

проф. д-р Билјана Крстеска

НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА

Скопје, 2025 година

Издавач:

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. „Гоце Делчев“ бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:

проф. д-р Биљана Ангелова, ректор

Уредник на публикацијата:

проф. д-р Билјана Крстеска

Рецензенти:

1. проф. д-р Костадин Тренчевски
2. проф. д-р Валентина Миовска

Техничка обработка:

проф. д-р Билјана Крстеска

Лектура на македонски јазик:

Виолета Јовановска

Илустратор:

проф. д-р Билјана Крстеска

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски“, Скопје

514.18(075.8)

КРСТЕСКА, Билјана

Нацртна геометрија [Електронски извор] / Билјана Крстеска ; [илустратор
Билјана Крстеска]. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", 2025

Начин на пристапување (URL):

<https://www.ukim.edu.mk/e-izdaniya/PMF/Nacrtna-geometrija.pdf>. - Текст во PDF
формат, содржи IV, 273 стр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на
ден 23.01.2025. - Библиографија: стр. 273

ISBN 978-9989-43-518-8

а) Нацртна геометрија – Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 65142021

Со љубов на Марија, Мартин и Добре

Предговор

Учебникот **НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА** е наменет за студентите од трета година на Природно – математичкиот факултет во Скопје, запишани на студиската програма наставна математика и студиската програма математика физика, но може да го користат и студентите од другите факултети кои изучуваат подрачја опфатени во учебникот.

Учебникот се состои од седум поглавја. Во рамките на секое поглавје обработени се предвидените содржини кои, по правило, се илустрирани со решени примери и цртежи. На крајот од секоје поглавје дадени се прашања и задачи за самостојна работа, која што е продолжување на работата на часот и претставува највисок степен на самостојната работа на студентот.

Првото поглавје **Вовед во нацртна геометрија** има за цел да направи кус преглед на историскиот развој, предметот, целите и содржините на нацртната геометрија.

Совладувањето на материјалот изложен во второто поглавје **Основи на ортогоналното проектирање** дава можност за стекнување на знаења и способности во врска со ортогоналното проектирање на рамнински фигури и геометриски тела во една, две рамнини или три рамнини.

Третото поглавје **Коса проекција** е насочена кон воведување на поимот коса проекција, како и кон изведување на косата проекција на рамнински фигури и геометриски тела.

Со совладување на материјалот кој се однесува на четвртото поглавје **Рамнини** студентот ќе се стекне со основни знаења и способности во делот од рамнини паралелни или нормални со проекционите рамнини. Преку мноштво примери и задачи ќе научи да наоѓа пробој на права со проектирачки рамнини и да определува проекции на рамнински фигури кои лежат во проектирачки рамнини и тела чиито основи лежат во проектирачки рамнини преку соборување на проектирачки рамнини.

Во петтото поглавје **Трансформации** студентите се упатуваат на усвојување на методите за трансформација на геометриски фигури и геометриски тела, како и на тела од практиката.

Совладувањето на материјалот изложен во шестатото поглавје **Општа рамнина** овозможува проширување на познавањата за просторот и претставувањето на посложени форми со нивните меѓусебни односи.

Во седмото поглавје **Пресеци на геометриски тела со рамнини** студентите се запознаваат со методите за наоѓање на пресек на геометриски тела со проектирачки рамнини и со општи рамнини.

Посебна благодарност должам на рецензентите на овој учебник, проф. д-р Костадин Тренчевски и проф. д-р Валентина Миовска чии што сугестии и забелешки придонесоа за подобрување на неговиот квалитет.

Авторот однапред ќе биде благодарен за секоја добронамерна критика или забелешка за подобрување на содржината, бидејќи верува дека овој учебник ќе придонесе студентите да се запознаат со содржини кои ќе им бидат од корист во нивното понатамошно професионално усовршување.

Јануари, 2025

Авторот

Содржина

Предговор	1
1. Вовед во нацртна геометрија.....	9
1.1. Вовед во нацртна геометрија.....	9
2. Основи на ортогоналното проектирање.....	13
2.1. Проектирање и видови проекции.....	13
2.2. Ортогонално проектирање на една рамнина.....	18
2.2.1. Ортогонална проекција на точка.....	18
2.2.2. Ортогонална проекција на отсечка.....	22
2.2.3. Вистинска големина на отсечка.....	23
2.2.4. Специјални положби на отсечка.....	27
2.2.5. Ортогонална проекција на триаголник.....	30
2.2.6. Ортогонална проекција на многуаголник.....	32
2.3. Ортогонално проектирање на две рамнини.....	34
2.3.1. Ортогонална проекција на точка.....	34
2.3.2. Ортогонална проекција на точка во специјална	

положба.....	39
2.3.3. Квадранти. Координати на точка.....	41
2.3.4. Ортогонално проектирање на отсечка.....	45
2.3.5. Ортогонално проектирање на отсечка во специјална положба.....	48
2.3.6. Вистинската големина на отсечката и агли на наклон	57
2.3.7. Ортогонално проектирање на права.....	64
2.3.8. Прободи на права и агли на наклон.....	69
2.3.9. Заемна положба на две прави.....	72
2.3.10. Ортогонално проектирање на рамнински фигури.....	79
2.4. Ортогонално проектирање на три рамнини.....	85
2.4.1. Ортогонално проектирање на точка.....	85
2.4.2. Ортогонално проектирање на геометриски фигури...	88
2.4.2. Ортогонално проектирање на геометриски тела.....	93
3. Коса проекција.....	97
3.1. Поим за коса проекција.....	97
3.2. Коса проекција на геометриски фигури.....	104
3.3. Коса проекција на геометриски тела	104
4. Рамнини.....	117
4.1. Траги на рамнина.....	117
4.2. Координати на рамнина.....	120
4.3. Рамнини паралелни на проекционите рамнини.....	123
4.4. Геометриски фигури во рамнини паралелни на	

