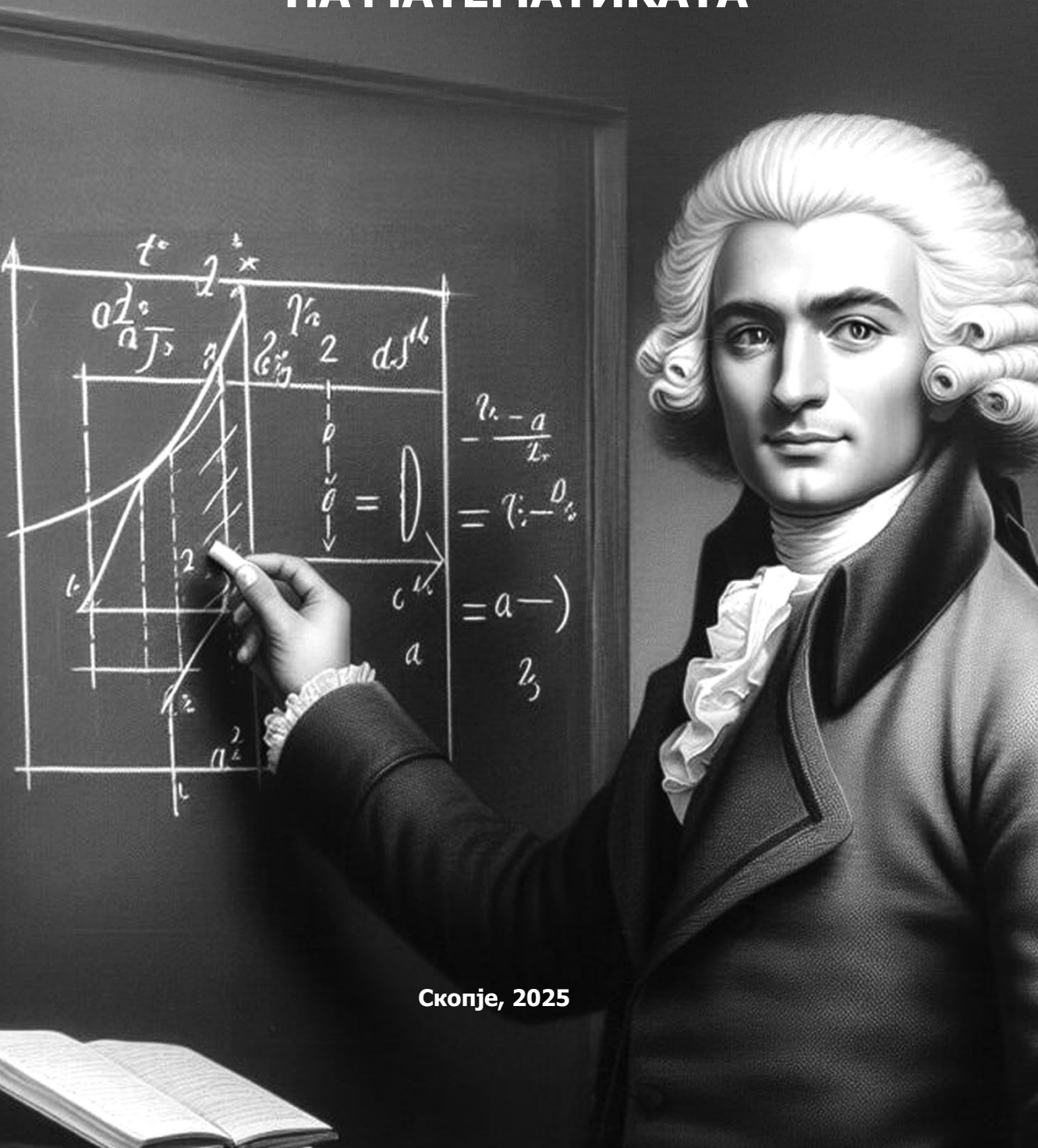


Д-р Валентина Гоговска

# ИСТОРИЈА НА МАТЕМАТИКАТА



# Скопје, 2025

**Издавач:**

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје  
Бул. „Гоце Делчев“ бр. 9, 1000 Скопје  
www.ukim.edu.mk

**Уредник за издавачка дејност на УКИМ:**

проф. д-р Биљана Ангелова, ректор  
Уредник на публикацијата:  
ПМФ Факултет– Скопје

**Рецензенти:**

1. проф. д-р Љупчо Настовски
2. проф. д-р Слаѓана Брсакоска

**Техничка обработка:**

Ненад Христоски

**Лектура на македонски јазик:**

Дејан Василевски

**Илустратор:**

Ненад Христоски

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51:930(075.8)

ТРЕНЧЕВСКИ, Костадин

Историја на математиката [Електронски извор] / Костадин Тренчевски, Валентина  
Гоговска ; [илустратор Ненад Христоски]. - Скопје :  
Универзитет "Св. Кирил и Методиј", 2025

Начин на пристапување (URL):

<https://www.ukim.edu.mk/e-izdaniya/PMF/Istorija-na-matematikata.pdf>. - Текст во PDF формат,  
содржи 117 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден  
20.02.2025. - Библиографија: стр. 117

ISBN 978-9989-43-526-3

1. Гоговска, Валентина [автор]

а) Математика -- Историја -- Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 65319941

## Вовед

Добре дојдовте на патувањето низ историјата на математиката. Оваа книга ќе ве поведе низ вековите, да го истражime развојот на математиката како една од најстарите и најважните науки. Историјата на математиката е преполна со револуции, откритија и генијалности на разни светски научници. Од древните Вавилонци и Египќани преку старите Грци и арапските математичари, до современите научници и компјутерските експерти, математиката била придонес за иновација, напредок и развој во различни области на човековиот живот. Во текот на нашето историско патување ќе се запознаеме со големите математичари и теоретичари кои со своите резултати го измениле светот и дале свој придонес за математиката. Ќе споменеме дел нивни теореми со докази, но и ќе ги разгледаме нивните животи и влијанието што го оставиле. Оваа книга не само што ќе ги презентира математичките постигнувања туку и ќе ви овозможи да се запознаете со моќта на математиката и нејзината примена во светот околу нас. Запознавајќи се со решенијата на математичарите, ќе стекнете длабоко разбирање за математичките поими и значењето на математиката во секојдневниот живот.

Историја на математиката е книга што го претставува развојот на математиката и нејзиниот напредокот последователно низ историјата од почетоците, па сè до денешно време. Во неа ќе се запознаете со различните култури и цивилизации што имале значаен придонес во математиката, како и со големите математичари и нивните достигнувања.

Книгата се сосредоточува на математиката како дисциплина и на методите и концептите што се користат за решавање на математички проблеми. Таа почнува со древните цивилизации, како Месопотамија и Египет, каде што се развиле основите на алгебрата, геометријата и астрономијата.

Потоа, книгата продолжува со старогрчката математика, вклучувајќи ги големите математичари како Питагора, Евклид и Архимед. Овие математичари имале големо влијание во развојот на алгебрата, геометријата и математичката филозофија. Во следната глава, книгата го истражува развојот на математиката во арапската и индиската култура, каде што се развиле алгебрата и арапските броевите што ги користиме и денес.

Потоа, авторите ги обработуваат големите промени што се случиле во ренесансата и по неа, кога математиката станала наука со свои правила и методи.

Во ова време, најзначајните математичари биле Њутн и Лајбниц, кои го откриле диференцијалното сметање, и Ојлер, кој придонел во развојот на алгебрата, геометријата и теоријата на броевите.

Кое било објаснување за математиката не би било комплетно без обраќање на внимание на современите достигнувања и откритија во 20 и 21 век. Книгата завршува со нив и со преглед на современите области што се изучуваат во математиката, како теоријата на игри и криптографијата.

Во првиот додаток докажани се некои теореми што имаат свој придонес во историјата на математиката, а во вториот додаток на книгата оставен е простор за откритијата и постигнувањата на жените во науката математика. Една од најзначајните математичарки во историјата на математиката е Хипатија, која живеела во четвртиот век. Таа е позната по својата работа во геометријата и алгебрата. Хипатија имала значајно влијание врз своите современици и на нивното согледување на математиката. Друга значајна математичарка е Емил Ноет, која живеела во 19 век. Таа била позната по своите работи во аналитичката геометрија и теорија на броеви. Емил Ноет дошла до некои значајни откритија во оваа област, вклучувајќи ги правилата на геометриска репрезентација на кубните корени. Софи Жермен е уште една од најзначајните математичарки во историјата на математиката. Таа живеела во 19 и 20 век и имала значаен придонес во областите на алгебрата и теоријата на броеви. Софи Жермен станала првата жена која освоила Филдсов медал, кој е најпрестижното признание во областа на математиката.

Филдсовиот медал е награда за млади истражувачи од математиката до 40 години, а е воведена за да се стимулираат младите математичари и е во ранг на Нобеловата награда, која не се доделува за математика. Овие математичарки имале значаен придонес во математиката и нивните работи и резултати се од суштинско значење за сегашната математичка област.

Се надеваме дека оваа книга ќе ви биде интересна, корисна и инспиративна и дека ќе ве поттикне на љубовна магија со математиката и откривањето на нови математички резултати.

Им благодариме на сите личности од нашата научна и културна средина за укажаната помош и поддршка при изработка на книгава, како и за корисните инструктивни совети. Посебна благодарност им изразуваме на рецензентите Љупчо Настовски и Слаѓана Брсакоска за нивното влијание и нивните совети за подобрување на книгава, како и на студентките Ивана Ташковска и Ева Ристевска, кои дадоа свој придонес за оваа книга.

## СОДРЖИНА

|                                                          |    |
|----------------------------------------------------------|----|
| ПРВИ ПОЧЕТОЦИ                                            | 7  |
| СТАРИОТ ИСТОК                                            | 9  |
| Египет                                                   | 10 |
| Месопотамија                                             | 11 |
| Староиндиска математика                                  | 13 |
| Старокинеска математика                                  | 13 |
| СТАРА ГРЦИЈА                                             | 15 |
| Софисти                                                  | 15 |
| Питагорејци                                              | 17 |
| Платонова школа и Демокритова школа                      | 19 |
| Античката наука по освојувањата на Александар Македонски | 20 |
| Математиката и астрономијата во стара Грција             | 23 |
| Трет период на античката цивилизација                    | 24 |
| ИСТОК ПО ПРОПАЃАЊЕТО НА СТАРОГРЧКОТО ОПШТЕСТВО           | 27 |
| Индија                                                   | 27 |
| Месопотамија                                             | 28 |
| Арапска математика                                       | 29 |
| Математиката во исламските региони                       | 29 |
| Кинеска математика                                       | 30 |
| ПОЧЕТОЦИ ВО ЗАПАДНА ЕВРОПА                               | 32 |
| Универзитетот во Болоња                                  | 35 |
| СЕДУМНАЕСЕТТИ ВЕК                                        | 38 |
| За првиот развој на аналитичката геометрија и анализата  | 40 |

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| ОСУМНАЕСЕТТИ ВЕК                                          | 47  |
| Теорија на веројатност                                    | 53  |
| Англиски математичари                                     | 53  |
| ДЕВЕТНАЕСЕТТИ ВЕК                                         | 57  |
| Неевклидова геометрија                                    | 68  |
| Проективна и синтетичка геометрија                        | 69  |
| Алгебарска геометрија                                     | 70  |
| Аритметизација на математиката                            | 71  |
| Математичари од Велика Британија и Ирска                  | 72  |
| Италијански математичари                                  | 74  |
| Развојот на математиката во последните децении од XIX век | 75  |
| Хилбертова програма за математиката во XX век             | 78  |
| Математичките достигнувања на XX век                      | 80  |
| Додаток 1                                                 | 87  |
| Додаток 2                                                 | 111 |
| Литература                                                | 117 |

# I

## ПРВИ ПОЧЕТОЦИ

Нашите првобитни претстави за броевите и облиците припаѓаат на многу далечната епоха на старото камено време – палеолитот. Во текот на стотина илјади години луѓето живееле во пештери во услови што малку се разликувале од тие на животните. Нема сомнение дека цртежите најдени во пештерите во Франција и Шпанија пред 5000 години откриваат извонредно чувство за облик. Пред да настапи преминот од просто собирање храна до активно производство на храна во земјоделството, луѓето малку напредувале во сфаќањето на нумеричките големини и просторните облици. Значаен пресврт во тој поглед се случувал пред приближно 10000 години. Тој фундаментален пресврт претставува почеток на новото камено време – неолитот. Со развојот на производството дошло до трговска размена помеѓу одделни населби. Секако, тоа довело до формирање на поимот број.

Поголем дел од броевите биле формирани со помош на собирање и одземање: на пример бројот 3 како  $2 + 1$ , бројот 4 како  $2 + 2$ , бројот 5 како  $2 + 3$ , бројот 9 како  $10 - 1$  итн.

**Пример.** Кај едно племе на реката Мурај постоеле означувањата: 1 = енеа, 2 = петчевал, 3 = петчеваленеа, 4 = петчевал-петчевал.

Најчесто употребувани биле системите со основа 5, 10 и 20. Броевите биле запишувани со помош на снопови, запирки, јазли, камчиња и слично. На пример, бројот 14 се претставувал како „„ „„ „„ „„ „. Не е правилно сфаќањето дека сметањето настанало со сметање со помош на прстите, бидејќи тоа настанало подоцна, на одреден степен од општествениот развој. По неговото појавување, станало можно изразувањето на поголемите броеви.

Така настанал примитивниот тип на аритметиката. На пример,  $14 = 10 + 4$  или  $14 = 15 - 1$ . Бројот 20 не се изразуval како  $10 + 10$ , туку само  $2 \times 10$ . Подоцна во употреба биле воведени дробките, иако нивната примена била многу поретка. Најчесто употребуваната дробка била  $1/2$ , а поретко биле користени  $1/3$  и  $1/4$ . Поимот за  $1/2$  притоа настанал независно од поимот за природен број. Со развој на човековата цивилизација, се јавила потреба за мерење плоштина и волумен на предмети.

Треба да напоменеме дека тогаш единиците за мерење не биле прецизни и често биле изведувани од димензиите на човековото тело:

палец, стапало, лакот. Во неолитот, луѓето го развиле осетот за геометриски облици. Неолитските орнаменти биле пријатни за око затоа што во нив била содржана симетрија, паралелност, нумерички односи, како и свети броеви. Исто така, постоеле магични броеви, како што се броевите 3, 4 и 7, и магични фигури, на пример, ѕвезда петокрака.

## II

### СТАРИОТ ИСТОК

Во текот на V, IV и III милениум п.н.е. се појавиле нови и посовршени облици на општествено уредување, кои се базирале врз јакнење на општествените заедници. Тие биле формирани на бреговите на Африка и Азија, во суптропските појаси и околу нив. Тоа биле бреговите на реките Нил, Тигар, Еуфрат, Инд, подоцна и Ганг, Хоанг Хо, а уште подоцна и Јангцекјанг. Во тие услови развојот течел бавно, а периодите на културен подем биле раздвојувани со векови на стагнација и назадување.

Источната математика настанала како применета математика, чија цел била да ги поедностави календарските пресметки, организацијата на општествените работи и собирањето на даноците. На почетокот главни области на математиката биле сметањето (аритметиката) и мерењето. Со текот на времето, од аритметиката израснала алгебрата, како резултат на природниот развој на науките што биле негувани и усовршувани во училиштата за писари. Макар што трговијата се развивала интензивно во општествените заедници на стариот Исток, земјоделството и понатаму претставувало економско јадро на тоа општество, а стопанската основа ја сочинувале селата што биле изолирани. Никогаш немало тешкотии кога требало да се утврди разликата меѓу египетската, месопотамската, кинеската и индиската математика, иако тие по својата аритметичко-алгебарска природа се многу слични. Тешко е прецизно да се одреди времето на новите откритија во рамките на една култура. Поради статичната природа на општествениот поредок, научните знаења се чувале без промени со векови, па и милениуми. Откритијата до кои се доаѓало во рамките на една населба можеле да бидат непознати за другите подрачја. Местата каде што се чувале научните и техничките знаења можеле да бидат уништени со војните, при смена на династиите или со поплави. На пример, во Кина во 221 г. п.н.е. Чјин Ши Хуанг наредил да се уништат сите научни книги, а подоцна многу податоци биле запишувани по сеќавање. Втора тешкотија во утврдувањето на времето кога се доаѓало до нови откритија е зачуваноста на материјалот што е користен за пишување.

Египќаните користеле папирус и затоа голем дел од нивната писменост е зачуван благодарение на сувата клима. Народите на Месопотамија печеле глинени плочки што биле практично неуништливи. Кинезите и Индијците користеле помалку траен материјал: дрвена кора и бамбус. Подоцна, во II век од н.е. Кинезите почнале да користат и хартија. Затоа, освен податоците од Египет и Месопотамија, речиси ништо не е зачувано до денес. Најбогати податоци ни се на располагање од Египет, благодарение на Рајндовиот

папирус, кој е откриен во 1858 година, а напишан околу 1650 г. п.н.е. и содржи материјал од многу старо време.

Последните децении податоците за вавилонската математика значително се збогатени со дешифрирањето на голем број глинени табlici од страна на О. Најгенбауер и Ф. Тјуро-Данжен. Сега е јасно дека *вавилонската математика* била многу поразвиена во споредба со нејзините источни партнери.

## Египет

Извор на поголем број податоци за египетската математика се двата математички папируси: Рајндовиот, кој содржи 85 задачи, и Московскиот, кој содржи 25 задачи и е два века постар. Постојат и помали папируси од поново време, дури од римскиот период, и според постапките што ги содржат не се разликуваат од Рајндовиот и Московскиот папирус. Математиката во овие папируси се базира на десетичниот броен систем, кој е ист како и римскиот начин на пишување броеви што нам ни е познат денес. Египќаните граделе аритметика во која доминирало собирањето.

На пример  $13 * x = x + 4x + 8x$ .

Така, производот на 13 и 11 се одредува на следниот начин ( $13=1+4+8$ ) :

$$\begin{array}{r} *11 \\ 22 \\ *44 \\ *88 \\ \hline 143 \end{array} \quad \text{Добиениот резултат е 143.}$$

Најважна особина на египетската аритметика претставуваат операциите со дробки. Сите дробки главно се од облик  $1/n$  и биле пишувани како  $\bar{n}$  или со некој друг помошен знак. Единствено за  $1/2$  и  $2/3$  постоеле специјални симболи. Во Рајндовиот папирус се наоѓаат табlici што содржат разложување на броевите  $\frac{2}{n}$ , ( $n$  непарен број) од  $n = 5$  до  $n = 101$  како збир на прости дробки.

На пример:

За  $n = 5$  претставувањето е:  $\overline{315} \left( \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \right)$

За  $n = 59$  претставувањето е:  $\overline{36} \overline{236} \overline{531} \left( \frac{2}{59} = \frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531} \right)$

Принципот на ваквото разложување не е јасен, но постојат интересни теории што објаснуваат на кој начин египетските специјалисти доаѓале до овие резултати. Ваквото разложување секако претставува одредена

математичка вештина. Многу од задачите се едноставни и се сведуваат на линеарни равенки, на пример: Едно количество со неговите  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{7}$  собрани заедно даваат 33. Кое е тоа количество?

Одговорот е  $14\frac{28}{97}$ , а напишан преку основни дробки одговорот изгледа вака:

$$14 \frac{\overline{4}}{\overline{97}} \frac{\overline{56}}{\overline{679}} \frac{\overline{776}}{\overline{194}} \frac{\overline{388}}{\overline{388}}$$

Во некои од задачите, на пример, се покажува интерес за теорија. Задача во која треба 100 леба да се поделат на 5 луѓе, така што деловите образуваат аритметичка прогресија и седмина од збирот на трите најголеми дела да биде еднаква на збирот на двата најмали дела. Се сретнува и задачата за 7 дома, а во секој од нив живеат 7 мачки, од кои секоја јаде по 7 глувци итн. што покажува дека знаеле и за геометриска прогресија. Некои задачи од геометриска природа се однесуваат, пред сè, на мерењето. Плоштина на триаголник се пресметувала како полупроизвод на основата по висината, а плоштината на круг чиј дијаметар е  $d$  се одредувала преку формулата  $(d - (\frac{d}{9}))^2$  што за бројот  $\pi$  дава приближна вредност  $\frac{256}{81} \approx 3,1605$ . Исто така, наоѓаме и некои формули за пресметување волумен на некои тела: коцка, паралелопипед и цилиндар. Притоа, сите тие тела се разгледуваат како садови наменети првенствено за жито. Најважен резултат до кој дошле Египќаните претставува формулата за волумен на правилна пресечена четиристрана пирамида:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

со рабови  $a$  и  $b$  на двете основи.

Се смета дека на Египќаните не им била позната Питагоровата теорема. На градителите на пирамиди од 2630 до 2610 г. п.н.е. честопати им се припишува неосновано тврдење за познавање на неверојатни резултати до кои можело да дојде само една високоразвиена цивилизација. Така, прецизни математички и астрономски податоци не треба да му се припишуваат на народ кој само што излегол од каменото време. Сите пронајдени текстови покажуваат дека египетската математика и астрономија биле сè уште примитивни.

## Месопотамија

Со преминот кон математиката на Месопотамија се доаѓа до многу повисоко ниво во споредба со она што го постигнала египетската математика кога било. Најстарите текстови од околу 2100 г. п.н.е.

покажуваат на висока нумеричка техника. Тука се среќаваат клинесте симболи за означување на броевите 1, 60, 3600,  $60^{-1}$ ,  $60^{-2}$  итн. Тие работеле во шеесетичен броен систем. Додека Египќаните во тоа време секоја единица од повисок ред ја означувале со нов симбол, Сумерците користеле ист симбол, но вредноста на единицата била одредена со положбата, што значи дека нивниот систем бил позициски.

Така, на пример:

$$11 \text{ го означувал бројот } 60 * 1 + 1 = 61$$

$$563 \text{ го означувал бројот } 5 * 60^2 + 6 * 60 + 3 = 18363$$

Нивниот шеесетичен броен систем е аналоген на сегашниот декаден. Во таквиот начин на опишување на броевите имало многу неодредености. Така, 5, 6, 3 можело да значи  $5 * 60^1 + 6 * 60^0 + 3 * 60^{-1} = 306 + \frac{1}{20}$ , а можело да значи и како  $5 * 60^2 + 6 * 60 + 3$ , па за точно одредување било потребно да се тргне од контекстот. Дополнителна неодреденост се јавува во употребата на празното место што понекогаш можело да значи нула, така што 11,5 можело да стои и за  $11 * 60^2 + 5$ . Понекогаш е користен и посебен симбол за нулата, но тој влегол во употреба дури во времето на персиската епоха.

Шеесетичниот систем и позициските бројни системи се користат неизменети и во денешно време. Нашата сегашна поделба 1 час = 60 мин. =  $60^2$  сек. потекнува од Сумерците, а исто така и нашата поделба на кругот на  $360^\circ$ ,  $1^\circ = 60'$  и  $1' = 60''$  потекнува од нив. Се претпоставува дека Индијците, како и Грците, се запознале со овие симболи преку карванските патувања низ Вавилон. Вавилонската традиција имала влијание во формирањето на сите подоцнежни позициски системи.

Една група текстови напишани со клинесто писмо припаѓаат на периодот на првата вавилонска династија, кога во Вавилон владеел царот Хамураби, 1950 г. п.н.е. Во тоа време аритметиката прераснала во алгебра. Додека Египќаните знаеле да решаваат едноставни линеарни равенки, во тоа време во Месопотамија знаеле да решаваат квадратни равенки, равенки што се сведуваат на кубни и биквадратни равенки и системи со две непознати (квадратна и линеарна равенка).

Во вавилонската геометрија од семитскиот период (кога Евреите ги покориле староседелците Сумерци) биле познати формулите за пресметување волумен на едноставни тела и плоштина на праволиниски фигури, но формулата за волумен на пресечена пирамида не била откриена. Питагоровата теорема им била позната.

Основната карактеристика на таа геометрија, пред сè, е нејзиниот алгебарски карактер. Ова се однесува и на подоцнежните текстови, особено

на текстовите од третиот период, т.е. нововавилонската и персиската епоха и епохата на Селевкидите од  $\approx 600$ г. п.н.е. до 300 г. н.е.

Во вавилонската нумеричка аритметика вршени се многу пресметки со помош на таблици, меѓу кои и таблици за множење, реципрочни величини, квадратни и кубни корени. Во нив има и добри апроксимации: за  $\sqrt{2}$  се зема  $1 + \frac{5}{12}$ . За споредба,  $\sqrt{2} = 1,4142$ , а  $1 + \frac{5}{12} = 1,4167$ . За бројот  $\pi$  се користела библиската  $\pi = 3$ , но користена е и подобра апроксимација  $\pi = 3 + \frac{1}{8}$ . Во текстовите на клинестото писмо има и задачи од сложено интересно сметање. На пример, за кое време ќе се удвои некоја сума пари ако е зададена годишна каматна стапка од 20%. Тоа се сведува на равенката  $(1 + \frac{20}{100})^x = 2$ , а таа се решавала на тој начин што се забележувало дека  $3 < x < 4$ , помеѓу третата и четвртата година и се применува линеарна интерполација.

Во Вавилонската школа за државни службеници математиката била дел од наставната програма за многу генерации и иако власта преминувала во нови владетели – Кситите, Асирците, Миканите и Персијците, оваа традиција е постојано негувана.

## Староиндиска математика

Староиндиската математика имала влијание од Грците, Кинезите и Вавилонците. Научниците од Кина и Индија ја нагласуваат големата старост на нивната математика, но за жал нема математички текстови од пред новата ера со што би се потвредило ова. Најстарите текстови датираат од првите векови на новата ера. Утврдено е дека старите Индијци користеле декаден систем, но без позицискиот принцип. Така, постоеле посебни знаци за броевите 1, 2, ... , 9, 10, 20, ... , 90, 100, 200, ... , 900, 1000, 2000, ... таканаречени броеви брахми. Тие потекнуваат од околу 300 г. п.н.е.

Исто така, најдени се партикуларни случаи на Питагоровата теорема и некои интересни апроксимации:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} \approx 1,4142156$$

$$\pi = 4 \left( 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8} \right)^2 = 18(3 - 2\sqrt{2}) \approx 3,088$$

Во светите книги за бројот  $\pi$  најдена е вредност  $\sqrt{10}$ .

## Старокинеска математика

Бројниот систем во Кина отсекогаш бил декаден, при што и позицијата на цифрите е важна. Значи, доволни биле девет знаци за цифрите 1, 2, ... ,

9, а за нулата се користело празно место. Специјален знак за нулата бил воведен во XIII век во новата ера. Познати се девет книги од периодот од 200 г. п.н.е. до 220 г. н.е.: „Девет книги за математичката вештина“ (Цзју Чжан Суан Шу) и Чжоу-Би. Првата книга е чисто математичко дело, карактеристично за следниот милениум.

Во првата книга се среќава познатиот магичен квадрат (ло шу):

|   |   |   |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Исто така, во првата книга се сретнуваат задачи од алгебарски равенки со нумерички коефициенти, системи линеарни равенки, пресметување на квадратен и кубен корен. Тука по првпат во историјата на математиката се јавуваат и негативни броеви. Втората книга е делумно математичка, но во неа е интересно што се разгледува Питагоровата теорема. Во кинеската математика досега се гледа континуитет и негување на традицијата, за разлика од египетската и вавилонската математика, кои припаѓаат на исчезнатите цивилизации.

Во севкупната математика на стариот Исток нема обиди да се докажат некои ставови, туку само се даваат упатства и правила: направи го тоа и тоа, направи така и така. Не знаеме како доаѓале до теоремите, на пример, како Вавилонците ја откриле Питагоровата теорема.

### III

## СТАРА ГРЦИЈА

Еден милениум п.н.е. во државите околу Средоземното Море настанале големи промени, како на економски, така и на политички план. Тоа се случувало во немирно време со војни и преселби на народите. Околу 900 г. п.н.е. настанало царството на Миносите и Хетската држава. Египет и Вавилон во овој период многу ослабнале и на сцена настапиле нови народи, меѓу кои водечки биле Евреите, Асирците, Феничаните и Грците. Во тоа време се појавиле две значајни новини: несоодветното писмо на стариот Исток било заменето со многу попростапно алфабетско писмо и почнале да се користат ковани пари. Ова помогнало во развојот на трговијата. Со стабилизирање на ситуацијата, стариот Исток закрепнал и главно останал верен на своите традиции, а истовремено се создале услови за една потполно нова цивилизација, позната како античка цивилизација.

За современата математика од тоа време карактеристично е тоа што таа не го поставува прашањето *како* да се направи нешто, туку се концентрира на современото научно прашање *зошто* е тоа така. Според преданијата, татко на грчката математика е милетскиот трговец *Талес*, кој во првата половина на VI век п.н.е. патувал во Вавилон и Египет.

На почетокот, Грците се занимавале со математика, имајќи една основна цел – да се дознае какво место зазема човекот во вселената, и тоа во рамките на некоја рационална шема. Математиката придонела идеите да се поврзат логички и да се откријат основните принципи. Во споредба со другите науки, таа достигнала највисоко ниво на теоретски развој. За жал, не постојат податоци за тој ран период од развојот на математиката. Ракописите што се зачувани припаѓаат на епохата на христијанството и исламот. Со реконструкција на текстовите од IV век п.н.е., како и текстовите од поново време, денес располагаме со делата на *Евклид*, *Архимед*, *Аполониј* и други големи антички математичари. Овие текстови содржат целосно изградена математичка наука, иако е тешко прецизно да се следи текот на историскиот развој.

### Софисти

Во втората половина на V век п.н.е., во времето на Перикле, постојано растело влијанието на демократските елементи. Тие биле движечка моќ на економската и воената експанзија. Околу 430 г. п.н.е., Атина станала центар не само на старогрчките полиси (градови) туку и центар на нова и интересна цивилизација – златната доба на Грција. Во рамките на социјалната и политичката борба, филозофите и наставниците создавале теории, а со тоа и нова математика. Прва група на *критички ориентирани филозофи* во

историјата се таканаречените софисти. Тие ги разгледувале математичките проблеми за да ја објаснат нивната суштина, а не заради практична корист и биле ослободени од традицијата. Таквиот пристап им овозможил на софистите да дојдат до основите на егзактното мислење.

