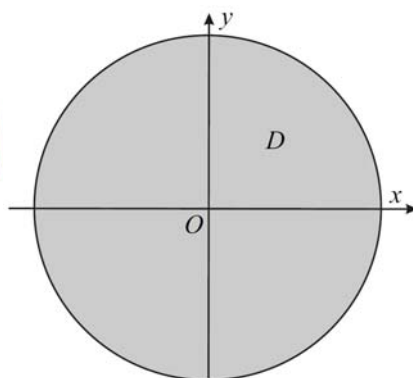
Решение. Ја изразуваме експлицитно равенката на цилиндарот што ја содржи променливата z :

$$x^2 + z^2 = a^2 \Leftrightarrow z^2 = a^2 - x^2 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Го скицираме телото кое се состои од 8 еднакви дела. Затоа:



Цртеж 7.3.5.1.



Цртеж 7.3.5.2.

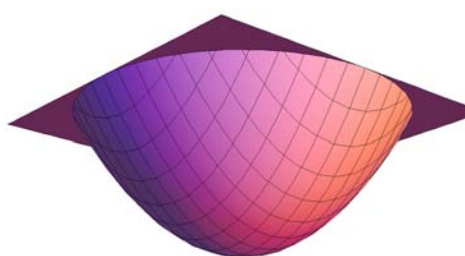
$$\begin{aligned}
 V &= 8 \iint_D z dx dy = 8 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} dx dy = 8 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} dy = \\
 & 8 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx y \Big|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = 8 \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a =
 \end{aligned}$$

$$8 \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{16a^3}{3}.$$

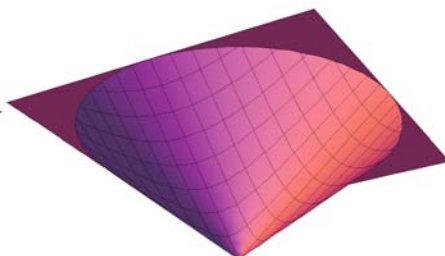
Задача 6. Да се пресмета волуменот на телото ограничено со површините: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = x^2 + y^2$.

Решение. Имаме:

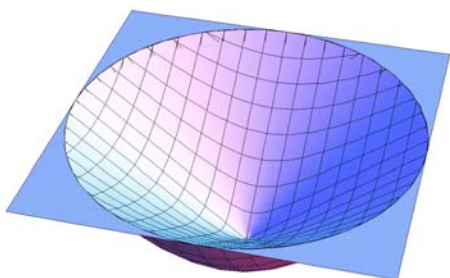
$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \text{од каде што: } dxdy = \rho d\rho d\varphi, \quad x^2 + y^2 = \rho^2.$$



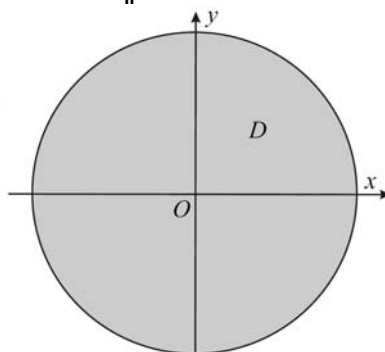
Цртеж 7.3.6.1.



Цртеж 7.3.6.2.



Цртеж 7.3.6.3.



Цртеж 7.3.6.4.

За пресечните точки важи:

$$z = x^2 + y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \rho = 1.$$

Равенките на телата во поларни координати се:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow z = \rho \quad \text{и} \quad z = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = \rho^2.$$

Следува:

$$V = \iint_D (z_2 - z_1) dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho - \rho^2) \rho d\rho =$$

$$2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 2\pi \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

Задача 7*. Да се пресмета волуменот на телото ограничено со површините: $z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 1$ и $z = 0$.

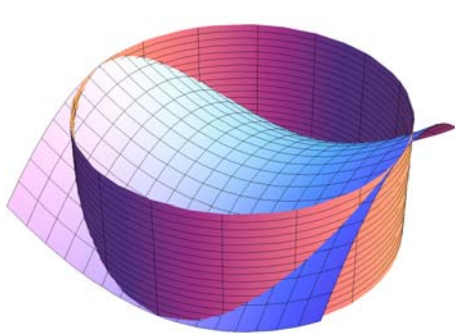
Решение. Имаме:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \text{од каде што: } dx dy = \rho d\rho d\varphi, \quad x^2 + y^2 = \rho^2;$$

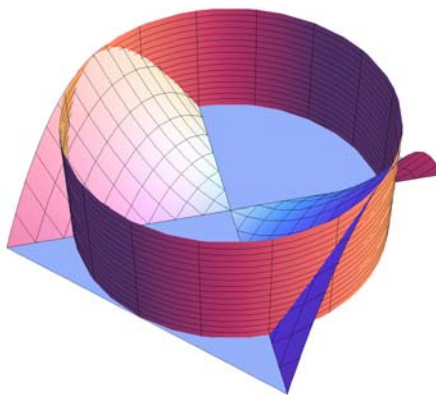
$$x = y \Leftrightarrow \rho \cos \varphi = \rho \sin \varphi \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$z = x^2 - y^2, \quad z = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm y.$$

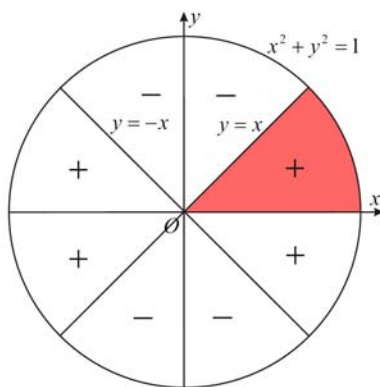
Телото се состои од четири тела со еднакви волумени, две над и две под xOy рамнината. Секое од нив со координатните рамнини xOz и yOz се дели на по две еднакви тела.



Цртеж 7.3.7.1.



Цртеж 7.3.7.2.



Цртеж 7.3.7.3.

Значи:

$$V = 8 \iiint_D z dx dy = 8 \iint_D (x^2 - y^2) dx dy ,$$

каде што:

$$x^2 - y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \rho^2 \cos 2\varphi ,$$

и

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \text{ и } 0 \leq \rho \leq 1 .$$

Следува:

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \cos 2\varphi \rho d\rho = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \\ &= 8 \frac{\sin 2\varphi}{2} \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^4}{4} \bigg|_0^1 = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 . \end{aligned}$$

Задача 8. Да се пресмета волуменот на телото ограничено со елипсоидот $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ и конусот $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$.

Решение. Воведуваме обопштени поларни координати:

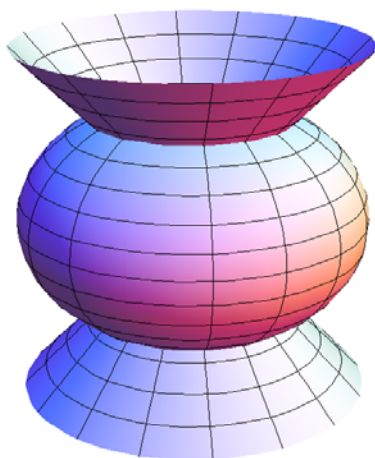
$$x = a\rho \cos \varphi , \quad y = b\rho \sin \varphi , \quad \text{од каде } dx dy = ab\rho d\rho d\varphi , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2 .$$

Ја определуваме пресечната крива:

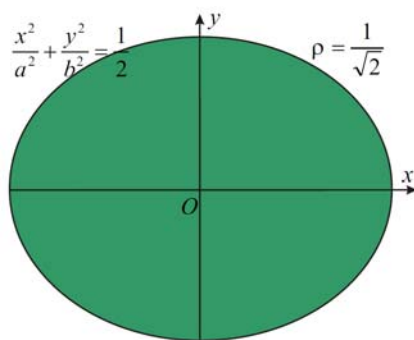
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} &\Rightarrow \frac{2z^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow z = \pm \frac{c}{\sqrt{2}} ; \text{ и} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2}{2c^2} &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \rho^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

Равенките на елипсоидот и конусот во обопштени поларни координати се:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 &\Leftrightarrow z_2 = \pm c \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)} = \pm c \sqrt{1 - \rho^2} ; \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} &\Leftrightarrow \frac{z}{c} = \pm \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \Leftrightarrow z_1 = \pm c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} = \pm c\rho . \end{aligned}$$



Цртеж 7.3.8.1.



Цртеж 7.3.8.2.

Следува дека:

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \iint_D (z_2 - z_1) dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(c\sqrt{1-\rho^2} - c\rho \right) ab \rho d\rho = \\
 &= 2abc2\pi \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho^2 d\rho \right) = \\
 &= \left(\begin{array}{lll} \sqrt{1-\rho^2} = t & -2\rho d\rho = 2tdt & \rho = 0 \Rightarrow t = 1 \\ 1-\rho^2 = t^2 & \rho d\rho = -tdt & \rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right) = \\
 &= 4abc\pi \left(\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t(-t) dt - \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = 4abc\pi \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 t^2 dt - \frac{1}{3 \cdot 2\sqrt{2}} \right) = \\
 &= 4abc\pi \left(\frac{t^3}{3} \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 - \frac{1}{6\sqrt{2}} \right) = 4abc\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \right) = \\
 &= 4abc\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \right) = \frac{4abc\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2abc\pi}{3} (2 - \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

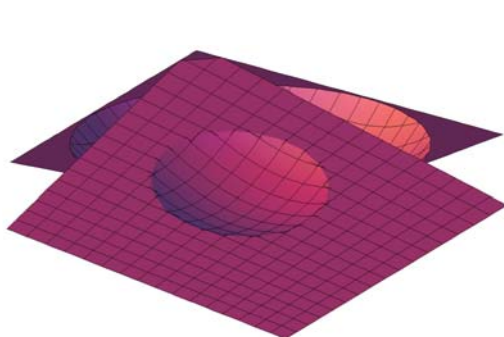
Задача 9. Да се пресмета волуменот на телото ограничено со параболоидот $z = x^2 - x + y^2 - y - \frac{1}{2}$ и рамнината $x + y + z = \frac{1}{2}$.

Решение. Ја средуваме равенката на параболоидот:

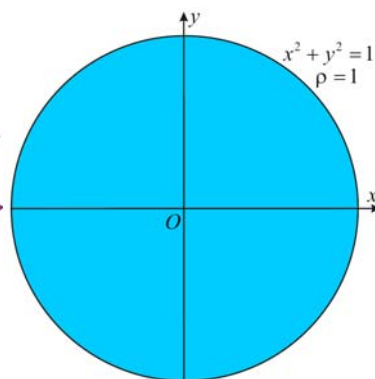
$$z = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - 1.$$

За пресечните точки на рамнината и параболоидот важи:

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{2} - x - y, \quad z = x^2 - x + y^2 - y - \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} - x - y = x^2 - x + y^2 - y - \frac{1}{2} &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$



Цртеж 7.3.9.1.



Цртеж 7.3.9.2.

Забележуваме дека рамнината е над телото. Следува:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (z_2 - z_1) dx dy = \iint_D \left(\frac{1}{2} - x - y - x^2 + x - y^2 + y + \frac{1}{2} \right) dx dy = \\ &= \iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho d\rho = 2\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho = \\ &= 2\pi \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 2\pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Коментар. Заради поголема визуелизација, просторните скици се нацртани во програмскиот пакет математика, со избрана точка на поглед и размер.

8.1. КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ПРВ ТИП

По експлицитно зададени графици на функции

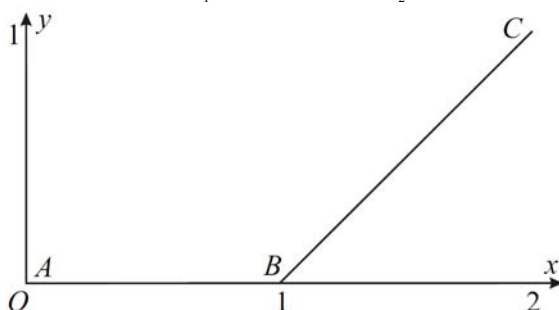
Задача 1. Да се пресмета криволинискиот интеграл:

$$I = \int_C (x - 2y) ds,$$

каде што C е искршената линија: ABC : $A(0,0)$, $B(1,0)$ и $C(2,1)$.

Решение. Искршената линија се состои од две отсечки. Интегралот е збир од интегралите по секоја од отсечките.

$$I = \underbrace{\int_{\overline{AB}} (x - 2y) ds}_{I_1} + \underbrace{\int_{\overline{BC}} (x - 2y) ds}_{I_2}.$$



Цртеж 8.1.1.

Ги пресметуваме двата интеграла. И двете отсечки се дел од прави кои имаат равенки од обликот $y = y(x)$ чиј елемент на лак е

$ds = \sqrt{1 + y'^2}$. Имаме:

$$\overline{AB}: y = 0 \Rightarrow y' = 0, 0 \leq x \leq 1, ds = \sqrt{1 + y'^2} = dx.$$

$$I_1 = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\overline{BC}: B(1,0), C(2,1); y = \frac{1-0}{2-1}(x-1) \Leftrightarrow y = x-1 \Rightarrow y' = 1;$$

$$1 \leq x \leq 2; ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{2} dx.$$

Следува дека интегралот е:

$$I_2 = \int_1^2 (x - 2(x-1))\sqrt{2}dx = \sqrt{2} \int_1^2 (2-x)dx =$$

$$\sqrt{2} \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \sqrt{2} \left(2(2-1) - \frac{1}{2}(4-1) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Оттука:

$$I = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Втор начин на пресметување на I_2 . За разлика од првиот интеграл, вториот интеграл, што е најчест случај, може да се пресмета и со изразување на $x = x(y)$ (во овој случај на интервалот постои пар меѓусебно инверзни функции). Имаме:

$$x = y + 1, \quad y \in [0, 1]; \quad \text{од каде што: } x' = 1 \text{ и } ds = \sqrt{1 + x'^2} dy = \sqrt{2} dy.$$

$$\text{Следува: } I_2 = \int_0^1 (y+1-2y)\sqrt{2}dy = \sqrt{2} \int_0^1 (1-y)dy =$$

$$\sqrt{2} \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 2. Да се пресмета криволинискиот интеграл:

$$\int_C xy ds,$$

каде што C е контурата на правоаголникот $ABCD$:

$$A(0,0), \quad B(4,0), \quad C(4,2) \text{ и } D(0,2).$$

Решение. Кривата се состои од четири отсечки. Две се дел од прави со равенки $y = c$ чиј елемент на лак е $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$, додека другите две со $x = c$, каде што: $ds = \sqrt{1 + x'^2} dy$.

$$AB: y = 0 \Rightarrow y' = 0; \quad ds = dx; \quad 0 \leq x \leq 2.$$

$$BC: x = 4 \Rightarrow x' = 0; \quad ds = \sqrt{1 + x'^2} dy = dy; \quad 0 \leq y \leq 2.$$

$$CD: y = 2 \Rightarrow y' = 0; \quad ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = dx; \quad 2 \leq x \leq 4$$

$$DA: x = 0 \Rightarrow x' = 0; \quad ds = \sqrt{1 + x'^2} dy = dy; \quad 0 \leq y \leq 2.$$



Цртеж 8.1.2.

Следува:

$$\begin{aligned} \int_C &= \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} = 0 + \int_0^2 4y dy + \int_0^4 2x dx + 0 = \\ &= 4 \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 + 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 2 \cdot 4 + 16 = 24. \end{aligned}$$

Задача 3. Види ја задачата 8.1.3. од првиот дел.

По параметарски зададени рамнински криви

Задача 4. Да се пресмета криволинискиот интеграл:

$$I = \int_C xy ds,$$

каде што C е делот од елипсата: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ што лежи во прв квадрант.

Решение. Задачата ќе се реши полесно ако ги искористиме параметарските равенки на делот од елипсата во прв квадрант:

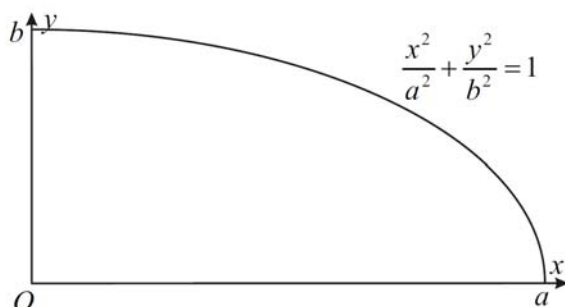
$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Следува: $\dot{x} = -a \sin t$, $\dot{y} = a \cos t$ и

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

Сега го сведуваме криволинискиот интеграл на единечен:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t b \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt .$$



Цртеж 8.1.4.

Воведуваме смена: $u = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$, од каде што:

$$du = (2a^2 \sin t \cos t + 2b^2 \cos t (-\sin t)) dt = 2(a^2 - b^2) \sin t \cos t dt .$$

$$\text{Кога } t = 0 \Rightarrow u = b^2 \text{ и кога } t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = a^2 .$$

Затоа:

$$\begin{aligned} I &= ab \int_{b^2}^{a^2} \frac{du}{2(a^2 - b^2)} \sqrt{u} = \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{b^2}^{a^2} = \frac{ab(a^3 - b^3)}{3(a^2 - b^2)} = \\ &= \frac{ab(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{3(a-b)(a+b)} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)} . \end{aligned}$$

Задача 5. Да се пресмета криволинискиот интеграл:

$$I = \int_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds ,$$

каде што C е кривата: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Решение. Кривата C е астроида. Нејзините параметарски равенки се: $C: x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$.