проекционите рамнини.....	128
4.5. Рамнини нормални на проекционите рамнини.....	134
4.6. Точка и права во проектирачка рамнина.....	139
4.7. Пробод на права низ проектирачка рамнина.....	143
4.8. Соборување на проектирачки рамнини.....	149
4.9. Геометриски фигури кои лежат во проектирачки рамнини.....	155
4.10. Геометриски тела кои лежат со основата во проектирачки рамнини.....	162
5. Трансформација.....	172
5.1. Поим за трансформација.....	172
5.2. Трансформација на точка.....	173
5.3. Трансформација на геометриски фигури.....	180
5.4. Трансформација на геометриски тела.....	184
6. Општа рамнина.....	193
6.1.Точка и права во општа рамнина.	193
6.2. Главни прави и нивна примена.....	198
6.3. Определување траги на рамнина зададена со прави и точки.....	206
6.4. Пресек на две рамнини.....	213
6.5. Пробод на права низ општа рамнина.....	221
6.6. Нормала на општа рамнина.....	228
6.7. Соборување на општа рамнина.....	233
6.8. Геометриски фигури кои лежат во општа рамнина.....	237

6.9. Геометриски тела кои лежат со основата во општа рамнина.....	243
7. Пресеци на геометриски тела со рамнини.....	251
7.1. Пресек на геометриски тела со проектирачки рамнини.....	251
7.2. Пресек на геометриски тела со општа рамнина.....	266
Користена литература.....	273

1. ВОВЕД ВО НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА

1.1. ВОВЕД ВО НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА

Цртежот е значајно средство за разбирање во техниката. Затоа цртежот се смета како јазик на инженерите, а нацртна геометрија како негова граматика.

Валтер Бундерлих

Нацртна геометрија е гранка на геометријата, која се занимава со проучување методи со кои се овозможува претставување објекти од просторот со помош на цртеж.

Може да се каже дека нацртната геометрија е стара колку што е стара и геометријата. Но својот подем како посебна дисциплина го достигнала во XVIII век, кога многумина математичари и инженери

интензивно работеле на методите на претставување на објектите од просторот. По своите достигнувања во таа насока посебно се издвоил францускиот инженер **Гаспар Монж** кој се смета за „татко на нацртната геометрија“. Тој кон крајот XVIII век развил свои техники за решавање геометриски проблеми, додека работел како известувач за воени утврдувања. Своите откритија подоцна ги публикувал во својата книга „Нацртна геометрија“. Оттогаш па до денес нацртната геометрија бележи брз и интензивен развој, особено на полето на нејзината примена.



Гаспард Монж (1746 - 1818)

Со што се занимава нацртната геометрија?

Нацртната геометрија е научна дисциплина која се занимава со прочување методи со кои просторните објекти се претставуваат со соодветни објекти во рамнина.

На тој начин, со помош на методите на нацртната геометрија решавањето на даден проблем во просторот се поистоветува со решавање соодветен проблем во рамнина. Сите својства кои ја

овозможуваат врската на просторниот проблем и соодветниот во рамнина ја карактеризираат содржината на нацртната геометрија.

Според тоа, целта на учењето на техниките на нацртната геометрија е двојна. Од една страна таа нè учи како да нацртаме некој објект кој го гледаме или го замислуваме, а од друга страна ни ја развива способноста врз основа на цртеж да добиеме просторна претстава за нацртаниот објект.

Главната потешотија при решавањето на проблемите во нацртната геометрија произлегува од фактот дека објектите во просторот, како и самиот простор кој нè опкружува има три димензии, додека рамнинските објекти, како и цртежот имаат две димензии. За совладување на оваа потешкотија воведени се рамнинските геометриски проекции, кои се всушност теоретската основа на нацртната геометрија.

Добиените методи и техники се од голема важност во секојдневниот живот и практика, особено во инженерството, архитектурата, дизајнот и во уметноста. За нас е од посебна важност примената на нацртната геометрија во градежништвото. Оттаму и потребата и поврзаноста на нацртната геометрија со наставните предмети кои проучуваат теми од подрачјата: градежни конструкции, техничко цртање, проектирање и урбанизам итн.

Инженерите имаат посебна потреба од нацртната геометрија. Пред сè, потребно е да се стават на хартија сите идеи и замисли за некој објект со што ќе се овозможи негова планска реализација.

Развојот на бројните софтверски апликации овозможуваат брза и ефикасна примена на нацртната геометрија во сите подрачја на современото живеење.



Прашања и задачи

1. Наведи ги позначајните моменти во историскиот развој на нацртната геометрија.
2. Што е предмет на проучување на нацртната геометрија?
3. Во кои подрачја од секојдневното живеење е нагласена примена-та на нацртната геометрија?
4. Во кои предмети што ги изучуваш се применува нацртната геометрија?