Меѓу нив се вбројува и познатиот јонски филозоф *Хипократ* од *Хиос*. Хипократовата анализа покажува дека математичарите од златната доба на Грција имале изградено систем на рамнинска геометрија, каде што во целост се применува принципот на логичкиот заклучок од едно тврдење кон друго. Врз основа на насловот на книгата „Елементи“ (Stoicheia) може да се заклучи дека биле поставени темелите на аксиоматиката. Таков наслов имале и сите грчки аксиоматски дела, вклучувајќи го и Евклидовиот наслов. Хипократ испитувал плоштини на рамнински фигури. Тој учи дека плоштините на слични кружни отсечоци се однесуваат како квадратите на нивните радиуси. Исто така ја познавал и Питагоровата теорема. Целото негово дело би можело да му се припише на Евклид, да не живеел Хипократ еден век пред него. Во тоа време централно место заземале следните проблеми:

1. Квадратура на кругот (да се најде квадрат чија плоштина е еднаква на плоштината на даден круг);
2. Трисекција на агол (даден агол да се подели на три еднакви дела);
3. Дупликација на коцката (да се најде коцка чиј волумен ќе биде двојно поголем од волуменот на дадена коцка).

Денес, добро се знае дека овие проблеми се нерешливи со помош на шестар и линијар. Иако тие не успеале да дојдат до правилниот заклучок на овие проблеми, проучувајќи ги овие проблеми дошле до нови сознанија меѓу кои откриени се конусните пресеци, некои криви од трет и четврти ред и трансцендентната крива наречена квадратриса. Инаку, денес се знае дека еден геометриски проблем од конструкции има решение само со помош на шестар и линијар ако и само ако алгебарското решение ги содржи само четирите основни операции и операцијата квадратен корен. Тоа е последица од фактот што со помош на шестар и линијар ние по геометриски пат решаваме само линеарни и квадратни равенки. Затоа, првиот проблем (квадратура на кругот) се сведува на конструирање отсечка со должина  $a\sqrt{\pi}$ , ако е дадена отсечка со должина  $a$ . Тоа не може да се постигне, бидејќи бројот  $\sqrt{\pi}$  не е можно да се изрази со четирите основни операции и квадратен корен. Третиот проблем, дупликација на коцка се сведува на конструкција на отсечка со должина  $a\sqrt[3]{2}$ , ако е дадена отсечка со должина  $a$ . Во овој случај тоа не може да постигне затоа што  $\sqrt[3]{2}$  не може да се изрази со помош на четирите основни операции и операцијата квадратен корен, поаѓајќи од множеството на природните броеви. Вториот проблем би бил решен доколку успееме да најдеме  $\sin \frac{\alpha}{3}$  за даден агол  $\alpha$ , односно ако

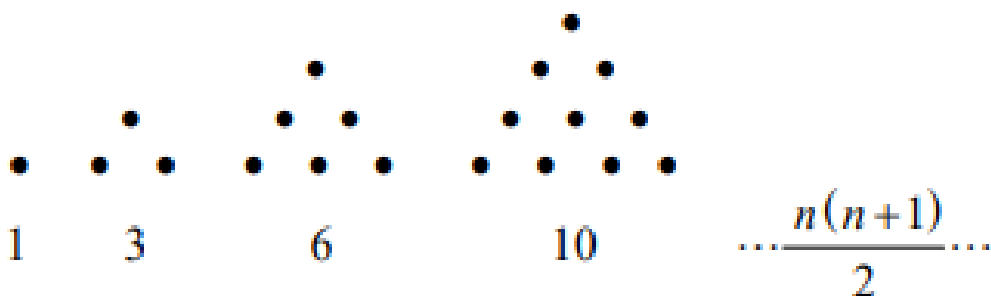
знаеме  $\sin \alpha$ . Но,  $\sin \frac{\alpha}{3}$  во своето решение содржи кубен корен и тоа не може да се изрази преку основните операции и квадратен корен. Затоа и вториот проблем е нерешлив со помош на шестар и линијар.

## Питагорејци

Се смета дека од групата софисти, кои во одредена мера биле поврзани со демократското движење, се одвоила група филозофи со посебно интересирање за математиката и пристапила кон аристократскиот слој. Тие себеси се нарекувале *питагорејци*, во чест на нивниот учител *Питагора*.

За Питагора се претпоставува дека бил мистик, научник и државник од аристократскиот слој. Додека софистите главно ја нагласувале реалната промена, питагорејците настојувале во природата и општеството да најдат непроменливо. Трагајќи по вечните закони на вселената, тие ја изучувале *геометријата*, *аритметиката*, *астрономијата* и *музиката* (квадривиум). Водечки претставник на питагорејците бил *Архит*, кој живеел околу 400 г. п.н.е. Питагорејската математика била главно спекулативна. Броевите ги делеле на класи: парни, непарни, парно-парни, непарно-непарни, прости и сложени, совршени, пријателски, триаголни, четириаголни итн. Најинтересни резултати постигнале во проучувањето на *триаголните броеви*, кои ја поврзувале аритметиката и геометријата.

Имено, триаголни броеви се:



Нашиот термин *квадратни броеви* потекнува од нив:



Броевите станале основа на нивната филозофија на вселената. Настојувале сите односи да ги сведат на нумерички односи (сè е број). Тие работеле со аритметичка, геометриска и хармониска средина (пропорција). Точката за нив била *единственост во положбата*.

На питагорејците им биле познати некои особини на правилните многуаголници и правилните полиедри. Питагоровата теорема ја припишувале на својот учител. Според нив, Питагора, по откривањето на теоремата, како жртва на боговите принел сто бика во знак на благодарност. Всушност, Питагоровата теорема им била позната уште на Вавилонците, но можно е дека доказот на теоремата бил даден од питагорејците. Најзначајно од откријата што се припишуваат на питагорејците било откриетието на рационалност во вид на несомерливи отсечки. На што е еднаква геометриската средина на 1 и 2? Барајќи одговор на ова прашање, тоа води кон изучување на односот на страната и дијагоналата на квадратот и најдено е дека тој однос не изразува „број“. Вообичаениот доказ дека  $\sqrt{2}$  не е *рационален број* всушност му припаѓа на Аристотел.

Излезот од противречноста не бил баран во проширувањето на поимот за број, туку во негирање на теоријата на броеви во такви случаи и барање синтеза во геометријата. Освен тоа, се појавила и друга тешкотија кога почнале да се занимаваат со бесконечните процеси, на пример, при определувањето волумен на пирамида. Откриетието на овие проблеми му се припишуваат на *Зенон Елински* околу 450 г. п.н.е. Зеноновите парадокси доаѓале во противречност со некои стари и интуитивни претстави за бесконечно мали и бесконечно големи броеви. Отсекогаш се сметало дека збир на бесконечно многу големина може да се направи произволно голем, па дури и да е секоја од тие големина бескрајно мала ( $\infty \times \varepsilon = \infty$ ) и дека збир на конечно и бесконечно многу големина од нулти ред е нула ( $\infty \times 0 = 0, n \times 0 = 0$ ). Зеноновата критика била вперена против таквите претстави и неговите четири парадокси познати како *Ахил*, *Стрела*, *Дихотомија* и *Стадион*, предизвикале огромно возбудување што и ден-денес не е смилено. Во нив се доаѓа до противречност за движењето и времето, но не се настојува да се отстранат тие претстави. Размислувањата во парадоксите *Ахил* и *Дихотомија* се следните.

**Ахил:** Ахил и желката се тркаат, но така што желката како побавна има извесна предност пред Ахил во почетниот момент на стартот од трката.

На прашањето дали Ахил ќе ја стигне желката се добиваат две спротивставени мислења. Ахил како побрз логично е дека кога-тогаш ќе ја стигне желката. Меѓутоа, од друга страна, додека Ахил стигне до почетната положба на желката, таа ќе отиде понапред. Додека стигне до нејзината нова положба таа ќе отиде уште понапред и така Ахил никогаш нема да ја стигне желката, т.е. потребно му е бесконечно време да ја стигне. Гледано од аспект на денешната математика, времето потребно на Ахил да ја стигне желката е збир од бесконечно многу времиња, но бидејќи добиениот ред е геометриска прогресија и е конвергентен, тоа време е конечно.

**Дихотомија:** Сакам да поминам пат од А до В по права линија. За да стигнам до В, треба прво да ја поминам половината  $AB_1$ . За да стигнам во  $B_1$  морам најпрвин да стигнам до  $B_2$ , која се наоѓа на половина пат до  $B_1$  и така до бескрајност, што значи дека движењето никогаш нема да почне. Зеноновите расудувања покажале дека секоја конечна отсечка може да се подели на безброј мали отсечки, секоја што има конечна должина. Се смета, според Танери, дека Зеноновите размислувања предизвикале вистински логички скандал за криза на грчката математика.

## Платонова школа и Демокритова школа

Со падот на Атина во 404 г. п.н.е. паралелно дошло до криза во грчката математика. Падот на Атина значел смртна пресуда на владеењето на робовладетелската демократија и почеток на нов период на доминација на аристократијата.

Во тој нов период на грчката цивилизација доаѓа до подрастична разлика меѓу богатите и сиромашните. Таа околност им овозможува повеќе слободно време на аристократските слоеви за занимавање со наука и уметност, а истовремено доаѓало до одбивност и омаловажување на физичката работа. На такви позиции биле *Платон* и *Аристотел*. Во *Платоновата Република*, напишана околу 360 г. п.н.е., се наоѓаат јасно изразени идеали за робовладетелската аристократија. Три големи математичари биле во тесна врска со Платоновата академија, а тоа се *Архит*, *Теетет* (умрел во 369 г. п.н.е.) и *Евдокс*, кој живеел приближно од 408 до 355 г. п.н.е. На Теетет му се припишува теоријата на ирационалност што е изложена во десеттата книга на Евклидовите *Елементи*. Евдоксовото име е поврзано со теоријата на односи што Евклид ја дава во својата петта книга, како и со таканаречениот метод на ексхаустија (исцрпување), кој овозможува ригорозен третман на површините и волумените. Тоа значи дека Евдокс ја надминал кризата во грчката математика и неговите строги формулации придонеле за развој на грчката аксиоматика и математика воопшто. Евдоксовата теорија, која е чисто геометриска и изложена аксиоматски, означувала крај на аритметичката теорија на питагорејците.

Современата теорија на ирационалните броеви што ја изградиле Дедекинд и Вајерштрас речиси буквално ги следи Евдоксовите мисли. *Методот на ексхаустија* бил одговор на Платоновата академија на Зенон. Таа

метода ги заобикогувала сите пречки околу бесконечно малите големини и едноставно ги сведува на формалната логика. На пример, за да се покаже дека волуменот на пирамидата  $V_{\text{пир}}$  е една третина од волуменот на соодветната призма  $V_{\text{пр}}$ , се покажувало дека не е можно  $V_{\text{пир}} < \frac{V_{\text{пр}}}{3}$  и дека не е можно  $V_{\text{пир}} > \frac{V_{\text{пр}}}{3}$ . Поради тоа е воведена познатата Архимедова или Евдоксова аксиома. Тој индиректен метод претставува стандарден метод на точен доказ. Негова слаба точка е тоа што претходно треба да се знае резултатот, на пример  $V_{\text{пир}} = \frac{V_{\text{пр}}}{3}$  и не дава конструктивен начин на доаѓање до резултатите.

Според С. Лурие, настанало ново учење што се базирало на сфаќањата на Демокрит, основачот на атомистиката. Според Луриевата теорија, Демокритовата школа довела поим *геометриски атом*. Се тргнувало од претпоставката дека дел од правите, површините и просторот се состои од голем, но конечен број атоми. Претставувањето на телата се сведуvalo на собирање на волумените на сите атоми внатре во телото. Макар што оваа теорија изгледа бесмислена, подоцна и во времето на Њутн се сметало дека кружницата е составена од голем број на мали отсечки. Предноста на атомистичката теорија над методот на ексхаустија е во тоа што ни овозможува да доаѓаме до нови резултати. Во античкото време било можно да се врши избор помеѓу строгите и релативно неплодни методи и методите што биле помалку сигурни, но биле плодни. Речиси сите класични автори ја применувале првата група методи.

## Античката наука по освојувањата на Александар Македонски

Александар Македонски во 334 г. п.н.е. почнал да ја освојува Персија. По неговата смрт во Вавилон во 323 г. п.н.е., Александровите војсководители ги поделиле меѓу себе освоените подрачја. Така настанале три империи: Египет, под власт на Птоломеј, Месопотамија и Сирија, под власт на Селевкидите, и Македонија, под власт на Антигон. Новите математички достигнувања биле пренесени во новата средина. Таа зачувала многу од своите рани особини, но имало големо влијание и од старата источна култура. Таа поврзаност на новата наука со источната била исклучително плодна, особено во првите векови. Всушност, целиот творечки труд што го нарекуваме старогрчка математика има релативно краток период од 350 до 200 г. п.н.е., т.е. од Евдокс до Аполониј. Новата математика, како резултат од размена на математичките знаења, постигнала најголем успех во Египет и Месопотамија, иако во Месопотамија математиката била на повисок степен. Александрија станала голем интелектуален, научен и стопански центар. Период по смртта на Александар Македонски и во текот на следните три века е познат како елинистички период и се однесува на поширокиот

медитерански регион. Освен Александрија, имало и други центри на математичката наука, пред сè во Атина и Сиракуза. Атина станала образовен центар, а Сиракуза го дала големиот математичар Архимед.



### Евклид (365 – 300 г. п.н.е.)

Еден од првите александриски научници бил Евклид и тој се вбројува во највлијателните математичари на сите времиња. За животот на Евклид нема сигурни податоци. Се претпоставува дека живеел во времето на Птоломеј I (306 – 283 г. п.н.е.). Неговото најзначајно и најпознато дело се тринаесетте книги *Елементи* (Stoicheia). На Евклид му се припишуваат исто така некои помали трудови. Меѓу нив е и *Податок* (Data), кој содржи применета алгебра во геометријата, но сè е изложено со строг геометриски јазик. Во историјата на западниот свет, по Библијата, *Елементите* е најверојатно книга што доживеала најмногу изданија и која е најмногу изучувана.

Евклидовото излагање се состои од строго логички изведувања теореме од систем на дефиниции и аксиоми. Во првите четири книги се разгледува геометријата во рамнина. Во петтата книга изложена е Евдоксовата теорија на несомерливи големина во чисто геометриски облик, а во шестата книга таа теорија е применета на сличност на рамнински фигури. Геометриските излагања се завршуваат во десеттата книга, која се смета за најтешка. Во неа е дадена геометриска класификација на квадратните ирационалности и нивните квадратни корени, т.е. броевите во облик  $a \pm \sqrt{b}$  и  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ . Во последните три книги се изложува геометријата во простор. Како круна на сето тоа, според авторот, е испитувањето на петте правилни (Платонови) полиедри и доказот дека ги има само пет. Седмата, осмата и деветтата книга се посветени на теоријата на броеви и тука се среќаваат и *Евклидовиот алгоритам* за НЗД и *Евклидовата теорема* за бесконечност на простите броеви. Алгебарските изведувања се дадени исклучиво во геометриски облик. На пример,  $\sqrt{A}$  е воведено како страна на квадрат со плоштина  $A$ , а  $(a \cdot b)$  е плоштината на правоаголник со страни  $a$  и  $b$ . Посебно треба да се истакне V-тиот Евклидов постулат (прва книга), т.е. аксиомата за паралелност што со векови била голем предизвик кај математичарите. Целта на Евклид со неговите *Елементи* била во еден труд да се изложат трите големи откритија од неговото непосредно минато:

Евдоксовата теорија на односи, Теетовата теорија на ирационалности и теоријата за петте правилни полиедри. Тоа биле три карактеристични старогрчки достигнувања.



### Архимед (287 – 212 г. п.н.е.)

Најголем математичар на севкупниот стар свет бил Архимед, кој живеел во Сиракуза, на островот Сицилија и бил советник на царот Хиерон. Убиен е кога Римјаните ја зазеле Сиракуза, а во одбраната на градот користена е неговата техничка вештина. Според историчарот Полибие (II век п.н.е.), Архимед се прославил со својата инженерска работа, а за Цицерон (I век п.н.е.), Архимед е, пред сè, астроном и архитект. Архимедовите први трудови се од механиката, а во подоцнежните математички трудови доаѓа до израз ориентацијата кон нумеричката техника. Архимед како теоретичар треба да се признае како исклучителен претставник на *математичката физика* на неговата епоха. Архимедовото име е поврзано и со теоријата на губење тежина на тело потопено во вода, познато како Архимедов закон. Таа теорија се наоѓа во делото *За телата кои пливаат* од хидростатиката. Најзначаен Архимедов прилог е во областа што денес се нарекува интегрално сметање. Пред сè, тука се наоѓаат теореми за плошина на рамнински фигури и волумени на тела. Во книгата *Мерење на кругот*, испитувајќи впишани и опишани правилни  $n$ -аголници ( $n = 96$ ), го добил бројот  $\pi$  со три децимали. Во книгата *За сферата и цилиндарот* се пресметува плоштината и волуменот на сферата. Во книгата *Квадратура на параболата* доаѓа до формули за плошина на параболичен сегмент:

$$P_{\text{пар.сег.}} = \frac{4}{3} P_{\Delta ABO}$$

Во книгата *За спиралите* се сретнува познатата Архимедова спирала и се пресметува плоштината на делот од рамнината што го формира таа, а во книгата *За коноидите и сфероидите* дадени се волумени на некои тела кои се добиваат со ротација на криви од втор ред. Во сите тие трудови се забележува прекрасна оригиналност во мислењето, вклопена во мајсторска нумеричка техника и строги докази. Во Архимедовите трудови има многу нумерички пресметки и тоа го разликува од другите современици.

И. Н. Веселинов ја дава следната карактеристика за Архимед: „Ако се држиме до фактите, тогаш Архимед својата научна дејност ја почнал како механичар и ја завршил како механичар. Во неговите математички дела механиката е моќно средство за доаѓање до резултати, а тие резултати не виселе бесплодно во воздух, туку се применувани на механички теории“.

### Аполониј (≈260 – 170 г. п.н.е.)



Трет голем математичар од тој период е Аполониј од Перга, кој повторно нè враќа во тековите на грчката геометриска традиција. Аполониј, кој веројатно предавал во Александрија и Перга, напишал осум книги за конусните пресеци. Зачувана е седмата книга, која ги обработува елипсите, параболите и хиперболите, кои се дефинирани како пресеци на кружен конус, а се завршува со испитување на еволутата на конусните пресеци. Термините елипса, хипербола и парабола, кои денес ги користиме, потекнуваат од Аполониј. Познат е и

неговиот (Аполониев) проблем: да се конструира кружница што допира три дадени кружници. Притоа, зборот *кружница* може да се замени со *точка* или *права*. Кај Аполониј, по првпат наидуваме на јасно формулирано барање на геометриската конструкција да се изведе со помош на шестар и линијар.

### Математиката и астрономијата во стара Грција

Математиката во текот на целата своја историја не може да се одвои од астрономијата. Потребите на земјоделството, а донекаде и морепловството, ѝ обезбедиле на астрономијата прво место меѓу науките на Истокот, како и меѓу античките науки. Развојот на астрономијата многу влијаел и врз развојот на математиката, а исто така развојот на астрономијата зависел од степенот на развој на математиката. Нумеричката астрономија имала голем напредок на Истокот во периодот непосредно пред елинистичката епоха, и тоа најмногу во Месопотамија во персиската епоха. За математичарите, движењето на Месечината бил еден од најтешките и најинтересните проблеми.

Најстарото познато старогрчко достигнување од теориската астрономија е *Евдоксовиот планетарен систем*. Тоа е обид да се објасни движењето на планетите околу Земјата, со помош на четири вртливи концентрични сфери, од кои секоја има своја оска на вртење, со краеве прицврстени на една сфера, која го опфаќа сето тоа. Тоа било нешто ново и карактеристично за стара Грција. Тој систем претставува обид за објаснување, а не само регистрација на небесните појави.

По Евдокс, се појавува *Аристарх Самоски* (≈280 г. п. н. е.) – *Коперник на антиката*, кому му се припишува хипотезата дека Сонцето е центар околу кој ротираат планетите, а не Земјата (хелиоцентрична хипотеза). Во тоа време поприфатлива била хипотезата дека Земјата е центар околу кој ротираат планетите. Меѓу најголемите астрономи на антиката се смета *Хипарх*.

## Трет период на античката цивилизација

Трет и последен период на античката цивилизација е периодот на владеењето на Рим. Во 212 г. п.н.е. Римјаните ја освоиле Сиракуза, во 146 г. п.н.е. ги освоиле Картагина и Грција, во 64 г. п.н.е. Месопотамија и во 30 г. п.н.е. Египет. Сите освоени подрачја биле сведени на колонии во кои управувала римската администрација.

Додека во Римската Империја владеела во одредена смисла стабилност, источната наука била во подем како и дотогаш. Меѓутоа, со текот на времето источната наука постепено ја губела својата оригиналност и имала скроман напредок. Мирот во Римската Империја траел неколку века и овозможил да се негуваат старите теории. Александрија и понатаму останала центар на античката математика. Паралелно со слабеење на Римската Империја имало сè помалку луѓе кои биле во состојба понатаму да ја развиваат науката. Ако го следиме процесот на опаѓање на старогрчката математика, треба да се обрне внимание и на техничката страна: несоодветниот геометриски начин на изразување со системското избегнување на алгебарскиот начин на означување, оневозможувало каков било напредок подалеку од конусните пресеци. Еден од најистакнатите александриски математичари од римскиот период е *Никомах* ( $\approx 100$  г.). Во неговото дело *Аритметички вовед* е изложена .000питагорејската аритметика.

Додека кај Евклид броевите се претставувани како должини на отсечки, Никомах користи аритметички ознаки. Едно од најголемите дела на александрискиот период е *Птоломеевиот Голем зборник*, кој е познат под арабизираниот наслов „*Almagest*“ ( $\approx 159$  г.) и претставува одличен астрономски труд. Во него е содржана тригонометријата со табlici од должини на тетиви за агли од  $1^\circ, 2^\circ, \dots, 180^\circ$ , односно за  $\sin \alpha$  за  $\alpha = 0,5^\circ, \alpha = 1^\circ, \dots, \alpha = 90^\circ$ . За  $\sin(1^\circ)$  Птоломеј наоѓа вредност  $(1, 2, 50) = \frac{1}{60} + \frac{2}{60^2} + \frac{50}{60^3} = 0,0174537$ , а точната вредност е  $0,0174524\dots$

Во „*Almagest*“ се наоѓаат формули за синус и косинус од збир и разлика на агли. Таму се сретнуваат и *Птоломеевата теорема* за тетивен четириаголник и почетоците на сферната тригонометрија. Во Птоломеевиот *Планетариум* се разгледува стереографската проекција. Малку постар од Птоломеј е Менелај ( $\approx 100$  г.). Неговата *Сферика* содржи геометрија на сфера и се разгледуваат сферни триаголници што ги нема кај Евклид. Тука се сретнува и *Менелајевата теорема* за триаголник во општ облик и за сфера. Најверојатно во времето на Менелај живеел и *Херон*. Тој бил енциклопедист: работел од областа на геометријата, нумериката и механиката.

Во неговата *Метрика* ја извел *Хероновата формула*:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Во неговите дела присутна е смеса од старогрчката и источната наука. Таа смеса е уште поизразена во Диофантоновата *Аритметика* ( $\approx 250$  г.). Зачувани се само шест оригинални книги. Неговата книга е една од најинтересните што дошла до нас од грчко-римското време. За жал, од биографијата на Диофант ништо не ни е познато, па и неговата националност. Во неговата аритметика се наоѓаат голем број на задачи од облик:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &= y^2 \\ Ax^3 + Bx^2 + Cx + d &= y^2 \end{aligned}$$

или систем од такви равенки и тој се интересира само за нивните позитивни рационални решенија. Ирационалните решенија ги нарекува *невозможни* и тој ги одбира коефициентите така што да постојат позитивни рационални решенија. Меѓу тие равенки се наоѓаат и равенки како:

$$x^2 - 26y^2 = 1, \quad x^2 - 30y^2 = 1$$

што денес ги нарекуваме Пелови равенки. Кај Диофант се среќаваат и теореми од теорија на броеви, на пример производот на два цели броја може на два начина да се претстави како збир на квадрати, ако секој од множителите е збир на квадрати. Кај Диофант првпат се наидува на систематско користење на алгебарските симболи. Тој користи посебни ознаки за непознатата, за минус и за реципрочната големина.

Последното од големите александриски математички дела го напишал *Пап* кон крајот на III век. Неговиот *Зборник* (Synagoge) е сличен на учебниците од старогрчката геометрија и содржи историски информации, како и подобрување и модификација на некои теореми и докази. Интересна е главата за изопериметарски фигури, со ставот дека кругот има поголема плоштина од која било друга фигура со ист периметар.

Александиската школа постепено исчезнувала паралелно со пропаѓањето на античкото општество. Тоа било бедем на многубоштвото во борба против христијанството, кое се ширело во тоа време. Императорот Јустинијан со кодекс ја затворил академијата во Атина (529 г.) како многубожна, а истовремено настанале школи во други места, на пример во Константинопол. Во Константинопол се зачувани многу збирки на стари ракописи. Во 630 година Александрија ја зазеле Арапите, па највисокиот слој на цивилизацијата во Египет бил заменет со арапски.

**Забелешки.** Старогрчката математика разликувала аритметика, т.е. наука за броевите и логистика, т.е. практично сметање. Нашиот поим за реален број не им бил познат. Затоа, отсечките немале секогаш должина. Наместо нашите операции со реални броеви, користеле геометриски расудувања. Питагоровата теорема изразувала зависност меѓу плоштините на три квадрати, а не зависност меѓу три страни. Обичната нумеричка математика, позната како логистика, била присутна во текот на целиот период на старогрчката историја. Таа се базирала на броен систем што се менувал со текот на времето. Раниот старогрчки броен систем бил десетичен и адитивен како и египетскиот и римскиот.

Во време на александриската епоха (можеби и порано) се појавил начин на запишување на броевите што во текот на 15 века го користеле научници, трговци и службеници. Така, за запишување на броевите помали од 100 биле потребни знаци за следните броеви:

1, 2,..., 9, 10, 20,..., 100, 200,..., 900 (вкупно 27 знаци)

Знаците ги одбирале од грчката азбука, вкупно 24, и било потребно да се изберат уште три архаични букви. На пример, бројот 14 се запишувал како  $\iota\delta$  ( $\iota = 10$ ,  $\delta = 4$ ), но 14 може да се запише и како  $\delta\iota$  во тој непозициски систем. Броеви поголеми од 1000 бележани се според просто проширување на тој систем. Алфабетскиот броен систем штетно влијаел на развојот на грчката алгебра, бидејќи употребата на буквите за означување броеви пречела за означување на буквите за општи броеви, како што се прави во денешната алгебра. Десетичните дробки не биле откриени.

Таа значајна придобивка во Европа се појавила во епохата на доцната ренесанса, кога се усовршил нумеричкиот апарат.

## IV

### ИСТОК ПО ПРОПАЃАЊЕТО НА СТАРОГРЧКОТО ОПШТЕСТВО

Старата култура на Блискиот Исток никогаш не исчезнала. Во александриската наука јасно се чувствува влијанието како од Истокот, така и од стара Грција. Константинопол и Индија претставувале значајни допирни точки на Истокот и Западот. Теодосие I во 395 година ја формира византиската држава со престолнина во Константинопол и таа држава била мост меѓу Истокот и Западот.

Политичкото владеење на Грците на Блискиот Исток речиси потполно исчезнало по појавата на исламот. По 622 година, Арапите брзо завладеале со голем дел од западна Азија, па сè до Сицилија, северна Африка и Шпанија. Тие настојувале грчко-римската култура да ја заменат со арапска. Паралелно со пропаѓањето на Римската Империја, центарот на математичките истражувања постепено се преместувал во Индија, а потоа во Месопотамија.

#### Индија

Прв добро зачуван индиски ракопис од областа на егзактните науки е „Sidhanti“. Дел од тој ракопис, „Surja“, е останат до денес и многу одговара на оригиналот. Потекнува приближно од 300 до 400 г. н.е. Покрај влијанието од старогрчката наука, во „Sidhanti“ има и нешто што е карактеристично за Индија. Таму се наоѓаат табlici за вредности на синусите, а не должини на соодветните тетиви. Најпознати математичари од тоа време биле *Аријабхата* ( $\approx 500$  г.) и *Брахмагупта* ( $\approx 625$  г.).

Нивните дела се карактеристични по алгебарско-аритметичките делови. Во нивната склоност кон равенки со неодредени коефициенти се забележува сличност со Диофант. Во следните генерации во Индија доминира аритметичко-алгебарскиот правец, а се занимавале исто така со мерење и тригонометрија. Други познати индиски математичари се *Махавира* ( $\approx 850$  г.) и *Бхаскара* ( $\approx 1150$  г.). Додека Диофант ги разгледува само рационалните решенија на равенките, во Индија се разгледуваат само целите решенија. Но, тие отишле подалеку од Диофант, бидејќи ги зеле предвид и негативните корени на равенките, но со скептицизам гледале кон нивната примена. Најпознат успех на индиската математика е нашиот

современ десетичен (декаден) позициски систем. Десетичниот броен систем настанал во далечното минато, а тоа се однесува и на позицискиот систем. Но, синтезата на тие два система во еден извршена е најверојатно во Индија. Првиот декаден систем што нам ни е познат датира од 595 година. Постојат зачувани текстови во раниот период во кои се употребува зборот *суња*, што значи нула.

Постои можност дека знакот 0 настанал под грчко влијание: *оуден* на грчки значи нула. Во тоа време кога вавилонската точка (знак за нула) се пишувала помеѓу цифрите, индиската нула се јавува и на последно место, така што цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 стануваат рамноправни. Постоеле многу различни знаци за запишување на цифрите во позицискиот систем, меѓу кои се издвојуваат два главни типа: индиско означување, кое го применувале источните Арапи, и таканаречените цифри *гобар*, кои ги применувале западните Арапи во Шпанија. Знаците од првиот тип сè уште се употребуваат во арапскиот свет, додека денешниот систем најверојатно произлегува од системот *гобар*. Со сигурност може да се тврди дека во Индија се добиени многу скапоцени резултати.