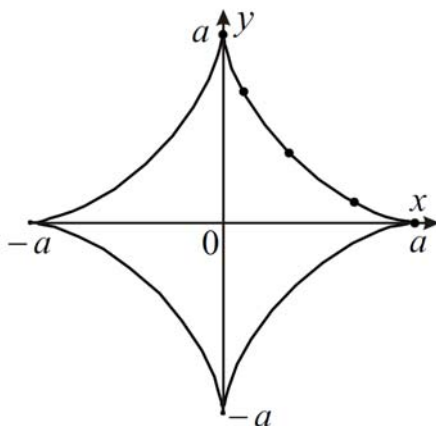
Поради симетричноста на кривата C и површината $z = x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}$ важи $I = 4 \int_{C_1} z ds$, каде што C_1 е делот од астроидата

C во прв квадрант, т.е. за $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ги пресметуваме изводите и елементот на лакот:

$$\dot{x} = 3a \cos^2 t (-\sin t) = -3a \sin t \cos^2 t, \quad \dot{y} = 3a \sin^2 t \cos t;$$

и

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt \stackrel{\sin t, \cos t \geq 0}{=} \\ 3a \sin t \cos t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 3a \sin t \cos t dt.$$



Цртеж 8.1.5.

На крај го определуваме интегралот:

$$I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((a \cos^3 t)^{\frac{4}{3}} + (a \sin^3 t)^{\frac{4}{3}} \right) 3a \sin t \cos t dt = \\ 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^{\frac{4}{3}} \cos^4 t + a^{\frac{4}{3}} \sin^4 t \right) \sin t \cos t dt = \\ 12a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^5 t \sin t + \sin^5 t \cos t) dt = \\ 12a^{\frac{7}{3}} \left(-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t d(\cos t) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t d(\sin t) \right) =$$

$$12a^{\frac{7}{3}} \left(-\frac{\cos^6 t}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin^6 t}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{12}{6} a^{\frac{7}{3}} \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 + \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) =$$

$$2a^{\frac{7}{3}} 2 = 4a^{\frac{7}{3}}.$$

По параметарски зададени просторни криви

Задача 6. Да се пресмета криволинискиот интеграл:

$$I = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds,$$

каде што C е кривата: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$; $t \in [0, 2\pi]$.

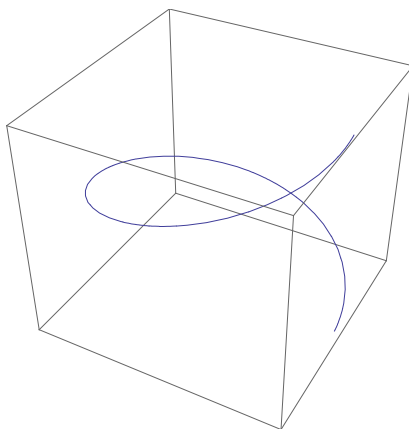
Решение. Имаме:

$$\dot{x} = -a \sin t, \quad \dot{y} = a \cos t \quad \text{и} \quad \dot{z} = b;$$

од каде што:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt =$$

$$\sqrt{a^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt.$$



Цртеж 8.1.6.

Следува:

$$I = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt =$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) + b^2 t^2) dt =$$

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) dt &= \sqrt{a^2+b^2} \left(a^2 t + b^2 \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ \sqrt{a^2+b^2} \left(a^2 2\pi + b^2 \frac{8\pi^3}{3} \right) &= \sqrt{a^2+b^2} \left(2a^2 \pi + \frac{8b^2 \pi^3}{3} \right).\end{aligned}$$

8.2. КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ВТОР ТИП

По експлицитно зададени графици на функции

Задача 1. Да се пресмета криволинискиот интеграл:

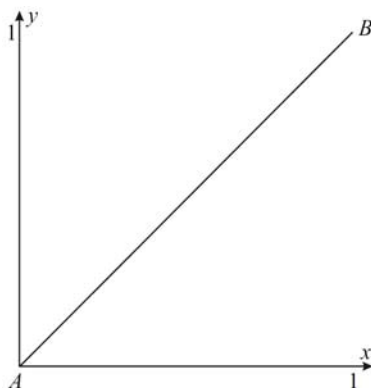
$$I = \int_C xy dx + (x + y) dy,$$

каде што $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$ и C е кривата:

- 1) $C = \overline{AB}$, каде што $\overline{AB}$ е дел од правата $y = x$;
- 2) $C = \widehat{AB}$, каде што $\widehat{AB}$ е лакот од параболата $y = x^2$;
- 3) $C = \widehat{ACB}$, каде што $\widehat{ACB}$ е искршена линија.

Решение. 1) Кривата е отсечка. Користејќи го цртежот го сведуваме криволинискиот интеграл на единечен.

$$y = x \Rightarrow dy = dx \text{ и } 0 \leq x \leq 1.$$



Цртеж 8.2.1.1.

Следува, интегралот е:

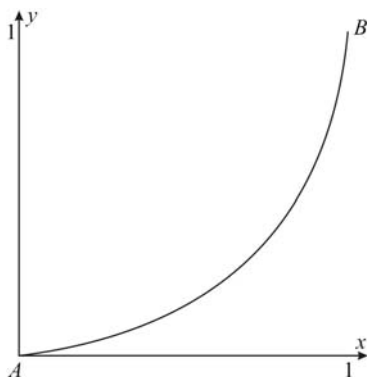
$$I = \int_0^1 x^2 dx + 2x dx = \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

2) Имаме:

$$y = x^2 \Rightarrow dy = 2x dx \text{ и } 0 \leq x \leq 1;$$

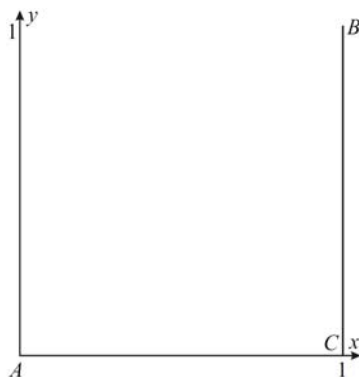
од каде што интегралот е:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^3 dx + (x + x^2) 2x dx = \int_0^1 (x^3 + 2x^2 + 2x^3) dx = \\ &= \int_0^1 (3x^3 + 2x^2) dx = \left(3 \frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12}. \end{aligned}$$



Цртеж 8.2.1.2.

3) Интеграл по искршена линија е збир од интегралите по отсечките кои ја сочинуваат. Ги пресметуваме интегралите по отсечките $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$:



Цртеж 8.2.1.3.

$$\overline{AC}: y = 0 \Rightarrow dy = 0; \text{ и } 0 \leq x \leq 1, \text{ од каде што: } \int_{\overline{AC}} = 0.$$

$$\overline{CB}: x=1 \Rightarrow dx=0; \quad 0 \leq y \leq 1;$$

од каде што:

$$\int_{\overline{CB}} = \int_0^1 (1+y) dy = \left(y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Значи:

$$I = \int_{\overline{AC}} + \int_{\overline{CB}} = \frac{3}{2}.$$

По параметарски зададени просторни криви

Задача 2. Види ја задача 8.2.3. од првиот дел.

Задача 3. Да се пресмета криволинискиот интеграл:

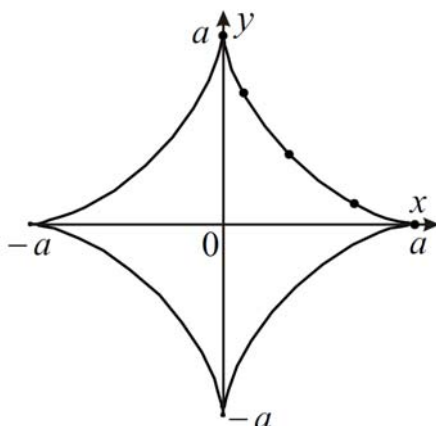
$$\int_C \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}},$$

каде што C е кривата: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ од точката $A(a,0)$ до точката $B(0,a)$.

Решение. Диференцијалите се:

$$dx = 3a \cos^2 t (-\sin t) dt = -3a \sin t \cos^2 t dt;$$

$$dy = 3a \sin^2 t \cos t dt.$$



Цртеж 8.2.3.

Кривата е астроида. Вредноста на параметарот во двете точки е:

$$A: x = a \Leftrightarrow a \cos^3 t = a \Leftrightarrow \cos^3 t = 1 \Leftrightarrow \cos t = 1 \Leftrightarrow t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

и

$$B: y = a \Leftrightarrow a \sin^3 t = a \Leftrightarrow \sin^3 t = 1 \Leftrightarrow \sin t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Кога не се дадени допуштените вредности на параметарот, подразбираме дека кривата се исцртува еднаш, т.е. $t \in [0, 2\pi]$. Во тој интервал точката A се добива за $t = 0$, додека B за $t = \frac{\pi}{2}$.

Затоа:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos^6(t) \cdot 3a \sin^2 t \cos t - a^2 \sin^6(t) (-3a \sin t \cos^2 t)}{(a \cos^3 t)^{\frac{5}{3}} + (a \sin^3 t)^{\frac{5}{3}}} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3a^3 \sin^2 t \cdot \cos^7 t + 3a^3 \sin^7 t \cos^2 t}{a^{\frac{5}{3}} (\cos^5 t + \sin^5 t)} dt = \\ &= 3a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t \cdot \cos^2 t (\sin^5 t + \cos^5 t)}{a^{\frac{5}{3}} (\cos^5 t + \sin^5 t)} dt = 3a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2t}{2} \right)^2 dt = \\ &= 3a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2t}{4} dt = \frac{3}{4} a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \\ &= \frac{3}{8} a^{\frac{4}{3}} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} a^{\frac{4}{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} (\sin 2\pi - \sin 0) \right) = \frac{3\sqrt[3]{a^4} \pi}{16}. \end{aligned}$$

Задача 4. Да се пресмета криволинискиот интеграл:

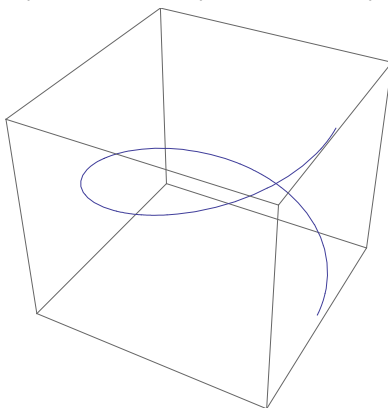
$$I = \int_C (y - z) dx + z dz,$$

каде што C е кривата: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$.

Решение. Во оваа задача треба да пресметаме криволиниски интеграл по просторна крива зададена параметарски. Сведувањето на единечен интеграл е аналогно како во рамнинскиот случај.

$$I = \left(\begin{array}{l} dx = -a \sin t dt \\ dz = b dt \end{array} \right) = \int_0^{2\pi} (a \sin t - bt)(-a \sin t) dt + b^2 t dt =$$

$$-a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + ab \int_0^{2\pi} t \sin t dt + b^2 \int_0^{2\pi} t dt .$$



Цртеж 8.2.4.

Ги пресметуваме трите интеграла:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} 2\pi = \pi ;$$

$$\int_0^{2\pi} t \sin t dt = \left(\begin{array}{ll} u = t & dv = \sin t \\ du = dt & v = -\cos t \end{array} \right) = -t \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt =$$

$$-2\pi \cos 2\pi + \sin t \Big|_0^{2\pi} = -2\pi + \sin 2\pi - \sin 0 = -2\pi ;$$

и

$$\int_0^{2\pi} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2 .$$

Конечно:

$$I = -a^2 \pi - 2ab\pi + 2b^2 \pi^2 = (2b^2 \pi - 2ab - a^2) \pi .$$

8.3. ГРИНОВА ФОРМУЛА

Задача 1. Види ја задача 8.3.3. од првиот дел.

Задача 2. Со помош на Гриновата формула да се пресмета интегралот:

$$I = \int_C 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy,$$

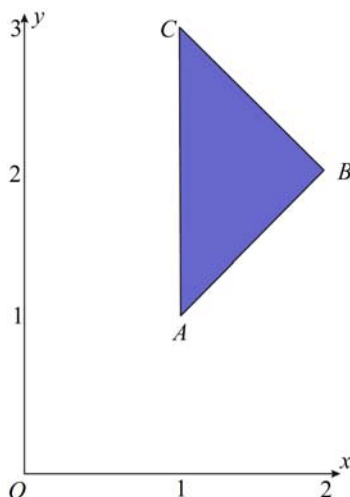
каде што C е триаголникот: $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$.

Решение. Имаме:

$$P = 2x^2 + 2y^2 \text{ од каде што: } \frac{\partial P}{\partial y} = 4y$$

и

$$Q = (x + y)^2, \text{ од каде што: } \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x + y) = 2x + 2y.$$



Цртеж 8.3.2.

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (2x + 2y - 4y) dx dy = \iint_D 2(x - y) dx dy =$$

$$\left(\begin{array}{l} AB: y - 1 = \frac{2-1}{2-1}(x-1) \Leftrightarrow y = x \\ BC: y - 2 = \frac{2-3}{2-1}(x-2) \Leftrightarrow y = 4 - x \end{array} \right) = 2 \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x - y) dy =$$

$$\begin{aligned}
2 \int_1^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{4-x} dx &= 2 \int_1^2 \left(x(4-x) - x^2 - \frac{1}{2} \left((4-x)^2 - x^2 \right) \right) dx = \\
2 \int_1^2 \left(4x - 2x^2 - \frac{1}{2} (16 - 8x - x^2 + x^2) \right) dx &= 2 \int_1^2 (4x - 2x^2 - 8 + 4x) dx = \\
2 \int_1^2 (-8 + 8x - 2x^2) dx &= 4 \int_1^2 (-4 + 4x - x^2) dx = 4 \left(-4x + 4 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \\
4 \left(-4(2-1) + 2(4-1) - \frac{1}{3}(8-1) \right) &= 4 \left(-4 + 6 - \frac{7}{3} \right) = 4 \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Задача 3. Со помош на Гринова формула да се пресмета интегралот:

$$I = \int_C \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx + y^3 e^{-y} dy,$$

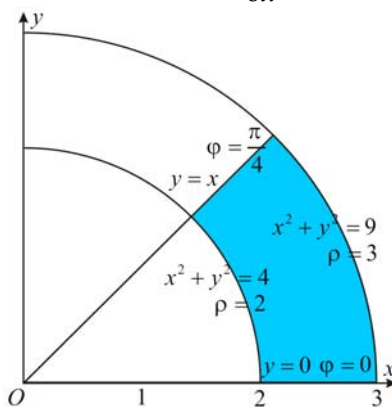
каде што C е кривата што ја ограничува областа:

$$D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y \leq x.$$

Решение. Имаме:

$$P = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{1}{x^2 + y^2} \text{ и}$$

$$Q = y^3 e^{-y} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$



Цртеж 8.3.3.

Следува:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy.$$

Преминуваме во поларни координати:

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$; од каде што: $dx dy = \rho d\rho d\varphi$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Притоа, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ и $2 \leq \rho \leq 3$. Значи:

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_2^3 \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho = - \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \int_2^3 \frac{1}{\rho} d\rho = - \frac{\pi}{4} \ln \rho \Big|_2^3 = \\ &= - \frac{\pi}{4} (\ln 3 - \ln 2) = - \frac{\pi}{4} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

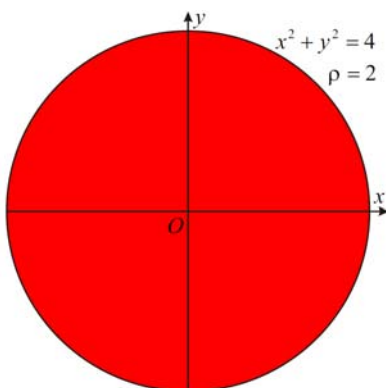
Задача 4. Со помош на Гринова формула да се пресмета криволиинскиот интеграл:

$$I = \int_C -x^2 y dx + x^3 dy,$$

каде што C е кривата $x^2 + y^2 = 4$.

Решение. Имаме:

$$P = -x^2 y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2 \text{ и } Q = x^3 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2.$$



Цртеж 8.3.4.

Со примена на Гриновата формула добиваме:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (3x^2 + x^2) dx dy = 4 \iint_D x^2 dx dy.$$

Преминуваме во поларни координати:

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$; од каде што: $dx dy = \rho d\rho d\varphi$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Притоа, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $0 \leq \rho \leq 2$. Затоа:

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \cos^2(\varphi) \rho d\rho = 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^2 = \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} 16 = 8 \cdot 2\pi = 16\pi. \end{aligned}$$

Задача 5*. Со помош на Гринова формула да се пресмета криволинискиот интеграл:

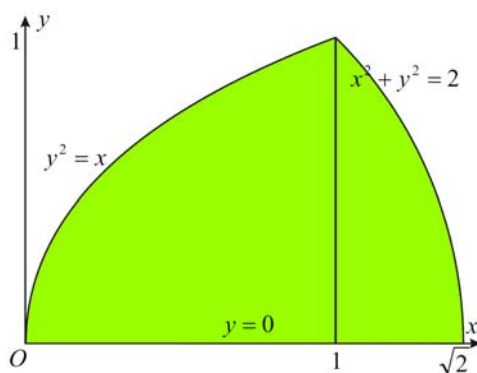
$$I = \int_C \left(f(x) + \frac{x}{1+x^2+y^2} \right) dx + \left(g(y) - \frac{y}{1+x^2+y^2} \right) dy,$$

каде што C е кривата определена со областа D :

$$y^2 \leq x, \quad x^2 + y^2 \leq 2, \quad y \geq 0.$$

Решение. Границите на областа имаат равенки:

$$x^2 + y^2 = 2, \quad y^2 = x \quad \text{и} \quad y = 0 \quad (1).$$



Цртеж 8.3.5.

Ги определуваме пресечните точки:

$$x^2 = 2 \stackrel{x=y^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{2}; \quad y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 1.$$

За $x = -2$ не е исполнета втората равенка од (1), па $x = 1$.
Оттука, $y^2 = 1$, каде што бидејќи $y \geq 0$, добиваме: $y = 1$.