2. ОСНОВИ НА ОРТОГОНАЛНОТО ПРОЕКТИРАЊЕ

2.1. ПРОЕКТИРАЊЕ И ВИДОВИ ПРОЕКЦИИ

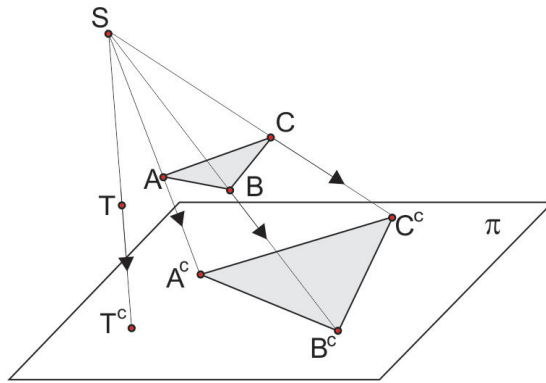
Како што споменавме, теоретската основа на нацртната геометрија и нејзините примени се проекциите. Во продолжение ќе разгледаме неколку видови проекции.

Централно проектирање

На цртеж 2.1 прикажан е извор на светлина S и рамнина π . Од изворот на светлина се распространуваат светлосни зраци на сите страни кои ја осветлуваат рамнината π . Ако меѓу изворот на светлина S и рамнината π замислиме материјална точка T којашто е непровидна, таа ќе го запре оној светлосен зрак којшто паѓа на неа. Тогаш на рамнината ќе се појави темна точка T^c на која е фрлена сенка на точката T . Точката T^c е онаа точка во која зракот ST зап-

рен со точката T би ја прободел рамнината π , ако го продолжиме до рамнината.

Ако меѓу изворот на светлина и рамнината π поставиме триаголник од непровиден картон, тој ќе ги сопре сите зраци кои паѓаат на него. Тогаш на рамнината π ќе се појави темен триаголник $A^cB^cC^c$ на кој е фрлена сенка на тој триаголник. Точките A^c , B^c и C^c се оние точки во кои зраците SA , SB и SC запрени со точките A , B и C би ја прободел рамнината π , ако го продолжиме до рамнината.



Цртеж 2.1

Да го разгледаме геометрискиот аспект на постапката за добивање на фрлената сенка на точката T и триаголникот ABC .

Неподвижната точка S ја сврзавме со точката T од правата ST и со неа ја прободевме рамнината π во точката T^c . Исто така, неподвижната точка S ја сврзавме со точките A , B и C од правите SA , SB и SC и со нив ја прободевме рамнината π во точките A^c , B^c и C^c , со што ги добивме врвовите на триаголникот $A^cB^cC^c$.

Ако неподвижната точка S ја сврземе со точката T и го определеме прободот на добиената права со рамнината π , тогаш велиме дека точката T сме ја проектирале од точката S на рамнината π . Точката S се вика **центар на проектирањето**, правата ST се вика **проектирачки правец** или **проектирачки зрак**, точката T^c се вика **централна проекција** на точката T , а рамнината π се вика **рамнина на централно проектирање**. Во таа смисла триаголникот $A^cB^cC^c$ е централна проекција на триаголникот ABC од точката S на рамнината π , а правите SA , SB и SC се викаат проектирачки правци.

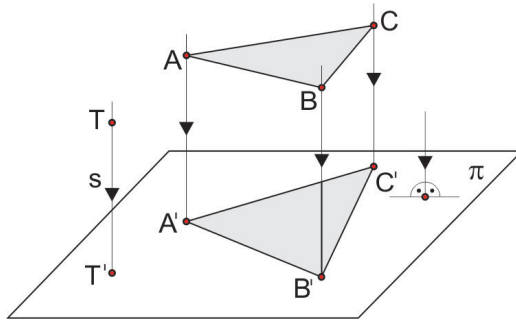
Ваквиот начин на определување на сликата на еден објект се вика **централно проектирање**, бидејќи сите точки на објектот се проектираат од точка, наречена **центар**, врз некоја рамнина π .

Ортогонално проектирање

На цртеж 2.2 е прикажана рамнина π врз која паѓаат Сончеви зраци s под прав агол. Заради големата далечина од којашто доаѓаат Сончевите зраци, можеме да сметаме дека тие се меѓусебе паралелни. Ако меѓу Сонцето и рамнината π поставиме материјална точка T и непровиден триаголник ABC , тие ќе фрлат сенки врз рамнината π , а тоа ќе бидат точката T' и триаголникот $A'B'C'$.

Да го разгледаме геометрискиот аспект на постапката за добивање на фрлената сенка на точката T и триаголникот ABC .

Низ точката T спуштивме нормала кон рамнината π и го најдовме нејзиното подножје T' . Исто така, низ секое од темињата на триаголникот ABC спуштивме нормали на рамнината π и ги најдовме нивните подножја A' , B' и C' , со што ги добивме темињата на триаголникот $A'B'C'$.



Цртеж 2.2

Ако од точка T спуштиме нормала на рамнина π , а потоа го определиме нејзиното подножје T' , тогаш велиме дека точката T сме ја проектирале ортогонално (нормално) на рамнината π . Правата TT' се вика **правец на ортогоналното проектирање** или **проектирачки зрак**, а рамнината π се вика **рамнина на ортогоналното проектирање**. Во таа смисла триаголникот $A'B'C'$ е **ортогонална проекција** на триаголникот ABC на рамнината π .