## Месопотамија

По паѓањето на Римската Империја, Месопотамија повторно станала центар на трговските патишта во времето на персиската кралевска династија Сисаниди. Тоа бил период на културен подем. Сисанидската Персија се наоѓала меѓу Константинопол, Александрија, Индија и Кина и во неа се среќавале многу култури. Вавилон пропаднал и него го заменил Ктесифон-Селевкија, кој, пак, по арапското освојување го отстапил своето место на Багдад. Во математиката од периодот на исламот видлива е таква смеса на различни влијанија, слични со оние во Александрија и Индија. Калифи Абасиди, а особено Ал-Мансур (754 – 775), Харун ал-Рашид (786 – 809) и Ал-Мамун (813 – 833) го помогнале развојот во астрономијата и математиката. Посебно место во математиката зазема *Мухамед ибн Муса ал-Хорезми*. Неговата творечка работа се одвивала околу 825 г. Тој напишал многу книги од областа на математиката и астрономијата. Во својата аритметика го објаснил индискиот начин на запишување на броевите. Таа книга била извор преку кој Западна Европа го запознала декадниот систем. Во неговата алгебра се разгледуваат линеарни и квадратни равенки, меѓу кои се наоѓаат и равенките од следните три типа:

$$x^2 + 10x = 39, x^2 + 21 = 10x, 3x + 4 = x^2$$

Овие равенки морало да бидат разгледувани посебно, а коефициентите морало да бидат позитивни. Мухамедовите таблици од астрономијата и тригонометријата се наоѓаат во арапските книги, а подоцна се преведени на латински јазик. Неговата геометрија е обично набројување на правила за

мерење. Во тој текст јасно се забележува потценувањето на Евклидовата традиција. Во неговите трудови повеќе се чувствува влијание од Исток, а не грчко. Мухамедовите трудови во целина одиграле значајна улога во историјата на математиката, бидејќи биле еден од главните извори преку кои Западна Европа се запознала со индиските цифри и арапската алгебра. Сè до средината на XIX век во алгебрата се чувствува нејзиното источно потекло. Поради недостаток на аксиоматско формулирање, алгебрата многу се разликувала од Евклидовата геометрија. И денес, во нашите школски учебници по алгебра и геометрија се чувствува различна карактеристика меѓу овие две дисциплини, што е последица на нивниот различен историски развој.

### Арапска математика

Арапите продолжиле да ја негуваат старогрчката традиција, преведувајќи ги на арапски јазик делата на Аполониј, Архимед, Евклид, Птоломеј и други. Благодарение на тие репродукции и преводи до денес останале многу класични грчки дела што инаку би биле изгубени.

Еден од најпознатите арапски астрономи е *Ал-Батиниј* (858 – 921). Неговите трудови покажуваат дека Арапите не биле само преведувачи туку тие во своите трудови внесувале и многу новини. Тој свој придонес дал во областа на тригонометријата. Има изработено таблица за котангенс од секој степен, а знаел и за косинусната теорема и за сферен триаголник.

*Абу-л-Вафа* (940 – 997/8) ја извел синусната теорема за сферната тригонометрија, изработил таблица за синус со чекор од 15' со точност до осма децимала, извел многу конструкции со помош на шестар и линијар и ги изучувал равенките од трет и четврти степен.

Ал-Кархи (почеток на XI век) напишал алгебра за оние што сакаат да ја изучуваат на повисоко ниво. Следејќи го Диофант, дошол до интересни резултати од областа на ирационалните броеви, на пример:  $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$ .

### Математиката во исламските региони

Околу илјадитата година во северна Персија се појавиле нови господари, Турци Селџуци. Во таа држава живеел Омар Хајам ( $\approx 1038/48 - 1123/24$ ), кој станал познат по својот труд „Рубијат“. Хајам бил астроном и филозоф.

Во 1079 г. тој вовел реформа во стариот персиски календар, но подоцна неговиот календар бил заменет со мухамедански месечен календар.

Најзначајно Омарово дело е „Алгебра“ во кое се изложени системски испитувања на равенки од трет степен. Тој ги одредувал корените на тие равенки како заеднички точки на два конусни пресека. Разликувал геометриски и аритметички решенија. Во друга книга Омар ја изложил аксиомата за паралелност со низа други претпоставки. Тој конструира фигури што можат да се поврзат со *хипотезата за тап, остар и прав агол* на

ист начин како што во сегашно време се користи неевклидската геометрија. Исто така, ја заменил Евклидовата теорија на пропорции со нумеричка теорија и притоа дошол до нумеричка апроксимација на ирационалните броеви и до поимот за *реален број*.

Следбеник на Омаровите дела е монголскиот владетел Насир (1201 – 1274). По 1256 г., кога Монголите го опустошиле Багдад, недалеку од него израснал нов научен центар, каде што била концентрирана севкупната источна наука. Насир, кој го изградил тој центар, ја издвоил тригонометријата од астрономијата како посебна наука. Насиrowото влијание во Европа се чувствува за време на ренесансата.

Ал-Каши (прва половина на XV век) е персиски математичар, бил вешт во изведување на пресметковни операции. Тој решавал равенки од трет степен со помош на итерации и тригонометриски методи. Ја генерализирал методата за извлекување корен од повисок ред од обични броеви. Во неговите трудови се среќава и биномната формула со показател природен број. Паралелно со шеесетичните дропки, тој користи и децимални броеви, со записки. Бројот  $\pi$  му бил познат со 15 децимални места.

Водечка личност во Египет бил *Ибн-ал-Хајтам* (Al Hazen) ( $\approx 965 - 1039$ ), голем муслимански физичар. Неговата „Оптика“ имала големо влијание на Запад. Тој го решил „Алхазеновиот проблем“: Низ две точки во внатрешноста на една кружница да се повлечат прави што се сечат на кружницата и формираат еднакви агли со нормалата на кружницата во таа точка. Еден век по Ибн-ал-Хајтам во Египет живеел алгебристот *Абу Камил*, кој продолжил да работи на трудовите на Ал-Хорезми. Неговото влијание се чувствува и во трудовите на Леонардо Пизански. Друг научен центар постоел во Шпанија. Во Кордоба, живеел еден од најистакнатите астрономи Ал-Заркали ( $\approx 1029 - 1087$ ). Тој е познат и како издавач на таканаречените *Толедски планетарни таблици*. Тригонометриските таблици што се наоѓаат таму преведени се на латински јазик и тие извршиле големо влијание во развојот на тригонометријата во времето на ренесансата.

## Кинеска математика

Погрешно е да се гледа на кинеската математика како изолирана. Кина веројатно најдоцна во времето на династијата Хан, која владеела истовремено со постоењето на Римската Империја, почнува да развива значајни трговски врски со делови на Азија и Европа. Индиската, а подоцна и арапската наука влијаеле врз развојот на науките во Кина, но и обратно.

На пример, десетичниот позициски систем и негативните броеви веројатно се пренесени од Кина во Индија. Во Кина се чувствува влијанието од Индија, но влијанието од стара Грција речиси и да не се забележува.

Односот на должината на кругот и неговиот дијаметар бил испитуван независно од Архимед. Лу Ху-еј со помош на впишани и опишани многуаголници нашол вредност за бројот  $\pi$  меѓу 3,1401 и 3,1427. Два века подоцна, Цзу Цун-чжи (430 – 501) и неговиот син нашле вредност за бројот

$\pi$  со точност од седум децимали и дошле до дробката  $\frac{355}{113}$  денес наречена *Мециев број*. Подемот на старокинеската математика припаѓа на периодот на династијата Сун (960 – 1279). Меѓу водечките математички дела од тоа време е „Џзју Чжан Суан Шу“, во кое се развивала познатата теорија на неодредени равенки, на пример:

$$x \equiv 32(8\ 3) \equiv 70(1\ 10) \equiv 30(135)$$

Оваа книга се интересира и за нумерички решенија за равенки од повисок ред. Притоа во книгата се применува метода на сукцесивни апроксимации. Тука се наоѓа и постапката позната во сегашно време како *Хорнерова шема*. Всушност, Хорнер тоа го објавил во 1819 г., не знаејќи дека открил метода стара околу 1000 години. Друг математичар од периодот на Сун бил и Јанг Хуи. Тој оперирал со десетични дробки и ги запишувал на начин што потсетува на денешниот запис.

Кај Јанг Хуи се среќава првото претставување на Паскаловиот триаголник. Сепак, за најистакнато математичко дело од периодот околу 1300 година се смета „Џзју Чжан Суан Шу“. Тој во своите книги дава најцелосен преглед на кинеските аритметичко-алгебарски методи за сметање. Системите за линеарни равенки ги разгледува и оперира со нив во *матрична форма*. По династијата Сун, математиката во Кина и понатаму се развивала, но не толку интензивно.

## V

### ПОЧЕТОЦИ ВО ЗАПАДНА ЕВРОПА

Најразвиен дел на Римската Империја, како економски, така и културно, отсекогаш бил источниот дел. Астрономијата на Запад не била развиена затоа што не се користело наводнувањето. Меѓутоа, на Запад имале одредени познавања од астрономијата, како и од практична аритметика и некои постапки за мерење од практична корист. Стимулот на развој на овие науки доаѓал од Истокот. По разединувањето на Истокот и Западот, тие стимуланти целосно исчезнале. По пропаѓањето на Римската Империја, општествените институции и интелектуалниот живот останале непроменети.

Робовладетелското општество преминува во феудално. Се смета дека тоа се случувало за време на експанзијата на исламот. Арапите ги одзеле од Византиската Империја сите нејзини провинции на источниот и на јужниот брег на Медитеранот. Со векови тие ги оневозможувале трговските врски помеѓу Блискиот Исток и христијанскиот Запад.

Католичката црква на Запад преку своите институции, во согласност со своите можности, продолжила да ги негува културните традиции на Римската Империја во германските држави. Манастирите и образованите поединци во одредена мера ја одржувале грчко-римската цивилизација. Дипломатот и филозоф Аници Манилиј Северин Боециј бил автор на математички дела и претставувал авторитет во западниот свет во период поголем од сто години. Позната е неговата книга „Основи на аритметиката“.

Економските и културните центри се поместуваат кон север, во северна Франција и Британија. Западното општество било феудално и црковно, а се ориентирало кон север и германските земји. Во текот на првите векови на феудализмот, математиката и во манастирите не била високо ценета. Недостигале фактори на стимул за нејзиниот развој. Меѓу математичарите од тој период се издвојува Алкуин, математичар-свештеник од британско потекло. Неговиот ракопис „Задачи за гимнастика на умот“ содржи збирка задачи што со векови имале влијание врз учебниците.

### На пример:

- Едно куче го брка зајакот, кој се наоѓа 150 чекори пред него. Во секој скок кучето минува 9 чекори, додека зајакот за тоа време минува 7 чекори. Колку скока ќе треба да направи кучето за да го стигне зајакот?
- Преку река треба да се пренесат волк, коза и зелка. Во чамецот, покрај возачот, може да собере едно од трите. Како можат тие да бидат пренесени преку реката така што волкот да не ја изеде козата, а козата да не ја изеде зелката?

Друг математичар од редот на свештените лица бил францускиот калуѓер Герберт, кој во 999 г. станал папата Силвестер II. Неговото значење како математичар е во тоа што тој е меѓу првите западни научници кој патувал низ Шпанија и ја изучувал арапската математика.

Во текот на XII, XIII и XIV век доаѓа до голем развој на градовите. Тие прераснуваат во големи трговски центри. Градовите излегувале како победници над феудалците-земјопоседници во судирите што имале облик на граѓански војни. Нивниот успех се базирал на развојот на паричната трговија и на техниката. Феудалните кнезови ги поддржувале градовите во нивната борба со ситните феудалци и настојувале да воспостават власт над градовите. Резултатот на сето тоа било создавање на национални држави во Западна Европа.

Градовите почнале да воспоставуваат трговски врски со Истокот, кој сè уште бил центар на цивилизацијата. Први врски воспоставиле италијанските градови, а потоа градовите на централна Европа. Шпанија и Сицилија биле две блиски точки што ги поврзувале Истокот и Западот и овде трговците и студентите се запознавале со цивилизацијата во муслиманските региони. Арапската наука во тоа време високо се ценела. На тој начин, Европа, со посредство на Арапите, се запознала со старогрчките класици. Во тоа време Западна Европа била доволно развиена да може да го процени тоа знаење. Притоа, во Италија настанале големи трговски градови како Џенова, Пиза, Венеција, Милано, Фиренца и др. Тие тргувале главно со арапскиот свет. Во XII и XIII век се појавило банкарството и почетоките на капиталистичкиот облик на производство. Меѓу првите од тие трговци бил *Леонардо* од Пиза, кого уште го нарекувале *Фибоначи*. Како трговец патувал на Исток. По враќањето ја напишал книгата „Книгата за абака“ (*Liber abaci*, 1202). Оваа книга е еден од изворите преку кој во Западна Европа се проширила арапско-индиската нумерација. (Всушност, тие нумерации се сретнуваат и пред Леонардо.) Во „Книгата за абака“ содржани се податоци од аритметика и алгебра, кои ги собирал за време на патувањето. Во книгата „Применета геометрија“ (*Practica geometriae*, 1220) ги изложува собраните знаења од областа на геометријата и тригонометријата. Можеби и сам се занимавал со научна работа, бидејќи во неговите книги се среќаваат многу примери што

ги нема во соодветната арапска литература. На пример, постои проблем што се сведува на Фибоначиевата низа: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... ( $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ).

Интересен е неговиот доказ дека корените на равенката  $x^3 + 2x = 10$  не можат да се изразат со помош на Евклидовите ирационални броеви од облик  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ , односно не можат да се конструираат со помош на шестар и линијар.

Во средновековието, со теориска математика се занимавале главно филозофи-сколастичари, а не вистински специјалисти. Сколастичарите, поврзувајќи ги делата на Платон и Аристотел со размислувањата за природата на божеството, доаѓале до одредени заклучоци за движењето, континуумот и бесконечноста. Сколастичарите (конкретно Тома Аквински) го прифаќале Аристотеловото *непостоење на фактичка бескрајност* и секој континуум го сметале како потенцијално делив до бескрајност. Според тоа толкување нема најмала отсечка, бидејќи секој дел од отсечката пак е отсечка. Значи, точката не ја сметале за дел од линијата, бидејќи таа не е делива, а од неделиви не може да се формира континуум. Точката може да формира линија со помош на движење.

Научниците од средниот век ги разгледувале поимите за прекинатост и непрекинатост, како и за конечно и бесконечно, главно во врска со филозофските и физичките проблеми. Но, тука се наидуvalo на одредени тешкотии, па е намален интересот за оваа проблематика во следните неколку века. Враќањето на оваа проблематика во XVIII век е во тесна врска со успесите на новата физика и механика.

Меѓу средновековните математичари од редот на свештениците најзначаен е *Никола Орезмус* од Нормандија. Тој користел степени на дробен показател, на пример  $8 = 4^{3/2}$ . Напишал дело под наслов „За големините на обликот“ (*De latitudinibus formarum*, ≈1360 г.), каде што графички ги споредува независнопроменливата големина и вредноста на зависнопроменливата големина. Тоа дело имало влијание и на Декарт.

Подоцна, во XV и XVI век, покрај италијанските градови, нови центри биле Нирнберг, Виена и Прага. Во тој период расте интересот за оригиналните старогрчки дела. Водечка математичка личност во XV век бил *Јохан Милер* од Кенигсберг, наречен *Региомонтанус*. Тој упорно ги преведувал достапните математички ракописи од класиците. Ја превел Птолемеевата астрономија, како и делата на Аполониј, Херон и Архимед.

Неговото главно оригинално дело „За различните триаголници“ (напишано во 1464 г., а објавено во 1533 г.) претставува целосен вовед во тригонометријата, а од сегашните учебници се разликува само по тоа што не содржи современа симболика. Оттогаш, тригонометријата станува наука независна од астрономијата. Региомонтанус вложил многу труд во составувањето на тригонометриските таблици, а тие се објавени по неговата смрт.

## Универзитетот во Болоња

Во италијанските градови и во периодот по Леонардо да Винчи, математиката заземала истакнато место. Во XV век, мајсторите на сметањето во Италија добро ги владееле математичките операции, вклучувајќи ги операциите со ирационалните броеви, а забележлив бил и голем интерес за просторната геометрија. Во тоа време се сметало дека достигнувањата на Грците и Арапите се ненадминливи. На големо изненадување, таквото мислење е побиено со откритието на методот за решавање на кубни равенки на *Сципион дел Феро* од Универзитетот во Болоња. Познатиот француски калуѓер *Лука Пачоли* (Pacoli), некогашен студент на Универзитетот во Болоња, својата книга „Сума на аритметиката“ ја завршува со забелешка дека не е можно да се решат кубните равенки  $x^3 + mx = n$  и  $x^3 + n = mx$ , аналогно како решавањето на проблемот за квадратура на кругот. Неговата книга била една од првите печатени математички книги (1494), а оттогаш индиско-арапските цифри стануваат општоприфатени. Заклучокот на Пачоли бил појдовна точка за математичарите од Универзитетот во Болоња. Кон крајот на XV век Универзитет во Болоња бил еден од најголемите и најпознати универзитети во Европа. Меѓу студентите на тој универзитет биле и Пачоли, Алберт Дирер и Коперник. Старите Грци и источните народи се обидуваа да решаваат равенки од трет степен, но тоа им успеало да го решат нумерички само во неколку конкретни случаи.

На болоњските математичари им успеало да ги решат кубните равенки:

$$x^3 + px = q, x^3 = px + q \text{ и } x^3 + q = px \quad (p, q \in R^+)$$

Нив темелно ги изучил *Сципион дел Феро*. Тој никогаш не ги објавувал своите решенија, туку само кажувал на тесен круг пријатели. По Сципиновата смрт во 1526 година, во 1535 година венецијанскиот математичар Тартаљ дошол до начинот на решавање на овие равенки. Тој ги прикажал своите резултати, но како било обичај во тоа време, ја држел во тајност методата како дошол до резултатите. Методата му ја открил на *Јеронимо Кардано* од Милано, кој се колнел дека методата ќе ја чува во тајност. Меѓутоа, во 1545 година Кардано ја објавил својата импозантна книга „Голема вештина“, каде што во целост е дадена идејата на Тартаљ. Тоа довело до жестока полемика и меѓусебни навреди.

Решението на тие равенки содржи израз од облик  $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$ , кој се разликува од Евклидовите ирационални изрази  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ . Кардановата „Голема вештина“ содржела и други големи откритија меѓу кои и

Ферариевата метода за сведување равенки од четврти степен на равенки од трет степен. Кардано ги разгледувал и негативните корени, нарекувајќи ги *замислени*, но не бил во состојба да направи што било со таканаречениот *несводлив случај*, односно корените што ги нарекуваме комплексни.

Таа тешкотија ја пребродил последниот од големите болоњски математичари во XVI век, *Рафаел Бамбели*. Во неговата „Алгебра“ (1572), како и во неговата „Геометрија“ (напишана во 1550 г., но не е објавена), тој воведува сукцесивна теорија на имагинарните комплексни броеви. На пример,  $3i$  го запишувал како  $\sqrt[3]{0 - 9}$  итн. Тој покажува дека, на пример:

$$\sqrt[3]{52 + \sqrt{0 - 2209}} = 4 + \sqrt{0 - 1}$$

Комплексните броеви изгубиле многу во својата натприродност, иако во целина биле признати дури во XIX век. На крајот, да напоменеме дека големи математичари од крајот на XVI и почетокот на XVII век биле *Франсоа Виет*, *Симон Стевин* – инженер, астрономот *Јохан Кеплар* и геодезите *Андријан Влак* и *Језекил де Декер*. Тоа бил период на голем подем на астрономијата и новите астрономски теории на *Коперник*, *Тихо Брахе* и *Кеплер*. Се создавале нови претстави за вселената.

Во филозофијата особено влијание имаат Платоновите дела. Почнале да се изработуваат сè попрецизни тригонометриски и астрономски таблици. Таблиците на Ретика, што во 1596 г. ги завршува неговиот ученик Велентин Ото, биле изработувани на 10 децимали со чекор од  $10''$ . Во таблиците на Питискус (1613) точноста е 15 децимали. *Франсоа Виет* (1540 – 1603) бил француски правник. Најголем успех му се припишува за усовршувањето на теоријата на равенки и за усовршување на симболиката. Тој го решил проблемот на Адријен ван Ромен за решавање на равенката:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \dots + 45x = A$$

од 45-ти степен. Нумеричката техника во тоа време постигнува повисоко ниво. Виет ги подобрува Архимедовите резултати и бројот  $\pi$  го пресметува на 9 децимали. Подоцна, *Лудолф ван Цејлон* го пресметува бројот  $\pi$  на 35 децимали. Виет, исто така, го наоѓа разложувањето:

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{32} \dots$$

Симон Стевин (1546 – 1620), книговодител од Бриж, бил инженер во армијата. Во неговиот труд „Десетта“ (1585) тој ги воведува десетичните дробки. Таа е една од големите придобивки што била овозможена

благодарение на тоа што индиско-арапскиот броен систем станал општоприфатен. Друга значајна придобивка од тоа време е откривањето на логаритмите. Значаен придонес во тоа има шкотскиот лорд *Џон Непер*.

По неговата смрт, *Хенри Бригс*, професор во лондонски колеџ, ја објавува книгата „Логаритамска аритметика“. Во неа има табlici за *бригсови логаритми*, а подоцна таа таблица ја дополнил холандскиот геометар *Језекил де Декер*.

## VI

### СЕДУМНАЕСЕТТИ ВЕК

Развојот на математиката во епохата на ренесансата бил условен не само од „склоноста кон сметањето“ на трговската класа туку и со ефективно користење на понатамошно усовршување на машините. Ренесансата е период на подем на сите полиња како во културата и уметноста, така и во науката и техниката. Од машините патот водел кон теориската механика и научното проучување на движењето. Во делата на Леонардо да Винчи ( $\approx 1500$  г.) се наоѓаат зачетоците на механистичката теорија на природата. Во изучувањето на Архимедовите дела особено се јавува интересот за наоѓање на тежиштето, кое, пак, довело до создавање на анализата.

Меѓу Архимедовите следбеници истакнато место заземаат *Симон Стевин*, *Лука Валерио* и *Паул Гулден*. По овие први пионери се јавуваат големите дела на *Кеплер*, *Кавалиери* и *Торичели*, кои ги изградувале оние методи што на крајот довеле до *создавање на анализата*.

Револуцијата во астрономијата што е поврзана со имињата на *Кеплер*, *Тихо Брахе* и *Коперник* овозможила да се создаде целосно нов поглед на местото на човекот во вселената и на неговата можност рационално да ги објасни астрономските појави. Факт е дека небесната механика дала можност да се комплетира Земјината механика. Влијанието на новата астрономија врз проблемите на големите пресметки, како и на инфинитималните претстави јасно се гледа во делата на *Јохан Кеплар*. Тој се одлучил да работи на пресметување волумени, па во неговата „Стереометрија на вински бочви“ пресметувал волумени на тела добиени со ротација на крива од втор ред. Кеплер не бил приврзаник на Архимедовата строгост во доказите.



#### **Галилео Галилеј (1564 – 1642)**

Галилео Галилеј бил основач на теоријата на еластичност и приврзаник на Коперниковиот систем. Тој внел дух во современата наука, која се базирала врз складноста меѓу експериментот и теоријата и дал нова механика на слободното паѓање. Во неговите „Беседи“ (*Discorsi*, 1638)

Галилеј дошол до математичко проучување на движењето, во зависност од растојанието, брзината и забрзувањето. На ниедно место не ја изложил неговата идеја за анализа, туку тоа го препуштил на неговите ученици Торичели и Кавалиери. Во „Беседите“ се сретнува параболичниот пат на косиот истрел, како и таблица за висината и оддалеченоста на косиот истрел во зависност од аголот под кој истрелот е исфрлен и од почетната брзина.

Иако не бил математичар, Галилеј зазема истакнато место во историјата на математиката. Уште на почетокот на својата научна работа тој ги проучувал Архимедовите дела и како професор на универзитетите во Пиза и Падова, учествувал во ширењето на Архимедовите дела. На сите можни начини ја пропагирал примената на математичките методи во изучувањето на природните појави и дал извонредни примери за тоа.

### **Бонавентура Кавалиери (1598 – 1647)**



Настапил период на прво системско изложување на резултатите до кои се дошло во доменот на анализата. Такво изложување е дадено во „Геометријата“ (1635) на Бонавентура Кавалиери, професор на Болоњскиот универзитет. Тој дал упростена варијанта на сметањето со бесконечно мали големини, која се базирала на сколастичката претстава за невидливите големини, т.е. такви претстави според кои точката при движење дава линија, а линијата при движење дава површина.

Нему му припаѓа познатиот *Кавалиериев принцип*, според кој ако две тела имаат исти висини, тогаш ќе имаат и исти волумени ако пресеците од произволна рамнина паралелна со основата на двете тела имаат исти плоштини.

### **Рене Декарт (1596 – 1650)**



Постепениот развој на анализата добил моќен импулс со објавувањето на Декартовата „Геометрија“ (Geometrie, 1637), со која во алгебрата е вклучена севкупната класична геометрија. Декарт е роден во Турен, Франција. Извесно време живеел во Холандија, а умрел во Стокхолм, каде што бил повикан од шведскиот крал. Заедно со многу други мислителите на XVII век, Декарт барал општа метода што би овозможила побрзо наоѓање и објаснување на вистината за

науката. Својата „Геометрија“ Декарт ја објавил како примена на своите општи методи на синтези, во конкретниот случај станува збор за синтеза на

алгебрата и геометријата. Според општоприфатената оценка, заслугата на Декартовата книга е првенствено во тоа што во неа е создадена *аналитичката геометрија*. Точно е дека таа гранка на математиката се развивала под влијание на Декартовата книга, но неговата книга таква каква што е тешко може да се смета како прво дело од таа област. Всушност, во неа ги нема *Декартовите координати*, не се воведени равенки на прави и конусни пресеци. Освен тоа, голем дел од книгата ја сочинуваат теоријата на алгебарски равенки. Во Декартовата симболика има многу современост, на пример изрази од видот:

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

### За првиот развој на аналитичката геометрија и анализата

Кон таквата аналитичка геометрија повеќе се приближил *Пјер Ферма*, кој напишал помал труд од геометријата, најверојатно и пред Декартовата „Геометрија“, но е објавен дури во 1679 г. Во новата книга „Вовед“ кај Пјер Ферма се наоѓаат равенките:

$$y = mx, xy = k^2, x^2 + y^2 = a^2, x^2 + ay^2 = b^2$$

на права и конусни пресеци во однос на нормални координати.

Во тоа време, под влијание на Декарт се појавуваат и други книги, на пример „Расправа за конусните пресеци“ (1655) од Џон Валис и „Елементи на кривите линии“ (1659) од Јохан де Вит. Сите тие автори всушност користеле само позитивни координати. Прва книга од аналитичката геометрија што целосно е ослободена од влијанието на Аполониј е Ојлеровиот „Вовед“ (Introductio, 1748).

Појавата на Кавалиеријевата книга „Геометрија“ поттикнувала многу математичари од разни земји да се интересираат за проблеми во кои се јавуваат бесконечно мали големини. Задачата на тангентите што се состои во наоѓање метод за конструкција на тангентите на дадена крива во дадена точка сè повеќе избива во прв план во споредба со старите проблеми за наоѓање волумен и тежиште. Во решавање на тој проблем се јавиле два правца: геометриски и алгебарски. *Кристијан Хајгенс* како и Кавалиеријевите ученици *Торичели* и *Исак Бороа* (учител на Исак Њутн) користеле грчки методи на геометриско расудување, а притоа малку водеа сметка за нејзината строгост. Наспроти тоа, имало и други научници како *Ферма*, *Декарт* и *Џон Валис*, кои ја применувале новата алгебра. Во тој период се јавуваат нови карактеристични црти на анализата. Ферма во 1638 година нашол метод за наоѓање максимум и минимум со помош на мали промени на променливата. Конструирани се тангенти на криви, пресметувани се

волумени и тежишта, но сè уште не била забележана врската помеѓу интегрирањето и диференцирањето.

Паскал повремено користел изрази во кои влегувале мали големини и тој ги занемарувал членовите од повисок ред. На пример, ја застапувал претпоставката дека  $(x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx$ .

Во време кога немало научни списанија, активноста на математичарите го наоѓала својот израз во живото допишување меѓу научниците, како и во работата на кружоци. Меѓу најпознатите научници кој се допишувал со други научници меѓу кои и Декарт, Ферма, Дезарг, Паскал и други, бил *Марен Мерсен*. Неговото име и денес е зачувано во терминот *Мерсеневи броеви*. Од дискусиските кружоци на научниците настанале академиите. Тие биле на некој начин опозиција на универзитетите. Првата академија е основана во Неапол во 1560 г., а по неа Академијата во Рим во 1603 г.

Лондонското краловско друштво постои од 1662 г., а Француската академија од 1666 г. Валис бил член и основач на Кралевското друштво, а еден од членовите-основачи на француската академија бил Хајгенс.



### Џон Валис (1616 – 1703)

Паралелно со Кавалериевата книга, едно од најзначајните дела во тој период била Валисовата „Аритметика на бесконечни големини“ (1655). Авторот Џон Валис од 1643 г., па сè до својата смрт бил професор по геометрија на Оксфорд. Валис бил прв математичар на кому му успеало алгебрата да ја претвори во анализа. Методите со кои се служел Валис во проучувањето на бесконечните процеси биле честопати примитивни, но тој сепак доаѓал до нови резултати. Тој воведувал бесконечни редови и бесконечни производи и мошне смело оперирал со имагинарни изрази, негативни и дробни показатели. Тој пишувал  $\infty$  наместо  $\frac{1}{0}$ . За неговите резултати карактеристична е формулата:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}$$

Валис не сакал да ја применува аналитичката геометрија, туку новата *аритметика* (алгебра). Валис бил само еден од низата сјајни претставници кои ја збогатувале математиката со низа од откритија.