Парцијалните изводи на подинтегралните функции се:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \frac{-1}{(1+x^2+y^2)^2} 2y; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} 2x \text{ и}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2} - \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Со примена на Гриновата формула добиваме:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy =$$

$$4 \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} \frac{y dx}{2(1+x^2+y^2)^2} = 2 \int_0^1 dy y \left(-\frac{1}{1+x^2+y^2} \right) \Big|_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} =$$

$$-2 \int_0^1 \left(\frac{y}{1+2-y^2+y^2} - \frac{y}{1+y^4+y^2} \right) dy = 2 \int_0^1 \frac{y}{1+y^4+y^2} dy - 2 \int_0^1 \frac{y}{3} dy.$$

Притоа:

$$2 \int_0^1 \frac{y dy}{1+y^4+y^2} = \left(\begin{array}{ll} y^2 = t & y = 0 \Rightarrow t = 0 \\ 2y dy = dt & y = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} =$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big|_0^1 =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}; \text{ и}$$

$$\frac{2}{3} \int_0^1 y dy = \frac{2}{3} \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Конечно:

$$I = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3}.$$

8.4. НЕЗАВИСНОСТ ОД ПАТОТ НА ИНТЕГРАЦИЈА

Задача 1. Види ја задачата 8.4.4. од првиот дел.

Задача 2. Да се пресмета интегралот:

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy.$$

Решение. Бидејќи не е дадена кривата која ги поврзува двете крајни точки, интегралот не зависи од патот на интеграција. За секој случај проверуваме дали е исполнет условот за независност:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 y) = 3x^2 \text{ и } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 1) = 3x^2. \text{ Значи } \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}.$$

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \swarrow & & \searrow \\ \frac{\partial U}{\partial x} = P & & \frac{\partial U}{\partial y} = Q \end{array}$$

Цртеж 8.4.2.

Следува дека постои функција U таква што:

$$dU = Pdx + Qdy \text{ т.е. } \frac{\partial U}{\partial x} = P \text{ и } \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Тогаш:

$$U = \int Pdx + \varphi(y) = \int 3x^2 y dx + \varphi(y) = 3 \frac{x^3}{3} y + \varphi(y) = x^3 y + \varphi(y); \text{ и}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q \Leftrightarrow x^3 + \varphi'(y) = x^3 + 1 \Leftrightarrow \varphi'(y) = 1 \Leftrightarrow \varphi(y) = y.$$

Значи, $U = x^3 y + y$, од каде што:

$$I = (x^3 y + y) \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = 1 + 1 = 2.$$

Задача 3. Да се докаже дека интегралот:

$$I = \int_{\left(1, \frac{\pi}{6}\right)}^{\left(2, \frac{\pi}{4}\right)} 2xydx + x^2dy ,$$

не зависи од патот на интеграција, а потоа да се пресмета неговата вредност.

Решение. Како контрола, проверуваме дали е исполнет условот за независност од патот на интеграција. Претходно ги определуваме подинтегралните функции и нивните парцијални изводи:

$$P = 2xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2x; \quad Q = x^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \text{ од каде што: } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Следува дека условите се исполнети.

Прв начин. Ја применуваме постапката за решавање на интегралот преку определување на функцијата чиј тотален диференцијал е записот под интегралот. Избираме прво да ја интегрираме функцијата P .

$$U = \int Pdx + \varphi(y) = \int 2xydx + \varphi(y) = 2y \frac{x^2}{2} + \varphi(y) = x^2y + \varphi(y).$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q \Leftrightarrow x^2 + \varphi'(y) = x^2 \Leftrightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = 0.$$

Значи, $U = x^2y$, од каде што:

$$I = U \Big|_{\left(1, \frac{\pi}{6}\right)}^{\left(2, \frac{\pi}{4}\right)} = x^2y \Big|_{\left(1, \frac{\pi}{6}\right)}^{\left(2, \frac{\pi}{4}\right)} = 4 \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Втор начин. Избираме да ја интегрираме функцијата Q .

$$U = \int Qdy + \varphi(x) = \int x^2dy + \varphi(x) = x^2y + \varphi(x) \text{ и}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \Leftrightarrow 2xy + \varphi'(x) = 2xy \Leftrightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0.$$

Значи, $U = x^2y$. Понатаму интегралот се пресметува како при првиот начин.

9. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ

9.1. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ПРВ ТИП

Задача 1. Види ја задачата 9.1.3. од првиот дел.

Задача 2. Да се пресмета површинскиот интеграл:

$$I = \iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS,$$

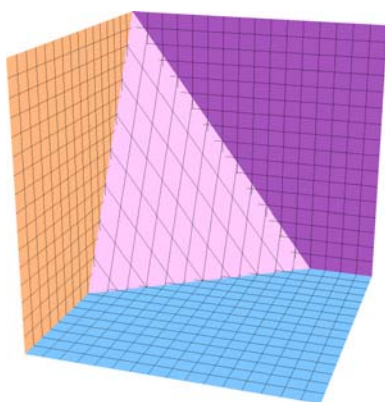
каде што S е делот од рамнината $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ во прв октант.

Решение. Имаме:

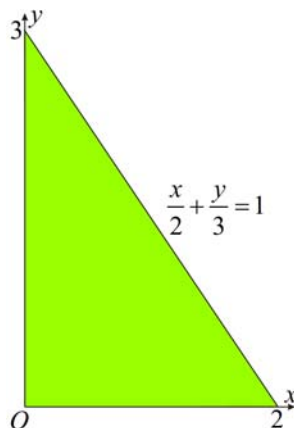
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{4}{3}y + z = 4 \Leftrightarrow z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y;$$

од каде што:

$$p \equiv \frac{\partial z}{\partial x} = -2, \quad q \equiv \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4}{3} \quad \text{и} \quad \sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+4+\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{61}}{3}.$$



Цртеж 9.1.2.1.



Цртеж 9.1.2.2.

Следува:

$$\begin{aligned} I &= \oplus \iint_D \left(4 - 2x - \frac{4}{3}y + 2x + \frac{4}{3}y \right) \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy = 4 \iint_D \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy = \\ &= \frac{4\sqrt{61}}{3} P(D) = \frac{4\sqrt{61}}{3} \frac{2 \cdot 3}{2} = 4\sqrt{61}. \end{aligned}$$

Коментар. Плоштината на областа се пресметува и директно:

$$P(D) = \int_0^2 dx \int_0^{3\left(1-\frac{x}{2}\right)} dy = \int_0^2 dx y \Big|_0^{3\left(1-\frac{x}{2}\right)} = \int_0^2 3\left(1-\frac{x}{2}\right) dx =$$

$$3\left(x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^2 = 3\left(2 - \frac{1}{4} 4\right) = 3.$$

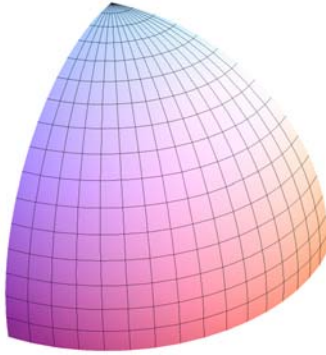
Задача 3. Да се пресмета површинскиот интеграл од прв тип:

$$I = \iint_S x dS,$$

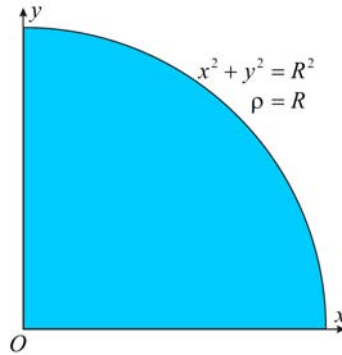
каде што S е делот од сферата $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ што се наоѓа во прв октант.

Решение. Воведуваме поларни координати:

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$; од каде што: $dx dy = \rho d\varphi d\rho$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$.



Цртеж 9.1.3.1.



Цртеж 9.1.3.2.

Имаме:

$$I = \oplus \iint_D x \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$$

Ја изразуваме равенката на површината во експлицитен вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Leftrightarrow z^2 = R^2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Оттука:

$$p = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \text{ и}$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{R^2 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}.$$

Следува:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho \cos \varphi \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho,$$

каде што:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1;$$

и

$$I_2 = \int_0^R \rho \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho = \left(\begin{array}{ll} u = \rho & dv = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \frac{d(R^2 - \rho^2)}{-2\sqrt{R^2 - \rho^2}} \\ du = d\rho & v = -\sqrt{R^2 - \rho^2} \end{array} \right) =$$

$$-\rho \sqrt{R^2 - \rho^2} \Big|_0^R \oplus \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho = \left(\begin{array}{ll} \rho = R \sin t & \rho = 0 \Rightarrow t = 0 \\ d\rho = R \cos t dt & \rho = R \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right) =$$

$$\left(\sqrt{R^2 - \rho^2} = \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} = \sqrt{R^2 (1 - \sin^2 t)} = R \sqrt{\cos^2 t} \stackrel{\cos t \geq 0}{=} R \cos t \right) =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos t R \cos t dt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$\frac{R^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^2}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{R^2 \pi}{4}.$$

Конечно:

$$I = R I_1 I_2 = R \frac{R^2 \pi}{4} = \frac{R^3 \pi}{4}.$$

Задача 4. Да се пресмета површинскиот интеграл од прв тип:

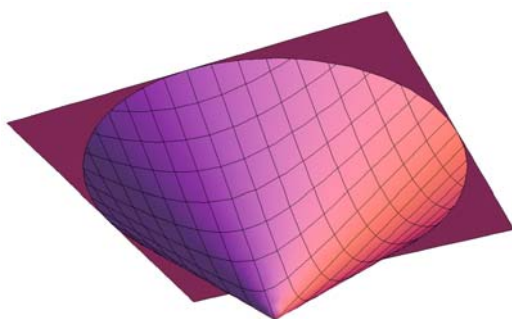
$$I = \iint_S (x^2 + y^2) dS,$$

каде што S е површината на телото образувано од површините:

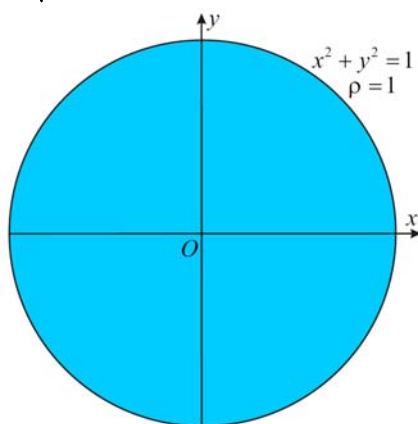
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ и } z = 1.$$

Решение. Површината S се состои од површините:

$$S_1: z = 1; \text{ и } S_2: z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Цртеж 9.1.4.1.



Цртеж 9.1.4.2.

На секоја од површините важи:

$$S_1: z = 1, dS = dxdy \text{ и } \iint_{S_1} = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy; \text{ и}$$

$$S_2: z = \sqrt{x^2 + y^2}, p = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, q = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ и}$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2} \text{ т.е.}$$

$$dS = \sqrt{2} dxdy \text{ и } \iint_{S_2} = \sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2) dxdy.$$

Интегралот на површината S е збир од интегралите на S_1 и S_2 ,

$$I = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = (1 + \sqrt{2}) \iint_D (x^2 + y^2) dxdy.$$

Интегралот го решаваме со премин во поларни координати:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi; \text{ од каде што:} \\ dxdy = \rho d\varphi d\rho \text{ и } x^2 + y^2 = \rho^2; \text{ и } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Значи:

$$I = (1 + \sqrt{2}) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \rho d\rho = (1 + \sqrt{2}) 2\pi \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^1 = \\ (1 + \sqrt{2}) 2\pi \frac{1}{4} = \frac{(1 + \sqrt{2})\pi}{2}.$$

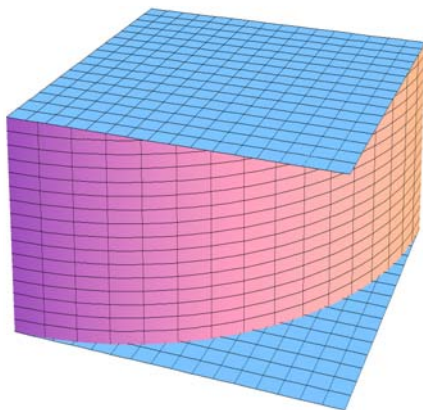
Задача 5. Да се пресмета површинскиот интеграл од прв тип:

$$I = \iint_S \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2},$$

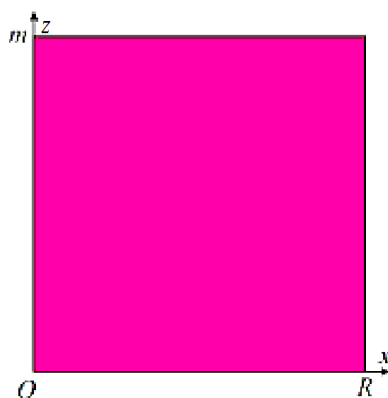
ако S е дел од цилиндарот $x^2 + y^2 = R^2$ во прв октант, ограничен со рамнините $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $z = m > 0$.

Решение. Проекцијата на површината во xOz -рамнината е определена со: $0 \leq x \leq R$, $0 \leq z \leq m$. Важи:

$$x^2 + y^2 = R^2 \stackrel{y \geq 0}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{R^2 - x^2};$$



Цртеж 9.1.5.1.



Цртеж 9.1.5.2.

од каде што:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0 \text{ и } \sqrt{1 + p^2 + q^2} =$$

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \text{ т.е. } dS = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dz.$$

Затоа:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{1}{x^2 + R^2 - x^2 + z^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dz = R \iint_D \frac{dx dz}{(R^2 + z^2) \sqrt{R^2 - x^2}} = \\ &= R \int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \int_0^m \frac{1}{R^2 + z^2} dz = R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R \frac{1}{R} \operatorname{arctg} \frac{z}{R} \Big|_0^m = \\ &= (\arcsin 1 - \arcsin 0) \left(\operatorname{arctg} \frac{m}{R} - \operatorname{arctg} 0 \right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} \frac{m}{R}. \end{aligned}$$

9.2. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ОД ВТОР ТИП

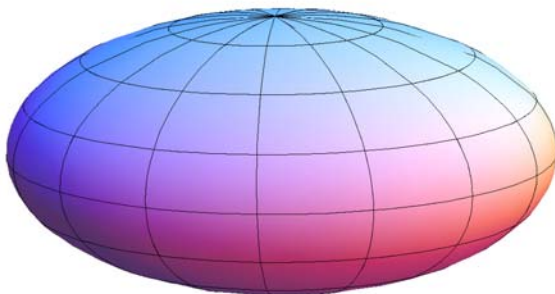
Задача 1. Види ја задачата 9.2.4. од првиот дел.

Задача 2. Да се пресмета површинскиот интеграл: $\iint_S z dx dy$,

каде што S е надворешната страна на елипсоидот: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. Равенката на површината ја изразуваме експлицитно:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$



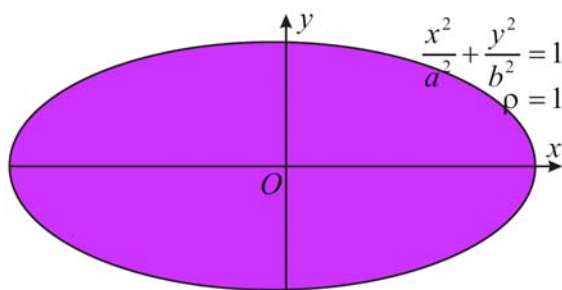
Цртеж 9.2.2.1.

Равенките:

$$S_2: z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad S_1: z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

ја определуваат горната и долната страна на површината S .

Нормалниот вектор на надворешната страна на површината гради нетап агол со S_2 и неостар агол со S_1 .



Цртеж 9.2.2.2.

Затоа интегралот по површината S ќе го претставиме како збир од интеграли по површините S_1 и S_2 :

$$\begin{aligned} \iint_S &= \iint_{S_2} z dx dy + \iint_{S_1} z dx dy = \\ &= \iint_D c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy - \iint_D -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \\ &= 2c \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \\ &= \left(\begin{array}{l} x = a\rho \cos \varphi \quad dx dy = ab\rho d\rho d\varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = b\rho \sin \varphi \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2 \quad 0 \leq \rho \leq 1 \end{array} \right) = \\ &= 2c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} ab\rho d\rho = \\ &= \left(\begin{array}{l} 1 - \rho^2 = t \quad \rho = 0 \Rightarrow t = 1 \\ -2\rho d\rho = dt \quad \rho = 1 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right) = \\ &= 2abc\varphi \Big|_0^{2\pi} \int_1^0 \sqrt{t} \frac{dt}{-2} = 4abc\pi \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{t} dt = 2abc\pi \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4abc\pi}{3}. \end{aligned}$$

Задача 3. Да се пресмета интегралот:

$$I = \iint_S x^2 y^2 z dx dy ,$$

каде што S е внатрешна страна на долната половина на сферата:

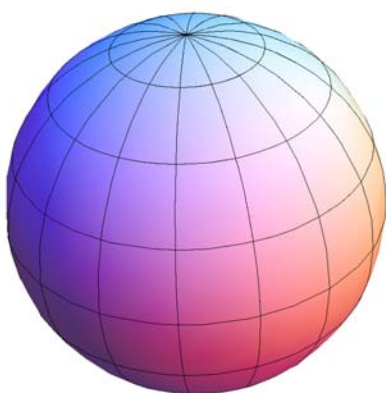
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Решение. Нормалниот вектор на внатрешната страна на површината со z -оската гради остар или прав агол, поради што пред двојниот интеграл избираме знак „+“. Од:

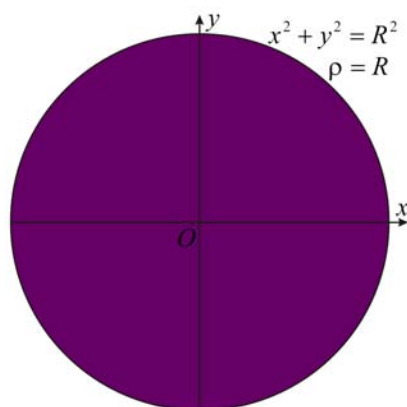
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Leftrightarrow z^2 = R^2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} ,$$

равенката на долната половина на површината е:

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} .$$



Цртеж 9.2.3.1



Цртеж 9.2.3.2.