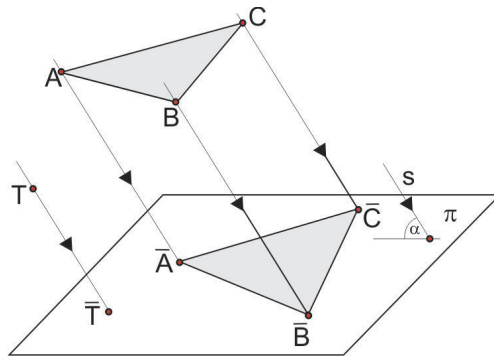
Ваквиот начин на определување на слика на еден објект се вика **ортогонално проектирање**, бидејќи сите точки на објектот се проектираат ортогонално врз некоја рамнина π .

Косо проектирање

На цртеж 2.3 е прикажана рамнина π врз која паѓаат Сончеви зраци s кои зафаќаат со рамнината агол α . Ако повторно меѓу Сонцето и рамнината π поставиме материјална точка T и непровиден триаголник ABC , тие ќе фрлат сенки врз рамнината π , а тоа ќе бидат точката $\bar{T}$ и триаголникот $\bar{ABC}$.

Да го разгледаме геометрискиот аспект на постапката за добивање на фрлената сенка на точката T и триаголникот ABC .

Низ точката T повлекоме права паралелна со проектирачкиот правец s и го најдовме нејзиниот пробод со рамнината π . Исто така, низ секое од темињата на триаголникот ABC повлекоме прави паралелни на проектирачкиот правец s и ги најдовме нивните прободи $\bar{A}$, $\bar{B}$ и $\bar{C}$, со рамнината π , со што ги добивме темињата на триаголникот $\bar{ABC}$.



Цртеж 2.3

Ако од точка T повлечеме права паралелна со проектирачкиот правец s и го најдеме нејзиниот пробод $\bar{T}$ со рамнината π , тогаш велиме дека точката T сме ја проектирале косо на рамнината π . Правата $T\bar{T}$ се вика **правец на косото проектирање**, а рамнината π се вика **рамнина на косото проектирање**. Во таа смисла триаголникот $\bar{ABC}$ е **коса проекција** на триаголникот ABC на рамнината π .

Ваквиот начин на определување на сликата на еден објект се вика **косо проектирање**, бидејќи сите точки на објектот се проектираат косо врз некоја рамнина π .

На крај, да забележиме дека ортогоналното и косото проектирање имаат заедничко својство, а тоа е дека проектирачките правци им се паралелни, за разлика од централното проектирање каде што проектирачките правци минуваат низ една точка. Затоа ортогоналното и косото проектирање често се именуваат како **паралелно проектирање**.



Прашања и задачи

1. Кои видови проектирања ги проучивме?
2. Образложи ја постапката со која се добива проекцијата на дадена точка со:

- а) централно проектирање;
- б) ортогонално проектирање;
- в) косо проектирање.

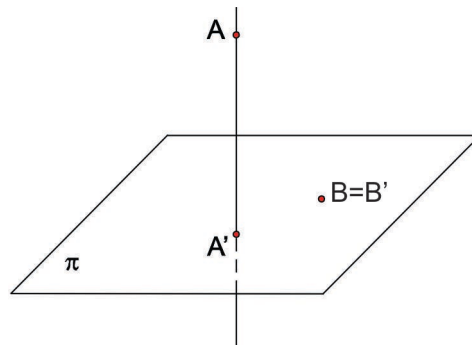
2.2. ОРТОГОНАЛНО ПРОЕКТИРАЊЕ НА ЕДНА РАМНИНА

2.2.1. Ортогонална проекција на точка

Нека е дадена хоризонтална рамнина π и точка A којашто не лежи на рамнината (цртеж 2.4). Ако од точката A спуштиме нормала на рамнината π , таа ќе ја прободува рамнината во точка којашто ќе ја означиме со A' .

Точката A' во којашто спуштената нормала ја прободува рамнината π се вика **нормална** или **ортогонална проекција** на точката A во рамнината π . Нормалата спуштена од точката A се вика **правец на ортогоналното проектирање, проектирачка права** или проектирачки зрак, а рамнината π се вика **рамнина на ортогоналното проектирање** или **проекциона рамнина**.

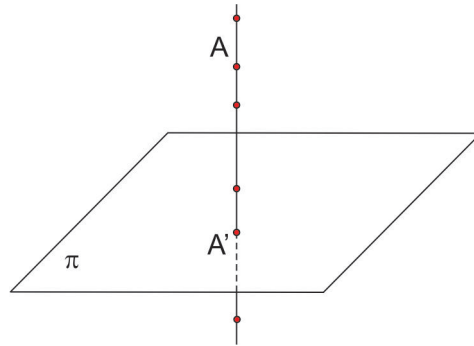
Бидејќи од точката A може да спуштиме единствена нормала на рамнината π , заклучуваме дека секоја точка во просторот има единствена ортогонална проекција на рамнината π . Да забележиме дека ако точката чијашто проекција ја определуваме лежи во рамнината π , тогаш таа се совпаѓа со својата проекција во рамнината (таков е случајот со точката B од рамнината π).



Цртеж 2.4

Се поставува прашање, ако е дадена ортогоналната проекција A' во рамнината π на некоја точка A во просторот, дали со тоа е напoлно определена положбата на точката A во однос на рамнината π ? Одговорот е негативен, бидејќи кога е дадена ортогоналната проекција на една точка, ние знаеме само дека таа точка лежи на нормалата издигната од нејзината проекција, но не знаеме колку таа

точка е оддалечена од рамнината. Всушност, ортогонална проекција на секоја точка A од нормалата е точката A' (цртеж 2.5).