### Кристијан Хајгенс (1629 – 1695)



Кристијан Хајгенс бил Холанѓанец и низа години поминал во Париз. Тој станал истакнат физичар и астроном, кој ја создал брановата теорија на светлината и го објаснил постоењето на Сатурновиот прстен. Неговата книга за часовниците со нишало имала влијание на Њутн. Писмата на Валис и Хајгенс обилуваат со нови откритија: ректификација на кривите, квадратура и конструкција на обвојница. Хајгенс ја проучувал трактрисата, логаритамската спирала и ланчаницата. Хајгенс бил еден меѓу малобројните големи математичари на XVII век кој водел сметка за строгоста. Неговите методи секогаш биле целосни во духот на Архимедовата традиција.

### Пјер Ферма (1601 – 1665)



Пјер Ферма бил правник од Тулуз. Диофант станал достапен за читателите на латински јазик во 1621 г. На marginите на својот примерок од Диофантовата книга, Ферма запишал значајни забелешки што ги објавил неговиот син во 1670 г. Меѓу нив се наоѓа и големата теорема на Ферма, според која равенката  $x^n + y^n = z^n$  нема решение за природни броеви  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $n$  ако е  $n > 2$ . Ова во 1847 г. го довело Кумер до неговата теорија за идеални броеви. На marginите од Диофантовата книга, Ферма запишал: „Да се разложи кубот на два други куба, четврти степен на два други четврти степени или кој било степен поголем од 2 на два други степени со ист показател е невозможно и јас навистина дојдов до тој извонреден доказ, меѓутоа marginата е многу тесна да би го внел“. Ако Ферма навистина го нашол тој извонреден доказ, тогаш чудно е што тој проблем е решен дури во последната деценија на XX век. Дотогаш биле докажани само некои специјални случаи за бројот  $n$ . Всушност, повеќе од три века напорна работа биле потребни да поминат за да се реши конечно тој проблем, па затоа најверојатно е дека Ферма само мислел дека проблемот го решил или, пак, имал решение само за некои вредности на бројот  $n$ . Во други забелешки на marginите, Ферма тврди дека прост број од видот  $4k + 1$  може на еден единствен начин да се претстави како збир на два квадрата. Таа теорема подоцна ја докажал Ојлер. На Ферма му се припишува познатата *Теорема на Ферма*: Ако  $p$  е прост број и  $p \nmid a$ , тогаш  $p \mid a^{p-1} - 1$ . Ферма прв докажал дека равенката  $x^2 - Ay^2 = 1$  ( $A$  не е полн квадрат) има неограничен број на цели решенија. Ферма и Паскал биле основачи на теоријата на веројатноста. Конкретни прашања што ги

поттикнувале големите математичари да размислуваат на таа проблематика се хазардните игри. Од Паскал било побарано да реши еден проблем од таа област.

Паскал во врска со тоа се обратил до Ферма и тие двајцата утврдиле некои од основните ставови на теоријата на веројатност во 1654 г. Кога Хајгенс дошол во Париз, се обидел да даде свое решение на некои проблеми, при што како резултат се јавува неговата книга „Пресметување во хазардните игри“ (1657) што претставува прв трактат од областа на теоријата на веројатноста. Следните чекори во таа област ги направиле Де Вит и Халеј (1671, 1693). Хазардните игри не се единствен поттикнувач на теоријата на веројатност. Имено, барањата на осигурувањето од страна на осигурителните заводи, демографската статистика, како и теоријата на методите за обработка на податоците добиени од набљудување го поттикнале тој развој.



### **Блез Паскал (1623 – 1662)**

Блез Паскал бил син на Етјен Паскал, кој се допишувал со Мерсен. Под надзор на својот татко, Блез бргу се развивал и на шеснаесет години ја открил познатата *Паскалова теорема* за шестаголник впишан во конусен пресек. Таа теорема била објавена во 1641 г. и имала влијание на Дезарг. По неколку години, Паскал открил сметачка машина. Тој прв дал задоволувачки облик на потполната математичка индукција. Кога имал 25 години одлучил да оди во манастирот

Порт-Ројал, каде што живеел како аскет, но продолжил да се занимава со наука и литература. Неговата книга „Аритметички триаголник“ (се мисли на „Паскаловиот триаголник“) се појавила по неговата смрт.



### **Жерар Дезарг (1593 – 1662)**

Жерар Дезарг бил архитект од Лион и тој напишал книга за перспективност (1636). Во неговиот трактат од 1639 г. се сретнуваат основните поими од синтетичката геометрија, на пример, точка во бескрајност, инволуција и поларност. Својата Дезаргова теорема ја објавил во 1648 г. Плодот на тие идеи дошол до израз дури во XIX век. Зависноста меѓу диференцирањето и интегрирањето, т.е. инверзноста на овие две постапки можеле да ја најдат оние луѓе кои ги владееле геометриските методи од старите Грци и од Кавалиери, како и

алгебарските методи на Декарт и Валис. Тие личности биле Њутн и Лајбниц. До своите методи тие дошле независно еден од друг. Њутн прв ја открил анализата во 1665-1666 г., а Лајбниц во 1673-1676 г., но Лајбниц прв ги печател своите резултати (1684-1686), а Њутновите резултати од оваа област се објавени по неговата смрт.



### Исак Њутн (1643 – 1727)

Исак Њутн учел во Кембриџ кај Исак Бороа. Исак Бороа во 1669 г. ја предал катедрата на својот ученик Њутн и со тоа јавно ја признал неговата предност. Њутн останал на тоа место до 1696 г. кога станал инспектор, а подоцна и раководител на ковани пари. Неговиот авторитет е резултат на неговата книга „Математички принципи на природната филозофија“ (1687). Тоа е обемна книга што содржи аксиоматска изградба на

механиката и законот на гравитација. Њутн строго математички ги извел Кеплеровите закони на движење на планетите што биле емпириски проверени, а тоа го направил поаѓајќи од претпоставката дека привлекувањето е пропорционално со  $M/R^2$ . Тој го решил проблемот за привлекување на две сферни тела и ги поставил темелите на теоријата на движењето на Месечината. Њутн е творец на теоријата на потенцијали.

Најплодни години на Њутн во областа на анализата се 1665-1666 г. додека бил во своето родно место, каде што побегнал од чумата што во тоа време владеела во Кембриџ. Од тој период потекнуваат и неговите идеи за современата теорија на гравитација, како и за сложениот состав на светлината. Според зборовите на проф. Мор: „Во историјата на науките нема примери што можат да се споредуваат со Њутновиот успех, до кој дошол во текот на две златни години“. Њутновото откритие за теорија на флуksiја е во тесна врска со неговото проучување на бесконечните редови по Валисовата „Аритметика“.

Притоа, Њутн ја генерализирал биномната формула и за случај кога показателот е негативен или рационален број и така го открил биномниот ред.

Њутн пишувал за конусните пресеци и за криви од трет ред во рамнината. Во книгата „Пребројување на кривите од трет ред“ (1704), направил класификација на кривите од трет ред, која содржела 72 форми. Тоа било првиот значаен нов резултат до кој се дошло со примената на алгебрата во геометријата, бидејќи сите претходни резултати биле обични преводи на Аполониј на алгебарски јазик. На Њутн му припаѓа и методата за добивање на приближни вредности на корените на нумерички равенки, која ја објаснил на примерот  $x^2 - 2x - 5 = 0$ . Како решение добил  $x =$

2,0945547. Тешко е да се процени влијанието на Њутн врз неговите современици, бидејќи тој секогаш се двоумел дали да ги објави своите откритија. Тој во 1665/66 г. прв ги испитал законите за гравитација, но ги објавил дури во 1686 г., кога се печатени неговите „Принципи“.

Неговата „Општа аритметика“, која е печатена во 1707 г., составена е од неговите предавања помеѓу 1673 и 1683 г. Неговиот труд за редовите што датира од 1669 г., печатен е во 1711 г., а „Методата на флуksiја“ печатена е во 1736 г. по неговата смрт.



### Готфрид Вилхелм Лајбниц (1646 – 1716)

Лајбниц е роден во Лајпциг. Голем дел од животот го поминал на Хановерските дворови. Лајбниц бил голем католик, поголем од другите мислители во тоа време. Освен со филозофија, тој се занимавал со историја, теологија, лингвистика, биологија, геологија, математика, дипломатија и со *вештината на пронаоѓањето*. Тој бил меѓу првите што по Паскал пронашле сметачка машина, дошол до идејата за парна машина, ја изучувал кинеската филозофија и се залагал за обединување на

Германија. Во потрага по *универзален јазик* во којшто сите грешки во мислењето се манифестираат како грешки при пресметување, го довеле не само до *симболичката логика* туку и до многу новини во математичкото означување. Тој е еден од најплодните пронаоѓачи на математички симболи.

Неговото откривање на анализата било резултат на неговото трагање по *универзален јазик*, поконкретно јазик што ќе ги изразува промените и движењето. Своео ново сметање Лајбниц го пронашол во периодот меѓу 1673 и 1676 г. и тоа под влијание на Хајгенс, а изучувајќи ги Декарт и Паскал. Особено го поттикнувал фактот што знаел дека Њутн владеел со слични методи. Њутновиот пристап, во основата, бил кинематички, а Лајбницовиот пристап бил геометриски. Анализата на начин на кој ја поставил Лајбниц првпат се појавила во 1684 г. во статија од само шест страници во списанието „Acta Eruditorum“.

Ова списание го основал Лајбниц во 1682 г. Неговата статија ги содржела нашите симболи  $dx$ ,  $dy$  и правилата за диференцирање, вклучувајќи ги и формулите за диференцијал од производ и количник на две функции. Статијата, исто така, ги содржела и условите  $dy = 0$  и  $d^2y = 0$  за екстрем и превој. По таа статија, во 1685 г. се појавила друга статија што содржела правила од интегрално сметање, како и симболот „ $\int$ “.

По 1687 г., на Лајбниц му се придружуваат браќата Бернули, кои со воодушевување ги прифатиле неговите методи. Уште во периодот пред 1700 г. тие тројцата откриле значаен дел од областа на анализата.

Во 1696 г. се појавил првиот учебник по анализа. Овој учебник го напишал маркизот Франсоа Лопитал, кој бил ученик на Јохан Бернули. Во таа книга се сретнува таканареченото Лопиталово правило за наоѓање на гранична вредност.

Нашите ознаки во анализата, како и термините *диференцијално сметање* и *интегрално сметање*, потекнуваат од Лајбниц. Благодарение на неговото влијание, почнале да се употребуваат знаците „=“ и „.“ за еднаквост и множење. Од Лајбниц потекнуваат термините *функција*, *координати* и *оскулаторен*.

Редовите:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \text{и} \quad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

го носат неговото име, иако Лајбниц не ги открил прв.

Во Њутновите и Лајбницовите објаснувања на резултатите имало извесна неопределеност и непрецизност, како и отсуство на строги дефиниции. Нејасносите што се јавувале кај Њутн предизвикале критика од Беркли, а нејасносите кај Лајбниц биле критикувани од Бернард Њувентијт. И двете критики биле основани, но во целина биле негативни.

Критичарите не биле во состојба да дадат строги формулации на анализата, а сепак тие критики поттикнале понатамошна конструктивна работа.

## VII

### ОСУМНАЕСЕТТИ ВЕК

Ангажирањето на математичарите во XVIII век било, пред сè, насочено на анализата и нејзината примена во механиката. Освен тоа, математиката изобилувала со примени од областа на воената техника и морнарицата. Така, Ојлеровите трудови изобилуваат со такви примени, а француската морнарица станала првокласна благодарение на фактот што бродоградителите при конструкција на фрегатите и линиските бродови конкретно се потпирале врз математички теории.

Најголеми математичари во овој век биле *Лајбниц*, браќата *Бернули* (*Јакоб* и *Јохан*), *Ојлер*, *Лагранж* и *Лаплас*. Оваа група треба исто така да се дополни со групата француски математичари *Клеро*, *Даламбер* и *Мопертуиј*, како и швајцарските математичари *Ламберт* и *Даниел Бернули*.



#### Семејството Бернули

Швајцарскиот град Базел долго време бил центар на науките. Во него, науката и уметноста била во подем како и во холандските градови. Од крајот на XVIII век до денес семејството Бернули во секоја генерација давала по еден научник.

Основачи на таа династија се двајцата математичари Јакоб и Јохан Бернули. Јакоб (1654 – 1705) студирал теологија, на левата слика, а Јохан медицина, но кога во Лајпцишкото списание „Acta Eruditorum“ се појавуваат Лајбницовите статии, решиле да се занимаваат со математика и станале први истакнати Лајбницови ученици. Во 1687 г., Јакоб ја презема катедрата по математика на Базелскиот универзитет и тука останал до својата смрт. Во 1697 г., Јохан станал професор во Гронинген, Холандија, а по смртта на неговиот брат се враќа во Базел и ја презема неговата катедра и тука останува да предава 43 години. Списокот на трудовите на Јакоб е огромен и содржи голем дел од материјалот што сега влегува во нашите елементарни учебници по диференцијално и интегрално сметање, како и решенија на обични диференцијални равенки. Јакоб применувал поларни координати, ја проучувал ланчаницата (што веќе ја испитувале Хајгенс и други),

лемнискатата и логаритамската спирала. Во 1690 г. ја нашол изохроната крива, која Лајбниц ја дефинирал како крива по која телото паѓа со константна брзина, што всушност претставува семикубна парабола.

Особено бил одушевен од својствата на логаритамската спирала што има особини да се репродуцира (еволута од неа е пак логаритамска спирала итн.), така што побарал таа крива да стои на неговиот надгробен споменик. Јакоб бил еден од првите истражувачи на теоријата на веројатност и ја напишал книгата „Вештина на предвидувањето“. Во неа се сретнуваат *Бернулиевата теорема за биномната распределба* и *Бернулиевите броеви* при разгледување на Паскаловиот триаголник.

Трудовите на Јохан Бернули се во тесна врска со трудовите на неговиот постар брат и тешко е да се раздвојат нивните резултати. Јохан често го сметаат за пронаоѓач на варијациското сметање врз основа на неговиот придонес во решавање на задачата на брахистохрони: *Да се најде траекторијата што поврзува две дадени точки А и В, така што едно тело за најкратко време под дејство на гравитацијата ќе стигне во точката В.* За решение се добива циклоида. Со помош на таа крива се решава и проблемот за таутохрона крива. Во тоа време, Лајбниц и двајцата браќа Бернули ги нашле равенките на геодезиските линии. Од другите Бернулиевци кои влијаеле на развојот на математиката познати се двата сина на Јохан, *Николаус* (1695 – 1726) и *Даниел* (1700 – 1782). Николаус бил повикан да престојува во Петроград. За време на неговиот престој таму, го поставил проблемот од теоријата на веројатност наречен *Петроградски проблем*. Николаус умрел млад, а неговиот брат Даниел доживеал длабока старост. До 1777 г. Даниел бил професор на Базелскиот универзитет. Неговата плодна научно-истражувачка работа е ориентирана на астрономијата, физиката и хидрауликата. Тој заедно со Даламбер и Ојлер ја изучувал теоријата на жица што осцилира. Неговиот татко и стрико ја граделе теоријата на обичните диференцијални равенки, а Даниел бил пионер во областа на парцијалните диференцијални равенки.



### **Леонард Ојлер (1707 – 1783)**

Од Базел потекнува и најплодниот математичар на XVIII век, а најверојатно и на сите времиња, *Леонард Ојлер*. Тој бил воведен во математиката од страна на Јохан Бернули. Во 1725 г., кога Николаус Бернули отпатувал за Петроград, со него отпатувал и младиот Ојлер и останал во Петроградската академија до 1741 г. Од 1741 до 1766 г. Ојлер престојувал во Берлинската академија под покровителство на Фридрих Велики, а од 1766 до 1783 г. повторно

отишол во Петроград, овој пат под заштита на царицата Катарина. Ојлер двапати се женел и имал 13 деца. Животот на овој академик од XVIII век е наполно исполнет со работа од областа на чистата и применета математика.

Во 1735 г. Ојлер го губи видот на едното око, а во 1766 г. и на другото, но тоа сепак не ја намалило неговата огромна продуктивност. Слепиот Ојлер, користејќи го своето феноменално помнење, продолжил да ги диктира своите откритија. Има објавено 530 книги и статии. По смртта оставил многу ракописи што петроградската академија ги објавувала во следните 47 години. Со тоа, бројот на трудови се зголемува на 771, а подоцна на 886. Ојлер дошол до важни резултати во сите области на математиката што постоеле во тоа време. Во некои области, неговото излагање може да се смета за наполно завршено. Таков пример е нашата сегашна тригонометрија со својата симболика што потекнува од Ојлеровото дело „Вовед во анализата на бесконечните големина“ (1748). Големiot авторитет на неговите прирачници направиле алгебрата и анализата да ги присвојат неговите ознаки. Во два тома на претходно споменатото Ојлерово дело, опфатени се особено голем број на различни прашања.

Тука се наоѓа Ојлеровото излагање за бесконечните редови, меѓу кои редовите  $e^x$ ,  $\cos(x)$  и  $\sin(x)$  и релацијата  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . Испитувањето на кривите и површините со помош на нивните равенки се изведува така слободно што „Воведот“ може да се смета за прв учебник по аналитичка геометрија. Тука се сретнува и алгебарската теорија на елиминација. Делови од таа книга што најмногу импресионираат се оние за зета-функцијата:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \dots$$

и нејзината врска со теоријата на простите броеви.

Друг голем и содржајно богат Ојлеров прирачник е „Диференцијално сметање“ (1755). Потоа се објавуваат трите тома „Интегрално сметање“ (1768-1774). Освен стандардните делови на диференцијалното и интегралното сметање, тука се среќава и теоријата на диференцијални равенки, Тејлоровата теорема со повеќе променливи, Ојлеровата теорема за сумирање и Ојлеровите интегрални, т.е. функциите  $\Gamma(x)$  и  $B(x,y)$ . Ојлеровата „Механика“ или „Наука за движењето изложена аналитички“ (1736) била прв учебник во кој Њутновата динамика на материјална точка била изградена со аналитички методи. Потоа, се појавила книгата „Теорија на движење на тврди тела“ (1765), каде што на ист начин се разгледува механиката на тврдите тела. Книгата „Целосен вовед во алгебрата“ (1770) подоцна служела како пример за други автори на учебници по алгебра. Изложувањето во таа книга е доведено до теоријата на равенките од трети и четврти степен.

Ојлеровото дело „Методи за наоѓање на криви линии што поседуваат особини на максимум или минимум“ се појавува во 1774 г. Во ова дело, по првпат е изложено варијациското сметање и тука се сретнуваат Ојлеровите равенки и многу прилози. Многу други Ојлерови резултати влегле во

неговите трудови со помал обем и сè уште се помалку познати, иако содржат скапоцени придобивки.

Меѓу попознатите резултати е равенството  $V - E + F = 2$ , каде што  $V$  е број на темиња,  $F$  – број на страни и  $E$  – број на рабови на даден полиедар, потоа Ојлеровата права во триаголник, криви со константна ширина, како и Ојлеровата константа:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right] = 0,5772156$$

Неколку Ојлерови статии се посветени на занимливата математика, на пример проблемот на седумте Кенингсбершки мостови. Само резултатите од теоријата на броеви би му обезбедиле на Ојлер огромна слава. Во таа област му се припишува законот за квадратните остатоци и законот за реципрочност на квадратните остатоци.

Ојлеровите трудови во голема мера се однесуваат и на астрономијата, каде што посебно внимание тој му посветува на движењето на Месечината – како значаен дел од теоријата на три тела. Неговата книга „Теорија на движење на планетите и кометите“ (1774) претставува еден трактат од областа на небесната механика. Ојлер пишувал книги и од областа на хидрауликата, бродоградбата и артилеријата.

Во периодот помеѓу 1769 и 1771 година се појавува во три тома неговата „Диоптрика“ со теорија на прекршување на зраците низ систем од леќи. Огромната Ојлерова продуктивност била и останува повод за одушевување на секој што се обидел да ги проучи неговите трудови. Неговиот латински јазик при пишување е мошне едноставен, а симболиката е речиси современа. Некои од неговите идеи сè уште чекаат разработка. Големите математичари признавале дека многу му должат на Ојлер. Лаплас на младите математичари им велел: „Читајте го Ојлер, тој е наш заеднички учител“, а Гаус велел: „Проучувањето на Ојлеровите трудови е најдобро училиште во разни области на математиката и ништо друго не може да го замени тоа“. И покрај огромните заслуги на Ојлер, тој во науката вовел и некои слабости. Имено, во XVIII век безгрижно се оперирало со бесконечни процеси. Пред сè, тоа се однесува за дивергентните редови. Така, на пример:

$$1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots = \frac{1}{3}$$

бидејќи тоа се добива ако во формулата:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$$

се стави  $q = -2$ , или на пример:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

За неговите современници тоа било неприфатливо и критикувано. Меѓутоа, од аспект на математиката на XX век, Ојлер, следејќи ги Чезаро и Борел, честопати имал право. Подоцна, изградената теорија за сумирање на дивергентни редови зазема значајно место во денешната математика. Одредени замерки му се припишуваат и за бесконечно малите големини. Имено, според Ојлер:

$$dx + (dx)^{n+1} = dx, \quad a\sqrt{dx} + Cdx = a\sqrt{dx}$$

итн.

Ојлер бил приврзан за Русија во текот на речиси целата негова научна дејност. И во времето кога живеел во Берлин, тој и понатаму останал редовен член на Петроградската академија и таму објавил голем дел од неговите трудови. Многу Ојлерови трудови се од применетата математика, на пример, од картографија до морепловство, кои биле работени на барање на руските владини установи. Во Русија се излезени, меѓу другото, и книгите „Прирачник од аритметика“, „Општа аритметика“, „Целосен вовед во алгебрата“, што секако влијаело на подигнувањето на математичката култура во Русија. Присуството на Ојлер во Петроград било од посебно значење за Русија.



**Пјер Моперти (1698 – 1759)**  
**Клод Клеро (1713 – 1765)**

Иако Ојлер бил водечки математичар во XVIII век, во Франција се појавуваат оригинални и нови научни трудови. Математиката таму била третирана како наука што треба да ја усоврши Њутновата теорија. Во тоа време доаѓа до голема полемика меѓу групата математичари наречена картезијанци

(приврзаници на Декарт) и приврзаниците на Њутн. Според картезијанците, Земјата на половите требало да биде издолжена, а според Њутновата теорија требало да биде сплесната.

За да се реши проблемот, организирани се експедиции во Перу и во Лапонија за да се измери должината од 1 степен географска должина. Во резултатите на двете експедиции триумфирала Њутновата теорија на чија страна бил *Пјер Моперти* (на левата слика). Тоа му донело слава и долго време бил во дворецот на Фридрих Велики, а бил и претседател на Берлинската академија. Моперти, како и Ферма пред него и Ајнштајн по него, ги барал општите принципи во кои би се обединиле законите на вселената. Неговата идеја за *принцип на најмало дејство* била подоцна разработена од Ојлер и ја поставил на цврсти основи. Со овој принцип подоцна се користеле Лагранж и Хамилтон.

Меѓу математичарите кои заедно со Моперти биле во Лапонија е и *Клод Клеро*. Тој на осумнаесет години ја објавил книгата „Испитување на криви со двојна кривина“ од аналитичка и диференцијална геометрија на прости криви. По враќањето од Лапонија ја објавил книгата „Теорија на Земјиниот облик“, оригинално дело од хидростатиката и гравитацијата на ротациски елипсоид. Потоа се појавува книгата „Теорија на Месечината“, која ги надополнува Ојлеровите резултати на таа тема. Клеро дошол до некои резултати во теоријата на криволиниските интеграл и диференцијалните равенки. Една од диференцијалните равенки го носи и неговото име.

### Жан ле Рон Даламбер (1717 – 1783)



Даламбер бил истакнат математичар-енциклопедист во Франција. Тој бил вонбрачен син на аристократка и бил најден близу црквата „Свети Жан ле Рон“ во Париз. Неговите рани и брилијантни успеси му овозможиле сјајна кариера. Во 1754 г. станал постојан секретар на Француската академија и еден од највлијателните научници во Франција. Во 1743 г. се појавува неговиот „Трактат од динамика“. Продолжува да работи во областа на хидродинамиката, аеродинамиката и проблем на три тела. Во 1747 г. ја објавува теоријата на жица што осцилира и со тоа заедно со Даниел Бернули станал основач на теоријата на *парцијалните равенки*.

За равенката  $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ , Ојлер и Даламбер го нашле решението во

форма  $z = f(x + kt) + \varphi(x - kt)$ .

Даламбер го воведува поимот за граница. *Основната теорема на алгебрата* понекогаш се нарекува Даламберова теорема затоа што тој се обидувал да ја докаже (1746), а *Даламберовиот парадокс* од теорија на

веројатност покажува дека тој, иако не толку успешно, размислувал и за основите на теоријата на веројатност.

## Теорија на веројатност

Теоријата на веројатност во XVIII век многу бргу се развивала. По Бернулиевата „Вештина на предвидувањето“, се појавиле и други книги меѓу кои и „Учење за случајот“ (1716), која ја напишал францускиот математичар Аврам де Моавр. Неговото име е поврзано со равенството  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n \varphi + i \sin n \varphi$ . Во статијата објавена во 1733 г. Моавр ја извел функцијата на нормална распределба како апроксимација на биномниот закон за распределба и дал формула што одговара на Стирлинговата формула.

Стирлинг го објавува својот труд во 1730 г. Теоријата на веројатност била развиена под влијание на лотариите и осигурителните компании.

Во 1777 г. Жорж Луј Леклер го дава првиот пример на геометриска веројатност. Тоа бил проблемот на игли, во кој се бара да се определи веројатноста дека слободно фрлена игла со должина 1 ќе сече некоја од правите што се меѓусебно паралелни и поставени на растојание 1. Тоа овозможило и експериментално да се најде вредноста на бројот  $\pi$ .

## Англиски математичари

Аврам де Моавр, Стирлинг и Ланден се вистински претставници на англиската математика од XVIII век. Англиската математика тогаш сè уште била под влијание на традицијата од почитуваниот Њутн. Њутновата симболика, што е несоодветна во споредба со Лајбницовата симболика, значајно го отежнувала тој развој. Всушност, развојот бил отежнуван и од фактот што англиските математичари не можеле да се ослободат од Њутновите флуksиски методи. Постојат одредени сличности помеѓу англиската математика од XVIII век и античката математика од доцната александриска епоха. Во двата случаи заедничко е тоа што несоодветната симболика во технички поглед го отежнувала развојот. Водечки англиски математичар од првата половина на XVIII век бил *Колин Маклорен* (1698 – 1746), професор на Единбуршкиот универзитет и следбеник на Њутн. Неговите истражувања и генерализацијата на флуksиската метода, трудовите за криви од втор и повисок ред течеле паралелно со истражувањата на Клеро и Ојлер.

Некои од Маклореновите теореми влегле во теоријата на рамнински криви и во проактивната геометрија. Маклорен обично се стремел да ја постигне Архимедовата строгост. Негови дела се „Органска геометрија“ (1720) и „Тракт за флуksиите“ (1742), кој го напишал заради одбрана на Њутн од Беркли. Во тој трактат Маклорен оперира и со познатиот Маклоренов ред. Всушност, тој ред не го открил Маклорен, бидејќи тој се појавува во трудот „Методи на нараснувањето“ од Брук Тејлор (1715), кој во

тоа време бил секретар на Кралевското друштво. На Тејлор исто така му бил познат и случајот  $x = 0$ . Вистинското значење на тој ред сфатен е по појавувањето на Ојлеровото „Диференцијално сметање“ (1755). Тејлор го користел тој ред за интегрирање на некои диференцијални равенки.



### **Жозеф Луј Лагранж (1736 – 1813)**

Жозеф Луј Лагранж е роден во Торино во италијанско-француско семејство. На деветнаесет години станал професор по математика во Артилериската школа во Торино (1755). Кога Ојлер во 1766 г. отишол од Берлин во Петроград, Фридрих Велики го повикал Лагранж во Берлин. Лагранж останал во Берлин до Фридриховата смрт (1786), а потоа отишол во Париз. За време на револуцијата учествувал во реформите, а подоцна бил професор на Политехничката школа (1797).

Истражувањата во областа на варијациското сметање спаѓаат во раниот период на неговата истражувачка дејност. Во 1760-1761 г. се појавува неговото аналитичко варијациско сметање што содржи не само многу оригинални откритија туку претставува и одлично среден и преработен материјал што со текот на времето се акумулирал. Овој пристап е карактеристичен за севкупното негово творештво. Лагранж веднаш ја користел неговата теорија на задачи од динамика, а притоа ја користел исто така и Ојлеровата формулација на принципот на најмало дејство.

Многу од основните идеи на неговата „Аналитичка механика“ (1788) потекнуваат од деновите кога Лагранж живеел во Торино. Тој учествувал во решавањето на еден од главните проблеми на тоа време – теоријата за движење на Месечината.

Ги дал и првите посебни решенија за проблемот на три тела. Во 1767 г. се појавува неговото дело „За решението на нумеричките равенки“, каде што ги изложил методите за издвојување на реалните корени на алгебарските равенки. Потоа, во 1770 г. се појавува „Размислување за алгебарското решавање на равенките“, каде што се разгледува основното прашање: *зошто оние методи што даваат решение на равенките од степен  $\leq 4$ , не даваат решенија и за степен  $n \geq 5$* . Тоа го довело Лагранж до рационални функции на корените и до проучување на нивното однесување при замена на корените. Оваа метода не само што ги поттикнувала Руфини и Абел во нивните проучувања кога  $n > 4$  туку и Галоа го довела до неговата теорија на групите. Лагранж дал придонес и во теоријата на броевите.

Преостанатиот дел од животот Лагранж го посветил на создавање на големите дела: „Аналитичка механика“ (1788), „Теорија на аналитички функции“ (1797) и „Предавања за сметање со функции“ (1801).