Затоа:

$$\begin{aligned} I &= + \iint_D x^2 y^2 \left(-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right) dx dy = \\ &\left(\begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \quad dx dy = \rho d\rho d\varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = \rho \sin \varphi \quad x^2 + y^2 = \rho^2 \quad 0 \leq \rho \leq R \end{array} \right) = \\ &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 \cos^2(\varphi) \rho^2 \sin^2(\varphi) \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \\ &= - \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi}_{I_1} \underbrace{\int_0^R \rho^4 \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho}_{I_2} . \end{aligned}$$

Заради прегледност одделно ги пресметуваме двата интеграла:

$$\bullet \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\varphi}{4} d\varphi =$$

$$\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{8} \left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{8} \left(2\pi - \frac{1}{4} (\sin 8\pi - \sin 0) \right) = \frac{\pi}{4};$$

и

$$\bullet \int_0^R \rho^4 \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \left(\begin{array}{ll} R^2 - \rho^2 = t & \rho = 0 \Rightarrow t = R^2 \\ -2\rho d\rho = dt & \rho = R \Rightarrow t = 0 \\ \rho^2 = R^2 - t & \end{array} \right) =$$

$$\int_{R^2}^0 (R^2 - t)^2 \sqrt{t} \frac{dt}{-2} = \frac{1}{2} \int_0^{R^2} (R^4 - 2R^2 t + t^2) t^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{R^2} \left(R^4 t^{\frac{1}{2}} - 2R^2 t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{5}{2}} \right) dt = \frac{1}{2} \left(R^4 \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 2R^2 \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} \right) \Big|_0^{R^2} =$$

$$\frac{1}{2} \left(R^4 \frac{2}{3} R^3 - 2R^2 \frac{4}{5} R^5 + \frac{2}{7} R^7 \right) = \frac{1}{3} R^7 - \frac{2}{5} R^7 + \frac{1}{7} R^7 =$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) R^7 = \frac{35 - 42 + 15}{105} R^7 = \frac{8R^7}{105}.$$

Конечно,

$$I = -\frac{\pi}{4} \frac{8R^7}{105} = -\frac{2R^7\pi}{105}.$$

Задача 4. Да се пресмета површинскиот интеграл:

$$I = \iint_S z dx dy + x dx dz + y dy dz;$$

каде што површината S е триаголникот со темиња во точките:

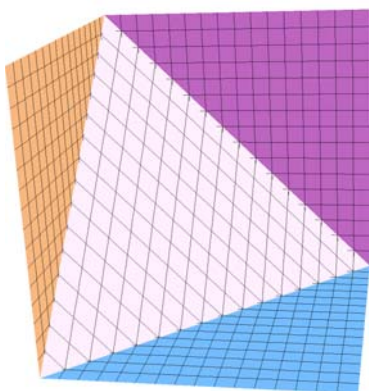
$$A(6, 0, 0), B(0, 6, 0) \text{ и } C(0, 0, 6).$$

Решение. Од равенката на површината ја изразуваме експлицитно променливата z :

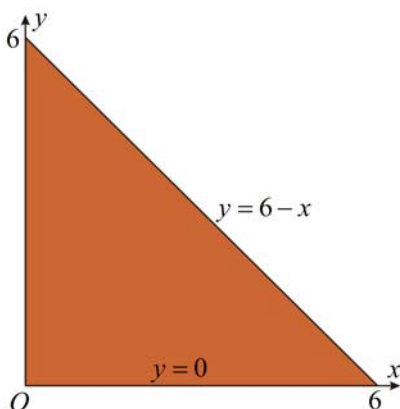
$$\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow x + y + z = 6 \Leftrightarrow z = 6 - x - y.$$

Површинскиот интеграл може да се претстави како сума од три интеграла:

$$I = \iint_S z dx dy + \iint_S x dx dz + \iint_S y dy dz$$



Цртеж 9.2.4.1.



Цртеж 9.2.4.2.

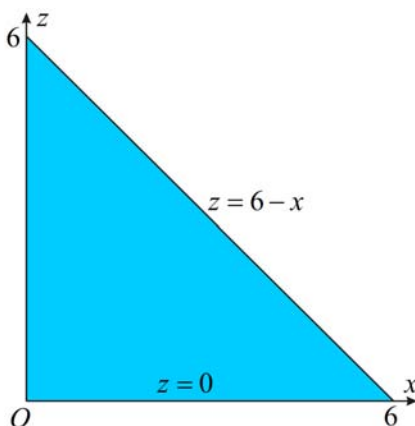
Го пресметуваме секој од нив:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_S z dx dy = \iint_D (6-x-y) dx dy = \left(\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq 6-x \end{array} \right) = \\ &= \int_0^6 dx \int_0^{6-x} (6-x-y) dy = \int_0^6 dx \left((6-x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{6-x} = \\ &= \int_0^6 dx \left((6-x)^2 - \frac{(6-x)^2}{2} \right) = \int_0^6 \frac{(6-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^6 (36 - 12x + x^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(36x - 12 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^6 = \frac{1}{2} \left(36 \cdot 6 - 6 \cdot 6^2 + \frac{6^3}{3} \right) = \frac{1}{2} \frac{6^3}{3} = 6^2 = 36. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_S x dx dz = \iint_D x dx dz = \int_0^6 x dx \int_0^{6-x} dz = \int_0^6 x dz \Big|_0^{6-x} = \\ &= \int_0^6 (6-x) x dx = \int_0^6 (6x - x^2) dx = \left(6 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^6 = \\ &= 3 \cdot 6^2 - \frac{6^3}{3} = 3 \cdot 6^2 - 2 \cdot 6^2 = 6^2 = 36. \end{aligned}$$

Заради симетрија, $x \leftrightarrow y$, важи: $I_2 = I_3$. Конечно,

$$I = 36 + 2 \cdot 36 = 108.$$



Цртеж 9.2.4.3.

9.3. ФОРМУЛА НА ГАУС-ОСТРОГРАДСКИ

Задача 1. Види ја задачата 9.3.2 од првиот дел.

Задача 2. Да се пресмета површинскиот интеграл:

$$I = \iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy ,$$

каде што S е надворешната страна на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$:

а) директно,

б) со примена на формулата на Гаус-Остроградски.

Решение. а) Имаме:

$$I = \iint_S xdydz + \iint_S ydxdz + \iint_S zdxdy .$$

Поради симетрија на интегралите, $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$, важи:

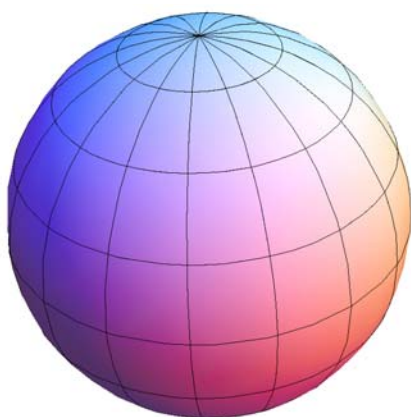
$$\iint_S xdydz = \iint_S ydxdz = \iint_S zdxdy .$$

Затоа доволно е да го пресметаме:

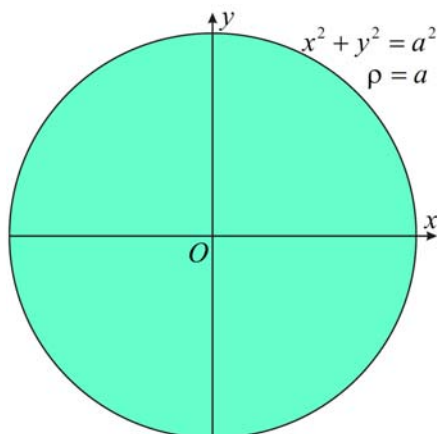
$$I_3 = \iint_S zdxdy = \iint_{S_2} zdxdy + \iint_{S_1} zdxdy ,$$

каде што S_2 е горната, додека S_1 долната полусфера.

Ја скицираме површината. Важи:



Цртеж 9.3.2.1.



Цртеж 9.3.2.2.

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \Leftrightarrow z^2 = a^2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Следува:

$$S_2: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \text{ и } S_1: z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Исто така, $\angle(\vec{n}_{S_2}, \vec{k}) \leq \frac{\pi}{2}$ и $\angle(\vec{n}_{S_1}, \vec{k}) \geq \frac{\pi}{2}$. Затоа:

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy - \iint_D -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \\ &= 2 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy. \end{aligned}$$

Со премин во поларни координати:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \text{ од каде што: } dx dy = \rho d\varphi d\rho \text{ и } x^2 + y^2 = \rho^2,$$

добиваме дека: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $0 \leq \rho \leq a$. Затоа:

$$\begin{aligned} I_3 &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2} \rho d\rho = \left(\begin{array}{ll} a^2 - \rho^2 = t & \rho = 0 \Rightarrow t = a^2 \\ -2\rho d\rho = dt & \rho = a \Rightarrow t = 0 \end{array} \right) = \\ &= 2 \cdot 2\pi \int_{a^2}^0 \sqrt{t} \frac{dt}{-2} = 2\pi \int_0^{a^2} \sqrt{t} dt = 2\pi \left. \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right|_0^{a^2} = \frac{4\pi}{3} (a^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{4a^3\pi}{3}. \end{aligned}$$

Оттука:

$$I = 3I_3 = 3 \frac{4a^3\pi}{3} = 4a^3\pi.$$

б) Бидејќи површината е затворена може да се примени теоремата на Гаус-Остроградски. Притоа, ориентацијата на површината е соодветна на телото што го гради. Затоа:

$$I = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V (1+1+1) dx dy dz = 3 \iiint_V dx dy dz .$$

Бидејќи последниот троен интеграл е волуменот на сферата, важи:

$$I = 3V_s = 3 \frac{4a^3 \pi}{3} = 4a^3 \pi .$$

Коментар. Тројниот интеграл може да го пресметаме и директно без да ја користиме формулата за волумен на сфера.

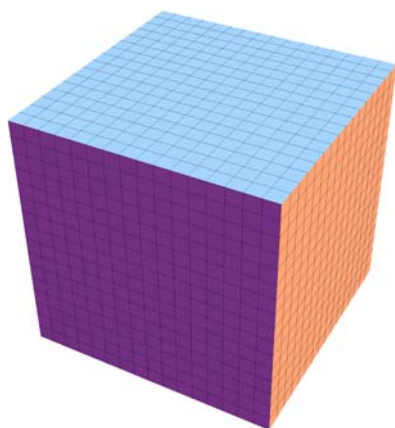
Задача 3. Со помош на теоремата на Гаус-Остроградски да се пресмета интегралот:

$$I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy ,$$

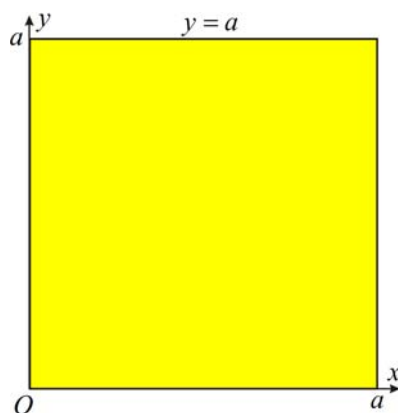
каде што S е надворешната страна на коцката:

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq z \leq a .$$

Решение. Ја скицираме површината. Бидејќи површината е затворена може да се примени формулата на Гаус-Остроградски:



Цртеж 9.3.3.1.



Цртеж 9.3.3.2.

$$I = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V (2x + 2y + 2z) dx dy dz =$$

$$\begin{aligned}
 2 \iiint_V (x+y+z) dx dy dz &= 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x+y+z) dz = \\
 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \left((x+y)z + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a &= 2 \int_0^a dx \int_0^a \left((x+y)a + \frac{a^2}{2} \right) dy = \\
 2 \int_0^a dx \left(axy + a \frac{y^2}{2} + \frac{a^2}{2} y \right) \Big|_0^a &= 2 \int_0^a \left(a^2 x + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} \right) dx = \\
 2 \int_0^a (a^3 + a^2 x) dx &= 2 \left(a^3 x + a^2 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a = 2 \left(a^4 + \frac{a^4}{2} \right) = 2 \frac{3a^4}{2} = 3a^4.
 \end{aligned}$$

9.4. ШТОКСОВА ФОРМУЛА

Задача 1. Види ја задачата 9.4.2. од првиот дел.

Задача 2. Со примена на Штоксовата формула да се пресмета криволинискиот интеграл:

$$\oint_C x^2 y^3 dx + dy + z dz,$$

каде што C е кружницата $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

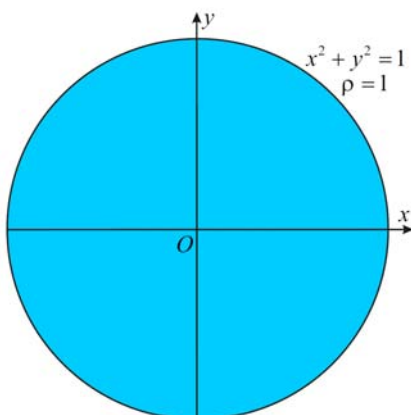
Решение. Заради прегледност ги запишуваме подинтегралните функции P, Q и R ; а потоа под нив ги запишуваме редоследно парцијалните изводи по x, y и z ; освен изводот чиј редослед се совпаѓа со редоследот на функцијата. Имаме:

$$\begin{array}{lll}
 P = x^2 y^3 & Q = 1 & R = z \\
 \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 y^2 \leftarrow \leftarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \leftarrow \leftarrow \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \leftarrow \leftarrow \\
 \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \leftarrow \leftarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \leftarrow \leftarrow \frac{\partial R}{\partial y} = 0 \leftarrow \leftarrow
 \end{array}$$

На овој начин ако ги запишуваме функциите од десно кон лево и од долу кон горе, го добиваме редоследот во Штоксовата формула.

$$\oint_C = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$\iint_S 0dydz + 0dxdz + (0 - 3x^2y^2)dxdy = -3 \iint_D x^2y^2dxdy =$$



Цртеж 9.4.2.1.

$$\begin{aligned} & (x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi \text{ од каде што: } dxdy = \rho d\varphi d\rho) \\ & -3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \cos^2(\varphi) \rho^2 \sin^2(\varphi) \rho d\rho = -3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^5 d\rho = \\ & = -3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^1 = -3 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\varphi}{4} \frac{1}{6} d\varphi = -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \\ & = -\frac{1}{16} \left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{16} \left(2\pi - \frac{1}{4} (\sin 8\pi - \sin 0) \right) = -\frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Задача 3. Со примена на Штоксовата формула да се пресмета криволинискиот интеграл:

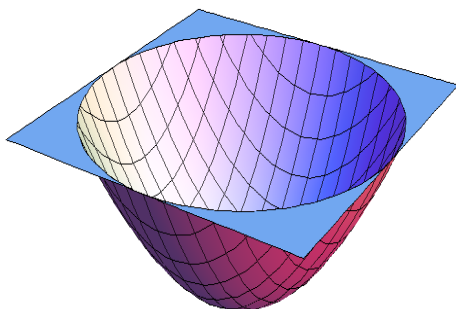
$$I = \int_C (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz,$$

каде што C е просторната крива: $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x^2 + y^2 = z$.

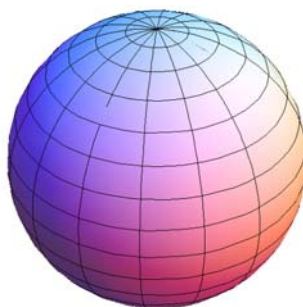
Решение. За проекцијата на кривата $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x^2 + y^2 = z$ на xOy рамнината важи:

$$z + z^2 = 6 \Leftrightarrow z^2 + z - 6 = 0 \Leftrightarrow (z + 3)(z - 2) = 0 \Leftrightarrow z = -3 \vee z = 2;$$

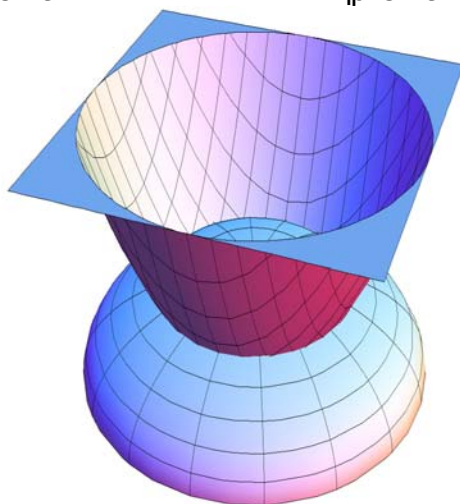
Решението $z = -3$ отпаѓа. За $z = 2$ добиваме: $x^2 + y^2 = 2$.



Цртеж 9.4.4.1.



Цртеж 9.4.4.2.



Цртеж 9.4.4.3.