Цртеж 2.5

За да може да ја определиме положбата на точката во просторот, кога е позната нејзината ортогонална проекција, потребно е да го знаеме уште и нејзиното растојание до проекционата рамнина.

Секоја рамнина го дели просторот на два полупростори. Вообичаено претпоставуваме дека проекционата рамнина има хоризонтална положба.

Растојанието на која било точка до проекционата рамнина земено со знак „+“ или „-“ во зависност од тоа дали точката е над или под проекционата рамнина се вика **апликата** или **кота** на точката.

Значи, котите на точките коишто се над проекционата рамнина се позитивни, додека котите на точките кои се под проекционата рамнина се негативни. Точките кои лежат во проекционата рамнина имаат кота нула. Котите на точките ги запишуваме во заграда покрај нивните проекции (цртеж 2.6).

Според тоа, може да заклучиме дека:

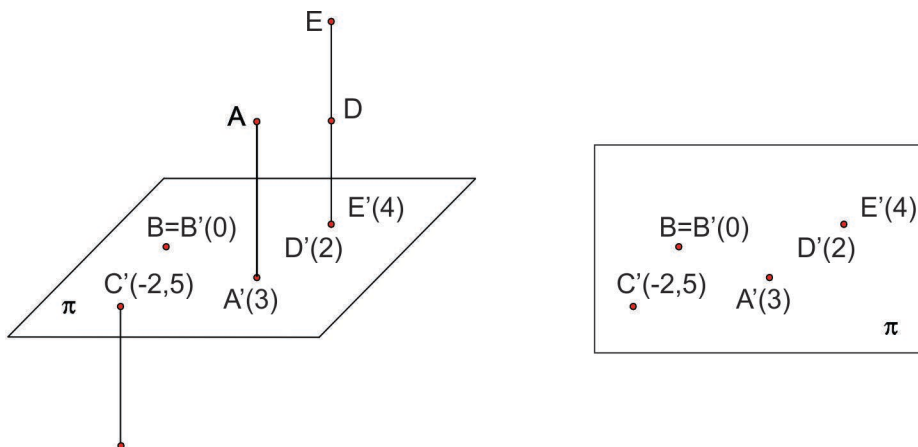
Положбата на точката во просторот е еднозначно определена со нејзината проекција и со нејзината кота.

Пример. Точката А има кота $+2$, и се наоѓа над проекционата рамнина на растојание од 2 единици од неа.

Точката В лежи во проекционата рамнина.

Точката С има кота $-2,5$ и се наоѓа под проекционата рамнина на растојание од 2,5 единици од неа.

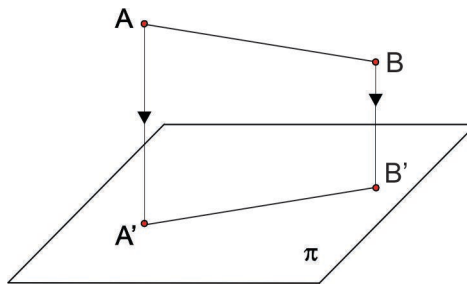
Проекциите на точките D и E се совпаѓаат, но нивните коти покажуваат дека точката E е над точката D.



Цртеж 2.6

2.2.2. Ортогонална проекција на отсечка

Нека е дадена отсечка AB којашто се наоѓа надвор од проекционата рамнина π (цртеж 2.7). Нејзината ортогоналната проекција на рамнината се состои од ортогоналните проекции на сите точки од отсечката. Но, бидејќи секоја отсечка е напoлно определена со нејзините крајни точки, за наоѓање на ортогоналната проекција доволно е да ги најдеме ортогоналните проекции A' и B' на точките A и B , соодветно. Со поврзување на добиените проекции A' и B' ја добиваме отсечката $A'B'$ којашто претставува ортогонална проекција на отсечката AB на рамнината π .

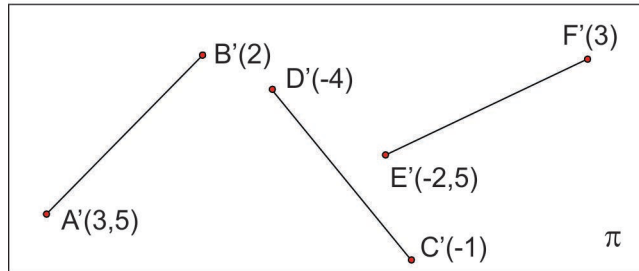


Цртеж 2.7

Обратно, нека во рамнината π е дадена ортогоналната проекција $A'B'$ на отсечката AB , и котите на нејзините крајни точки. За да ја определиме положбата на отсечката AB доволно е да ја определиме положбата на нејзините крајни точки A и B , и потоа нив да ги сврземе со отсечка.

На цртеж 2.8 прикажани се ортогоналите проекции на отсечките AB , CD и EF , и означени се котите на нивните крајни точки.

Можеме да заклучиме дека отсечката AB се наоѓа над проекционата рамнина, отсечката CD се наоѓа под проекционата рамнина, додека отсечката EF ја прободува проекционата рамнина.