Лагранжовата „Аналитичка механика“ е веројатно најзначаен негов труд што заслужува сè уште да се проучува.



### Пјер Симон Лаплас (1749 – 1827)

Лаплас е последен од водечките математичари на XVIII век. Тој бил син на скромен земјопоседник во Нормандија. Со помош на Даламбер станал професор по математика во Високата воена школа во Париз. Во помала мера се занимавал и со други наставнички и административни работи, а за време на револуцијата учествувал во организирањето на Високата нормална и политехничка школа во Париз. Лаплас лесно го менувал своето политичко определување и во него имало нешто снобовско.

Политичката нестабилност во Франција во тоа време му овозможила да се занимава со својата математичка дејност.

Две големи дела на Лаплас се: „Аналитичка теорија на веројатност“ (1812) и „Небесна механика“ (1799-1825) во пет тома. Овие трудови содржат не само преглед на неговите истражувања туку и резултати од сите претходни достигнувања во тие области. Трактатот „Аналитичка теорија на веројатноста“ имал мошне богата содржина, така што многу подоцнежни откритија во таа област може да се најдат кај Лаплас. Таму детално се разработени хазардните игри, геометриската веројатност, теоремата на Бернули и нејзината врска со интегралот на нормална распределба како и теоријата на најмали квадрати што ја открил Лежандр.

Тука се воведува и *Лапласовата трансформација*. Делото „Небесна механика“ претставува завршеток на трудовите на Њутн, Клеро, Даламбер, Ојлер, Лагранж и Лаплас од теоријата на Земјината форма, теоријата на Месечината и од проблемот на три тела.

Терминот Лапласова равенка:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

потсетува на тоа дека во еден дел од небесната механика се наоѓа и теоријата на потенцијали. Овие две монументални дела биле придружени со опширни популарни трудови: „Филозофски есеј на веројатноста“ (1814) и „Објаснување на светскиот систем“ (1796). Ова објаснување ја содржи хипотезата за создавање на Сончевиот систем од маглина.

Интересен е фактот дека кон крајот на XVIII век некои водечки математичари сметале дека областа на математичките истражувања е исцрпена, така што математичарите од следните генерации ќе решаваат задачи само од споредно значење. Имено, сметале дека со трудовите на

Ојлер, Лагранж, Клеро, Даламбер и Лаплас се дошло до најважните резултати. Таквото сфаќање било разлишано со појавата на Гаус.

## VIII

### ДЕВЕТНАЕСЕТТИ ВЕК

Во XIX век математичарите сè повеќе се специјализираат во дадена област, т.е. не се *универзални математичари*. Математиката сè повеќе се дели на чиста и применета. Во XIX век нема веќе математичари на кралските дворци или во аристократските салони. Членството во научните академии не е веќе главно занимање, бидејќи членовите обично работеле на универзитетите. Националните јазици постепено го заменуваат латинскиот јазик во науката. Математиката во прв ред се развивала во Франција, а малку подоцна во Германија. Најголемо влијание на математичарите од XIX век имале трудовите на *Гаус*, *Риман*, *Клајн* и *Поенкаре*.



#### **Карл Фридрих Гаус (1777 – 1855)**

Гаус е роден во германскиот град Брауншвајг и бил син на надничар. Неговиот татко водел грижа за школувањето на младиот Гаус – чудо од дете. Од 1795 до 1798 г. Гаус учел во Гетинген, а во 1799 г. докторирал во Хелмштат. Од 1807 г. до својата смрт (1855) тој спокојно работел како директор на опсерваторијата и професор на универзитетот во своето родно место. Во неговата релативна изолираност, владеат еднакво применетата и чистата математика, како и работата на астрономијата. Во неговите трудови провејува духот на новата епоха. Тој останал по страна во однос на политичките борби што беснееа во други земји. Гаус уште на 17 години почнал да доаѓа до изненадувачки откритија. Во 1795 г., независно од Ојлер, тој го нашол законот за реципрочност на квадратните резидууми (остатоци) во теоријата на броеви. Некои од неговите рани достигнувања се изложени во неговата дисертација, како и во неговата импозантна книга „Аритметички истражувања“ (1801). Во неговата дисертација по првпат е даден строг доказ на *основната теорема за алгебрата*. Таа теорема потекнува од XVII век, а Даламбер се обидува да ја докаже во 1746 г. На Гаус му се допаднала таа теорема и подоцна дава уште пет нови докази.

Во неговиот трет доказ (1816) се користат комплексни интеграли. Во „Аритметички истражувања“ теоријата на броеви е толку збогатена што таа книга се смета за почеток на современата теорија на броеви. Централно место зазема теоријата на квадратните форми, конгруенции од втор степен и квадратни остатоци. Посебно достигнување е законот за квадратни остатоци (*Златна теорема*) што првпат тогаш е докажана.

Гаус бил одушевен од таа теорема, па подоцна објавил уште пет докази, а еден е најден по неговата смрт меѓу неговите хартии. Во споменатата книга се содржани неговите резултати за корените на равенката  $x^n + 1 = 0$ . Тука, тој ја докажува теоремата според која може да се конструира правилен 17-аголник со помош на шестар и линијар. Поточно, може да се конструира правилен  $n$ -аголник ако  $n = 2^{2^k} + 1$  и  $n$  е прост број, а  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Кога на првиот ден во новиот век, 1 јануари 1801 г., Пјаци во Палермо ја открива првата мала планета наречена Церер, Гаус се заинтересирал за астрономијата. Се јавила потреба за пресметки на нејзината траекторија врз основа на малубројни опсервации и добил равенка од осми степен. Во 1809 г. се појавува неговата книга „Теорија на движење на небесните тела“, во 1813 г. труд за привлекување на произволни елипсоиди, во 1818 г. труд за механичките квадратури и вековните пертурбации (попречувања). Од тој период припаѓа и трудот за хипергеометриските редови (1812), што претставува прво систематско проучување на конвергенција на редовите. По 1820 г. Гаус почнува да се интересира за геодезијата. Тој се занимава со теориски истражувања во оваа област. Едно од неговите откритија е методата на најмали квадрати. Една од најзначајните придобивки од тој период е од теоријата на површини „Општи истражувања на криви површини“ (1827).

Во тој труд се јавува и формулата:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

како и извонредната теорема *Theorem egregium* (Сјајна теорема). Меѓутоа, Гаус не ја заборавил и својата прва омилена математичка дисциплина *Кралицата на математиката*, т.е. теоријата на броеви. Како продолжение на *Аритметичките истражувања* во 1825 и 1831 г. објавува трудови за биквадратните резидууми (остатоци). Притоа ја користел новата метода – комплексни броеви. Имено, сега 5 не е прост број, бидејќи  $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$ . Тој ги разгледувал комплексните броеви како точки од рамнината. Во периодот 1833-1834 г. Гаус почнал да се интересира за физиката.

Во тој период објавил голем експериментален труд од областа на Земјиниот магнетизам. Неговиот труд „Општи теореми“ претставува почеток на теоријата на потенцијали како посебен дел од математиката. Гаусовата дејност не слабеела сè до неговата смрт (1855). Во последните години тој сè

повеќе обрнувал внимание на применетата математика. Со објавувањето на неговите дневници се видело дека некои од своите најдлабоки сознанија не ги соопштувал на јавноста. Тој уште во 1800 г. ги открил елиптичните функции, а околу 1816 г. владеел со неевклидовата геометрија. За овие прашања никогаш ништо не објавил. Тој имал критички став кон обидите да се докаже петтиот Евклидов постулат. За него, реалната геометрија на просторот била физичка појава што требало да се открие со помош на експеримент.



### **Адријан Мари Лежандр (1752 – 1833)**

Лежандр е француски математичар. Од 1775 до 1780 г. предавал во Вишата воена школа во Париз, а подоцна бил професор на Вишата нормална школа, испитувач на Вишата политехничка школа и инспектор по геодезиски работи. Лежандр, како и Гаус, дал неколку фундаментални труда од теоријата на броеви „Есеј за броевите“ (1798) и „Теорија на броеви“ (1830). Тој дал неколку значајни трудови од геодезијата и теориската астрономија. Како и Гаус, тој бил упорен при составување таблици. Проучувајќи го

привлекувањето на елипсоидите, ги вовел *Лежандровите функции*.

Тој се интересирал и за елиптичните и за Ојлеровите интегрални и за основите на Евклидовата геометрија. Неговата книга „Основи на геометријата“ (1794) оди подалеку од Платоновите идеи што ги изложил Евклид, доживеала многу изданија и имала долготрајно влијание.



### **Гаспар Монж (1746 – 1813) и неговите следбеници**

Монж бил директор на Вишата политехничка школа и научен раководител на група математичари од таа школа. Неговата кариера почнува во Воената академија во Мезјеру (1768-1789), каде што има можност нацртната геометрија да ја издвои како посебна гранка во геометријата. Своите предавања ги објавил во книгата „Нацртна геометрија“ (1795-1799). Во Мезјеру почнал да ја применува анализата во испитување на просторни криви и

површини. Тоа е објавено во книгата „Примена на анализата во геометријата“ (1809) и тоа е прва книга од областа на диференцијалната геометрија. Монж е еден од првите математичари кој може да се смета за специјалист во дадената област, конкретно во геометријата. Во неговата

нацртна геометрија се наоѓаат првите почетоци на *проективната геометрија*, а неговата вештина во примена на алгебарските и аналитичките методи во теоријата на криви и површини многу придонела во развојот на аналитичката и диференцијалната геометрија.

Неговиот ученик *Шарл Дипен* (1784 – 1873) ги применувал методите на својот учител во теоријата на површини и ги открил асимптомските и конјугираните правци. Дипен бил професор по геометрија во Париз. Неговото име го носат *Дипеновата индикатриса* и *Дипеновата циклоида*. Во неговите книги „Развиток на геометријата“ (1813) и „Применета геометрија“ (1825) има мошне интересни резултати. Еден од најспособните Монжови ученици е *Виктор Понселе* (1788 – 1867). Нему му се дала можност да размислува за методите на својот учител во 1813 г. додека живеел во Русија како заробеник на Наполеоновата војска. Него го интересирала синтетичката страна на Монжовата геометрија.

Неговата обемна книга „Трактат за проективни особини на фигурите“ (1822) ги содржи сите суштински поими од проективната геометрија, како што се хармониски односи, перспективност, проективност, инволуција. Иако оваа книга била прв целосен трактат од областа на проективната геометрија, таа дисциплина во текот на следните неколку децении достигнала таква комплексност, што претставува класичен пример на една завршена математичка дисциплина.

По Монжовата смрт, Вишата политехничка школа продолжила да се развива во Монжовиот дух. Во таа школа било тешко да се издвои чистата математика од применетата. Големо внимание се посветувало и на механиката. **Етјен Малу** ја открил поларизацијата на светлината (1810), **Огустин Френел** ја оживеал Хајгенсовата бранова теорија (1821), а **Андре Мари Ампер**, кој дал видни резултати за парцијалните равенки, по 1820 г. станал пионер во областа на електромагнетизмот.

**Понселе** и **Кориолис** дале геометриски карактер на Лагранжевата аналитичка механика. Тие двајцата, како и **Поасон**, ја применувале механиката во теоријата на прости машини. Кориолисовата сила што настанува во однос на систем што ротира е еден од примерите на геометриската интерпретација на Лагранжевите резултати (1835). Поансо бил одлучен приврзаник на геометриските методи во механиката. Понселе, кој се заинтересирал за механиката по своите капитални истражувања од областа на проективната геометрија, работел на примена на теориските резултати во задачи од практичен карактер, во теоријата на машини и механизми.

Додека Понселе и Кориолис биле претставници на индустрискиот правец, Поансо останал механичар-теоретичар. Најистакнати математичари во раниот период на Вишата политехничка школа во Париз, освен Лагранж и Монж, биле и **Симеон Поасон**, **Жозеф Фурие** и **Огустин Коши**.

### Симеон Поасон (1781 – 1840)



Поасоновото име често се сретнува во математиката и механиката: Поасоновите загради во теоријата на парцијалните равенки, Поасонова константа во теоријата на еластичност, како и Поасонов интеграл и Поасонова равенка во теоријата на потенцијали. До Поасоновата равенка  $\Delta u = 4\pi\rho$  тој дошол така што ја открил равенката  $\Delta u = 0$  ако густината  $\rho = 0$  (1812), а строг доказ за маса со променлива густина дал Гаус. Поасоновата книга „Трактат од механика“ (1811) напишана е во Лагранжев и во Лапласов дух. Книгата објавена во

1837 г. го содржи *Поасоновитеот закон* (Поасонова распределба) во теоријата на веројатност.

### Жозеф Фурие (1768 – 1830)



Фурие е автор на книгата „Аналитичка теорија на топлината“ (1822). Тоа е математичка теорија на спроводливост на топлината, што се сведува на проучување на равенката  $\Delta U = k \frac{\partial U}{\partial t}$ . Поради општоста на неговите методи, таа книга станала извор на сите современи методи на математичката физика за решавање на парцијални равенки со дадени услови. Во 1807 г. Фурие го објавува своето откритие за разложување на функциите во тригонометриски ред:

$$\sum_n [a_n \cos(nax) + b_n \sin(nax)]$$

Тоа предизвикало големи реакции во тогашната јавност.

### Огустин Коши (1789 – 1857)



Кошиевите успеси во областа на математичката анализа ги фрлиле во сенка неговите многубројни трудови од механика и оптика. Меѓутоа, Коши е еден од основачите на теоријата на еластичност. Слава му донела, пред сè, теоријата на комплексните функции и неговото упорно инсистирање на строгост во математичката анализа. Комплексните функции ги

вовел Даламбер и ги добил таканаречените *Коши-Риманови равенки*. Почнувајќи од 1814 г. Кошиевите трудови од таа област се јавуваат непрекинато, а еден од најзначајните е „Мемоарите за определени интегрални со имагинарни граници на интервалот“ (1825). Тука се сретнува Кошиевата интегрална теорема со резидиуми, како и теоремата за разложување во Тајлеров ред на комплексна функција во несингуларна точка.

Коши ја дал основата на анализата што е сега општоприфатена во нашите учебници. Тоа може да се најде во неговите дела „Курс по анализа“ (1821) и „Резиме од предавањата одржани во Кралската виша политехничка школа“ (1823).

XVIII век бил период кога се експериментирало и кога често се доаѓало до нови резултати. Математиката од тој период не водела доволно сметка за основата на своите истражувања. Коши и неговите современици Гаус, Абел и Болцано се пионери во настојувањето во математиката да се внесе повеќе строгост. Да напоменеме дека неколку критериуми за конвергенција во теорија на редови го носат неговото име. Освен тоа, Коши прв дал доказ за постоење решение на диференцијалната равенка и на систем од диференцијални равенки. По револуцијата во 1830 г. Коши ја напушта катедрата во Вишата политехничка школа и поминува неколку години во Торино. Во 1838 г. се враќа во Париз, а по 1848 г. дозволено му е да остане и да предава во Франција.

Неговата продуктивност е толку голема што Париската академија била принудена да го ограничи обемот на статиите што се објавени во Академијата и притоа „да излезе на крај“ со Кошиевото производство на статии.



### **Еварист Галоа (1811 – 1832)**

Во париската средина околу 1830 г. се појавува првокласен гениј, кој како комета бргу исчезнува како и што се појавил. Еварист Галоа бил син на градоначалник на мал град близу Париз. Двапати се обидува да се запише во Вишата политехничка школа и потоа стапил во Вишата нормална школа, но и оттаму бил истеран. Давал часови по математика за да обезбеди средства за живот. Галоа бил приврзаник на демократските идеи и како републиканец учествувал во револуцијата во

1830 г., поминал неколку месеци во затвор и набргу потоа, во својата 21 година, бил убиен на подметнат двобој.

Две статии што ги пратил за објавување останале во уредничките фиоки, а неколку се објавени многу години по неговата смрт. Непосредно пред двобојот, тој на некој пријател му дал резиме на своите откритија во

областа на теоријата на равенки. Овој драматичен документ, во кој Галоа го моли својот пријател да ги запознае водечките математичари со неговото откритие, завршува со зборовите: „Ти јавно замоли ги Јакоби и Гаус да дадат оценка не на точноста, туку на важноста на овие теореми. Потоа, јас се надевам, ќе се најдат луѓе кои ќе го дешифрираат целиот тој галиматијас“.

Всушност, тој галиматијас ја содржел *теоријата на групите* – клуч за современата алгебра и геометрија. Тие идеи донекаде им биле познати на Лагранж и Руфини, но Галоа изградил комплетна претстава за теоријата на групите. Во теоријата на Галоа нашле свое природно место старите проблеми како што се трисекција на агол, дупликација на коцка и решавање равенки од кој било степен. Писмото на Галоа не стигнало ниту до Гаус ниту до Јакоби. Математичката јавност за тоа писмо дознала кога Лиувил во 1846 г. почнал во своето списание да објавува поголем дел од трудовите на Галоа.

Важноста на трудовите на Галоа потполно е сфатена по објавувањето на трудот „Трактат за супституциите“ од Камил Жордан во 1870 година. Денес, достигнувањата на Галоа се сметаат за најзначајни достигнувања на математиката на XIX век. Прераната смрт на овој врвен научник претставува голема загуба за математиката воопшто.

### **Нилс Хенрик Абел (1802 – 1829)**



Абел е втор млад гениј, син на селски свештеник од Норвешка. Абеловиот краток живот е исто толку трагичен како и на Галоа. Како студент одредено време мислел дека ја решил општата равенка од петти степен, но сам си ја исправил грешката во трудот кој го објавил во 1824 г. Тоа е познат труд во кој Абел докажал дека не може да се реши општа равенка од петти степен. Доказот на тоа тврдење што го дал италијанскиот математичар Руфини во 1799 г. се смета за мошне неодреден.

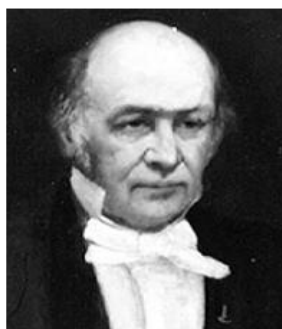
Благодарение на ова, Абел добил стипендија и патувал низ Германија, Италија и Франција. Мачен од беда и туберкулоза, ова повлечено и плашливо момче успеало да создаде малку познанства. Умрел набргу по враќањето во татковината.

За време на патувањата, Абел напишал неколку труда во кои ги изнел резултатите од своите проучувања на конвергенцијата на редовите, Абеловите интеграл и елиптичните функции. Абел ги проучувал елиптичните функции краткотрајно, но во интересен натпревар со Јакоби. Неговите трудови се печатени во новоотвореното *Списание за чиста и применета математика*. Во негова чест комутативните групи се нарекуваат Абелови, што покажува дека постои тесна врска помеѓу идеите на Галоа и Абел.



### Карл Густав Jakob Јакоби (1804 – 1851)

Јакоби потекнувал од познато семејство и бил син на берлински банкар. По неколку години поминати во Берлин, предавал од 1826 до 1843 г. во Кенингсберг и потоа престојувал одредено време во Италија, за да го поврати изгубеното здравје. Умира на 46 години како професор на Берлинскиот универзитет. Тој продрел во речиси сите области на математиката. Во 1829 г. (годината кога умрел Абел), Јакоби ја објавил својата книга „Нови основи на елиптичните функции“. Својата теорија на елиптични функции Јакоби ја засновува врз четири функции, т.н. *тета-функции* што се дефинираат со редови. Функциите  $\operatorname{sn}(x)$ ,  $\operatorname{cn}(x)$  и  $\operatorname{dn}(x)$  претставуваат односи на „тета-функциите“ и задоволуваат некои идентитети и адициски теореми аналогни на синус и косинус. Терминот *Јакобијан* го вовел Силвестер со што му оддава признание на Јакоби. Најпознат Јакобиев труд од таа област е „За формирање и особините на детерминантите“ (1841). Јакоби најдобро може да се запознае преку неговата книга „Предавања од динамика“ (1866).



### Вилијам Роуен Хамилтон (1805 – 1865)

Вилијам Хамилтон е име што често се поврзува со Јакоби. Целиот живот го поминал во Даблин, каде што и се родил. Во 1827 г. стапил на колеџот „Тринити“, а во дваесет и првата година станал кралски астроном на Ирска и на таа должност останува до смртта. Уште како дете ги проучувал делата на Клеро и Лаплас. Тој мошне солидно владеел со *оптиката* и *динамиката*. Неговата идеја била од еден општ принцип да ги изведе и оптиката и механиката. Следејќи го тој пат, Хамилтон од оптиката и динамиката добил два вида примена на варијациското сметање. Тој бара стационарна вредност на некој интеграл и го разгледува како функција од границите на интегралот. Тоа дава *карактеристична* или *главна функција*, која задоволува систем од две парцијални равенки. Во своите предавања од динамика, Јакоби посебно ја издвоил таканаречената Хамилтон-Јакобиева равенка. Тоа во извесна смисла фрлило сенка врз Хамилтоновата „карактеристична функција“. Втората Хамилтонова идеја е изведување на законите на физиката и механиката од варијација на некој интеграл. Современата теорија на релативност и

квантната механика ја користат „Хамилтоновата функција“ како еден од основните принципи. Годишната 1843 е од голема важност во животот на Хамилтон. Таа година тој ги открил кватернионите, на чие проучување го посветил преостанатиот дел од животот.



### **Петер Лежен Дирихле (1805 – 1859)**

Дирихле соработувал како со германските, така и со француските математичари. Од 1822 до 1827 г. живеел во Париз. Потоа предавал на Универзитетот во Вроцлав, а во 1855 г. го наследил Гаус во Гетинген. Неговата прекрасна книга „Предавања од теорија на броеви“ (1863) сè уште е најдобар вовед на Гаусовите истражувања во теоријата на броеви. Таа книга содржи и оригинални резултати. Таму се воведени

*Дирихлеовите редови.* Дирихле прв дал строг доказ за конвергенција на Фуриеовите редови.

Тој во варијациското сметање го воведува таканаречениот *Дирихлеов принцип*. Тоа претставува модификација на принципот што Гаус го вовел во својата теорија на потенцијали.



### **Бернард Риман (1826 – 1866)**

Риман бил Дирихлеов наследник во Гетинген. Тој бил син на селски свештеник. Студирал на Гетингенскиот универзитет, каде што во 1851 г. докторирал, а потоа во 1854 г. станал доцент, а во 1859 г. професор. Болежлив како и Абел, последните години од животот ги поминува во Италија, каде што умира на 40-годишна возраст. Објавил релативно малку трудови, но секој од нив бил значаен, а во одредени трудови се најдени потполно нови области. Тој влијаел врз развојот на

современата математика повеќе од кој било друг математичар. Римановата докторска дисертација е од областа на функциите со комплексни променливи. Исто така, тука добиени се и *Коши-Римановите услови*. Тој укажува на големата примена на топологијата во комплексните функции.

Риман своите идеи ги применил на хипергеометриски и Абелови функции. Меѓу неговите резултати се наоѓаат и откриција, на пример Римановите површини како тополошки инваријанти и средства за класификација на Абеловите функции. Во тој правец спаѓаат неговите истражувања од елиптични модулари функции и тета-редови со  $p$  променливи, како и линеарни диференцијални равенки. Откако станал

доцент, напишал две фундаментални дела: едно од тригонометриските редови и основи на анализата, а второто од основи на геометријата. Тој го воведува т.н. *Риманов интеграл*. Во своите предавања, Риман наведува пример на непрекината функција што никаде нема извод.

Пример на таква функција дава Вајерштрас и тоа го објавил во 1875 г. Математичарите не сакале сериозно да ги сфатат таквите функции, нарекувајќи ги *патолошки*, па дури современата анализа покажува колку се тие природни. Од областа на геометријата тој извршува класификација на сите постојни геометрии, вклучувајќи ја тогаш мошне нејасната неевклидова геометрија. Освен тоа, тој конструира и нови типови простори од кои некои се покажале многу корисни. На крајот, ќе го споменеме и Римановиот труд во кој тој ја проучува функцијата  $F(x)$  на прости броеви помали од даден број  $x$  (1859).

Тој труд претставува примена на теоријата на функциите со комплексни променливи во распределбата на простите броеви и се анализира Гаусовата претпоставка дека:

$$F(x) \approx \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$$

Тука се сретнува и познатата Риманова хипотеза дека сите комплексни нули на Ојлеровата зет-функција:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \dots$$

се од облик  $\frac{1}{2} + iy$ . Оваа хипотеза сè уште не е докажана.



### Карл Вајерштрас (1815 – 1897)

Вајерштрас во текот на повеќе години бил наставник во Пруска гимназија, а во 1856 г. станал професор на Берлинскиот универзитет и тука останал 30 години. Додека предавал во гимназијата, Вајерштрас напишал неколку статии за хиперболични интегрални, Абелови функции и алгебарски диференцијални равенки. Тој се занимавал со цели функции и функции дефинирани со бесконечни производи. Неговата елиптична функција  $P(u)$  станала призната како Јакобиевите

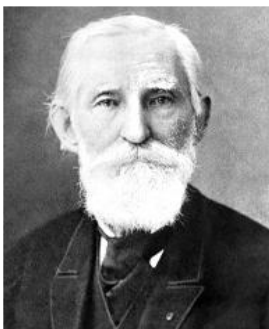
функции  $\operatorname{sn}(x)$ ,  $\operatorname{cn}(x)$  и  $\operatorname{dn}(x)$ . Вајерштрас се прославил со своето педантно расудување – *Вајерштрасова строгост*, која доаѓа до израз не само во неговата теорија на функции туку и во варијациското сметање.



### **Михаил Василиевич Остроградски (1801 – 1862)**

Остроградски ја запознал математиката и ја засакал за време на студиите на Харковскиот универзитет. Остроградски дошол на Харковскиот универзитет благодарение на Т. Ф. Осиповски, кој многу влијаел на Остроградски. Крајот на руската империја значи и смена на Осиповски, а настрадал и неговиот ученик, кому не му издале диплома. За да се усовршува понатаму, Остроградски отишол во

Париз и контактирал со познатите француски математичари. Во татковината се враќа со низа трудови, а брзо потоа бил избран во Петроградската академија на науки, иако бил без диплома. Во анализата наидуваме на *формулата на Остроградски* за трансформацијата на волуменски интеграл во површински. Оваа формула честопати погрешно се нарекува и Гаусова формула. Неговата постапка за интегрирање на рационални функции влегла во курсевите по анализа. Се занимавал и со теоријата на топлина, механика, а во варијациското сметање вовел формула за варијација на повеќекратни интеграла. Долгогодишната академска активност се одвивала во соработка со В. Ј. Буњаковски (1804 – 1889), кој е автор на многу трудови од анализа, теорија на броеви, теорија на веројатност како и неравенството на Буњаковски. Во Петроград и во Москва се формирале нови научни центри. На чело на Петроградската школа уште додека Остроградски бил жив, бил П. Л. Чебишев.



### **Пафнутиј Л'вович Чебишев (1821 – 1894)**

Водечки руски математичар на средината и втората половина на XIX век е Чебишев. Тој е московски воспитаник и таму ја брани својата магистерска теза од областа на веројатноста – област што станува негова основна преокупација. Во Москва, под негово раководство, се формира Московско математичко друштво, чијшто „Математички зборник“ било едно од најдобрите математички списанија и сè уште излегува. Во Петроград доаѓа во 1847 г. и тука останува до крајот на животот.

Држи предавања на Петроградскиот универзитет, а во 1853 г. станува член на Академијата на науки. Има огромна заслуга и во помошта што им ја дава на младите кадри.

Чебишев стекнува слава како извонреден математичар уште со своите први трудови од областа на теорија на броеви. Неговата докторска дисертација „Теорија на конгруенции“ (1849) е извонреден и оригинален учебник од теорија на броеви. За распределбата на простите броеви добива дека изразот  $\frac{x}{\varphi(x)} - \ln x$ , каде што  $\varphi(x)$  е бројот на прости броеви помали

од  $x$ , не може да тежи кон број  $\lambda \neq -1$  кога  $x \rightarrow \infty$ . Подоцна е докажано дека таа низа конвергира точно кон  $-1$ . Во интегралното сметање Чебишев прв ја докажува теоремата за интеграбилност на биномниот диференцијал, и тоа само за оние три случаи што му биле познати уште на Њутн. Заслугата на Чебишев во теоријата на веројатност се состои во законот на големите броеви, како и централната гранична теорема за збир од независни случајни големина. Од теоријата на веројатност направил строга математичка дисциплина, ослободувајќи ја од нејасности. Чебишев многу се занимавал со кинематика на механизми како теоретски, така и практично. Конструирал голем број на оригинални механизми и го пронашол првиот аритмометар на непрекината работа. Се занимавал и со апроксимација на непрекинати функции со полиноми. Тоа го довело до теоријата на ортогонални полиноми, особено во полиномите на Лагер-Чебишев и полиномите на Ермит-Чебишев.

**А. А. Марков** (1856 – 1922) е еден од учениците на Чебишев. Тој во теоријата на веројатноста ја вовел методата на карактеристични функции за изучување на граничните теореми во теоријата на веројатност. Во својата докторска дисертација „Општи проблеми на стабилноста на движењето“ (1892) прв го проучувал проблемот на стабилност на механичките системи со конечен број степени на слобода, од строга математичка гледна точка. Тоа значело прилог кон теоријата на диференцијалните равенки. Љапуновите трудови од теоријата на потенцијали означуваат нова етапа во тој развој. Во теоријата на броеви значаен придонес дале **Е. И. Золотов** (умира несреќно на 31 година), **Г. Ф. Ворониј** (ученик на Марков) и **А. Н. Коркин**. На Коркин му припаѓа методата за интегрирање систем на парцијални равенки од прв ред.

## Неевклидова геометрија

Во текот на втората половина на XVIII век и почетокот на XIX век, грозничавата активност во новите области на проективната и алгебарската геометрија го фрлиле во заборав петтиот Евклидов постулат. Се поставувало прашање дали е тоа аксиома или теорема? Меѓу другите одговор на тоа прашање барале и Птоломеј, Насир ад-Дин во средниот век, во XVIII век Ламберт и Лежандр. Тие се обидувале да го докажат тоа како теорема, но без успех.