Ги определуваме парцијалните изводи:

$$P = y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 2z$$

$$Q = x^2 + z^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 2z$$

$$R = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 2x$$

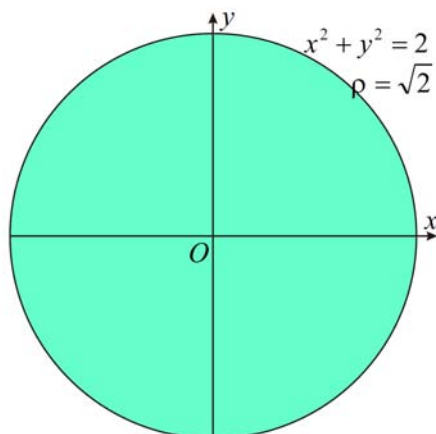
$$\frac{\partial R}{\partial y} = 2y.$$

Следува:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \iint_S (2y - 2z) dydz + (2z - 2x) dx dz + (2x - 2y) dx dy = \\ &= 2 \iint_S (y - z) dydz + (z - x) dx dz + (x - y) dx dy. \end{aligned}$$

За површина чија граница е просторната крива, го земаме делот од рамнината $z = 2$. Следува дека $dz = 0$, па првите два интеграла се нули. Значи:

$$I = 2 \iint_S (x - y) dx dy = 2 \iint_D (x - y) dx dy =$$



Цртеж 9.4.4.4.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ll} x = \rho \cos \varphi & dx dy = \rho d\rho d\varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = \rho \sin \varphi & x^2 + y^2 = \rho^2 \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \end{array} \right) = \\ & 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi) \rho d\rho = 2 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho = \\ & 2 (\sin \varphi + \cos \varphi) \Big|_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} = 0. \end{aligned}$$

10. ВЕКТОРСКА АНАЛИЗА

10.1. СКАЛАРНО ПОЛЕ
(СКАЛАРНО ПОЛЕ, ГРАДИЕНТ, ИЗВОД ВО ПРАВЕЦ).**Задача 1.** Да се најде градиентот на скаларното поле:

$$u = \ln(x^2 - y^2 + z^2) \text{ во точката } M(1, 0, 1).$$

Решение. Градиент на скаларното поле u е векторското поле: $\text{gradu} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$, каде што: $\text{gradu}(M) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \Big|_M$.

Имаме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{x^2 - y^2 + z^2} 2x, & \frac{\partial u}{\partial x}(M) &= \frac{1}{2} 2 = 1; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{x^2 - y^2 + z^2} (-2y) & \frac{\partial u}{\partial y}(M) &= \frac{1}{2} 0 = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{x^2 - y^2 + z^2} 2z & \frac{\partial u}{\partial z}(M) &= \frac{1}{2} 2 = 1. \end{aligned}$$

Следува:

$$\text{gradu}(M) = (1, 0, 1).$$

Задача 2. Да се најде изводот на функцијата:

$$u = x + x^2 y + y^2 z$$

во точката $M(1, 1, 1)$ во правец на векторот $\vec{l} = (1, 3, 3)$.

Решение. Изводот на функцијата u во правец на векторот $\vec{l}_0$, односно $\vec{l}$, се пресметува по формулата:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}_0}(M) = \text{gradu}(M) \cdot \vec{l}_0 \text{ каде што } \vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}.$$

Имаме:

$$\text{gradu} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = (1 + 2xy, x^2 + 2yz, y^2), \text{ gradu}(M) = (3, 3, 1);$$

и

$$\vec{l}_0 = \frac{(1,3,3)}{\sqrt{1+3^2+3^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}} \right),$$

од каде што:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (3,3,1) \left(\frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}} \right) = 3 \frac{1}{\sqrt{19}} + 3 \frac{3}{\sqrt{19}} + 1 \frac{3}{\sqrt{19}} = \frac{15}{\sqrt{19}}.$$

Задача 3. Да се напишат равенките и имињата на екви-
скаларните површини на скаларните функции:

а) $u(x, y, z) = |(x, y, z)|$; б) $u(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

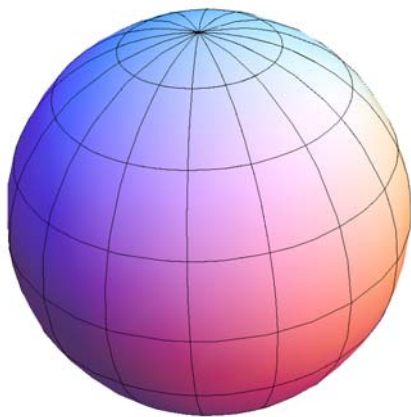
Решение. Екви-скаларна површина што одговара на скаларна функција е површината што се состои од сите точки со иста вредност кои се слики на скаларната функција.

а) $u = C \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C, C \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = C^2$.

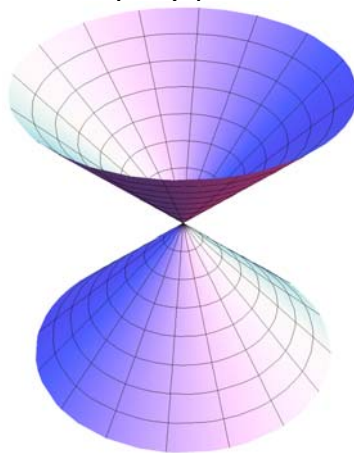
Следува дека екви-скаларните површини се сфери (цртеж 10.3.1).

б) $u = C \Leftrightarrow x^2 + y^2 - z^2 = C \Leftrightarrow z^2 = x^2 + y^2 - C$.

Следува дека екви-скаларните површини се конуси (цртеж 10.3.2).



10.1.3.1. Сфери



10.1.3.2. Конуси

Задача 4. Кој е правецот на најголемата промена на функцијата:

$$u = x \sin z - y \cos z$$

во координатниот почеток? Во кои точки $\vec{l} \text{ gradu} = 0$?

Решение. а) Правец на најголема промена на едно поле во дадена точка е неговиот градиент.

Ги пресметуваме парцијалните изводи:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\cos z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x \cos z + y \sin z;$$

од каде што нивните вредности во координатниот почеток M се:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M) = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(M) = 0.$$

Следува дека градиентот е:

$$\text{gradu}(M) = (0, -1, 0).$$

2) Бидејќи:

$$\vec{i}\text{gradu} = (1, 0, 0) \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial x},$$

важи:

$$\vec{i}\text{gradu} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 5. Дадено е скаларното поле $u(\vec{r}) = \ln \frac{1}{r}$, каде што:

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Да се одредат точките во кои $|\text{gradu}| = 1$.

Решение. Прв начин. Имаме:

$$u(\vec{r}) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

од каде што:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} 2x = -\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Од симетрични причини (кога $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$, $u \leftrightarrow u$) следува дека:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Сега:

$$\begin{aligned}
 |gradu| = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \\
 &\sqrt{\frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}} = 1 \Leftrightarrow \\
 &\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \Leftrightarrow r = 1.
 \end{aligned}$$

Втор начин. Имаме: $\frac{\partial u}{\partial x} = r \left(-\frac{1}{r^2} \right) r'_x = -\frac{r'_x}{r}$. Заради симетрија:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{r'_y}{r} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{r'_z}{r}.$$

Следува:

$$\begin{aligned}
 |gradu| = 1 &\Leftrightarrow |gradu|^2 = 1 \Leftrightarrow \\
 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 &= 1 \Leftrightarrow \frac{r'^2_x + r'^2_y + r'^2_z}{r^2} = 1.
 \end{aligned}$$

Од $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, добиваме:

$$r'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x = \frac{x}{r}.$$

Заради симетрија $r'_y = \frac{y}{r}$ и $r'_z = \frac{z}{r}$; поради што:

$$r'^2_x + r'^2_y + r'^2_z = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Значи:

$$|gradu| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{r^2} = 1 \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1.$$

10.2. ВЕКТОРСКО ПОЛЕ (ВЕКТОРСКО ПОЛЕ, ДИВЕРГЕНЦИЈА, РОТОР)

Задача 1. Да се најде дивергенцијата на векторското поле:

$$\vec{a}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r}, \text{ каде што: } \vec{r} = (x, y, z) \text{ и } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Решение. Дивергенцијата на векторското поле се пресметува по формулата: $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$

Прв начин. Векторското поле го запишуваме во вид:

$$\vec{a} = \frac{f(r)}{r} \vec{r} = \frac{f(r)}{r} (x, y, z) = \left(\underbrace{\frac{f(r)}{r} x}_{a_x}, \underbrace{\frac{f(r)}{r} y}_{a_y}, \underbrace{\frac{f(r)}{r} z}_{a_z} \right)$$

и

$$r'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}.$$

Притоа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_x}{\partial x} &= \frac{f'(r) r'_x r - f(r) r'_x}{r^2} x + \frac{f(r)}{r} = \frac{f'(r) r - f(r)}{r^2} r'_x x + \frac{f(r)}{r} = \\ &= \frac{f'(r)}{r} \frac{x}{r} x - \frac{f(r)}{r^2} \frac{x}{r} x + \frac{f(r)}{r} = \frac{f'(r)}{r^2} x^2 - \frac{f(r)}{r^3} x^2 + \frac{f(r)}{r}. \end{aligned}$$

Од симетрични причини $x \rightarrow y \rightarrow z \Rightarrow a_x \rightarrow a_y \rightarrow a_z$ следува дека:

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{f'(r)}{r^2} y^2 - \frac{f(r)}{r^3} y^2 + \frac{f(r)}{r}$$

и

$$\frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{f'(r)}{r^2} z^2 - \frac{f(r)}{r^3} z^2 + \frac{f(r)}{r}.$$

Оттука:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \frac{f'(r)}{r^2} (x^2 + y^2 + z^2) - \frac{f(r)}{r^3} (x^2 + y^2 + z^2) + 3 \frac{f(r)}{r} = \\ &= \frac{f'(r)}{r^2} r^2 - \frac{f(r)}{r^3} r^2 + 3 \frac{f(r)}{r} = f'(r) - \frac{f(r)}{r} + 3 \frac{f(r)}{r} = f'(r) + 2 \frac{f(r)}{r}. \end{aligned}$$

Втор начин. Векторското поле го запишуваме преку крајните променливи:

$$\vec{a}(x, y, z) = \frac{f \cdot (x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \left(\frac{xf}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{yf}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{zf}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right),$$

каде што: $f = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Значи: $a_x = \frac{xf}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ и:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_x}{\partial x} &= \frac{(xf)'_x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - xf \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2} = \\ &= \frac{\left(f + xf' \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - xf \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} = \\ &= \frac{f}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{x^2 f'}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x^2 f}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1), \end{aligned}$$

каде што: $f' = f'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Поради симетрија:

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{f}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y^2 f'}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{y^2 f}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2), \text{ и}$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{f}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z^2 f'}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z^2 f}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3).$$

Со собирање на (1)-(3) добиваме:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \frac{3f}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2) f'}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2) f}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{3f}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + f' - \frac{f}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2f}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + f'. \end{aligned}$$

Задача 2. Да се определат константите a , b и c ; така што векторското поле:

$$\vec{a}(x, y, z) = (x^2 + 2y + az, bx - 3y - z, 4x + cy + 2z)$$

да биде потенцијално.

Решение. Полето е потенцијално ако $\text{rot} \vec{a} = 0$. Имаме:

$$\begin{aligned} a_x &= x^2 + 2y + az & a_y &= bx - 3y - z & a_z &= 4x + cy + 2z; \\ \frac{\partial a_x}{\partial y} &= 2 \leftarrow \leftarrow & \frac{\partial a_y}{\partial x} &= b \leftarrow \leftarrow & \frac{\partial a_z}{\partial x} &= 4 \leftarrow \leftarrow; \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} &= a \leftarrow \leftarrow & \frac{\partial a_y}{\partial z} &= -1 \leftarrow \leftarrow & \frac{\partial a_z}{\partial y} &= c \leftarrow \leftarrow \quad (1). \end{aligned}$$

од каде што следува дека:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{a} &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \\ &(c + 1, a - 4, b - 2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow c = -1, a = 4, b = 2. \end{aligned}$$

Коментар. Забележуваме дека записот е ист со записот во Штоксовата формула. Затоа на ист начин од (1) се запишуваат членовите во векторот ротација $\text{rot} \vec{a}$, како парови разлики одејќи од долу кон горе, и од лево кон десно. Квадратната шема (1) се формира така што се запишуваат координатните функции и под нив се пресметуваат соодветните изводи.

Задача 3. Да се определи константата a , така што векторското поле:

$$\vec{a}(x, y, z) = (x^2 + 2y + 4z, ax - 3y - z, 4x - y + 2z)$$

да биде потенцијално.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} a_x &= x^2 + 2y + 4z & a_y &= ax - 3y - z & a_z &= 4x - y + 2z; \\ \frac{\partial a_x}{\partial y} &= 2 & \frac{\partial a_y}{\partial x} &= a & \frac{\partial a_z}{\partial x} &= 4; \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} &= 4 & \frac{\partial a_y}{\partial z} &= -1 & \frac{\partial a_z}{\partial y} &= -1. \end{aligned}$$

Следува:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) =$$

$$(-1+1, 4-4, a-2) = (0, 0, a-2).$$

Значи, полето е потенцијално за $a = 2$.

Задача 4. Да се определат константите b и c така што векторското поле:

$$\vec{a}(x, y, z) = (x + 2y + az, bx - 3y - z, 4x + cy + 2z)$$

да биде потенцијално. Да се најде потенцијалот u за така добиеното поле.

Решение. Имаме:

$$\begin{array}{lll} a_x = x + 2y + az & a_y = bx - 3y - z & a_z = 4x + cy + 2z; \\ \frac{\partial a_x}{\partial y} = 2 & \frac{\partial a_y}{\partial x} = b & \frac{\partial a_z}{\partial x} = 4; \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} = a & \frac{\partial a_y}{\partial z} = -1 & \frac{\partial a_z}{\partial y} = c. \end{array}$$

Важи:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (c+1, a-4, b-2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow c = -1, a = 4, b = 2.$$

Значи:

$$\vec{a}(\vec{r}) = (x + 2y + 4z, 2x - 3y - z, 4x - y + 2z).$$

Потенцијал на векторското поле $\vec{a}$ е векторската функција u таква што: $\operatorname{grad} u = \vec{a}$. Имаме:

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + f(y, z),$$

па:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q \Leftrightarrow 2x + \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 3y - z \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -3y - z;$$

од каде што:

$$f(y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = -3 \frac{y^2}{2} - zy + g(z).$$

Оттука:

$$u = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz - \frac{3}{2}y^2 - zy + g(z)$$

од каде што:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = R \Leftrightarrow 4x - y - g'(z) = 4x - y + 2z \Leftrightarrow g'(z) = 2z \Leftrightarrow g(z) = z^2 + C.$$

Конечно:

$$u = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz - \frac{3}{2}y^2 - yz + z^2 + C.$$

Задача 5. Најди ги функциите u такви што:

$$\text{gradu} = (2xy + z^2, x^2, 2xz + z\pi).$$

Решение. Имаме:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + z^2 \equiv P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \equiv Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2xz + z\pi \equiv R.$$

Од првото равенство: $u = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = x^2 y + xz^2 + f(y, z)$, од каде што:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q \Leftrightarrow x^2 + \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow f(y, z) = g(z).$$

Следува дека: $u = x^2 y + z^2 x + g(z)$, од каде што:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = R \Leftrightarrow 2xz + g'(z) = 2xz + z\pi \Leftrightarrow g'(z) = z\pi \Rightarrow g(z) = \frac{z^2 \pi}{2} + C.$$

Значи:

$$u = x^2 y + z^2 x + \frac{z^2 \pi}{2} + C.$$

10.3. КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛ НА ВЕКТОРСКО ПОЛЕ. ЦИРКУЛАЦИЈА

Задача 1. Да се пресмета криволинискиот интеграл на векторското поле:

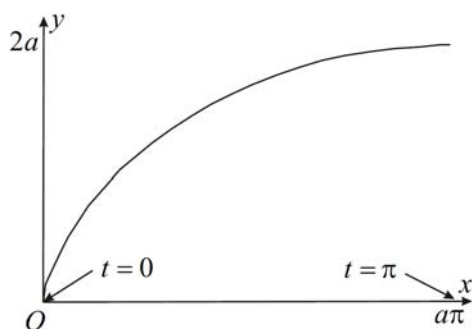
$$\vec{f} = (2a - y, y - a)$$

по делот од првиот лак на циклоидата:

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, \pi].$$

Решение. Кривата е рамнинска. Криволиниски интеграл на векторско поле по рамнинска крива е интегралот:

$$\int_C \vec{f} d\vec{r} \text{ каде што: } d\vec{r} = (dx, dy, dz).$$



Цртеж 10.3.1.

Имаме:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{f} d\vec{r} &= \int_C (2a - y) dx + (y - a) dy = \left(\begin{array}{l} dx = a(1 - \cos t) dt \\ dy = a \sin t dt \end{array} \right) = \\ &= \int_0^\pi ((2a - a(1 - \cos t))a(1 - \cos t) + (a(1 - \cos t) - a)a \sin t) dt = \\ &= \int_0^\pi (a(1 + \cos t)a(1 - \cos t) - a \cos(t)a \sin t) dt = \\ &= a^2 \int_0^\pi (1 - \cos^2 t - \sin t \cos t) dt = a^2 \int_0^\pi \left(1 - \frac{1 + \cos 2t}{2} - \frac{\sin 2t}{2} \right) dt = \end{aligned}$$

$$\frac{a^2}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2t - \sin 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right) \Big|_0^\pi =$$

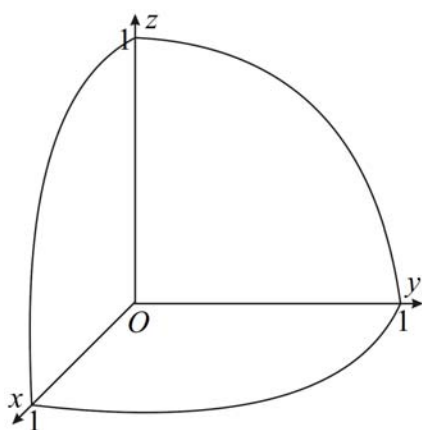
$$\frac{a^2}{2} \left(\pi - \frac{1}{2} (\sin 2\pi - \sin 0) + \frac{1}{2} (\cos 2\pi - \cos 0) \right) = \frac{a^2 \pi}{2}.$$

Задача 2. Да се пресмета циркулацијата на векторското поле:

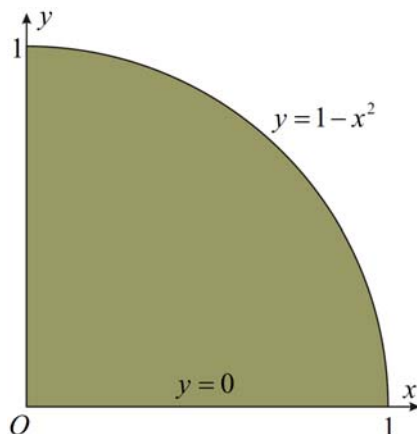
$$\vec{a} = (y^2, -x^2, z^2),$$

по затворената контура C што се добива како пресек на параболоидот: $x^2 + z^2 = 1 - y$ со координатните рамнини во прв октант.