Цртеж 2.8

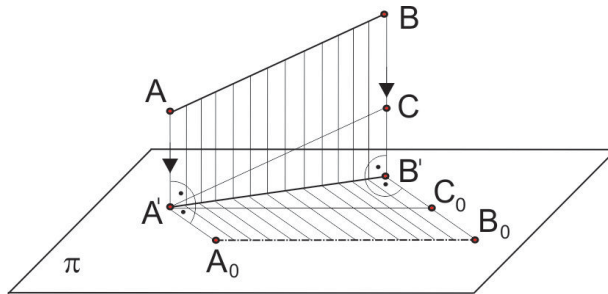
2.2.3. Вистинска големина на отсечка

Ако е позната проекцијата $A'B'$ на отсечката AB и котите на нејзините крајни точки, тогаш вистинската големина на отсечката може да се конструира на следниве два начина, со метод на трапез и со метод на диференцијален триаголник:

Метод на трапез

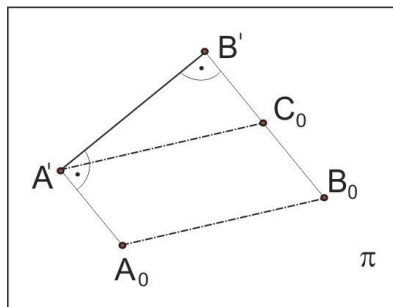
На цртеж 2.9 прикажана е отсечката AB , која е во општа положба, нејзината ортогонална проекција $A'B'$ и котите на нејзините крајни точки. На цртежот е шрафиран четириаголникот $ABB'A'$ којшто е правоаголен трапез со прави агли кај темињата A' и B' .

Вистинската големина на отсечката AB можеме да ја определе-
 лиме ако трапезот $ABB'A'$, го собориме во рамнината π (го ротираме
 за 90° околу оската $A'B'$).



Цртеж 2.9

Кога се дадени должините на придружените проекции на от-
 сечката AB и котите на нејзините крајни точки, тогаш ги имаме сите
 елементи потребни за конструкција на трапезот $ABB'A'$, бидејќи важи
 $\overline{A'A}$ е еднакво на котата на точката A , додека $\overline{B'B}$ е еднакво на
 котата на точката B .



Цртеж 2.10

Соборениот трапез го конструираме на следниов начин: повлекуваме нормали на $A'B'$ во точките A' и B' и на тие нормали ги нанесуваме должините $\overline{A'A}$ и $\overline{B'B}$.

$$\overline{A'A_0} = \overline{A'A} \text{ и } \overline{B'B_0} = \overline{B'B}.$$

Така го добивме трапезот $A'B'B_0A_0$ (цртеж 2.10). Со наоѓање на отсечката A_0B_0 велíme дека сме ја одредиле вистинската големина на отсечката AB .

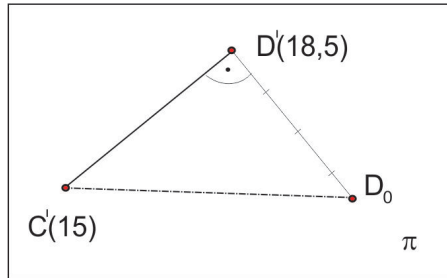
Метод на диференцијален триаголник

На цртеж 2.9 дадени се отсечката AB , нејзината ортогонална проекција $A'B'$ и котите на нејзините крајни точки. Од точката A' повлечена е права паралелна со A_0B_0 . Така го добиваме правоаголниот триаголник $A'B'C_0$, наречен **диференцијален триаголник**. Должината на катетата $B'C_0$ на диференцијалниот триаголник е еднаква на разликата од должините на отсечките $B'B_0$ и $A'A_0$. Поточно, должината на катетата $B'C_0$ е еднаква на разликата од котите на крајните точки на отсечката AB . Должината на хипотенузата $A'C_0$ е еднаква на должината на отсечката A_0B_0 , бидејќи четириаголникот $A'C_0B_0A_0$ е паралелограм. Според тоа, можеме да заклучиме дека:

Должината на хипотенузата на правоаголниот триаголник на којшто едната катета е ортогоналната проекција на дадена отсечка, а должината на другата катета е еднаква на разликата на котите на крајните точки на отсечката, е еднаква на **вистинската големина** на отсечката.

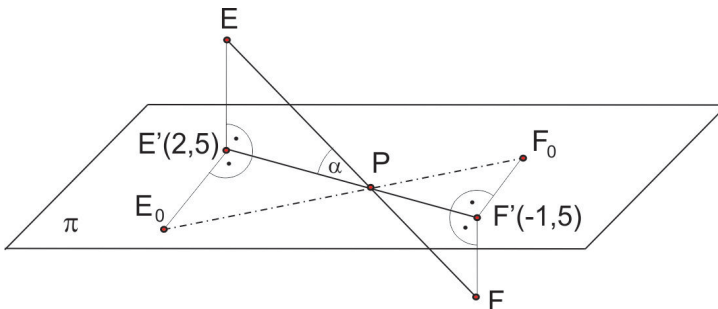
Овој начин на определување на вистинска големина на отсечка е пократок и често се користи кога котите на крајните точки на отсечката се големи броеви, па точките A_0 и B_0 при конструкција со методот на трапез би се нашле надвор од листот за цртање.

Пример. На цртеж 2.11 е прикажана конструкцијата на вистинската големина на отсечката CD зададена со својата ортогонална проекција $C'D'$. Котите на крајните точки C и D изнесуваат 15 cm и 18,5 cm, соодветно.