Гаус бил прв што сметал дека тоа е аксиома, а не теорема, но тоа не го објавил никаде. Рускиот математичар **Николај Иванович Лобачевски** (1793 – 1856) и Унгарецот **Јанош Бољај** (1802 – 1860) први го разрешиле тешкиот проблем, тврдејќи дека тоа е аксиома. Лобачевски прв ги изнел своите резултати. Нивните теории во основа се слични, а трудовите многу се разликуваат. Интересен е фактот дека независно се родиле нивните идеи во Гетинген, Будимпешта и Казањ, на периферијата на светот на математичките истражувања, речиси во исто време. Лобачевски целиот свој живот го посветил на науката и на својот Универзитет во Казањ, каде што дипломирал во 1811 г., а станал професор во 1816 г. Бил декан и 20 години ректор на тој универзитет. Тој е водечки математичар во Русија во втората половина на XIX век. Најпрвин Лобачевски се обидува да го докаже тој став, но потоа од Евклидовата теорија го издвоил сè она што е независно од петтиот постулат, добивајќи ја *апсолутната геометрија*. Со замена на петтиот постулат со нов не добил противречност, добивајќи нов непротивречен систем. Тоа го реферирал прв на 23 февруари 1826 г. на Универзитетот во Казањ.

На неговата прва книга (1829/30), како и на германското издание под наслов „Геометриско истражување на паралелни линии“, не било обрнувано посебно внимание. Импонира неговата смелост и цврстина во борбата за новата геометрија. Тој не бил само генијален геометар туку дал придонес и во анализата. Јанош Бољај бил син на наставник по математика во унгарски провинциски град. Тој по професија бил офицер. Неговиот татко студирал на Гетингенскиот универзитет во времето на Гаус и потрошил многу време за да го докаже петтиот Евклидов постулат. Затоа го посветувал својот син Јанош да не губи многу време со тој проблем. Не обрнувајќи внимание на тоа, Јанош доаѓа до истите идеи како и Гаус и Лобачевски, и тоа било испечатено во 1832 г. На тоа Гаус дал позитивно мислење, но Јанош се разочарува кога дознава дека е лишен од приоритет. Особено бил разочаран од појавата на книгата на Лобачевски на германски јазик, така што не се занимавал со таа област.

Терминот неевклидова геометрија потекнува од Гаус, а Риман бил прв од водечките математичари кој наполно го сфатил значењето на новата геометрија и дал свој придонес. Подоцна се доаѓа до генерализирање со повеќе од три димензии. Геометријата на повеќе димензии го стекнува своето признавање дури кон крајот на XIX век.

## Проективна и синтетичка геометрија

Почетоците на современата геометрија потекнуваат од Гаспар Монж, каде што се појавуваат корените на *синтетичката геометрија* и *алгебарските методи* во геометријата. Во 1822 г., проективната геометрија прераснува во посебна дисциплина со појавата на книгата на Понселе. Настанал проблем со приоритетот, бидејќи Жозеф Жергон објавил неколку значајни труда од проективната геометрија. За Понселе е карактеристичен принципот на

непрекинатост, според кој од својствата на една фигура добива својства на друга фигура. Понселеовите идеи подоцна ги развивале германските геометри.

Претставник на синтетичката (или чиста) геометрија е **Јакоб Штајнер** (1796 – 1863). Роден е во Швајцарија и студирал во Хајделберг. Бил професор во Берлин сè до својата смрт. Тој бил исклучиво геометар. Ја изградувал систематски проективната геометрија, преминувајќи од перспективност на проективност, а потоа на конусни пресеци. Тој решил низа изопериметарски проблеми. Во 1832 г. се појавува неговата книга „Систематски истражувања“.

**Христијан фон Штаут** (1798 – 1867) многу години бил професор во Ерлангер. Тој со својата „Геометрија на положби“ ја воведува хармониската поделба на четири точки на правата. Во текот на следните децении синтетичката геометрија многу се збогатила, но останала заснована на основите поставени од Понселе, Штајнер и Штаут.

## Алгебарска геометрија

Претставници на алгебарската геометрија во Германија се **Мебиус** и **Пликер**, во Франција е **Шал**, а во Англија **Кели**.

**Август Фердинанд Мебиус** (1790 – 1868) бил директор на Лајпцишката астрономска лабораторија. Тој бил сестран научник. Во книгата „Барицентричното сметање“ прв ги воведува барицентарските координати, при што на темињата на триаголникот му придружува маси  $m_1, m_2, m_3$ . Тој дошол до низа интересни резултати. Мебиусовиот лист е прв пример на неориентираната површина, и тоа покажува дека тој бил еден од основачите на нашата современа топологија.

**Јулујус Пликер** (1801 – 1868) бил геометар и физичар-експериментатор. Нему му припаѓаат низа откритија од областа на магнетизмот на кристалите, електроспроводливоста на гасовите и спектроскопијата. Во многу статии и во книгата „Нова геометрија на просторот“ внесува многу нови елементи. Така, на пример, го воведува праменот на криви од втор ред  $C_1 + \lambda C_2 = 0$ . Тој доаѓа до нови дуалитети во синтетичката и алгебарската геометрија. Пликер објавува и општа теорија на алгебарски криви на рамнината.

**Мишел Шал** (1793 – 1880) студира на Вишата политехничка школа во времето кога завршува Монжовата дејност. Тој е водечки претставник на геометријата во Франција. Во 1841 г. станал професор на Вишата политехничка школа, а од 1846 г. ја презема катедрата по геометрија во Сорбона. Тој бил Понселеов следбеник во користењето на *нумеричките методи* во геометријата. Неговите трудови имаат многу заедничко со Пликеровите трудови. Неговата книга „Историски преглед на настаните и

развојот на геометриските методи" (1837) претставува почеток на современата историја на математиката.

## Аритметизација на математиката

*Аритметизацијата на математиката* е карактеристична за Берлинската школа, конкретно за дејноста на **Леополд Кронекер**. Таа претставува тенденција анализата да се сведе на попусти математички поими. Во таа школа припаѓаат истакнати и плодни математичари од областа на алгебрата и теоријата на алгебарски броеви, како што се **Кронекер, Кумер, Фробениус**, како и **Дедекинд** и **Кантор**.

**Ернест Кумер** (1810 – 1893) во 1855 г. бил повикан во Берлин да го замени Дирихле, и таму предавал до 1883 г. Тој работел на изградба на диференцијалната геометрија на конгруенции, која ја скицирал Хамилтон. Почит и слава му донеле неговите *идеални броеви* во областа на алгебарските рационалности. До нив дошол обидувајќи се да ја докаже теоремата на Ферма.

**Леополд Кронекер** (1829 – 1891) доаѓа во Берлин и многу години предава на универзитетот. Главните Кронекерови трудови припаѓаат во областа на елиптичните функции, теоријата на идеали и аритметика на квадратните форми. Во неговите дела јасно е изразена аритметизацијата на математиката. На пример, бројот  $\pi$  не треба да се дефинира по обичен геометриски пат, туку со редот:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

т.е. како комбинација на цели броеви.

На конгресот во Берлин во 1886 г. тој изјавува: „Целите броеви ги создал Господ Бог, а сè друго е дело на човечката рака“. Тој допушта само таква дефиниција на математички поим што бара конечен број чекори. Тешкотиите со поимот бесконечност тој ги надминува со отфрлање на тој поим. Платоновата поговорка дека Господ секогаш „геометризира“ е заменета со Кронекеровото учење со поговорката дека Господ секогаш „аритметизира“. Што се однесува до актуелната бесконечност, Дедекинд и Кронекер имале спротивни теории.

**Рикард Дедекинд** (1831 – 1915) многу години бил професор на Високата техничка школа во Брауншвајг и изградил строга теорија на ирационалните броеви. Со две мали книги „Непрекинатост и ирационалните броеви“ (1872) и „Што се броевите и кому му служат тие“ (1882) тој за современата математика направил исто што и Евдокс за грчката математика.

**Георг Кантор** (1845 – 1920) предавал во Хале од 1869 до 1905 г. и е познат не само по својата теорија на ирационалните броеви туку и по

теоријата на множества. Со таа теорија Кантор создал сосема нова област на математичките истражувања, која ги задоволува и најголемите барања во поглед на строгоста. Кантор дал теорија на трансфинитните кардинални броеви, базирана на системско користење на актуелната бесконечност. Најмалиот бесконечен кардинален број  $\aleph_0$  го припишал на природните броеви, а на континуумот му припишал поголем трансфинитен број што овозможува создавање теорија на трансфинитни броеви, слична на обичната аритметика. Канторов главен противник бил Кронекер, како претставник на потполно спротивен правец. Кантор стекнува целосно признание во 1901 г. кога Лебег ја збогатил теоријата на множества со својата теорија на мера.

## Математичари од Велика Британија и Ирска

Имињата на **Хамилтон** и **Кејли** покажуваат дека околу 1840 г. англиските математичари биле во чекор со своите колеги од континентот. Во првите децении од XIX век имало обиди за усовршување на Њутновата теорија на флуksии. Таа бариера да се оди напред во науката во 1812 г. ја собориле група млади математичари од Кембриџ. Меѓутоа, најистакнато место заземаат Хамилтон и Грин.

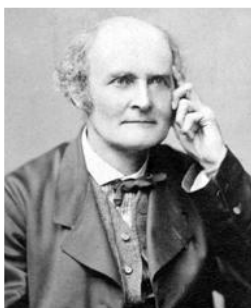


### Џорџ Грин (1793 – 1841)

Бил син на брашнар во Нотингам. Иако бил самоук, тој внимателно ги проучувал откритијата во областа на електромагнетизмот. Во 1828 г. прави обид да создаде математичка физика во Англија. Заедно со Гаусовите истражувања, тие ја создале теоријата на потенцијали како посебна гранка во математиката. Гаус и Грин независно имале исти идеи за потенцијалите. Името на Грин го носи и формулата за премин од криволиински во површински

интеграл.

Во врска со понатамошниот развој на математичката физика во Англија и Германија само ќе ги споменеме имињата **Стокс**, **Релеј**, **Келвин**, **Максвел**, **Киркоф**, **Хелмхолц** и **Гибс**, кои дале многу за теоријата на парцијалните равенки и математичката физика. Од особено значење е Максвеловиот „Трактат за електрицитет и магнетизмот“ (1873). Тука е дадено систематско изложување на електромагнетизмот засновано на Фарадеевите експерименти. Максвеловата теорија станала доминантна математичка теорија на електрицитетот што го инспирирала Лоренц во создавањето на својата теорија на електронот, а Ајнштајн во создавањето на теоријата на релативност. Чистата математика во Англија во XIX век е настаната пред развојот на алгебрата со примена на геометријата, а водечки личности во таа област се **Кејли**, **Силвестер** и **Салмон**.



### **Артур Кејли (1821 – 1895)**

Во младоста се посветил во проучувањето на правото, но во 1863 г. ја прифатил понудата да ја преземе новата математичка катедра во Кембриџ и таму предавал 30 години. Работејќи како правник во Лондон се запознава со Силвестер. Соработката меѓу Силвестер и Кејли означувала почеток на создавањето на алгебарските инваријанти. Многу Келиеви трудови се посветени на најразлични прашања од областа на групите, алгебарските криви, детерминантите и инваријантните алгебарски форми. Меѓу најпознатите трудови се деветте „Мемоари за квантиците“. Шестиот труд во таа серија содржи проективна дефиниција на метриката во однос на конусен пресек.



### **Џејмс Џозеф Силвестер (1814 – 1897)**

Не бил само математичар туку и поет, кој заедно со Лајбниц е најистакнат творец на нови термини во целата историја на математиката. Тој бил професор на Воената академија во Вулвич, а двапати престојувал во САД како професор. Со неговото присуство во САД се поставени темелите на научната работа од областа на математиката на американските универзитети. Од неговите трудови се издвојуваат неговата теорија на прости делители и неговиот закон за инерција на квадратните форми. Тој нè задолжил со многу термини.



### **Џорџ Салмон (1819 – 1904)**

Бил алгебрист и геометар. На колеџот „Тринити“ во Даблин предавал математика и богословија. Неговата најзначајна заслуга е создавање на добропознатите прирачници што биле јасни и интересни. Особено треба да се нагласат две творби во Велика Британија. Тоа се Хамилтоновите кватерниони и Клифордовите бикватерниони. Кај Хамилтон е дадена строга дефиниција на комплексните броеви како парови на броеви (независно од Гаус). Потоа, тој се обидува да навлезе во тројките броеви, четворките итн. Откривањето на кватернионите во 1843 г. претставува вистинска сензација како за Хамилтон, така и за

другите математичари, така што било формирано *Меѓународно здружение за координација во проучувањето на кватернионите и сродните математички системи*. Теоријата за хиперкомплексните броеви ја разработиле *Пирс, Студи, Фробениус и Картан*, и тоа го дава вистинското место на кватернионите.



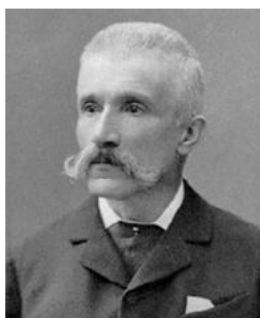
### **Вилијам Кингдом Клифорд (1845 – 1879)**

Предавал на колеџот „Тринити“ во Кембриџ и Универзитетскиот колеџ во Лондон. Умира на 34 години. Тој ја проучувал геометријата на движењата и тоа го навело да ги генерализира Хамилтоновите кватерниони на таканаречените бикватерниони  $(a + b\varepsilon, \varepsilon^2 \in \{1, -1, 0\})$ . Тие наоѓаат примена во движењата на неевклидовите простори.

**Џорџ Бул** (1815 – 1964) бил професор на еден од даблинските колеџи. Во 1854 г. се појавува неговата книга „Закони на мислењето“. Неговата *алгебра на логиката* е почеток на она учење што настојува да ги обедини логиката и математиката.

## **Италијански математичари**

Националната преродба на Италија значи и преродба на италијанската математика. Таму многу се чувствува влијанието на Риман и Клајн. Италијанските математичари ги запознале Клебш и Кели со геометријата и теоријата на инваријанти. Основачи на италијанската математичка школа биле **Бриоски, Кремона и Бети**.



### **Франческо Бриоски (1824 – 1897)**

Во 1852 г. станал професор во Павија, а во 1862 г. организирал политехнички институт во Милано, каде што предавал до својата смрт. Тој го основал списанието „Анали на чиста и применета математика“. Заедно со Бети и Козарати ги посетуваат водечките математичари во Франција и Германија, што е од суштинско значење за италијанската математика.

### Еугино Белтрами (1835 – 1900)



Тој е ученик на Бриоски и бил професор во Болоња, Пиза, Павија и Рим. Неговите главни трудови во геометријата припаѓаат на периодот помеѓу 1860 и 1870 г. Во теоријата на површини го воведува сметањето со диференцијалните инваријанти. Тој ги проучувал површините со константна негативна кривина што дало можност за практична реализација на теоријата на Лобачевски и Бољај.

Околу 1870 г., Римановите идеи сè повеќе ги прифаќале младите математичари. Неговата теорија на квадратни диференцијални форми била предмет на два труда на германските математичари **Е. Кристофел** и **Р. Липшиц** (1870). Во првиот воведени се таканаречените Кристофелови симболи. Тие истражувања комбинирани со Белтрамовата теорија, му овозможиле на **Г. Ричи** од Падова да го создаде таканареченото апсолутно диференцијално сметање (1884). Тука се наоѓа нова инваријантна симболика, која првобитно била создадена за користење во теоријата на трансформации на парцијалните равенки.

Од трудовите на Ричи и некои негови ученици, меѓу кои и **Тулио Леви-Чивита**, од апсолутното диференцијално сметање создадена е *тензорската анализа*. Со помош на тензорите можат да се претстават многу инваријантни симболики, а тензорите се покажале многу ефикасни за наоѓање на општите теореми во теоријата на еластичност, Ајнштајновата теорија на релативност и хидродинамика. Терминот *тензор* потекнува од теоријата на деформација, поточно од теоријата на напрегната состојба.

Најголем претставник на диференцијалната геометрија во Италија е **Луиџи Бјанки** (1856 – 1928). Неговите „Предавања по диференцијална геометрија“ (1902 – 1909) стојат во ист ред како и Дарбуовата „Општа теорија на површини“ како пример на класично излагање на диференцијалната геометрија во XIX век.

### Развојот на математиката во последните децении од XIX век

Математиката во 1870 г. израснала во огромна и хаотична градба што се состоела од голем број делови, така што патот во нив можеле да го најдат само специјалистите. Дури и големите математичари како **Ермит**, **Вајерштрас**, **Кејли** и **Белтрами** можеле да се снаоѓаат само во мал број области на математиката. Најзначајните резултати од тогаш до денес се јавуваат како резултат на синтеза на различни области во математиката. XIX век донел нови обединувачки принципи, на пример теоријата на групи и Риманов поим за функција и простор. Значењето на тоа најдобро се гледа во трудовите на **Клајн**, **Ли** и **Поенкаре**.

### **Филикс Клајн (1849 – 1925)**



Бил Пликеров асистент во Бон и таму ја изучувал геометријата. Во 1870 г. престојува во Париз и таму се сретнува со Софус Ли. Клајн и Ли почнале да го сфаќаат фундаменталното значење на теоријата на групи и подоцна, грубо речено, математиката ја поделиле на два дела: Клајн главно се занимавал со дискретни групи, а Ли се занимавал со непрекинатите групи. Во 1872 г. Клајн станал професор во Ерланген. Тој посебно го потенцирал значењето на групите. Која било геометрија се појавува како теорија на

инваријанти на посебна група трансформации.

Евклидовата геометрија е студија на инваријанти на математичките групи, а проективната геометрија е студија на проективните групи. Клајн дал важен придонес на примената на својот пристап, покажувајќи дека неевклидовата геометрија може да се смета како проективна геометрија со Кејлиева метрика. Тоа довело до потполно признание на занемарените теории на Лобачевски и Бољај. Таа идеја на пресликување на една област во друга подоцна имала важна улога во Хилбертовата аксиоматска геометрија. Теоријата на групи овозможила синтеза на геометриските и алгебарските трудови. Римановата концепција на теоријата на комплексните броеви, Клајн ја изложил во својата книга „За Римановата теорија на алгебарски функции“ (1882), во која нагласил дека физичките претстави можат да влијаат дури и на најсуптилните делови на математиката. Во „Предавањата за икоседарот“ (1884), Клајн покажува дека со помош на современата алгебра можат да се направат многу нови и чудни работи во однос на старите Платоновите тела. Теоријата на групи од Клајн и од неговите ученици била применувана во диференцијалните равенки, елиптичните модулари функции, Абеловите функции итн. Под инспирација на Клајн, Гетинген станал светски центар на математичките истражувања, негувајќи ги традициите на Гаус, Дирихле и Риман.

### **Софус Ли (1842 – 1899)**



Во Париз ги открива контактните трансформации и со тоа наоѓа клуч за севкупната Хамилтонова динамика, како дел од теоријата на групи. По враќањето во Норвешка бил професор во Осло, а од 1886 до 1898 г. во Лајпциг.

Ли целиот свој живот го посветил на проучувањето на групите од непрекинатите трансформации и нивните инваријанти, истакнувајќи го нивното значење како класификациски принцип во

геометријата, механиката и диференцијалните и парцијалните равенки. Подоцна, неговите трудови значително се дополнети од францускиот математичар **Ели Картан**.



### **Жозеф Лиувил (1809 – 1882)**

Од 1840 до 1860 г. бил водечки математичар во Франција, кој работел како професор на колеџ во Париз. Ја проучувал аритметичката теорија на квадратни форми со две и повеќе променливи. *Лиувиловата теорема* во статистичка механика покажува дека работел и во други области. Ја докажал егзистенцијата на трансцендентните броеви, покажувајќи дека такви се  $e$  и  $e^2$ . Работел во областа на диференцијалната геометрија на криви и површини.



### **Шарл Ермит (1822 – 1901)**

Бил професор на Сорбона и на Вишата политехничка школа во Париз и станал водечки претставник на анализата во Франција по смртта на Коши (1857). Предмет на неговите истражувања се елиптичните функции, модуларните функции, тета-функциите, теоријата на броеви и теоријата на инваријанти, за што сведочат термините *Ермитови броеви*, *Ермитови форми* и *Ермитови полиноми*. Негов близок пријател бил холандскиот математичар Стилтјес. Нивната „Преписка“ опфаќа четири книги и содржи богат материјал од комплексните функции.



### **Гастон Дарбу (1842 – 1917)**

Бил геометар од Монжов тип. Тој бил професор на француски колеџ. На геометриските проблеми им приоѓа од гледиште на теоријата на групи и диференцијалните равенки. Од сите негови трудови најголемо влијание имаат неговите „Предавања од општата теорија на површини“ (1887-1896), каде што се изложени резултатите во диференцијалната геометрија за последните сто години. Дарбу се занимавал и со механика.

## Анри Поенкаре (1854 – 1912)



Најголем француски математичар во втората половина на XIX век бил **Анри Поенкаре**, професор на Сорбона од 1881 г., па до крајот на животот. Ниеден од математичарите од тој период не владеел со толку голем број дисциплини и не бил во состојба толку да ги збогати. Секоја година држел предавања по нов предмет. Тие предавања ги издавале неговите ученици, а опфаќале многу области: теорија на потенцијали, оптика, електрицитет, пренос на топлина, електромагнетизам, хидродинамика, термодинамика и теорија на веројатност. Многу од неговите идеи чекаат понатамошна разработка. Напишал и неколку популарни книги, меѓу кои се „Вредност на науката“ (1905) и „Наука и хипотеза“ (1906). Освен тоа, Поенкаре објавувал многу трудови од автоморфните и Фуксовите функции, диференцијални равенки, топологија и основи на математиката.

Веројатно ниеден од математичарите на XIX век, освен Риман, не можел толку многу да даде за нашата генерација. Особено треба да се истакне неговиот придонес во небесната механика, односно проблемот на три тела. Поенкаре е сличен на Ојлер и Гаус. Поенкареовите трудови значајно влијаеле на нашите современи претстави во области на космологијата, топологијата, теоријата на веројатност и Ајнштајновата теорија на релативност.

## Хилбертова програма за математиката во XX век

На Меѓународниот конгрес на математичари во Париз (1900) гетингенскиот професор **Давид Хилберт** (1862 – 1943) истакнува 23 проблеми што бараат истражување во XX век. Во тоа време Хилберт веќе бил познат по своите трудови од алгебарските форми и ја издал познатата книга „Основи на геометријата“ (1899). Во оваа книга, Хилберт дал анализа на аксиомите на Евклидовата геометрија. Во својот реферат (1900) тој настојува да ги присобере тенденциите на математиката од претходните децении и да ги постави контурите на истражувањата во иднина. Една група проблеми се однесуваат на аритметичката формулација на поимот за континуум. На пример, дали постои кардинален број помеѓу  $\chi_0$  и  $c$ ? Може ли континуумот да се разгледува како потполно подредено множество? Следна група проблеми се однесуваат кон засновањето на геометријата. Дали за поимот за непрекинатост на групата на трансформации по Ли е неопходна бидиференцијалност? (Одговор: Да.)

Потоа следуваат проблеми за математичкото толкување на аксиомите на физиката, како и неколку проблеми од областа на аритметиката и алгебрата. На пример, ако  $a$  е алгебарски број и  $\beta$  е ирационален број, тогаш каков е  $a^\beta$ ? Римановата хипотеза за нулите на зета-функцијата не била решена. Во 16-тиот проблем се бара да се изучи топологијата на алгебарските криви и површини. Еден од проблемите се однесува на пополнување на просторот со конгруентни многуаголници. Другите проблеми се однесуваат на диференцијалните равенки и варијациското сметање. Дали решенијата на регуларните задачи во варијациското сметање секогаш се аналитички? Дали секој регуларен варијациски проблем има решение при дадени гранични услови? Тој апелирал за понатамошен развој на варијациското сметање. Хилбертовата програма ја покажува животната моќ на математиката кон крајот на XIX век.

Денес, некои од овие проблеми се решени, а некои чекаат решение. Развојот на математиката по 1900 година не ги изневери надежите што се дадени на почетокот на XX век. Меѓутоа, дури и Хилбертовиот гениј не можел да предвиди некои зачудувачки откритија до кои се дошло подоцна и сè уште се доаѓа.

## Математичките достигнувања на XX век

Најзначајни математички достигнувања во 20 век  
од областа на алгебрата

Во 20 век, областа на алгебрата има видено значајни напредоци и многубројни значајни математичари се истакнале со своите придонеси.

Некои од најзначајните резултати и најважните математичари во ова поле вклучуваат:

### 1. Теорија на групите:

– Исак Шварц: Развил голем број концепции и резултати во теоријата на групите, вклучувајќи ја и „Теоремата на Шварц-Милнор“.

– Џон Томпсон: Соучесник на Шварц, ги докажал правилата за Трите конечни групи и се истакнал со придонесите во теоријата на групите.

### 2. Теорија на прстените

– Емери Дрингер: Развил теорија за прстените и појасите, со вклучување на Дрингеровите теореми и теоријата на Дрингер-Орлик прстени.

– Алберт Абрахам Алберт и Натан Џакобсон: Придонеле во развојот на теоријата на прстените и стојат зад „Теоремата на Алберт-Џакобсон“.

### 3. Теорија на модулите и алгебарска топологија:

– Серге Ланг: Познат по своите придонеси во алгебарската геометрија и топологијата, вклучувајќи ги и „Ланговата хипотеза“ и „Ланг-Шафаревичев метод“.

– Александар Гровер: Развил алгебарски методи во топологијата и теоријата на модулите.

### 4. Теорија на репрезентации:

– Андре Вејл: Воспоставил теорија на репрезентации, што има значајно влијание во алгебрата и теоријата на броеви.

Во областа на анализата, во 20 век имаше многу значајни придонеси и важни математичари. Некои од најзначајните резултати и математичари во ова поле ги вклучуваат:

### 1. Теорија на мера и интеграл:

– Анри Лебег: Развил концепции околу мера и интеграл, вклучувајќи го и Лебеговиот интеграл.

– Андреј Колмогоров: Придонел во теоријата на веројатноста и развил Колмогорова аксиоматика, која има врска со мерата.

### 2. Теорија на функциите на реални променливи:

– Стефан Банах и Јулиј Шмит: Познати по Банах-Шмитовата теорема во функционална анализа.

– Арнолд Н. Колмогоров: Има важни придонеси во теоријата на веројатноста, функционалната анализа и топологијата.

### 3. Функционална анализа:

– Давид Хилберт: Имал големо влијание врз функционалната анализа и ја развил теоријата за Хилбертови простори.

- Фред Хол: Се истакнал во областа на Холовите простори и функционалната анализа.

### 4. Теорија на диференцирање и интегрирање:

– Луј Нирнберг и Гинтер Штембаум: Се истакнале во областа на теоријата на Соболеви простори, што има голема примена во теоријата на диференцирање и интегрирање.

– Ларец Ф. Шварц: Развил теорија на обопштено диференцирање и таа има важни придонеси во теоријата на диференцирање.

Во областа на топологијата, 20 век беше период на значителен напредок и развој. Некои од најзначајните резултати и најважните математичари во ова поле вклучуваат:

### 1. Аксиоматска топологија:

– Стефан Банах и Казимеж Куратовски: Ги развиле основите на топологијата, вклучувајќи ја аксиоматската топологија и Куратовското затворено множество.

– Карл Мортен Александер: Дал значаен придонес во топологијата и придонел за воведување на Александровите тополошки простори.

### 2. Алгебарска топологија:

– Хенрих Картан и Андре Вејл: Развиле алгебарска топологија со воведување на кохерентните тополошки простори и кохерентни апликации.

– Џон Милнор: Се истакнал во областа на тополошка група, вклучувајќи ја и Милноровата категорија.

### 3. Диференцијална топологија:

– Рене Том: Учествовал во развојот на диференцијалната топологија и придонел во областа на Томовата теорија.

– Стивен Смејл: Се истакнал во топологијата на множества со структура на множество и теоријата на Смејл.

### 4. Геометриска топологија:

– Џон Милнор: Придонел во областа на геометриската топологија, вклучувајќи го и развојот на Теоремата на Понтријагин.

– Михаил Громов: Имал влијание во областа на симплетичната топологија и геометријата.

Теоријата на веројатноста во 20 век бележи значителен напредок со вклучување на нови математички концепции и методологии. Некои од најважните математичари и резултатите во ова поле вклучуваат:

#### 1. Класична веројатност и теорема на Баер:

– Андреј Колмогоров: Развил аксиоматска теорија на веројатноста, која сега е позната како Колмогорова теорија.

– Емил Баер: Ја формулирал теоремата на Баер, која опфаќа понатамошен развој на теоријата на веројатноста.

#### 2. Мартингали и Теоремата на Дуба:

– Пол Леви: Развил теорија на мартингалите, која има апликации во теоријата на веројатноста и стохастичките процеси.

– Џон Ф. Дуб: Ја формулирал Теоремата на Дуба, која се однесува на континуираните стохастички процеси и пристапи во теоријата на веројатност.

#### 3. Теоремата на Цекендорф:

– Александар Цекендорф: Ја докажал Теоремата на Цекендорф, која се однесува на состојбата на пределни точки за секвенците на случајни величини.

#### 4. Стохастички процеси и стохастичка диференцијална равенка:

– Норберт Винер: Развил концепција на Винеров стохастички процес и даден е значаен придонес во стохастичката диференцијална равенка.

– Роберт М. Браун: Дошол со моделот на Брауновото движење, кој е класичен пример за стохастички процес.

Овие математичари и резултатите се само дел од богатата плејада научници кои се занимавале со теоријата на веројатност во 20 век. Теоријата на веројатност е област со широк спектар на апликации, вклучувајќи ја и статистиката и финансиите.

Дидактиката на математиката во 20 век понуди развој и истакнување на различни методи и пристапи кон подучување математика. Некои од најважните математичари и резултатите во ова поле вклучуваат:

#### 1. Методот на Нова математика (New Math):

– Андре Вејл: Се истакнал како еден од основачите на Новата математика, што беше образовен пристап кон подучување математика, воведувајќи апстрактни и формални концепции.