Решение. Ако ја примениме Штоксовата формула добиваме:



Цртеж 10.3.3.1.



Цртеж 10.3.3.2.

$P = y^2$	$Q = x^2$	$R = z^2;$
$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$	$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x$	$\frac{\partial R}{\partial x} = 0;$
$\frac{\partial P}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial R}{\partial y} = 0.$

Следува дека интегралот е:

$$\int_C \vec{a} d\vec{r} = \int_C y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz =$$

$$\begin{aligned}
& \iint_S (0-0) dydz + (0-0) dx dz + (-2x-2y) dx dy = \\
& -2 \iint_S (x+y) dx dy = -2 \iint_D (x+y) dx dy = -2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} (x+y) dy = \\
& -2 \int_0^1 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x^2} = -2 \int_0^1 \left(x(1-x^2) + \frac{1}{2}(1-x^2)^2 \right) dx = \\
& - \int_0^1 (2x - 2x^3 + 1 - 2x^2 + x^4) dx = - \left(x^2 - 2\frac{x^4}{4} + x - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \\
& - \left(1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = - \frac{60 - 15 - 20 + 6}{30} = - \frac{31}{30}.
\end{aligned}$$

Задача 3. Дадено е векторско поле:

$$\vec{a} = (2x(y^2 + z^2) + yz, 2y(z^2 + x^2) + zx, 2z(x^2 + y^2) + xy),$$

Да се провери дали полето е потенцијално и да се пресмета циркулацијата $\int_C \vec{a} d\vec{r}$, каде што C е лакот што ги спојува точките:

$$M(0,0,0) \text{ и } M(1,1,1).$$

Решение. Полето е потенцијално ако $\text{rot} \vec{a} = 0$. Навистина:

$$P = 2xy^2 + 2xz^2 + yz \quad Q = 2yz^2 + 2x^2y + xz \quad R = 2x^2z + 2y^2z + xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy + z$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy + z$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 4xz + y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 4xz + y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 4yz + x$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 4yz + x;$$

па:

$$\text{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = (0, 0, 0).$$

Бидејќи полето е потенцијално интегралот не зависи од патот на интеграција. За крива ја избираме отсечката:

$$MN: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} = t, t \in [0, 1] \Leftrightarrow x = t, y = t, z = t; t \in [0, 1].$$

Следува: $dx = dt$, $dy = dt$, $dz = dt$, $t \in [0, 1]$; од каде што:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{a} d\vec{r} &= \\ \int_{\overline{MN}} (2xy^2 + 2xz^2 + yz) dx + (2yz^2 + 2x^2y + xz) dy + (2x^2z + 2y^2z + xy) dz &= \\ \int_0^1 (2t^3 + 2t^3 + t^2) dt + (2t^3 + 2t^3 + t^2) dt + (2t^3 + 2t^3 + t^2) dt &= \\ 3 \int_0^1 (4t^3 + t^2) dt = 3 \left(4 \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 3 \left(1 + \frac{1}{3} \right) = 4. \end{aligned}$$

11. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ГЕОМЕТРИЈА

11.1. КРИВА

Задача 1-2. Да се напише една векторска функција на кривите дефинирани со равенките:

$$1) \ xy = 3z, \ 2y = 3x^2; \quad 2) \ x^2 + y^2 = R^2, \ x + y + z = 1.$$

Решение. 1) Ја параметризираме првата променлива: $x = t$, $t \in \mathbb{R}$. Тогаш:

$$ty = 3z, \ 2y = 3t^2.$$

Од втората равенка добиваме: $y = \frac{3}{2}t^2$. Од првата:

$$z = \frac{ty}{3} = \frac{t}{3} \cdot \frac{3}{2}t^2 = \frac{t^3}{2}.$$

Следува дека векторската функција е: $\vec{r} = \left(t, \frac{3}{2}t^2, \frac{t^3}{2} \right), \ t \in \mathbb{R}.$

2) Првата равенка опишува кружен цилиндар во простор, чиј карактеристичен пар параметарски равенки се:

$$x = R \cos t, \ y = R \sin t \quad (1).$$

Имено, $R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2 \Leftrightarrow R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2 \Leftrightarrow R^2 = R^2$ ја задоволуваат равенката и обратно секоја точка од цилиндарот може да се запише во обликот (1). Записот е еднозначен за $t \in [0, 2\pi)$. Втората равенка е рамнина во која ако се заменат x и y , добиваме:

$$z = 1 - x - y = 1 - R \cos t - R \sin t = 1 - R(\sin t + \cos t).$$

Следува дека векторската функција е:

$$\vec{r} = (R \cos t, R \sin t, 1 - R(\sin t + \cos t)).$$

Задача 3. Да се најде ортогоналната проекција на кривата:

$$x^2 + y^2 = 3z, \ 4x + 4y - 3z = 0;$$

на xOy -рамнината.

Решение. Од втората равенка во системот:

$$4x + 4y - 3z = 0 \Leftrightarrow 3z = 4x + 4y.$$

Заменуваме во првата:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 3z &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4x + 4y \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow \\ (x-2)^2 - 4 + (y-2)^2 - 4 &= 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8. \end{aligned}$$

Следува дека ортогоналната проекција е кружницата:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8, \quad z = 0.$$

Задача 4. Да се одредат функциите f и g , така што проекцијата на кривата:

$$\vec{r}(t) = (f(t), g(t), -\cos 2t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right];$$

на рамнината xOy е делот од елипсата $x^2 + 4y^2 - 4y = 0, \quad x \geq 0$; додека проекцијата на xOz -рамнината, е параболата $z^2 = 1 - y$.

Решение. Од условот на задачата добиваме:

$$f^2 + 4g^2 - 4g = 0 \quad \text{и} \quad \cos^2 2t = 1 - g.$$

Од втората равенка: $g = 1 - \cos^2 2t = \sin^2 2t$. Со замена во првата:

$$\begin{aligned} f^2 + 4\sin^4 2t - 4\sin^2 2t &= 0 \Leftrightarrow f^2 = 4\sin^2 2t(1 - \sin^2 2t) \Leftrightarrow \\ f^2 &= 4\sin^2 2t \cos^2 2t \Leftrightarrow f^2 = \sin^2 4t \Leftrightarrow f = \sin 4t. \end{aligned}$$

Последната еквиваленција е точна бидејќи:

$$x = f \geq 0 \quad \text{и} \quad \sin 4t \geq 0 \quad \text{за} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Задача 5. Да се докаже дека тангентите на кривата:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{t^2}{3}\vec{j} + \frac{2t^3}{27}\vec{k},$$

зафаќаат константен агол со правецот одреден од векторот:

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}.$$

Решение. Радиус-векторот на кривата е $\vec{r} = \left(t, \frac{t^2}{3}, \frac{2t^3}{27}\right)$

Векторот што го одредува правецот е: $\vec{a} = (1, 0, 1)$. Еден тангентен вектор е: $\vec{t} = \dot{\vec{r}} = \left(1, \frac{2t}{3}, \frac{6t^2}{27}\right) = \left(1, \frac{2t}{3}, \frac{2t^2}{9}\right)$. Косинусот од аголот меѓу векторите е:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{t}) = \frac{\vec{a}\vec{t}}{|\vec{a}||\vec{t}|} = \frac{1 + \frac{2t^2}{9}}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{4t^2}{9} + \frac{4t^4}{81}}} = \frac{1 + \frac{2t^2}{9}}{\sqrt{2}\sqrt{1 + 2\frac{2t^2}{9} + \left(\frac{2t^2}{9}\right)^2}} =$$

$$\frac{1 + \frac{2t^2}{9}}{\sqrt{2}\sqrt{\left(1 + \frac{2t^2}{9}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ од каде што: } \angle(\vec{a}, \vec{t}) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Следува дека аголот меѓу векторите е константен.

Задача 6. Да се докаже дека тангентите на кривата:

$$x^2 = 3y, \quad 2xy = 9z;$$

зафаќаат константен агол со некој константен вектор. Потоа да се одреди константниот агол и вектор.

Решение. Нека $x = t$. Од првата равенка следува дека:

$$y = \frac{x^2}{3} = \frac{t^2}{3}.$$

Со замена во втората равенка добиваме:

$$2t \frac{t^2}{3} = 9z \Leftrightarrow z = \frac{2t^3}{27}.$$

Следува дека $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{t^2}{3}, \frac{2t^3}{27}\right)$, од каде што:

$$\vec{t}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) = \left(1, \frac{2t}{3}, \frac{6t^2}{27}\right) = \left(1, \frac{2}{3}t, \frac{2}{9}t^2\right).$$

Нека $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ е константен вектор. Тогаш:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{t}) = C \Leftrightarrow \frac{\vec{a}\vec{t}}{|\vec{a}||\vec{t}|} = C \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_1 + \frac{2}{3}a_2t + \frac{2}{9}a_3t^2}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{81}t^4}} = C \Leftrightarrow \frac{a_1 + \frac{2}{3}a_2t + \frac{2}{9}a_3t^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{9}t^2\right)^2}} = C \Leftrightarrow$$

$$a_1 + \frac{2}{3}a_2t + \frac{2}{9}a_3t^2 = C\left(1 + \frac{2}{9}t^2\right) \Leftrightarrow$$

$$a_1 = C, \frac{2}{3}a_2 = 0, \frac{2}{9}a_3 = \frac{2}{9}C \Leftrightarrow a_1 = C, a_2 = 0, a_3 = C.$$

Значи, постои константен вектор $\vec{a} = C(1, 0, 1)$ со кого тангентите зафаќаат константен агол. Косинусот од аголот е:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{t}) = \frac{C\left(1 + \frac{2}{9}t^2\right)}{C\sqrt{2}\left(1 + \frac{2}{9}t^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

од каде што аголот е: $\angle(\vec{a}, \vec{t}) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$

Задача 7. Да се најде пресекот на xOy -рамнината и тангентата на кривата $\vec{r} = (1+t, -t^2, 1+t^3)$ во точката во која $t = 1$.

Решение. Тангентниот вектор е $\vec{t} = (1, -2t, 3t^2)$. Во $t = 1$ се добива точката $A(2, -1, 2)$. Важи: $\vec{t}(A) = (1, -2, 3)$.

Следува, параметарските равенки на тангентата се:

$$\frac{x-x_0}{t_1} = \frac{y-y_0}{t_2} = \frac{z-z_0}{t_3} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3} = t \Leftrightarrow$$

$$x = 2+t, \quad y = -2t-1, \quad z = 3t+2.$$

Пресекот P на тангентата со рамнината $z = 0$ се добива за:

$$3t+2=0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}.$$

Тогаш: $x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ и $y = -2\left(-\frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{1}{3}$ т.е. $P\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$.

11.2. ПРИРОДНА ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА

Задача 1. Да се докаже дека:

$$\vec{r}(s) = \left(\frac{1}{2} \left(s + \sqrt{s^2 + 1} \right), \frac{1}{2} \frac{1}{s + \sqrt{s^2 + 1}}, \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left(s + \sqrt{s^2 + 1} \right) \right),$$

е природна параметризација.

Решение. Нека $u = s + \sqrt{s^2 + 1}$. Тогаш, $\vec{r} = \left(\frac{1}{2}u, \frac{1}{2u}, \frac{\sqrt{2}}{2} \ln u \right)$.

Го пресметуваме изводот, користејќи го правилото за извод од сложена функција:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{ds} &= \frac{d\vec{r}}{du} \frac{du}{ds} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \frac{1}{u^2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{u} \right) \left(1 + \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1, -\frac{1}{u^2}, \frac{\sqrt{2}}{u} \right) \frac{s + \sqrt{s^2 + 1}}{\sqrt{s^2 + 1}} = \frac{1}{2} \left(1, -\frac{1}{u^2}, \frac{\sqrt{2}}{u} \right) \frac{u}{\sqrt{s^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Јасно, $u = s + \sqrt{s^2 + 1} \geq 0$. Должината на тангентниот вектор е:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| &= \left| \frac{d\vec{r}}{du} \right| \left| \frac{du}{ds} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{u^4} + \frac{2}{u^2}} \frac{u}{\sqrt{s^2 + 1}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{u^4 + 1 + 2u^2}}{u^2} \frac{u}{\sqrt{s^2 + 1}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(u^2 + 1)^2}}{u} \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} = \frac{1}{2} \frac{u^2 + 1}{u} \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{s^2 + 2s\sqrt{s^2 + 1} + s^2 + 1 + 1}{(s + \sqrt{s^2 + 1})\sqrt{s^2 + 1}} = \frac{1}{2} \frac{2(s^2 + s\sqrt{s^2 + 1} + 1)}{s\sqrt{s^2 + 1} + s^2 + 1} = 1. \end{aligned}$$

Бидејќи тангентниот вектор е единечен, следува дека параметризацијата е природна.

Задача 2. Да се најде природната параметризација на завојницата зададена со равенката $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \sqrt{3} \cos t \vec{j} + \sqrt{3} \sin t \vec{k}$, а потоа да се најде единечниот тангентен вектор.

Решение. Равенката на завојницата е:

$$\vec{r}(t) = (t, \sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \sin t).$$

Следува:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \int_0^t \dot{\vec{r}}(u) du = \left(\dot{r}(u) = (1, -\sqrt{3} \sin u, \sqrt{3} \cos u) \right) = \\ &= \int_0^t \sqrt{1 + 3 \sin^2 u + \cos^2 u} du = \int_0^t \sqrt{1 + 3} du = 2u \Big|_0^t = 2t = s. \end{aligned}$$

Последното равенство е исполнето ако $t = \frac{s}{2}$. Значи, природната параметризација е:

$$\vec{r}(s) = \frac{s}{2} \vec{i} + \sqrt{3} \cos \frac{s}{2} \vec{j} + \sqrt{3} \sin \frac{s}{2} \vec{k}.$$

Оттука, единичниот тангентен вектор е:

$$\begin{aligned} \vec{t}(s) = \dot{\vec{r}}(s) &= \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{3} \sin \left(\frac{s}{2} \right) \frac{1}{2}, \sqrt{3} \cos \left(\frac{s}{2} \right) \frac{1}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{s}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{s}{2} \right). \end{aligned}$$

11.3. КРИВИНА. ПРИРОДЕН ТРИЕДАР. ТОРЗИЈА

Природен триедар

Задача 1. Да се најдат единичните вектори на тангента, главна нормала и бинормала; $\vec{t}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$; за вредноста на параметарот $t = \frac{\pi}{2}$ на кривата: $\vec{r}(t) = (t - \sin t) \vec{i} + (1 - \cos t) \vec{j} + \sin t \vec{k}$.

Решение. Радиус-векторот на кривата е:

$$\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, \sin t)$$

и

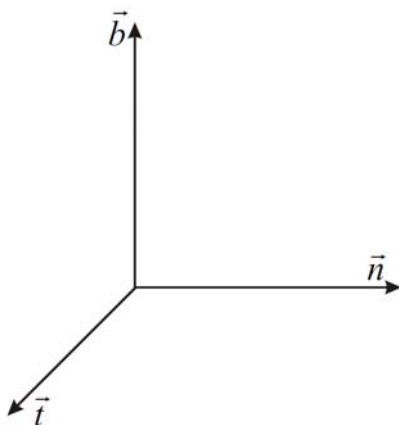
$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}, 1 - \cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 1\right).$$

Неговите изводи се:

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1 - \cos t, \sin t, \cos t) \text{ и } \dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}\right) = (1, 1, 0);$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\sin t, \cos t, -\sin t) \text{ и } \ddot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}, -\sin \frac{\pi}{2}\right) = (1, 0, -1);$$

од каде што векторите од природниот триедар се:



Цртеж 11.3.1.

$$\vec{t}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left|\dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0),$$

$$\left(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-1, 1, -1),$$

$$\vec{b}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \ddot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left|\dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \ddot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|} = \frac{(-1, 1, -1)}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1),$$

и

$$\vec{n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\vec{b} \times \vec{t})\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2).$$

Задача 2. Да се најдат единечните вектори на тангента, главна нормала и бинормала; $\vec{t}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$; на природниот триедар на кривата: $\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \sin^2 t \vec{i} + \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) \vec{j} + \sin t \vec{k}$.

Решение. Го запишуваме радиус-векторот во координатна форма: $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2} \sin^2 t, \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t), \sin t \right)$. Во продолжение ги пресметуваме елементите потребни да се определат единечните вектори, како и самите вектори:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= \left(\sin t \cos t, \frac{1}{2} (1 + \cos^2 t - \sin^2 t), \cos t \right) = \\ &= \left(\sin t \cos t, \frac{1}{2} 2 \cos^2 t, \cos t \right) = \cos t (\sin t, \cos t, 1); \\ |\dot{\vec{r}}(t)| &= \cos t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} \cos t; \\ \vec{t} &= \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{\cos t (\sin t, \cos t, 1)}{\sqrt{2} \cos t} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin t, \cos t, 1); \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (\cos^2 t - \sin^2 t, 2 \cos t (-\sin t), -\sin t) = (\cos 2t, -\sin 2t, -\sin t). \\ \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} &= \cos t \left(\begin{vmatrix} \cos t & 1 \\ -2 \sin t \cos t & -\sin t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & \sin t \\ -\sin t & \cos^2 t - \sin^2 t \end{vmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos^2 t - \sin^2 t & -2 \sin t \cos t \end{vmatrix} \right) = \cos t (-\sin t \cos t + 2 \sin t \cos t, \\ &\quad \cos^2 t - \sin^2 t + \sin^2 t, -2 \sin^2 t \cos t - \cos^3 t + \sin^2 t \cos t) = \\ &= \cos t (\sin t \cos t, \cos^2 t, -\cos t (\sin^2 t + \cos^2 t)) = \cos^2 t (\sin t, \cos t, -1); \\ \vec{b} &= \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|} = \frac{\cos^2 t (\sin t, \cos t, -1)}{\cos^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin t, \cos t, -1); \\ \vec{n} &= \vec{b} \times \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{vmatrix} \cos t & -1 \\ \cos t & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & \sin t \\ 1 & \sin t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (2 \cos t, -2 \sin t, 0) = (\cos t, -\sin t, 0). \end{aligned}$$

Кривина и торзија

Задача 1. Да се најде кривината и радиусот на кривина за кривата: $x = \sin z - z \cos z$, $y = \cos z + z \sin z$.