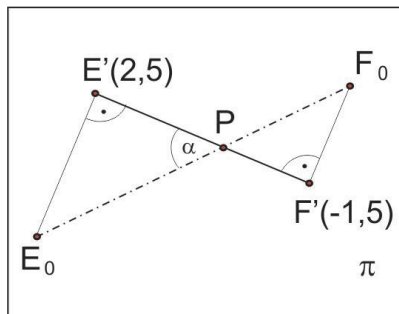
Цртеж 2.11

Често се случува дадената отсечка да ја прободува проекционата рамнина π , како на пример, отсечката EF на цртеж 2.12. Аголот α што го зафаќа отсечката со нејзината ортогонална проекција се вика **агол на наклон** на отсечката во однос на проекционата рамнина π .



Цртеж 2.12

Пример. Отсечката EF , нејзината ортогонална проекција и проектирачките зраци во овој случај не формираат трапез, како претходно (цртеж 2.9 и цртеж 2.10), туку два правоаголни триаголници $EE'P$ и $FF'P$ (цртеж 2.13). Збирот на нивните хипотенузи ја дава вистинската големина на отсечката EF .



Цртеж 2.13

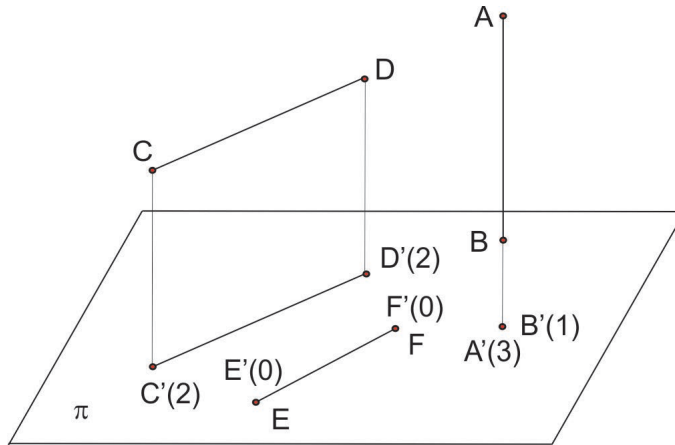
Должината на ортогоналната проекција на дадена отсечка зависи од нејзиниот агол на наклон α . Колку е поголем аголот на наклон толку е помала должината на нејзината ортогонална проекција.

2.2.4. Специјални положби на отсечка

Ако отсечка е нормална или паралелна на проекционата рамнина π , или лежи во проекционата рамнина, велиме дека таа има **специјална положба** во однос на рамнината. За отсечки коишто не се во специјална положба велиме дека се во **општа положба**. Кога отсечка AB е во општа положба во однос на проекционата рам-

нина π , тогаш должината на нејзината проекција $A'B'$ е помала од должината на отсечката AB .

На цртеж 2.14 прикажани се отсечките AB , CD и EF коишто се во специјална положба во однос на проекционата рамнина π .



Цртеж 2.14

Отсечката AB е нормална на проекционата рамнина π , па ортогоналните проекции на нејзините крајни точки A' и B' се совпаѓаат со подножјето на проектирачкиот зрак. Според тоа, имаме дека:

Ако отсечка е нормална на проекционата рамнина π , тогаш нејзината ортогонална проекција е точка.

Отсечката CD е паралелна на проекционата рамнина π , па четириаголникот $CC'D'D$ е паралелограм, бидејќи $\overline{CC'} = \overline{DD'}$. Оттука следува дека $\overline{CD} = \overline{C'D'}$.

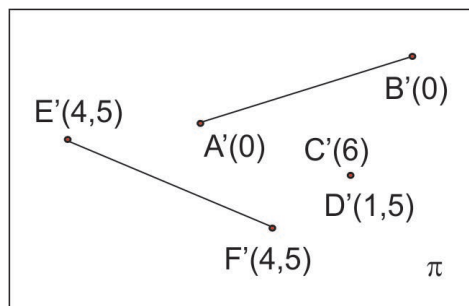
Ако отсечка е паралелна на проекционата рамнина π , тогаш нејзината ортогонална проекција е отсечка складна со неа.

Отсечката EF лежи во проекционата рамнина π , па нејзината ортогонална проекција $E'F'$ се совпаѓа со дадената отсечка. Значи:

Ако отсечка лежи во проекционата рамнина π , тогаш нејзината ортогонална проекција се совпаѓа со неа.

Според тоа, може да заклучиме дека:

Ортогонална проекција на отсечка е отсечка, со должина помала или еднаква на дадената отсечка, или точка.

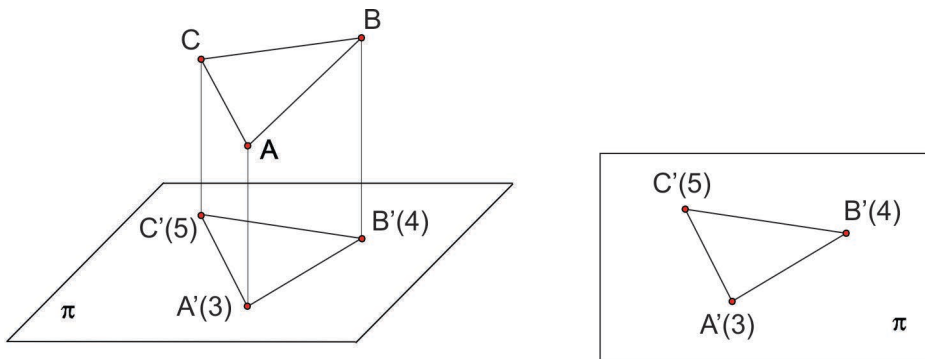


Цртеж 2.15

Пример. На цртеж 2.15 е прикажана отсечка AB којашто лежи во проекционата рамнина π , отсечката CD којашто е нормална на проекционата рамнина, и отсечката EF којашто е паралелна на проекционата рамнина и е за 4,5 единици оддалечена од неа.