– Георг Полја: Имал влијание врз образованието во математиката и ги поддржувал концептите на Новата математика, најпознат е по Дидактичката шема за решавање на математички задачи.

#### 2. Математичката образовна реформа:

– Зви Гвил: Развил концепција на математичка образовна реформа, која се сосредоточува на развој на различни аспекти на математичкото размислување.

– Луис Сокал: Имал влијание во образованието преку својата работа врз образовните политики и стандардизацијата на образованието по математика.

#### 3. Развој на информатика и образование:

– Семуел Паперт: Воведувал идеи за употребата на информатиката во образованието, вклучувајќи го и концептот за „Лого“ како образовен јазик.

– Стивен Волфрам: Познат по својата работа врз „Математичката образовна софтверска компанија“ и книгата „A New Kind of Science“.

#### 4. Истражувачка образовна математика:

– Дебора Болтон: Развила истражувачки методи во образованието со фокус на подобрување на разбирањето и примената на математичките концепции.

– Томас Хајер: Учествовал во развојот на истражувачки образовен метод преку својата работа врз „Истражувањето на математичките умешности“ (Mathematical Abilities Research).

Овие се само некои од математичарите и резултатите кои се сметаат за значајни во областа на дидактиката на математиката во 20 век. Ова поле е

опширно и комплексно, а резултатите вклучуваат различни образовни филозофии и методологии.

Во областа на геометријата, 20 век донесе значителни придонеси и развој. Некои од најзначајните резултати и математичари во ова поле вклучуваат:

#### 1. Аксиоматска геометрија и Теоријата на Хилберт:

– Давид Хилберт: Ја формулирал и ја разработил Аксиоматската геометрија и Теоријата на Хилберт, со што дал значаен придонес во основите на геометријата.

– Морис Бурел: Учествовал во развојот на Теоријата на Хилберт и работел на основите на неевклидовата геометрија.

#### 2. Геометрија на Гаусовата кривина:

– Харалд Цоен: Развил концепција за Гаусовата кривина и геометрија на површините, што има значаен придонес во геометријата.

– Михаил Громов: Има важни придонеси во областа на геометријата, вклучувајќи ја и работата со симплектичната геометрија и симетричните простори.

#### 3. Тополошка геометрија:

– Џон Милнор: Имал влијание врз тополошката геометрија, вклучувајќи ја и Теоремата на Понтријагин и концепциите на многуобразија.

– Вилијам Турнул: Познат по своите работи во областа на топологијата и тополошката геометрија.

#### 4. Диференцијална геометрија и Гаусова теорема за ригидноста:

– Шинсу Андо: Се истакнал во областа на диференцијалната геометрија и дал значаен придонес во теоремата за ригидноста на Гаус.

– Енрико Бомбјери: Имал влијание врз топологијата на многуобразија и диференцијалната геометрија.

#### Постигнувања во областа на Нумеричката анализа:

##### 1. Метод на конечните елементи:

– Роберт Рихардсон: Развил метод на конечните елементи, кој има широка примена во решавањето на различни инженерски проблеми со користење компјутери.

- Џон Аренструс: Се истакнал во развојот на методот на конечните елементи и неговата примена во механиката на тврди материјали.

## 2. Алгоритми за решавање на линеарни системи:

- Џејмс Јослин: Развил Јослинови алгоритми за решавање на линеарни системи, што има големо значење во областа на нумеричката анализа.

- Лојд Тресор: Дал значаен придонес во методите за решавање системи на линеарни алгебарски равенки.

## 3. Методи за решавање на диференцијални равенки:

- Левон Хагер: Имал важен придонес во развојот на нумеричките методи за решавање на обични диференцијални равенки.

- Џејмс Форд: Познат по развојот на методата на Форд за решавање на обични диференцијални равенки.

Нјазначајни резултати во областа на криптографијата се следните:

### 1. Развој на јавниот клуч:

- Витфилд Дифи и Мартин Хелман: Развиле Дифи-Хелманов систем за размена на јавни клучеви, што беше прв практичен метод за сигурна размена на клучеви.

- Ривест, Шамир и Адлеман (RSA): Креатори на алгоритмот RSA, кој е еден од најпопуларните алгоритми за јавен клуч во криптографијата.

### 2. Развој на асиметричните криптосистеми:

- Британски математичари Клифорд Кокс и Дин Шарк: Развиле идеи за асиметрични криптосистеми, што е воведено во криптографијата како основа за јавен клуч.

- Ерих Штрелцер и Стивен Вансто: Развиле асиметричен криптосистем што ја постави основата за елиптичната криптографија.

### 3. Стандардизација во криптографијата:

- Националниот институт за стандарди и технологија (NIST): Вовел стандарди за алгоритмите за јавен и таен клуч, вклучувајќи ги и Advanced Encryption Standard (AES) и Digital Signature Algorithm (DSA).

- Интернет инженерска задача (IETF): Имала важна улога во стандардизацијата на протоколите за сигурност на интернет, вклучувајќи го Transport Layer Security (TLS) протоколот.

Овие математичари и резултатите се само дел од важните придонеси во областа на нумеричката анализа и криптографијата во 20 век. Тие имаат

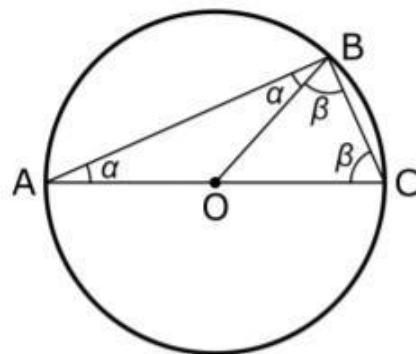
голем влијание во современите компјутерски системи и комуникации, а овој век ќе има влијание врз подоцнежниот развој на математичките дисциплини.



**Теорема на Талес (624 – 546 п.н.е):** Секој периферен агол над дијаметар е прав.

**Доказ:** Со поврзување на темето на периферниот агол и центарот на кружницата го делиме периферниот агол на агли  $\alpha$  и  $\beta$ .

Затоа што  $\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ$ , добиваме дека  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .



**$\sqrt{2}$  е ирационален број (500 п.н.е.)**

**Доказ:** Да претпоставиме дека  $\sqrt{2}$  е рационален број. Тоа значи дека може да биде претставен како однос меѓу два цели броеви  $p$  и  $q$ , т.е.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

каде што можеме да претпоставиме дека  $p$  и  $q$  немаат заеднички делители. Квадрираме во (1) на двете страни и добиваме

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad (2)$$

од каде што следува

$$p^2 = 2q^2$$

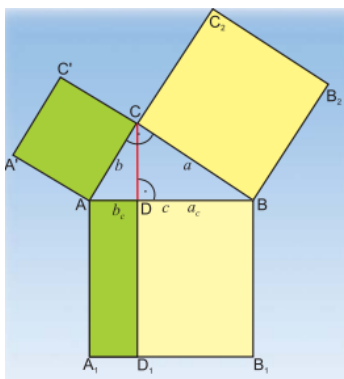
што значи  $p^2$  е парен број. Ова би било единствено точно само доколку  $p$  е парен број. Но, тогаш  $p^2$  е всушност делив со 4. Оттука,  $q^2$ , а со тоа и  $q$ , мораат да бидат парни. Значи,  $p$  и  $q$  се двата парни што е контрадикција со претпоставката дека немаат заеднички делители. Значи, квадратен корен од 2 не може да биде рационален број.

**Питагорова теорема (500 г. п.н.е.):** Во правоаголен триаголник  $a^2 + b^2 = c^2$ , каде што  $c$  е хипотенузата, а  $a$  и  $b$  се катетите.

**Доказ:** Според Евклидовата теорема:  $b^2 = b_c \cdot c$  и  $a^2 = a_c \cdot c$  (1)

Ако ги собереме соодветните леви и десни страни на равенството (1) добиваме  $a^2 + b^2 = a_c \cdot c + b_c \cdot c = (a_c + b_c)c$ .

Но бидејќи  $a_c + b_c = c$ , затоа важи  $a^2 + b^2 = c^2$ ,



со што теоремата е докажана.

**Теорема на Платон (428 – 348 п.н.е.):** Постојат пет Платонови тела: тетраедар, хексаедар, октаедар, додекаедар и икосаедар.

**Доказ:** Нека  $n$  е бројот на темиња и рабови на една страна и  $m$  е бројот на рабови околу едно теме. Нека  $V$  е бројот на сите темиња,  $F$  е бројот на сите страни и  $E$  е бројот на сите рабови. Во платоновите тела броевите  $n$  и  $m$  се константи. Собирајќи по сите страни добиваме  $n|F|$  рабови, каде што секој раб е изброен двапати, оттука  $n|F|=2|E|$ . Собирајќи по сите темиња добиваме  $m|V|$  рабови, каде што повторно секој раб е броен двапати. Оттука  $m|V|=2|E|$ . Користејќи ја формулата на Euler ( $V-E+F=2$ ) добиваме

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{|E|}$$

За да формираме фигура, мора  $m, n \geq 3$ , што не води до петте можни платонови тела со  $(m, n) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$ . Сите тела можат да бидат конструирани. За  $(m, n) = (3, 3)$ , го добиваме тетраедарот со  $(V, E, F) = (4, 6, 4)$ , за  $(m, n) = (3, 4)$  коцката со  $(V, E, F) = (8, 12, 6)$ , за  $(m, n) = (4, 3)$  октаедарот со  $(V, E, F) = (6, 12, 8)$ , за

$(m, n) = (3, 5)$  икосаедар со  $(V, E, F) = (12, 30, 20)$  и за  $(m, n) = (5, 3)$  додекаедар со  $(V, E, F) = (20, 30, 12)$ .

**Теорема на Евклид (3 век п.н.е.):** Во секој триаголник со страни  $a, b$  и  $c$  имаме

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

каде што аголот  $\gamma$  е спротивен агол на страната  $c$ .

**Доказ:** Да претпоставиме дека  $\gamma$  е тап агол. Продолжете ја страната  $b$  за должина  $d$  за да добиете правоаголен триаголник со висина  $h$ . Со користење на Питагоровата теорема имаме

$$(b + d)^2 + h^2 = c^2$$

и

$$d^2 + h^2 = a^2$$

од каде што се добива

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2bd$$

Од друга страна, со користење на геометриската дефиниција на  $\cos$  добиваме

$$\cos \gamma = -\cos(\pi - \gamma) = -\frac{d}{a}$$

па оттука,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ .

Тврдењето се сведува на Питагоровата теорема за  $\gamma = 90^\circ$ , а доказот за  $\gamma$  е остар агол е аналоген како за тап агол.

**Теорема на Евклид (3 век п.н.е.):** Ако  $2^n - 1$  е прост број, тогаш  $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$  е совршен. (Совршен број е природен број што е еднаков на збирот на неговите делители (без самиот тој број), на пример бројот  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ ).

**Доказ:** Јасно е дека единствените прости делители на  $N$  се  $2^n - 1$  и 2. Затоа што  $2^n - 1$  се јавува како единствен прост делител, добиваме дека  $\sigma(2^n - 1) = (1 + (2^n - 1)) = 2^n$ , и затоа

$$\sigma(N) = \sigma(2^{n-1})\sigma(2^n - 1) = \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right)2^n = 2^n(2^n - 1) = 2N.$$

Значи  $N$  е совршен.

**Лема на Евклид (3 век п.н.е):** Ако простиот број  $p$  го дели производот  $ab$  од два цели броја  $a$  и  $b$ , тогаш  $p$  мора да го дели барем едниот од тие цели броеви.

**Доказ:** Доказот се изведува со помош на Безуовиот идентитет. Тој вели дека ако  $x$  и  $y$  се заемно прости броеви (заеднички делители им се само 1 и  $-1$ ), тогаш постојат цели броеви  $r$  и  $s$  такви што  $rx + sy = 1$ . Нека  $a$  и  $n$  се заемно прости и да претпоставиме дека  $n|ab$ . Тогаш од Безуовиот идентитет постојат  $r$  и  $s$  такви што

$$rn + sa = 1.$$

Помножете ги двете страни со  $b$ :

$$rnb + sab = b$$

Првиот собирук на левата страна е делив со  $n$ , а вториот со  $ab$ , што од претпоставката е делива со  $n$ . Оттука нивниот збир  $b$ , е исто така делив со  $n$ .

**Теорема за геометриска средина на Евклид (3 век п.н.е):** Ако  $h$  е висина во правоаголен триаголник и  $p$  и  $q$  се делови од хипотенузата, тогаш

$$h = \sqrt{pq}.$$

**Доказ:** Со спуштање на висината  $h$  од темето  $C$ , имаме три правоаголни триаголника:  $ABC$ ,  $ADC$  и  $DBC$  во кои од Питагоровата теорема имаме:

$$h^2 = a^2 - q^2, h^2 = b^2 - p^2 \text{ и } c^2 = a^2 + b^2$$

Со собирање на првите две равенства и користење на третото добиваме

$$2h^2 = a^2 + b^2 - p^2 - q^2 = c^2 - p^2 - q^2 = (p + q)^2 - p^2 - q^2 = 2pq.$$

**Теорема на Птоломеј:** Ако  $A, B, C$ , и  $D$  се темиња на тетивен четириаголник подредени по тој редослед, тогаш важи:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

**Доказ:**

Нека четириаголникот  $ABCD$  биде впишан во кружница со радиус  $R$ , и нека аглиите формирани со страните  $AB, BC$ , и  $CD$  бидат соодветно  $\alpha, \beta$ , и  $\gamma$ . Страните на четириаголникот може да се изразат како:

$$AB = 2R \sin(\alpha), \quad BC = 2R \sin(\beta), \quad CD = 2R \sin(\gamma)$$

За страната  $AD$ , користиме аголот  $\alpha + \beta + \gamma$ , бидејќи  $ABCD$  е тетивен четириаголник:

$$AD = 2R \sin(180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)) = 2R \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

За страните  $AC$  и  $BD$ , користиме агли соодветно на точките  $A, B, C$ , и  $D$ :

$$AC = 2R \sin(\beta), \quad BD = 2R \sin(\beta + \gamma)$$

Тогаш, теоремата на Птоломеј се трансформира во:

$$(2R \sin(\beta)) \cdot (2R \sin(\beta + \gamma)) = (2R \sin(\alpha)) \cdot (2R \sin(\gamma)) + (2R \sin(\beta)) \cdot (2R \sin(\alpha + \beta + \gamma))$$

По кратење на  $2R$  од двете страни:

$$\sin(\beta) \cdot \sin(\beta + \gamma) = \sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

Сега, користиме тригонометриски формули за сума на агли, односно:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

Тогаш, по развивање на изразите на двете страни, добиваме:

- Левата страна:

$$\sin(\beta) \cdot (\sin(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\beta) \sin(\gamma)) = \sin(\beta) \cdot \sin(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\beta) \cdot \cos(\beta) \sin(\gamma)$$

- Десната страна:

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \sin(\beta) \cdot (\sin(\alpha) \cos(\beta + \gamma) + \cos(\alpha) \sin(\beta + \gamma))$$

Сега, откако ќе ги извршиме сите едноставни тригонометриски операции и користиме формули за сума на агли, двете страни се еднакви, што ја докажува теоремата на Птоломеј.

**Теорема за област на Пап (4 век):** Нека  $ABC$  е произволен триаголник и нека  $ABDE$  и  $ACFG$  два произволни паралелограми над страните  $AB$  и  $AC$ . Продолженијата на страните  $DE$  и  $FG$  се сечат во  $H$ . Отсечката  $AH$  сега станува страна на третиот паралелограм  $BCML$  над страната  $BC$ , т.е. се конструираат отсечки  $BL$  и  $CM$  над  $BC$ , такви што  $BL$  и  $CM$  се паралелни и еднакви со должината на  $AH$ . Тогаш за плоштините  $P$  важи следното равенство

$$P_{ABDE} + P_{ACFG} = P_{BCML}$$

**Доказ:** Затоа што имаат иста должина на основата и иста висина, паралелограмите  $ABDE$  и  $ABUH$  имаат иста плоштина, а истото важи и за  $ACFG$  и  $ACVH$ ,  $ABUH$  и  $BLQR$ ,  $ACVH$  и  $RCMQ$ . Па, одовде важи бараниот резултат, бидејќи имаме:

$$P_{ABDE} + P_{ACFG} = P_{ABUH} + P_{ACVH} = P_{BLRQ} + P_{RCMQ} = P_{BCML}$$

**Теорема на Чева (1678):** Даден е  $\triangle ABC$ , со точка  $P$  во триаголникот и отсечки  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$ , кои минуваат низ  $P$  и ги сечат страните  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  во  $D$ ,  $E$ ,  $F$  соодветно.

Тогаш

$$\frac{AF}{FB} * \frac{BD}{DC} * \frac{CE}{EA} = 1$$

**Доказ:** Да забележиме дека

$$\frac{AF}{FB} = \frac{[AFP]}{[FBP]} = \frac{[AFC]}{[FBC]}$$

бидејќи триаголниците  $\triangle AFP$  и  $\triangle FBP$  имаат исти висини. Со одземање на плоштините на триаголниците од второто равенство со првото равенство, добиваме

$$\frac{AF}{FB} = \frac{[APC]}{[BPC]}.$$

Слично,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[APB]}{[APC]}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{[BPC]}{[APB]}.$$

Со множење на последните три равенства добиваме:

$$\frac{AF}{FB} * \frac{BD}{DC} * \frac{CE}{EA} = \frac{[APC]}{[BPC]} * \frac{[APB]}{[APC]} * \frac{[BPC]}{[APB]} = 1$$

**Теорема на Рол (1691):** Нека  $f(x)$  е непрекината функција на затворениот интервал  $[a, b]$  и диференцијабилна во секоја точка од внатрешноста на  $[a, b]$ . Да претпоставиме дека  $f(a) = f(b)$ . Тогаш постои точка  $c \in [a, b]$  таква што  $f'(c) = 0$ .

**Доказ:** Од теоремата за екстремни вредности,  $f$  го достигнува својот максимум во интервалот  $[a, b]$ . Со користење на теоремата за екстремни вредности на  $-f$ , гледаме дека  $f$  исто така го достигнува својот минимум на  $[a, b]$ . По претпоставка дека и максимумот и минимумот се достигнуваат на границата, тогаш максимумот и минимумот се исти, па функцијата е константа. Константна функција има секаде извод нула. Ако функцијата не е константа, тогаш  $f$  има локален минимум или локален максимум во внатрешноста. Тогаш од лемата што вели дека ако  $f$  е функција диференцијабилна во точката  $c$  и има локален минимум или максимум во неа следува  $f'(c) = 0$ , имаме дека изводот во локалниот максимум или минимум мора да биде 0.

**Де Моаврова теорема (1730):** За секој комплексен број  $x$  и природен број  $n$  важи  $[r(\cos x + i \sin x)]^n = r^n (\cos(nx) + i \sin(nx))$ .

**Доказ на теоремата на Моавр:**

Теоремата може да се докаже со математичка индукција.

**1. База на индукција ( $n = 1$ ):**

Кога  $n = 1$ , имаме:

$$z^1 = r^1 (\cos(\theta) + i \sin(\theta)),$$

што е точно.

## 2. Индуктивна претпоставка:

Претпоставуваме дека теоремата важи за  $n$ , т.е.:

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

## 3. Доказ за $n + 1$ :

Покажуваме дека важи за  $n + 1$ :

$$z^{n+1} = z^n \cdot z.$$

Од индуктивната претпоставка и дефиницијата на  $z$ :

$$z^{n+1} = [r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))] \cdot [r (\cos \theta + i \sin \theta)].$$

Можете користејќи правила за множење на комплексни броеви:

$$z^{n+1} = r^{n+1} [\cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta) + i(\cos(n\theta) \sin(\theta) + \sin(n\theta) \cos(\theta))].$$

Со тригонометриските формули за збир на агли:

$$\cos(n\theta + \theta) = \cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta),$$

$$\sin(n\theta + \theta) = \sin(n\theta) \cos(\theta) + \cos(n\theta) \sin(\theta).$$

Така:

$$z^{n+1} = r^{n+1} (\cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta)).$$

## 4. Заклучок:

По принципот на математичка индукција, теоремата важи за сите  $n$ .

**Интегрална теорема на Моавр-Лаплас (1738):** Нека  $X \sim B(n, p)$ , тогаш

$$P\{k_1 \leq X \leq k_2\} \rightarrow \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

кога  $n \rightarrow \infty$ , каде што  $0 < p < 1, q = 1 - p$ ,  $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$ .

**Доказ:** Означуваме со  $x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ . Тогаш,

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Од локалната теорема на Моавр-Лаплас

$$\left(\frac{n}{k}\right) p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) \text{ за } n \rightarrow \infty$$

имаме

$$P\{k_1 \leq X \leq k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} P\{X = k\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=k_1}^{k_2} (x_{k+1} - x_k) e^{-\frac{x_k^2}{2}}.$$

Изразот од десната страна е интегрална сума на Римановиот интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_{k_1}}^{x_{k_2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi_0(x_{k_2}) - \Phi_0(x_{k_1}), \text{ каде што, } \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

**Теорема на Стјуарт (1746):** Нека  $a, b$  и  $c$  се должините на страните на триаголник. Нека  $d$  е должината на цевиданата (права што минува низ едно теме и ја сече спротивната страна) кон страната  $a$ . Ако цевиданата ја дели  $a$  на два дела со должини  $m$  и  $n$ ,  $m$  соседна на  $C$  и  $n$  на  $B$ , тогаш важи дека

$$c^2 m + b^2 n = a(d^2 + mn).$$

**Доказ:** Нека  $\alpha$  е аголот меѓу  $m$  и  $d$  и  $\alpha'$  е аголот меѓу  $n$  и  $d$ . Тогаш  $\alpha'$  е суплементен агол на  $\alpha$ , и  $\cos \alpha' = -\cos \alpha$ . Со примена на косинусниот закон на двата помали триаголника со користење на  $\alpha$  и  $\alpha'$  добиваме  $b^2 = m^2 + d^2 - 2dm \cos \alpha$

$$c^2 = n^2 + d^2 - 2dn \cos \alpha' = n^2 + d^2 + 2dn \cos \alpha.$$

Со множење на првото равенство со  $n$  и второто равенство со  $m$  и потоа собирање на двете равенства се елиминира  $\cos \alpha$ .

Добиваме

$$c^2 m + b^2 n = nm^2 + n^2 m + (m + n)d^2 = (m + n)(mn + d^2) = a(mn + d^2)$$

што е бараното равенство.

**Ојлерова формула (1748):** За секој реален број  $x$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

**Доказ:** Нека  $r$  и  $t$  се броеви што зависат од  $x$ , такви што  $e^{ix} = r(\cos t + i \sin t)$

Ќе го диференцираме изразот по  $x$  од двете страни и добиваме:

$$ie^{ix} = (\cos t + i \sin t) \frac{dr}{dx} + r(-\sin t + i \cos t) \frac{dt}{dx}$$

Со замена на  $e^{ix}$  со  $r(\cos t + i \sin t)$  и префрлање на имагинарниот дел од едната страна, а реалниот дел од другата страна на равенството, добиваме  $\frac{dr}{dx} = 0$  и  $\frac{dt}{dx} = 1$ . Значи,  $r$  е константа, а  $t$  е  $x + C$  за некоја константа  $C$ . Со замена на почетните вредности  $r(0) = 1$  и  $t(0) = 0$ , кои доаѓаат од  $e^{0i} = 1$ , добиваме  $r = 1$  и  $t = x$ , со што се докажува бараната формула.

**Баесово правило (1763):** Настаните  $B_1, B_2, \dots, B_n$  нека формираат разбивање на  $\Omega$ , т.е.  $B_i B_j = \emptyset$ , за секои  $i \neq j$  и  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ . Нека  $P(B_i) > 0$  за секој  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогаш, за секој настан  $A$ , за кој  $P(A) > 0$ , важи

$$P(A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

**Доказ:** Од дефиницијата за условна веројатност, имаме дека  $P(A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)}$ , а потоа од формулата за множење на веројатности имаме  $P(B_i A) = P(B_i)P(A|B_i)$  и од формулата за тотална веројатност за настанот А при разбивањето  $B_1, B_2, \dots, B_n$  се добиваат бараните формули.

**Теорема на Вилсон (1770):** Природниот број  $n > 1$  е прост број ако производот на сите природни броеви помали од  $n$  е за еден помалку од  $n$ , по однос на модул  $n$ , односно

$$(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}$$

**Доказ:** Теоремата е тривијална за  $n = 2$ , па да претпоставиме дека  $p$  е непарен прост број,  $p \geq 3$ .

Да го разгледаме полиномот

$$g(x) = (x - 1)(x - 2) \cdot \dots \cdot (x - (p - 1))$$

$g$  е од степен  $p - 1$ , со основен собирок  $x^{p-1}$  и слободен член  $(p - 1)!$ . Неговите  $p-1$  корени се  $1, 2, \dots, p-1$ .

Сега да разгледаме

$$h(x) = x^{p-1} - 1$$

$h$  исто така има степен  $p-1$  и основен израз  $x^{p-1}$ . Модулот  $p$ , од малата теорема на Ферма, имаме дека  $h(x)$  исто така има  $p-1$  корени,  $1, 2, \dots, p-1$ .

Конечно, да согледаме дека

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

има степен најмногу  $p-2$  (бидејќи основните изрази се поништуваат) и модулот  $p$  исто така има  $p-1$  корени,  $1, 2, \dots, p-1$ . Но, од теоремата на Лагранж имаме дека не може да има повеќе од  $p-2$  корени. Затоа,  $f$  мора да биде еднаква на нула по модул од  $p$ , па слободниот член на  $f(x)$  е  $(p - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  со што теоремата е докажана.

**Безуов идентитет (1779):** Нека  $a$  и  $b$  се цели броеви со најголем заеднички делител  $d$ . Тогаш, постојат цели броеви  $x$  и  $y$  такви што  $ax + by = d$ . Поопшто, броевите од облик  $ax + by$  се точно множителите на  $d$ .

**Доказ:** Нека се дадени ненулти цели броеви  $a$  и  $b$  и нека  $S = \{ax + by | x, y \in \mathbb{Z} \text{ и } ax + by > 0\}$ . Множеството  $S$  е непразно, бидејќи ги содржи или  $a$  или  $-a$ . Затоа што  $S$  е непразно множество од позитивни цели броеви, има минимален елемент  $d = as + bt$ , од принципот за добро подредување. За да покажеме дека  $d$  е најголемиот заеднички делител на  $a$  и  $b$ , мораме да докажеме дека тој е делител на тие два броја и дека за секој заеднички делител  $c$ , важи  $c \leq d$ .

Евклидското делење на  $a$  со  $d$  може да биде запишано како

$$a = dq + r, 0 \leq r < d$$

Остатокот  $r$  припаѓа во  $S$  унија  $0$ , бидејќи

$$r = a - qd = a - q(as + bt) = a(1 - qs) - bqt$$

Оттука,  $r$  има форма  $ax + by$ , и затоа  $r \in S \cup \{0\}$ . Сепак,  $0 \leq r < d$  и  $d$  е најмалиот позитивен цел број во  $S$ : значи,  $r$  оттука може да не биде во  $S$ , од каде што  $r$  е нула. Ова ни дава дека  $d$  е делител на  $a$ . Слично  $d$  е делител на  $b$ , па  $d$  е заеднички делител и на  $a$  и на  $b$ .

Нека сега  $c$  е произволен заеднички делител на  $a$  и  $b$ ; значи постојат  $u$  и  $v$  такви да  $a = cu$  и  $b = cv$ .

Затоа,

$$d = as + bt = cus + cvt = c(us + vt).$$

Значи,  $c$  е делител на  $d$  и оттука  $c \leq d$ .

**Теорема на Коши (1821):** Секоја непрекината адитивна функција  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  е линеарна.

**Доказ:** Од адитивноста на  $f$  имаме:

$$qf\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) = pf(1) \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1)$$

за сите  $p, q \in \mathbb{N}$ . Уште повеќе  $f(1) = f(0) + f(1)$  оттука  $f(0) = 0$  и

$$f(x) = f(0) - f(-x) = -f(x)$$

Затоа гледаме дека  $f$  е линеарна на  $\mathbb{Q}$  и од непрекинатоста е линеарна на  $\mathbb{R}$ .

**Централна гранична теорема (1812):** Нека  $(X_n)$  е низа од независни и еднакво распределени случајни променливи со математичко очекување  $E(X_1) = m$  и конечна дисперзија  $D(X_1) = \sigma^2 > 0$ .

Нека  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , тогаш за секој  $x \in \mathbb{R}$  важи

$$P\left\{\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad n \rightarrow \infty$$

**Доказ:** Нека  $\varphi(t)$  е карактеристична функција на секоја од случајните променливи  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , а нека  $\varphi_n(t)$  е карактеристична функција на случајната променлива  $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ .

Тогаш,

$$\varphi(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2), \quad t \rightarrow 0.$$

Потоа, од

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^n \frac{X_k - m}{\sigma\sqrt{n}},$$

добиваме дека

$$\varphi_n(t) = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$

кога  $n \rightarrow \infty$ . Затоа што  $e^{-\frac{t^2}{2}}$  е карактеристична функција со  $N(0, 1)$  распределба, тогаш врз основа на тоа што на секоја карактеристична функција ѝ соодветствува единствена функција на распределба, добиваме дека

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1), n \rightarrow \infty$$

**Теорема на Болцано-Вајерштрас (1817):** Нека  $E$  е бесконечно ограничено множество на бројната права. Тогаш множеството  $E$  има барем една точка на натрупување.

**Доказ:** Од ограниченоста на множеството  $E$  имаме дека постојат  $a$  и  $b$  такви што  $E \subseteq [a, b]$ .

Да претпоставиме дека  $E$  нема точки на натрупување. Тогаш секоја точка  $x \in [a, b]$  поседува  $\varepsilon_x$ -околина што ја содржи најмногу точката  $x$  од  $E$ , т.е.  $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \cap E \subseteq \{x\}$ .

Ја разгледуваме фамилијата  $\{(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) : x \in [a, b]\}$ . Последната фамилија претставува отворена покривка за сегментот  $[a, b]$ , па според теоремата на Борел-Лебег, постои конечна покривка  $\left\{ (x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}) \right\}, i = 1, 2, \dots, n$ , од каде што се добива дека множеството  $E$  е конечно, што е контрадикција со претпоставката.