Решение. Ако го земеме z за параметар, $z = t$, равенката на кривата го добива обликот: $\vec{r} = (\sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t, t)$.

Првите два извода и модулот на првиот извод се:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= (t \sin t, t \cos t, 1), \\ |\dot{\vec{r}}| &= \sqrt{t^2 \sin^2 t + t^2 \cos^2 t + 1} = \sqrt{t^2 + 1}; \\ \ddot{\vec{r}} &= (\sin t + t \cos t, \cos t - t \sin t, 0).\end{aligned}$$

Векторскиот производ на изводите и неговиот модул се:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} t \cos t & 1 \\ \cos t - t \sin t & 0 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & t \sin t \\ 0 & \sin t + t \cos t \end{vmatrix} \begin{pmatrix} t \sin t & t \cos t \\ \sin t + t \cos t & \cos t - t \sin t \end{pmatrix} = \\ &= (t \sin t - \cos t, \sin t + t \cos t, t \sin t \cos t - t^2 \sin^2 t - t \sin t \cos t - t^2 \cos^2 t) = \\ &= (t \sin t - \cos t, \sin t + t \cos t, -t^2), \\ |\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| &= \sqrt{(t \sin t - \cos t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + t^4} = \\ &= \sqrt{t^2 \sin^2 t - 2t \sin t \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + t^4} = \\ &= \sqrt{t^2 + 1 + t^4}.\end{aligned}$$

Оттука:

$$K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{\sqrt{1+t^2+t^4}}{\sqrt{(1+t^2)^3}}, \quad R = \frac{1}{K} = \frac{\sqrt{(1+t^2)^3}}{\sqrt{1+t^2+t^4}}.$$

Задача 2. Да се најде кривината и торзијата на кривата:

$$\vec{r}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) = 3(1 - t^2, 2t, 1 + t^2), \\ \ddot{\vec{r}} &= 3(-2t, 2, 2t) = 6(-t, 1, t),\end{aligned}$$

$$\ddot{\vec{r}} = 6(-1, 0, 1);$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} &= 18 \left(\begin{vmatrix} 2t & 1+t^2 \\ 1 & t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1+t^2 & 1-t^2 \\ t & -t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -t & 1 \end{vmatrix} \right) = \\ &= 18(2t^2 - 1 - t^2, -t - t^3 - t + t^3, 1 - t^2 + 2t^2) = 18(t^2 - 1, -2t, t^2 + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\dot{\vec{r}}| &= 3\sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2 + (1+t^2)^2} = 3\sqrt{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2 + 1 + 2t^2 + t^4} = \\ &= 3\sqrt{2(t^4 + 2t^2 + 1)} = 3\sqrt{2(t^2 + 1)^2} = 3\sqrt{2}(t^2 + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| &= 18\sqrt{(t^2 - 1)^2 + 4t^2 + (t^2 + 1)^2} = 18\sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2 + t^4 + 2t^2 + 1} = \\ &= 18\sqrt{2(t^4 + 2t^2 + 1)} = 18\sqrt{2(t^2 + 1)^2} = 18\sqrt{2}(t^2 + 1), \end{aligned}$$

$$K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{18\sqrt{2}(t^2 + 1)}{(3\sqrt{2}(t^2 + 1))^3} = \frac{18\sqrt{2}(t^2 + 1)}{27 \cdot 2\sqrt{2}(t^2 + 1)^3} = \frac{1}{3(t^2 + 1)^2};$$

$$(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}) = (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \ddot{\vec{r}} = 18 \cdot 6(- (t^2 - 1) + t^2 + 1) = 108 \cdot 2 = 216$$

и

$$T = -\frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} = -\frac{216}{(18\sqrt{2}(t^2 + 1))^2} = -\frac{18 \cdot 12}{18^2 2(t^2 + 1)^2} = -\frac{1}{3(t^2 + 1)^2}.$$

Задача 3. Во точката во која кривата:

$$\vec{r}(t) = e^t \vec{i} + e^{-t} \vec{j} + \sqrt{2}t \vec{k}$$

има максимална кривина, да се најде торзијата на кривата.

Решение. Радиус векторот е: $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$.

Прво ја наоѓаме равенката на кривината:

$$\dot{\vec{r}} = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}), \quad \ddot{\vec{r}} = (e^t, e^{-t}, 0),$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} &= \left(\begin{vmatrix} -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^{-t} & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sqrt{2} & e^t \\ 0 & e^t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{vmatrix} \right) = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2), \\ |\dot{\vec{r}}| &= \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}, \\ |\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| &= \sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4} = \\ \sqrt{2(e^{-2t} + 2 + e^{2t})} &= \sqrt{2(e^{-t} + e^t)^2} = \sqrt{2}(e^{-t} + e^t).\end{aligned}$$

Следува:

$$K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{\sqrt{2}(e^{-t} + e^t)}{(e^t + e^{-t})^3} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

Максималната кривина ја наоѓаме според постапката за одредување екстрем на функција.

$$K' = \sqrt{2} \frac{-2}{(e^t + e^{-t})^3} (e^t - e^{-t}) = -2\sqrt{2} \frac{e^t - e^{-t}}{(e^t + e^{-t})^3}.$$

од каде што:

$$K' = 0 \Leftrightarrow e^t - e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^t = e^{-t} \Leftrightarrow e^{2t} = 1 \Leftrightarrow 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Сега ја определуваме торзијата:

$$\ddot{\vec{r}} = (e^t, -e^{-t}, 0)$$

и

$$(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}) = (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \ddot{\vec{r}} = -\sqrt{2}e^{-t}e^t - \sqrt{2}e^te^{-t} + 2 \cdot 0 = -2\sqrt{2},$$

од каде што:

$$T = -\frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{2(e^{-t} + e^t)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

Во точката во која $t = 0$:

$$T = -\frac{\sqrt{2}}{(1+1)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

11.4. РАМНИНСКА КРИВА

Задача 1. Да се докаже дека една крива е рамнинска ако и само ако $T = 0$. Во која рамнина лежи рамнинската крива.

Решение. $\Leftarrow$) Нека $T = 0$. Следува: $\frac{d\vec{b}}{ds} = T\vec{n} = 0$, од каде што $\vec{b} = C$ и C е константа. Тогаш:

$$\frac{d}{ds}(\vec{r} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{b} + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{t} \cdot \vec{b} = 0, \text{ односно } \vec{r} \cdot \vec{b} = C_1, C_1 = \text{const}.$$

Притоа, $\vec{t}$ е единечниот тангентен вектор и $\vec{b}$ е единечниот вектор на бинормалата. Векторите се заемно нормални, т.е. $\vec{t} \cdot \vec{b} = 0$.

Од аналитичка геометрија е познато дека равенката $\vec{r} \cdot \vec{b} = C_1$ кога $\vec{b}$ е константа е равенка на рамнина нормална на векторот $\vec{b}$, т.е. на оскулаторната рамнина.

$\Rightarrow$) Обратно ако $\vec{r}(s)$ е рамнинска крива, од дефиницијата на лимес, следува дека векторите $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ и $\frac{d\vec{t}}{ds} = K\vec{n}$ се во иста рамнина. Оттука векторот $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$ има постојан правец. Бидејќи $\vec{b}$ е единечен вектор тој е константен, од каде што: $\frac{d\vec{b}}{ds} = 0$ т.е. $T = 0$.

Задача 2. Да се докаже дека кривата:

$$\vec{r}(t) = (t^2 + t + 1)\vec{i} + (3t^2 + 2t + 1)\vec{j} + (t^2 + 2t + 3)\vec{k}$$

е рамнинска, и да се најде рамнината во која лежи.

Решение. Кривата е рамнинска ако и само ако $(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}) = 0$.

Притоа:

$$\vec{r} = (t^2 + t + 1, 3t^2 + 2t + 1, t^2 + 2t + 3), \quad \dot{\vec{r}} = (2t + 1, 6t + 2, 2t + 2), \\ \ddot{\vec{r}} = (2, 6, 2), \quad \dddot{\vec{r}} = (0, 0, 0).$$

Бидејќи мешаниот производ содржи нулти вектор важи: $(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}) = 0$, т.е. $T = 0$. Следува дека кривата е рамнинска.

Задача 3. Да се докаже дека кривата:

$$C: x = \frac{a}{2} \cos t, \quad y = \frac{a}{2}(1 + \sin t), \quad z = \frac{a}{2}(1 + \sin t);$$

е рамнинска, и да се најде рамнината во која лежи.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \left(\frac{a}{2} \cos t, \frac{a}{2}(1 + \sin t), \frac{a}{2}(1 + \sin t) \right), \\ \dot{\vec{r}} &= \left(-\frac{a}{2} \sin t, \frac{a}{2} \cos t, \frac{a}{2} \cos t \right) = \frac{a}{2}(-\sin t, \cos t, \cos t), \\ \ddot{\vec{r}} &= \left(-\frac{a}{2} \cos t, -\frac{a}{2} \sin t, -\frac{a}{2} \sin t \right) = -\frac{a}{2}(\cos t, \sin t, \sin t) \\ \ddot{\vec{r}} &= \left(\frac{a}{2} \sin t, -\frac{a}{2} \cos t, -\frac{a}{2} \cos t \right) = -\frac{a}{2}(-\sin t, \cos t, \cos t)\end{aligned}$$

Бидејќи $\dot{\vec{r}}$ и $\ddot{\vec{r}}$ се колинеарни важи: $(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}) = 0$, од каде што:

$$T = -\frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} = 0.$$

Кривата лежи во оскулаторната рамнина која е нормалана на векторот:

$$\vec{b} \parallel \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = -\frac{a^2}{4} \begin{pmatrix} \cos t & \cos t \\ \sin t & \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} = (0, 1, -1)$$

Следува дека нејзината равенка е:

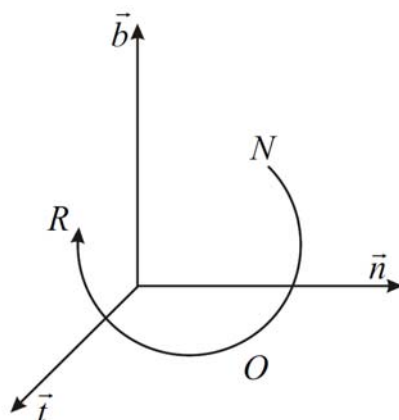
$$\begin{aligned}A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0 \Leftrightarrow \\ y - \frac{a}{2}(1 + \sin t_0) - \left(z - \frac{a}{2}(1 + \sin t_0) \right) &= 0 \Leftrightarrow y - z = 0.\end{aligned}$$

11.5. ОСНОВНИ ПРАВИ И РАМНИНИ

Задача 1. Види ја задачата 11.4.2. од првиот дел.

Задача 2. Да се најдат равенките на основните прави и рамнини на кривата: $\vec{r}(t) = \left(\frac{2t}{\pi}, \frac{2t}{\pi}, \ln \sin t \right)$ во точката $A(1,1,0)$.

Решение. Прво го определуваме параметарот кој одговара на точката A : $\frac{2}{\pi}t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$. Потоа ги наоѓаме векторите паралелни на $\dot{\vec{r}}(A)$ и $\ddot{\vec{r}}(A)$:



Цртеж 11.5.2.

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= \left(\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}, \frac{1}{\sin t} \cos t \right) = \left(\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}, \operatorname{ctg} t \right), \\ \dot{\vec{r}}(A) &= \left(\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \right) = \left(\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}, 0 \right) \parallel (1, 1, 0); \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= \left(0, 0, -\frac{1}{\sin^2 t} \right) \text{ и} \\ \ddot{\vec{r}}(A) &= \left(0, 0, -\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} \right) = (0, 0, -1) \parallel (0, 0, 1).\end{aligned}$$

Следува:

$$\vec{t}(A) \parallel \dot{\vec{r}}(A) \parallel (1, 1, 0),$$

$$\vec{b}(A) \parallel \dot{\vec{r}}(A) \times \ddot{\vec{r}}(A) \parallel \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, -1, 0) \text{ и}$$

$$\vec{n}(A) \parallel \vec{b}(A) \times \vec{t}(A) \parallel \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 2) \parallel (0, 0, 1)$$

Конечно, основните прави и рамнини се:

$$t: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0};$$

тангента

$$b: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0};$$

бинормала

$$n: \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1};$$

главна нормала

$$N: \begin{cases} x-1+y-1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases};$$

нормална рамнина

$$O: \begin{cases} (x-1)-(y-1)=0 \\ x-y=0 \end{cases};$$

оскулаторна рамнина

$$R: z=0;$$

ректификациона рамнина

Задача 3. Да се најдат равенките на основните прави и рамнини на кривата:

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t \operatorname{tg} t;$$

во точката во која $t = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Имаме:

$$\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, t \operatorname{tg} t), \quad \vec{r}(A) = \left(\sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4}, t \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow A \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right);$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\cos t, -\sin t, \frac{1}{\cos^2 t} \right),$$

$$\dot{\vec{r}}(A) = \left(\cos \frac{\pi}{4}, -\sin \frac{\pi}{4}, \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 2 \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 4);$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \left(-\sin t, -\cos t, -2 \frac{-\sin t}{\cos^3 t} \right) = \left(-\sin t, -\cos t, \frac{2 \sin t}{\cos^3 t} \right),$$

$$\ddot{\vec{r}}(A) = \left(-\sin \frac{\pi}{4}, -\cos \frac{\pi}{4}, \frac{2 \sin \frac{\pi}{4}}{\cos^3 \frac{\pi}{4}} \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 4 \right) = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 8);$$

Оттука:

$$\begin{aligned} & \vec{t}(A) \parallel (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 4), \\ & \vec{b}(A) \parallel \dot{\vec{r}}(A) \times \ddot{\vec{r}}(A) \parallel \left(\begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 4 \\ -\sqrt{2} & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ 8 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix} \right) = \\ & (-8\sqrt{2} + 4\sqrt{2}, -4\sqrt{2} - 8\sqrt{2}, -2 - 2) = (-4\sqrt{2}, -12\sqrt{2}, -4) = -4(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 1) \\ & \vec{n}(A) \parallel \vec{b}(A) \times \vec{t}(A) \parallel \left(\begin{vmatrix} 3\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 4 & \sqrt{2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix} \right) = \\ & (13\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, -2 - 6) = \sqrt{2}(13, -3, -4\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Основните прави и рамнини се:

$$\begin{aligned} t: \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} &= \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{z - 1}{4}, \\ N: \sqrt{2} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \sqrt{2} \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 4(z - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \sqrt{2}x - 1 - \sqrt{2}y + 1 + 4z - 4 &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 4z - 4 = 0. \\ b: \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} &= \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{z - 1}{1}, \\ O: \sqrt{2} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 3\sqrt{2} \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + z - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \sqrt{2}x - 1 + 3\sqrt{2}y - 3 + z - 1 &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + z - 5 = 0. \\ n: \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{13} &= \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-3} = \frac{z - 1}{-4\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$$R: 13\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 4\sqrt{2}(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$13x - \frac{13\sqrt{2}}{2} - 3y + \frac{3\sqrt{2}}{2} - 4\sqrt{2}z + 4\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 13x - 3y - 4\sqrt{2}z - \sqrt{2} = 0.$$

Задача 4*. Да се најдат основните прави и рамнини на кривата: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x^3 + y^3 = 2z$; во точката $A(1,1,1)$.

Решение. За параметар избираме: $x = t$. Тогаш:

$$t^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad t^3 + y^3 = 2z; \quad A: x = t = y = z = 1.$$

Важи: $\dot{x} = 1$, $\ddot{x} = 0$. Ги диференцираме двете равенки по t :

$$2t + 2y\dot{y} - 2z\dot{z} = 0 \Leftrightarrow t + y\dot{y} - z\dot{z} = 0, \quad A: 1 + \dot{y} - \dot{z} = 0;$$

$$3t^2 + 3y^2\dot{y} = 2\dot{z}, \quad A: 3 + 3\dot{y} = 2\dot{z} \Leftrightarrow 1 + \dot{y} = \frac{2}{3}\dot{z}$$

Следува: $\dot{z} = \frac{2}{3}\dot{z} \Leftrightarrow \dot{z} = 0$. Оттука, $\dot{y} = -1$. Диференцираме по втор пат за да ги добијеме вредностите на вторите изводи:

$$1 + \dot{y}^2 + y\ddot{y} - \dot{z}^2 - z\ddot{z} = 0, \quad A: 2 + \ddot{y} - \ddot{z} = 0 \Leftrightarrow 2 + \ddot{y} = \ddot{z} \quad (1);$$

$$6t + 6y\dot{y}^2 + 3y^2\ddot{y} = 2\ddot{z}, \quad A: 6 + 6 + 3\ddot{y} = 2\ddot{z} \Leftrightarrow 12 + 3\ddot{y} = 2\ddot{z} \quad (2).$$

Ако (1) го помножиме со -2 и додадеме на (2), добиваме:

$$8 + \ddot{y} = 0 \Leftrightarrow \ddot{y} = -8. \quad \text{Оттука: } \ddot{z} = -6.$$

Значи:

$$\dot{\vec{r}}(A) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (1, -1, 0)$$

и

$$\ddot{\vec{r}}(A) = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = (0, -8, -6) = -2(0, 4, 3);$$

од каде што:

$$\vec{t}(A) \parallel (1, -1, 0),$$

$$\vec{b}(A) \parallel \dot{\vec{r}}(A) \times \ddot{\vec{r}}(A) = -2 \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right) =$$

$$-2(-3, -3, 4) = 2(3, 3, -4).$$

$$\vec{n}(A) \parallel \vec{b}(A) \times \vec{t}(A) \parallel \left(\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-4, -4, -6) = -2(2, 2, 3).$$

Конечно, равенките на основните прави и рамнини се:

$t: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{0};$	$N: \begin{matrix} (x-1)-(y-1)=0; \\ x-y=0 \end{matrix}$
тангента	нормална рамнина
$b: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-4};$	$O: \begin{matrix} 3(x-1)+3(y-1)-4(z-1)=0; \\ 3x+3y-4z-2=0 \end{matrix}$
бинормала	оскулаторна рамнина
$n: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3};$	$R: \begin{matrix} 2(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0 \\ 2x+2y+3z-7=0 \end{matrix}$
главна нормала	ректификациона рамнина

Задача 5. Да се најдат равенките на тангента, нормална рамнина, бинормала, оскулаторна рамнина, главна нормала и ректификациона рамнина, во произволна точка на кривата:

$$x = \frac{1}{2} \sin^2 t, \quad y = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t), \quad z = \sin t.$$

Да се докаже дека секоја од горенаведените прави зафаќа со z -оската константен агол.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \left(\frac{1}{2} \sin^2 t, \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t), \sin t \right), \\ \dot{\vec{r}} &= \left(\frac{1}{2} 2 \sin t \cos t, \frac{1}{2}(1 + \cos^2 t - \sin^2 t), \cos t \right) = \\ &= \left(\sin t \cos t, \frac{1}{2} 2 \cos^2 t, \cos t \right) = \cos t (\sin t, \cos t, 1), \\ \ddot{\vec{r}} &= (\cos^2 t - \sin^2 t, 2 \cos t (-\sin t), -\sin t) = (\cos 2t, -\sin 2t, -\sin t). \end{aligned}$$

Следува:

$$\vec{b} \parallel \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \parallel \left(\begin{vmatrix} \cos t & 1 \\ -\sin 2t & -\sin t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & \sin t \\ -\sin t & \cos 2t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos 2t & -\sin 2t \end{vmatrix} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (-\sin t \cos t + 2 \sin t \cos t, \cos 2t + \sin^2 t, -\sin t \sin 2t - \cos t \cos 2t) = \\
 &\quad (\sin t \cos t, \cos^2 t, -2 \sin^2 t \cos t - \cos^3 t + \sin^2 t \cos t) = \\
 &\quad (\sin t \cos t, \cos^2 t, -\cos t) = \cos t (\sin t, \cos t, -1). \\
 \vec{n} &= \vec{b} \times \vec{t} = \begin{vmatrix} \cos t & -1 \\ \cos t & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & \sin t \\ 1 & \sin t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \\
 &\quad (2 \cos t, -2 \sin t, 0) = 2(\cos t, -\sin t, 0).
 \end{aligned}$$

а) Ако ставиме:

$$A = \frac{1}{2} \sin^2 t, \quad B = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) \quad \text{и} \quad C = \sin t;$$

основните прави и рамнини ќе ги запишеме во обликот:

$$\begin{aligned}
 t: \quad &\frac{x-A}{\sin t} = \frac{y-B}{\cos t} = \frac{z-C}{1}, \\
 N: \quad &\sin t(x-A) + \cos t(y-B) + z-C = 0; \\
 b: \quad &\frac{x-A}{\sin t} = \frac{y-B}{\cos t} = \frac{z-C}{-1}, \\
 O: \quad &\sin t(x-A) + \cos t(y-B) - (z-C) = 0; \\
 n: \quad &\frac{x-A}{\cos t} = \frac{y-B}{-\sin t} = \frac{z-C}{0}, \\
 R: \quad &\cos t(x-A) - \sin t(y-B) = 0.
 \end{aligned}$$

б) Бидејќи $\vec{b}$ и $\vec{n}$ имаат трета координата 0, следува дека лежат во xOy -рамнината. Затоа аголот што го зафаќаат со z -оската е $\frac{\pi}{2}$. Векторот $\vec{k} = (0, 0, 1)$ е ортот на z -оската, додека $\vec{t}_1 = (\sin t, \cos t, 1)$ е носечки вектор на тангентата. Следува:

$$\cos \angle(\vec{t}, z) = \cos \angle(\vec{k}, \vec{t}_1) = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{t}_1|}{|\vec{k}| |\vec{t}_1|} = \frac{0+0+1}{\sqrt{1+\sin^2 t + \cos^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

од каде што добиваме дека: $\angle(t, z) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Значи сите вектори зафаќаат константен агол со z -оската.

12.1. ЛИТЕРАТУРА

- [1] З. Мисајлески, **Векторска и линеарна алгебра**, е-издание на УКИМ, Скопје, 2018;
- [2] З. Мисајлески, **Решени задачи по диференцијално и интегрално сметање I (на функции од една променлива)**, е-издание на УКИМ, Скопје, 2019;
- [3] З. Мисајлески, **Решени задачи по векторска и линеарна алгебра**, е-издание на УКИМ, Скопје, 2019;
- [4] З. Мисајлески, **Решени задачи по диференцијално и интегрално сметање I (на функции од една променлива)**, е-издание на УКИМ, Скопје, 2023;
- [5] З. Мисајлески, Б. Андоновиќ, Т. Димовски, **Збирка задачи по математика I**, за студентите на Технолошко-металургискиот факултет, е-издание на УКИМ, Скопје, 2014;
- [6] Н. Шекутковски, **Математичка анализа I**, Просветно дело, Скопје, 2008;
- [7] Б. Трпеновски, Н. Целаковски, Ѓ. Чупона, **Виша математика, книга I-IV**, Просветно дело, Скопје, 1994;
- [8] С. Георгиевска, Е. Атанасова, **Математика I (Математика, Математика II)**, УКИМ, Скопје, 2002;
- [9] М. Miličić, **Elementi više matematike I (II) део**, Akademska misao, Beograd, 2003 (2008);
- [10] R. Ellis, D. Gulick, **Calculus with analytic geometry**, fourth edition, Harcourt Brace Jovanovich, 1990;
- [11] J. Stewart, **Calculus early transcendentals**, Thomson Brooks/Cole 2007;
- [12] D. G. Zill, D. Warren, S. Wright, **Calculus early transcendental**, Jones and Bartlett publishers, 2011;
- [13] O. Hadžić, Đ. Takači, **Matematičke metode za studente prirodnih nauka**, Novi Sad, 2000;
- [14] М. Штрбоја, **Функције више променливих са визуелизацијом**, Нови Сад, 2016;

[15] L. Stefanović, **Integrirani: Krivolinijski, dvojni, trojni, povrshinski**, za studente tehničkih fakulteta; I (II) deo, SKC Niš, 2008;

[16] И. Шапкарев, **Збирка задачи по математика**, книга I-II, Скопје, 1995;

[17] N. Tomašević, **Zbirka zadataka iz matematike 2**, 2007;

[18] P. Miličić, M. Ušćumlić, **Zbirka zadataka iz više matematike, I-II**, IP Nauka, Beograd, 1984 (1982);

[19] Испитни комбинации по математика 1, 2; материјали обработени на компјутер од вработените на Градежниот факултет, дел од 1970-2003;

[20] Испитни комбинации од соодветното градиво поставени на веб страниците на Градежниот факултет во Загреб, Геодетскиот факултет во Загреб, и други факултети;

[21] С. Геговска Зајкова, Г. Трајковски, А. Бучковска, **Збирка Решени испитни задачи од математика 2**, ФЕИТ, Скопје, 1996;

[22] Б. П. Демидовиќ, **Сборник задач и упражнения по математическому анализу**, Издательство Наука, Москва, 1966;

[23] И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач, **Справочное пособие по математическому анализу, часть первая (вторая)**, „Виша школа“, Киев, 1978 (1986);

[24] В. П. Минорский, **Сборник задач по высшей математике**, Издательство Наука, Москва, 1966;

[25] В. Сотирова Димова-Нанчева, А. Михайлов Витанов, Г. Иванов Караджов, И. Михайлов Михов, В. Борисов Попов, С. Стефанов Тодорова, , **Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част 1-5**, Државно издателство „Техника“, Софија, 1975;

[26] К. Димитрова, П. Паскалов, Ц.Дончев, **Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част 1-3**, Издателство „Архимед 2000“, ЕООД, Софија, 2008;

[27] А. Малчески, **Математика 1 (2)**, Машински факултет, материјали обработени на компјутер.

12.2. СОДРЖИНА

I Дел

Предговор	3
1. Функции од повеќе променливи	
1.1-5. Функции од повеќе променливи	5
1.0. Основни поими за множествата од реалната рамнина	5
1.1. Дефиниција на функциите од две променливи	6
1.2. Скицирање површини	7
1.3. Граница на функција	11
1.4. Непрекинатост	16
1.5. Функции од повеќе променливи	10
2-3. Парцијални изводи	
2.1-4. Парцијални изводи	19
2.1. Парцијални изводи	19
2.2. Диференцијабилност на функција и тотален диференцијал	23
2.3. Парцијален извод од сложена функција	29
2.4. Парцијален извод од имплицитно зададена функција	31
3.1-4. Примена на парцијални изводи	33
3.1. Тангентна рамнина и нормала на површина	33
3.2. Тејлорова формула	38
3.3. Екстремни вредности	39
3.4. Условен екстрем	44
4-5. Диференцијални равенки	
4.0 Диференцијални равенки.	48
4.1-7. Диференцијални равенки од прв ред	51
4.1. Диференцијални равенки од прв ред	51
4.2. Диференцијални равенки со раздвоиви променливи	52
4.3. Хомогена диференцијална равенка	54
4.4. Линеарна диференцијална равенка	56
4.5. Бернулиева диференцијална равенка	59
4.6. Диференцијална равенка во тотален диференцијал	61
4.7. Интегрален множител	66
5.1-7. Линеарни диференцијални равенки	70
5.0. Линеарни диференцијални равенки	70
5.1. Хомогени линеарни диференцијални равенки	71
5.2. Нехомогени линеарни диференцијални равенки	77
5.2.1. Нехомогени линеарни диференцијални равенки	77

5.2.2. Метод на варијации на константи на Лагранж	79
5.2.3. Метод на неопределени коефициенти	83
6. Двоен интеграл	
6.1-9. Двоен интеграл	85
6.1. Дефиниција на двоен интеграл	85
6.2. Неправи двојни интеграл	90
6.3. Својства на двоен интеграл	91
6.4. Пресметување на двоен интеграл	92
6.5. Двоен интеграл во поларни координати	97
6.6. Смена на променливи кај двоен интеграл	101
6.7. Примена на двоен интеграл. Плоштина на рамнински лик.	
Плоштина на површина. Волумен на тело	103
7. Троен интеграл	
7.1-7. Троен интеграл	112
7.1. Дефиниција на троен интеграл	112
7.2. Својства на троен интеграл	115
7.3. Пресметување на троен интеграл	116
7.4. Троен интеграл во цилиндрични координати	119
7.5. Смена на променливи кај троен интеграл	123
7.6. Сферни координати	125
7.7. Примена на троен интеграл. Волумен на тело	126
7.8. Неправи тројни интеграл	127
8. Криволиниски интеграл	
8.1. Криволиниски интеграл од прв тип	128
8.1.1. Дефиниција на криволиниски интеграл од прв тип	128
8.1.2. Својства на криволиниски интеграл од прв тип	130
8.1.3. Пресметување на криволиниски интеграл од прв тип	132
8.1.4. Примена на криволиниски интеграл од прв тип. Плоштина на омотач. Должина на лак на крива	134
8.2. Криволиниски интеграл од втор тип	136
8.2.1. Дефиниција на криволиниски интеграл од втор тип	136
8.2.2. Својства на криволиниски интеграл од втор тип	138
8.2.3. Пресметување на криволиниски интеграл од втор тип	139
8.2.4. Врска меѓу криволининските интеграл од прв и втор тип	141
8.3. Гринова формула	142
8.4. Независност од патот на интеграција	147

9. Површински интеграл	153
9.1. Површински интеграл	153
9.1.1-4. Површински интеграл од прв тип	154
9.1.1. Дефиниција на површински интеграл од прв тип	154
9.1.2. Својства на површински интеграл од прв тип	156
9.1.3. Пресметување на криволиниски интеграл од прв тип	156
9.1.4. Примена на површински интеграл од прв тип. Плоштина на површина	158
9.2.1-4. Површински интеграл од втор тип	159
9.2.1. Еднострани и двострани површини	159
9.2.2. Дефиниција на површински интеграл од втор тип	160
9.2.3. Својства на површински интеграл од втор тип	162
9.2.4. Пресметување на површински интеграл од втор тип	162
9.2.5. Врска меѓу криволиниските интеграл од прв и втор тип	164
9.3. Формула на Гаус-Остроградски	167
9.4. Штоксова формула	170
10. Векторска анализа	
10.1-3. Векторска анализа	175
10.1. Векторски функции	175
10.1.1. Дефиниција на векторска функција	175
10.1.2. Граница и непрекинатост на векторска функција	176
10.1.3. Извод на векторска функција	181
10.2. Скаларно поле (скаларно поле, градиент, извод на вектор во правец)	186
10.3. Векторско поле (векторско поле, дивергенција, ротација, циркулација, флукс)	189
11. Диференцијална геометрија	
11.1-4. Диференцијална геометрија	192
11.1. Тангента и нормална рамнина	192
11.2. Кривина	195
11.3. Природен триедар. Торзија	199
11.4. Основни прави и рамнини	202

II Дел

1. Функции од две променливи	
1.1. Функции од две променливи. Вовед	204
1.2. Формирање	205
1.3. Скицирање дефинициони области	209
1.4. Скицирање површини со ниво линии	214
1.5. Скицирање површини со транслација на површини	215
1.6. Граница на функција	218
2. Парцијални изводи	
2.1. Парцијални изводи од експлицитно зададени функции	222
2.2. Парцијални изводи од повисок ред	227
2.3. Парцијални изводи од имплицитно зададени функции	228
2.4. Парцијални изводи од сложена функција	233
3. Примена на парцијални изводи	
3.1. Тангентна рамнина и нормала на површина	240
3.2. Тејлорова формула	247
3.3. Екстремни вредности	252
3.4. Условен екстрем	255
4. Диференцијални равенки од прв ред	
4.1. Формирање диференцијални равенки	262
4.2. Диференцијални равенки со раздвоиви променливи	263
4.3. Хомогена диференцијална равенка	267
4.4. Линеарна диференцијална равенка	270
4.5. Равенка што се сведува на линеарна со смената $y' = 1/x'$	271
4.5. Бернулиева диференцијална равенка	273
4.6. Диференцијална равенка во тотален диференцијал	275
4.7. Интегрален множител	276
5. Линеарни диференцијални равенки	
5.1. Хомогени линеарни диференцијални равенки со константни коефициенти (ХЛДРКФ)	279
5.2-3. Нехомогени линеарни диференцијални равенки со константни коефициенти (НЛДРКФ)	282
5.2. Метод на неопределени коефициенти	282
5.3. Метод на варијации на константи на Лагранж	288
6. Двоен и троен интеграл	
6.1.1-6. Двоен интеграл	291
6.1.1. Итерирани интеграли. Дефиниција на двоен интеграл	291
6.1.2. Област и граница на интеграција на двоен интеграл	293
6.1.3. Промена на редослед на интеграција на двоен интеграл	296
6.1.4. Пресметување на двоен интеграл	299

6.1.5. Пресметување на двоен интеграл со премин во поларни координати	300
6.1.6. Пресметување на двоен интеграл со промена на редослед на интеграција	302
6.2.1-3. Троен интеграл	303
6.2.1. Итерирани интеграли	303
6.2.1. Промена на редослед на интеграција на троен интеграл	304
6.2.3. Пресметување на троен интеграл	306
7. Примена на двоен и троен интеграл	
7.1. Плоштина на рамнински лик	311
7.2. Плоштина на површина	314
7.3. Волумен на тело	322
8. Криволиниски интеграл	
8.1. Криволиниски интеграл од прв тип	332
8.2. Криволиниски интеграл од втор тип	338
8.3. Гринова формула	343
8.4. Независност од патот на интеграција	248
9. Површински интеграл	
9.1. Површински интеграл од прв тип	350
9.2.. Површински интеграл од втор тип	355
9.3. Формула на Гаус-Остроградски	360
9.4. Штоксова формула	363
10. Векторска анализа	
10.1. Скаларно поле (скаларно поле, градиент, извод на вектор во правец)	367
10.2. Векторско поле (векторско поле, дивергенција, ротација)	371
10.3. Криволиниски интеграл на векторско поле. Циркулација	376
11. Диференцијална геометрија	
11.1. Крива	380
11.2. Природна параметризација	384
11.3. Кривина. Природен триедар. Торзија	385
11.4. Рамнинска крива	391
11.5. Основни прави и рамнини	393
12. Литература. Содржина	
12.1. Литература	399
12.2. Содржина	401

Ниту еден дел од оваа публикација не смее да биде репродуциран на било кој начин без претходна писмена согласност на авторот

Е-издание: [https://www.ukim.edu.mk/e-izdaniya/GF/Diferencijalno i integralno smetanje II \(na funkcii od povekje promenlivi\).pdf](https://www.ukim.edu.mk/e-izdaniya/GF/Diferencijalno_i_integralno_smetanje_II_(na_funkcii_od_povekje_promenlivi).pdf)