**Теорема за средна вредност (1821):** Нека  $I = [a, b]$  и  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Ако  $u$  е број меѓу  $f(a)$  и  $f(b)$ , тогаш постои  $c \in (a, b)$  така што  $f(c) = u$ .

**Доказ:** Нека  $S$  е множество од сите  $x \in [a, b]$  такви што  $f(x) \leq u$ . Тогаш  $S$  е непразно, бидејќи  $a$  е елемент на  $S$  и  $S$  е ограничено од горе со  $b$ . Оттука, од комплетноста, супремумот  $c = \sup S$  постои. Значи,  $c$  е најмалиот број што е поголем или еднаков од секој член од  $S$ . Тврдиме дека  $f(c) = u$ .

Нека  $\varepsilon > 0$  е некој фиксен реален број. Од непрекинатоста на  $f$ , постои  $\delta > 0$ , така што  $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$  за  $|x - c| < \delta$ .

Тоа значи дека

$$f(x) - \varepsilon < f(c) < f(x) + \varepsilon$$

за сите  $x \in (c - \delta, c + \delta)$ . Од својствата на супремумот, постои  $a' \in (c - \delta, c]$ , која припаѓа во  $S$ , и

$$f(c) < f(a') + \varepsilon \leq u + \varepsilon$$

Со избирање на  $a'' \in (c, c + \delta)$ , знаеме дека  $a''$  не припаѓа во  $S$ , бидејќи  $c$  е супремум на  $S$ . Тоа значи дека

$$f(c) > f(a'') - \varepsilon > u - \varepsilon$$

Двете неравенства важат за  $\varepsilon$ , од кои добиваме дека  $f(c) = u$ .

**Коши-Шварцово неравенство (1821):** Нека  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  се два вектори од реални броеви, тогаш

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2.$$

Равенство важи ако  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  се пропорционални, т.е. постои константа  $c$  таква што  $a_k = c b_k$  за секој  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Доказ:** Со развој на изразот во заградите и собирање на идентичните полиноми добиваме:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{j=1}^n b_j^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 \sum_{j=1}^n a_j^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \sum_{j=1}^n b_j a_j \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \end{aligned}$$

Затоа што левата страна од равенството е сума од квадрати на реални броеви е поголема или еднаква од нула, добиваме

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

**Теорема за средна вредност (1823):** Нека  $f(x)$  е непрекината функција на затворениот интервал  $[a, b]$  и диференцијабилна во секоја точка од интервалот  $(a, b)$ . Тогаш постои точка  $c \in (a, b)$  таква што

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Доказ:** Нека

$$g(x) = f(x) - \frac{(f(b) - f(a))(x - a)}{b - a}.$$

Да забележиме дека  $g(a) = f(a)$  и  $g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$ . Понатаму,  $g$  ги има истите својства на непрекинатост и диференцијабилност како  $f$ , бидејќи

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Со користење на теоремата на Рол на функцијата  $g$  наоѓаме точка  $c \in (a, b)$ , т.ш.  $g'(c) = 0$ . Оттука заклучуваме дека

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

со што теоремата е докажана.

**Теорема за ограниченост (1830):** Секоја непрекината функција на затворен интервал  $[a, b]$  е ограничена на тој интервал.

**Доказ:** Да претпоставиме дека функцијата  $f$  не е ограничена од горе на интервалот  $[a, b]$ . Тогаш, за секој природен број  $n$ , постои  $x_n \in [a, b]$  таков да  $f(x_n) > n$ . Со ова дефинираме низа  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Затоа што  $[a, b]$  е ограничен интервал, од теоремата на Болцано-Вајерштрас имаме дека постои конвергентна подниза  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  на  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Да ја означиме нејзината граница со  $x$ . Затоа што  $[a, b]$  е затворен интервал, значи го содржи  $x$ .

Затоа што  $f$  е непрекината во  $x$ , знаеме дека  $f(x_{n_k})$  конвергира кон реалниот број  $f(x)$ . Но,  $f(x_{n_k}) > n_k \geq k$  за сите  $k$ , што повлекува дека  $f(x_{n_k})$

дивергира кон бескрај, што е контрадикција. Значи,  $f$  е ограничена од горе на  $[a, b]$ .

**Теорема на Лежандр (1830):** Бројот  $n!$  го содржи простиот фактор  $p$  точно  $\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$  пати.

**Доказ:** Затоа што  $n!$  е производ од целите броеви од 1 до  $n$ , забележуваме дека има барем еден фактор на  $p$  во  $n!$  за секој множител на  $p$  во  $\{1, 2, \dots, n\}$ , од кој постојат  $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ . Секој множител на  $p^2$  додава дополнителен фактор на  $p$ , секој множител на  $p^3$  додава и друг фактор на  $p$  итн.

Со собирање на бројот на овие фактори ја добиваме бесконечната сума  $\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ .

**Теорема на Поасон (1837):** Нека  $X \sim B(n, p)$ , тогаш за  $k = 0, 1, \dots$

важи

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \rightarrow \frac{a^k}{k!} e^{-a} \text{ кога } n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0 \text{ и } np \rightarrow a$$

**Доказ:**

$$\begin{aligned} P\{X = k\} &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{n^k} (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{(np)^k}{k!} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{n^k} (1-p)^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Кога  $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$  и  $np \rightarrow a$  и од

$$(1-p)^{n-k} = \left(1-p\right)^{-\frac{1}{p}}^{-np+kp} \rightarrow e^{-a}$$

имаме дека

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \rightarrow \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

**Теорема на Коши (1845):** Ако  $G$  е конечна група и  $p$  е прост број делител на редот на  $G$  (бројот на елементи во  $G$ ), тогаш  $G$  содржи елемент од ред  $p$ .

**Доказ:** Прво ќе го докажеме специјалниот случај кога  $G$  е Абелова група, а потоа општиот и двата случаи се со индукција по  $n = |G|$ , и за почетен случај го имаат  $n = p$ , што е тривијално. Да претпоставиме прво дека  $G$  е абелова група. Да земеме произволен неединечен елемент  $a$  и нека  $H$  е циклична група што  $a$  ја генерира. Ако  $p$  го дели  $|H|$ , тогаш  $a^{\frac{|H|}{p}}$  е елемент од ред  $p$ . Ако  $p$  не го дели  $|H|$ , тогаш го дели редот  $[G:H]$  од групата  $\frac{G}{H}$ , која во тој случај содржи елемент од ред  $p$  од индуктивната претпоставка. Елементот е од класа  $xH$  за некој  $x$  во  $G$  и ако  $m$  е редот од  $x$  во  $G$ , тогаш  $x^m = e$  во  $G$  дава  $(xH)^m = eH$  во  $\frac{G}{H}$ , па  $p$  го дели  $m$ ; како и претходно  $x^{\frac{m}{p}}$  сега е елемент од ред  $p$  во  $G$ , со што се комплетира доказот во случај на абелова група.

Во општ случај, нека  $Z$  е центарот на  $G$ , што е абелова подгрупа. Ако  $p$  го дели  $|Z|$ , тогаш  $Z$  содржи елемент од ред  $p$  од случајот со абелови групи, а овој елемент важи и за  $G$  исто така. Значи, можеме да претпоставиме дека  $p$  не го дели редот на  $Z$ ; бидејќи го дели  $|G|$ , постои барем една конјугирана класа на нецентрален елемент  $a$  чија големина не се дели со  $p$ . Но, равенството за класи ни покажува дека големината е  $[G:C_G(a)]$ , па  $p$  го дели редот на централизаторот  $C_G(a)$  на  $a$  во  $G$ , што е соодветна подгрупа, бидејќи  $a$  не е центар. Оваа подгрупа содржи елемент од ред  $p$  од индуктивната претпоставка, со што доказот е комплетиран.

**Теорема на Кантор (1873 – 1879):** Целите броеви  $Z$ , рационалните броеви  $Q$  и алгебарските броеви  $A$  се пребројливи.

**Доказ:** Целите броеви се унија од природни броеви заедно со бројот 0 и целите негативни броеви. Двете множества се пребројливи, па и целите броеви се пребројливи. Пресликувањето

$$f: Q \mapsto Z^2 \text{ дефинирано со } f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$$

е инјекција и  $Z^2$  е пребројливо, затоа и  $Q$  е бројливо. Постојат пребројливо многу полиноми од степен  $n$  над  $Q$ , бидејќи  $Q^{n+1}$  е пребројливо. Секој полином има конечен број корени, па оттука корените од ред  $n$  се пребројливи.  $A$  е пребројливо како пребројлива унија од овие корени.

**Теорема на Лиувил (1847):** Нека  $f: C \rightarrow C$  е холоморфна функција. Да претпоставиме дека постои реален број  $M \geq 0$  таков што  $|f(z)| \leq M$  за сите  $z \in C$ . Тогаш  $f$  е константна функција.

**Доказ:** Ја користиме Кошиевата интегрална формула.

Избираме  $z_0 \in C$  и нека  $C_R$  ја означува кружницата насочена во насока на стрелките на часовникот со радиус  $R$  и центар во  $z_0$ . Тогаш

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \right| \leq \frac{M}{R^2 \cdot 2\pi}$$

Од холоморфноста на  $f$  на целата комплексна рамнина,  $R$  може да биде произволно голем. Следува дека  $f'(z) = 0$  за секоја точка  $z \in C$ . Сега за секои два комплексни броја  $A$  и  $B$  имаме

$$f(b) - f(a) = \int_A^B f'(z) dz = 0$$

значи,  $f$  е константна што и требаше да се докаже.

**Неравенство на Чебишев (1867):** Нека  $X$  е произволна случајна променлива. Тогаш, за секое  $\varepsilon > 0$  важи неравенството

$$P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

**Доказ:** Нека  $X$  е произволна случајна променлива и  $\varepsilon > 0$ . Тогаш, за ненегативната случајна променлива  $Y = (X - EX)^2$  важи неравенството на Марков, т.е.

$$P\{(X - EX)^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{E(X-EX)^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

и бидејќи  $\{\omega | (X - EX)^2 \geq \varepsilon^2\} = \{\omega | |X - EX| \geq \varepsilon\}$  имаме

$$P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

**Теорема на Вајерштрас-Касорати (1868):** Нека  $U$  е отворено множество во комплексната рамнина што содржи број  $z_0$  и функција  $f$ , која е

холоморфна на  $U \setminus \{z_0\}$ , но има есенцијален сингуларитет во  $z_0$ . Ако  $V$  е произволна околина на  $z_0$  што се содржи во  $U$ , тогаш  $f(V \setminus \{z_0\})$  е густо во  $\mathbb{C}$ .

**Доказ:** Нека  $f$  е функција што е мероморфна на некоја околина  $V \setminus \{z_0\}$  и нека  $z_0$  е потребната сингуларност. Да претпоставиме спротивно дека постои  $b$  кон кое функцијата никогаш не се доближува; односно, да претпоставиме дека постои комплексен број  $b$  и некое  $\varepsilon > 0$  такво да  $|f(z) - b| \geq \varepsilon$  за сите  $z$  во  $V$  во кои  $f$  е дефинирана.

Тогаш, новата функција

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - b}$$

мора да биде холоморфна на  $V \setminus \{z_0\}$ , со нули во половите на  $f$ , и ограничена со  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Тогаш аналитички може да биде продолжена по непрекинатост на цело  $V$  од Римановата аналитичка теорема за непрекинатост. Значи, оригиналната функција може да биде изразена преку  $g$ :

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$$

за сите  $z$  во  $V \setminus \{z_0\}$ . Да ги разгледаме двата можни случаи за  $g(z)$ .

Ако границата е 0, тогаш  $f$  има пол во  $z_0$ . Ако границата не е 0, тогаш  $z_0$  е сингуларитет за  $f$ , кој може да се отстрани. Двете можности се контрадикторни со претпоставката дека  $z_0$  е есенцијален сингуларитет на функцијата  $f$ . Оттука, претпоставката е грешна, па теоремата важи.

**Теорема на Кантор (1878):** Множеството  $\mathbb{R}^2$  од сите подредени парови од реални броеви, има иста кардиналност како  $\mathbb{R}$ .

**Доказ:** Доволно е да докажеме множеството од сите парови  $(x, y)$ ,  $0 < x, y \leq 1$ , може да биде бијективно пресликано во  $(0, 1)$ . Да го земеме парот  $(x, y)$  и броевите  $x$  и  $y$  да ги запишеме во нивниот единствен бесконечен облик како во примерот:

$$x = 0,3 \quad 01 \quad 2 \quad 007 \quad 08... \quad y = 0,009 \quad 2 \quad 05 \quad 1 \quad 0008 \dots$$

Да забележиме дека ги разделивме цифрите на  $x$  и  $y$  по групи така што одиме до следната ненулта цифра. Сега на  $(x, y)$  му го придружуваме бројот  $z \in (0, 1]$  со запишување на првата група на  $x$ , потоа првата група на  $y$ , па втората група на  $x$  итн. Или, во нашиот пример, би имале

$$z = 0,30090122050071080008...$$

Затоа што ниту  $x$  ниту  $y$  не се конечни добиваме дека и изразот за  $z$  е исто така бесконечен децимален развој. И обратно, од изразот за  $z$  лесно можеме да го одредиме подредениот пар  $(x, y)$ , па пресликувањето е бијекција.

**Неравенство на Марков (1880):** Нека  $X$  е случајна променлива што прима само ненегативни вредности. Тогаш, за секој  $\varepsilon > 0$  важи неравенството

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{EX}{\varepsilon}$$

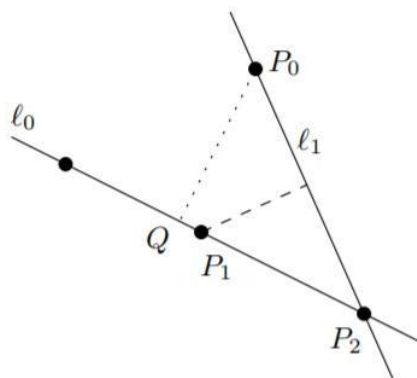
**Доказ:** Нека  $X$  е ненегативна случајна променлива и  $\varepsilon > 0$ . Дефинираме дискретна случајна променлива  $Y_\varepsilon = 0$ , кога  $x < \varepsilon$  и  $Y_\varepsilon = \varepsilon$ , кога  $x \geq \varepsilon$ . Тогаш,  $Y_\varepsilon \leq X$ , па од тоа што ако  $X \leq Y$  тогаш  $EX \leq EY$  имаме дека  $E(Y_\varepsilon) \leq EX$ , т.е.  $P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{EX}{\varepsilon}$ .

**Канторова теорема (1891):** Нека  $f$  е пресликување од множество  $A$  во множеството  $P(A)$ . Тогаш  $f$  не е сурјекција. Како последица,  $\text{card}(A) < \text{card}(P(A))$  за секое множество  $A$ .

**Доказ:** Да го разгледаме множеството  $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$ . Да претпоставиме спротивно дека  $f$  е сурјекција. Тогаш постои  $a \in B \Leftrightarrow a \notin f(a) = B$ , што е контрадикција. Затоа,  $f$  не може да биде сурјекција. Од друга страна,  $g: A \rightarrow P(A)$  дефинирано со  $x \mapsto \{x\}$  е инјекција. Значи, мораме да имаме  $\text{card}(A) < \text{card}(P(A))$ .

**Теорема на Силвестер-Галаи (1893):** Во која било конфигурација од  $n$  точки во рамнината, кои не лежат сите на една права, постои права што минува низ точно две од точките.

**Доказ:**  $S$  нека е даденото множество од точки и нека  $L$  е множество од сите прави што минуваат низ барем две од точките од  $S$ . Меѓу сите парови  $(P, l)$  со  $P$  да не лежи на  $l$ , избираме пар  $(P_0, l_0)$  таков да  $P_0$  има најмало растојание до  $l_0$ , со најблиската точка  $Q$  до  $P$ . Тврдиме дека  $l_0$  е бараната права. Ако  $l_0$  не е бараната права, тогаш  $l_0$  содржи барем три точки од  $S$ , и две од нив, да речеме  $P_1$  и  $P_2$ , лежат на иста старана со  $Q$ .



Да претпоставиме дека  $P_1$  лежи меѓу  $Q$  и  $P_2$ , каде што  $P_1$  може да се совпаѓа со  $Q$ . Следува дека растојанието од  $P_1$  до правата  $l_1$  определена со  $P_0$  и  $P_2$  е помало од растојанието од  $P_0$  до  $l_0$  што е контрадикција со изборот на  $l_0$  и  $P_0$ .

**Теорема на Хадамард за три линии (1896):** Нека  $f(z)$  е ограничена функција со променлива  $z = x + iy$  дефинирана на множество

$$\{x + iy: a \leq x \leq b\},$$

холоморфна на внатрешноста на даденото множество и непрекината на целото множество. Ако

$$M(x) = \sup_y |f(x + iy)|,$$

тогаш  $\log M(x)$  е конвексна функција на  $[a, b]$ .

**Доказ:** Дефинираме функција  $F(z)$  со

$$F(z) = f(z) M(a)^{\frac{z-b}{b-a}} M(b)^{\frac{z-a}{a-b}}.$$

Затоа,  $|F(z)| \leq 1$  на рабовите на множеството (лентата). Резултатот го добиваме откако ќе се докаже дека неравенството исто така важи и за внатрешноста на множеството.

По афина трансформација на координатата  $z$ , може да се заклучи дека

$$a = 0 \text{ и } b = 1.$$

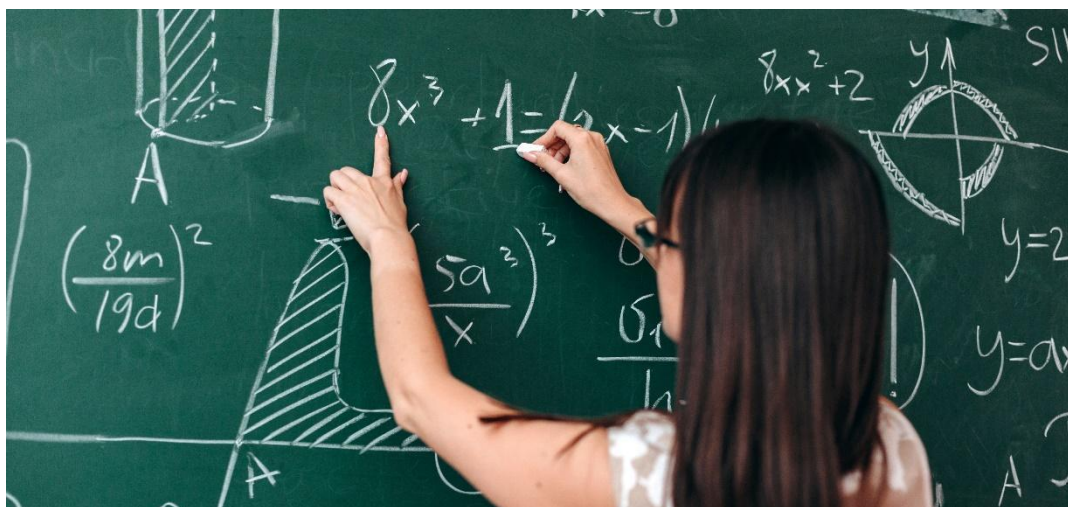
Функцијата

$$F_n(z) = F(z)e^{\frac{z^2}{n}}e^{-\frac{1}{n}}$$

тежи кон 0 кога  $|z|$  тежи кон бескрај и задоволува  $|F_n| \leq 1$  на границата на множеството. Тогаш можеме да го употребиме принципот за максимален модул на  $F_n$  во множеството. Значи,  $|F_n(z)| \leq 1$ . Затоа што  $F_n(z)$  тежи кон  $F(z)$  кога  $n$  тежи кон бескрај. Следува дека  $|F(z)| \leq 1$ .

## Додаток 2

Познати математичарки во историјата на математиката



Многумина слушнале за познатите Њутн, Ајнштајн и Туринг, како и за нивните откритија, но само малкумина знаат за постигнувањата на познатите математичарки. Сепак, во оваа книга ќе споменеме некои од постигнувањата на дел од математичарките кои успеале со своето знаење и придонес во науката да го срушат стереотипот дека математиката е машки предмет.

*~ Хипатија од Александрија – мајка на математиката ~*



Пред да запловиме во инспиративните океани од животите на неколку познати светски математичарки, ќе кажеме неколку збора за мајката на математиката – Хипатија – првата жена која дала значаен придонес во развојот на математиката во античко време.

Хипатија од Александрија – ќерка на математичарот и филозоф Теон Александриски, под чие водство и ја студирала математиката, била извонредно надарена и во нејзино време станала шеф на Платоновата школа во Александрија, каде што и предавала математика и филозофија, особено филозофијата на неоплатонизмот. Хипатија ги засновала своите учења врз основа на учењето на Плотин – основачот на неоплатонизмот. Плотин тврдел дека постои ултимативна, крајна реалност што е над дофат од мислата или јазикот. Целта на животот, според него, била тој да се насочи кон таа крајна реалност што никогаш прецизно не би можела да се опише. Тој тврдел дека луѓето немаат доволен ментален капацитет целосно да ја разберат и крајната реалност и последиците од нејзиното постоење. Хипатија ги поучувала овие филозофски идеи со поголем научен акцент отколку претходните следбеници на неоплатонизмот, која успеала да се здобие и со епитетот „харизматична“ наставничка.

Во периодот кога Хипатија се посветила на науката, раните христијани почнале да го идентификуваат нејзиното учење и наука со паганизмот. Меѓутоа, помеѓу учениците на мајката на математиката имало и многу истакнати христијани. Еден од најпознатите е Синезиј Киренски, кој подоцна станал епископ во Птолемаида. Интересно е што се зачувани многу од писмата што Синезиј и ги напишал на Хипатија и говорат за почитта и восхитот кон Хипатија и нејзините научни способности.

По неколку години од почетокот кога тврдењата за паганизмот владееле во тоа време во Александрија, Хипатија била брутално убиена од

монасите од Нитрија, кои биле дел од фанатичка секта христијани кои се чувствувале загрозувани од нејзините знаење и длабочина во секоја сфера од науката. Тој трагичен настан според многу научници претставувал почеток на падот на Александрија како главен центар на античкото учење.

Нема докази дека Хипатија презела оригинално математичко истражување, меѓутоа таа му помогнала на нејзиниот татко во пишувањето на неговите научни книги што стигнувале до Птоломеј. Исто така, се смета дека таа помогнала и во креирањето на новата верзија на Евклидовите елементи – што станало основа за сите подоцнежни изданија на Евклид. За жал, изгубено е целото нејзино дело со што остануваат само нејзините наслови и референции за истото. Иако нема нејзино познато чисто филозофско дело, останува запаметена како учител по филозофија, астрономија и математика со што особено се насочувала кон последните две.

Како што напишал познатиот автор Кингсли во еден од неговите романи:

„Хипатија е хероината – нејзините дела ја овековечуваат легендата дека таа не била само интелектуална туку и убава, елоквентна и скромна“.

### **Мари-Софи Гермен (1776 – 1831)**



Софи била француска математичарка и физичарка која, и покрај противењето на општеството и нејзините родители поради нејзиниот пол, издржала и продолжила да придонесува многу за математиката. Поради мизогинијата што владеела во тоа време, таа не била во можност да продолжи со кариерата и школувањето, но тоа не ја спречило да работи на нејзината пасија независно во текот на својот живот во теоријата на броеви. Освен нејзиниот придонес во теоријата на броеви, таа

била една од пионерите на теоријата на еластичност и станала првата жена која ја освоила големата награда од Париската академија на науките за нејзиниот есеј на оваа тема. Софи им докажала на луѓето околу неа дека нивните претпоставки засновани на нејзиниот пол се погрешни и дека жените се неверојатни математичари.

### **Софија Ковалевскаја (1850 – 1891)**



Руската математичарка Софија дала монументален

придонес кон анализата, парцијалните и диференцијалните равенки и механиката. Таа била пионер и икона за жени математичарки насекаде. Како првата жена која докторирала на математика – таа се здобила со глобално признание во математичката заедница поради нејзиниот труд за парцијалните равенки и била наградена со наградата „Бордин“ од Француската академија на науките – награда што се доделува на најдоброто решение за специфичен математички проблем. И покрај прегледот и сомнежите од нејзините машки колеги и општеството како целина, Софија одбила да се откаже од академијата и им го отвори патот на другите познати математичарки да одат по нејзините стапки!



### **Дама Мери Луси Картрајт (1900 – 1998)**

Мери Картрајт била британска математичарка и една од првите жени научнички кои се истакнале. Таа не само што била првата жена која добила диплома за универзитет туку и една од првите математичари кои ја проучувале Теоријата на хаосот. Била првата жена која го добила медалот „Силвестер“ (доделен за поттикнување на математичко истражување), прва жена претседател на математичката асоцијација и прва жена претседател на лондонското математичко друштво.

Благодарение на нејзината храброст да се осмели да се спротивстави на тогашниот статус кво, нејзината работа продолжила силно да влијае врз модерната теорија на динамички системи со што дури има и математичка теорема именувана по неа.

„За нештото да се направи ние продолживме и понатаму на нештото без земските изгледи за ‘резултати’ – одеднаш целиот пријатен изглед од драматичната фина структура на решенија со широко отворени очи гледаше во нас, во лице“, кажала Литлвуд при соработката со Мери, каде што дошле до извонредни резултати.

*Фината структура, што погоре ја опишува Литлвуд, денес се смета за типичен пример на „Ефектот на пеперутката“.*

### **Марџори Ли Браун (1914 – 1979)**



Надарената афроамериканска математичарка и воспитувачка Марџори Ли Браун била првата црна жена која се стекнала со докторат по математика. Таа се приклучила на факултетот на Централниот универзитет во Северна Каролина, кратко време по

докторатот. Била именувана за претседател на Математичкиот оддел во 1951 г., што ѝ овозможило да го води патот за најрана употреба на компјутери во нејзината област. Браун истакнала дека недостатокот на вклученост на црните жени во матични теми е огромно општествено прашање што треба да се реши и верувала дека образованието е остварливо решение.

Користејќи ја својата позиција, успеала да овозможи едукација на наставници во средни училишта за напредна математика, поминувајќи голем дел од своето време со локални наставници – учејќи ги за линеарната алгебра и охрабрувајќи ги да продолжат со продлабочување во математиката. Нејзината посветеност и упорност да обезбеди квалитетно образование инспирира насекаде во светот.

*„Ако го живеам повторно животот – пак би го посветила на неа – Ја обожавам математиката!“, Марџори.*



### **Кетрин Џонсон (1918 – 2020)**

Вљубена во математиката, уште од малечка Кетрин се посветила на неа заедно со францускиот јазик на универзитетот каде што дипломирала на само 18 години. Таа се приклучила на НАСА во 1953 година со што нејзините придонеси во механиката за орбитали биле клучни за успехот на аеронаутиката и вселенските програми во САД. Во 2015 година, од страна на Обама ѝ бил доделен претседателскиот медал за слобода за нејзината важна работа како математичар, физичар и вселенски научник како жена. И покрај тоа што била една од првите три црнкинки кои присуствувале на Универзитетот во Западна Вирџинија, таа се осмелила да ги оспори стереотипите што постоеле околу неа и станала пример за жени насекаде, особено кај Афроамериканките во СТЕМ.

Кетрин била одговорна за пресметување на траекторијата на проектот „Меркур“ и летот „Аполо 11“ кон Месечината – што значи дека му помогнала на првиот вселенски брод и на првите Американци да стигнат до Месечината. Верувајќи дека сè е физика и математика – таа ги охрабрила девојчињата да ги изградат сопствените кариери во СТЕМ со нејзините често одржувани говори на истата тема.

*„Кетрин Џонсон била одбиена од НАСА првиот пат кога аплицирала, но таа не се откажала!“*

## Маријам Мирзахани (1977 – 2017)



Маријам била една од најголемите математичари од нејзината генерација, давајќи исклучителен придонес во проучувањето на динамиката и геометријата на математичките објекти наречени Риманови површини. Таа била професор на универзитетот „Стенфорд“ и докторирала на универзитетот „Харвард“. Во 2014 г., таа била првата жена и прва Иранка наградена со Филдсов медал (познат и како меѓународен медал за извонредни откритија во математиката) за нејзиниот извонреден придонес кон динамиката и геометријата на површините на Риман и нивните модулски простори.

Влијанието на Маријам е огромно во полето каде што била ориентирана и ден-денес отвора нови граници во науката што тукушто почнуваат да се истражуваат. Таа е најголемиот доказ дека дури и во полето каде што со години наназад доминирале мажите – жените можат да бидат примери и да го водат патот чекор напред со своите извонредни откритија.

## Литература

1. Alexander, O., & Wanner, G. (2012). *Geometry by its history*. Springer.
2. Bell, E. T. (1954). *Veliki matematičari*. Белград: Биографије.
3. Pickover, C. A. (2009). *The math book*. Sterling.
4. Velleman, D. J. (2019). *How to prove it*. Cambridge University Press.
5. Стојк, Д. Ј. (1987). *Краток преглед историје математике*. Математичка библиотека 51, Београд.
6. Stipanič, E. (1988). *Putvima razvitka matematike*. Вук Караџић.
7. Наука и изкуство. (1974) *История на математиката* (превод од руски) Софија.
8. Ganchev, I., & Vrbanova, M. (1999). *Istorija na matematikata: Kurs lekcii*. Modul.
9. Dejik, M. (1990). *Tajni svet matematike*. Nolit.
10. Liljedahl, P. (2021). *Building thinking classrooms in mathematics*. Corwin Mathematics.
11. Risojević, R. (н.д.). *Veliki matematičari*. Nolit.
12. Gowers, T. (Ed.). (2008). *The Princeton companion to mathematics*. Princeton University Press.
13. Anglin, W. S. (1994). *Mathematics: A concise history and philosophy*. Springer.

Ниту еден дел од оваа публикација не смее да биде  
репродуциран на било кој начин без  
претходна писмена согласност на авторот

Е-издание: <https://www.ukim.edu.mk/e-izdanija/PMF/Istorija-na-matematikata.pdf>