2.2.5. Ортогонална проекција на триаголник

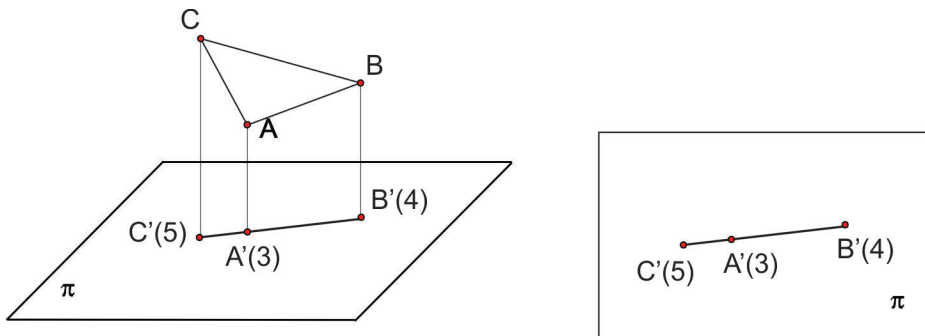
Пример. Триаголникот ABC на цртеж 2.16 е во општа положба, односно рамнината во којашто лежи триаголникот не е ниту паралелна, ниту нормална на проекционата рамнина π .



Цртеж 2.16

Неговите темиња A , B и C имаат коти 3, 4 и 5, соодветно. Ако темињата ортогонално ги проектираме на рамнината π , ги добиваме точките A' , B' и C' . Со нивно сврзување го добиваме триаголникот $A'B'C'$ којшто е ортогонална проекција на триаголникот ABC . Според тоа, имаме дека:

Ако триаголникот е во општа положба во однос на проекционата рамнина π , тогаш неговата ортогонална проекција е триаголник.



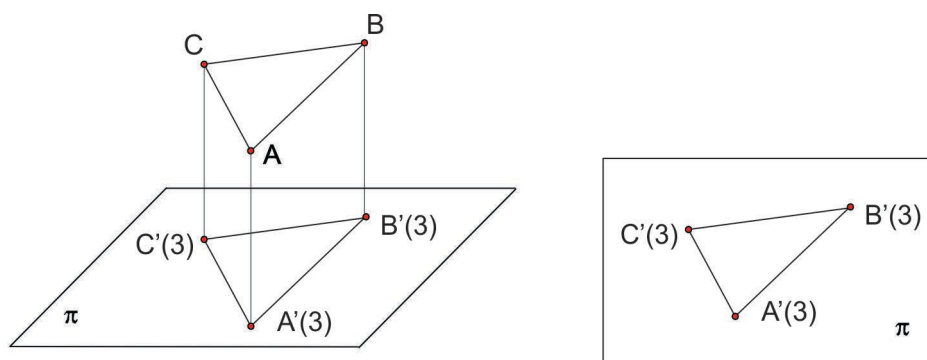
Цртеж 2.17

Пример. Триаголникот ABC на цртеж 2.17 лежи во рамнина нормална на проекционата рамнина π .

Неговите темиња A , B и C имаат коти 3, 4 и 5, соодветно. Проектирачките зраци повлечени од темињата лежат во рамнината на триаголникот, па ортогоналната проекција на триаголникот ABC е отсечката $C'B'$. Значи, имаме дека:

Ако рамнината на триаголникот е нормална на проекционата рамнина π , тогаш неговата ортогонална проекција е отсечка.

Пример. Триаголникот ABC на цртеж 2.18 лежи во рамнина паралелна на проекционата рамнина π , на растојание од 3 единици од неа. Бидејќи ортогоналната проекција на секоја негова страна е отсечка којашто е складна на неа имаме дека ортогоналната проекција на триаголникот $A'B'C'$ е триаголник складен со триаголникот ABC . Според тоа, може да заклучиме дека:

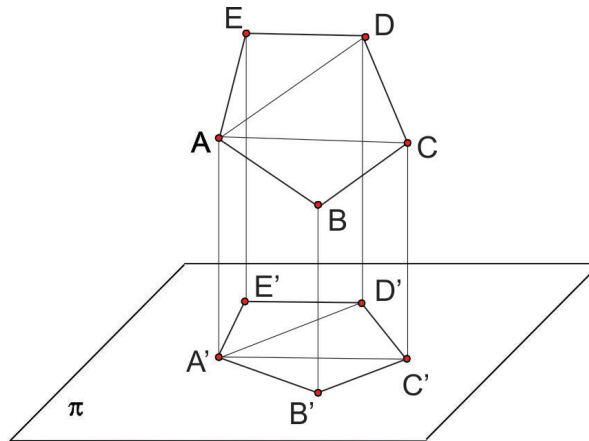


Цртеж 2.18

Ако рамнината на триаголникот е паралелна на проекционата рамнина π , тогаш неговата ортогонална проекција е триаголник складен со него.

2.2.6. Ортогонална проекција на многуаголник

Пример. На цртеж 2.19 е прикажан петаголник $ABCDE$ којшто е во општа положба во однос на проекционата рамнина π , заедно со неговата ортогонална проекција $A'B'C'D'E'$. Секој многуаголник со помош на неговите дијагонали може да се разбие на конечно многу триаголници кои лежат во иста рамнина. Така петаголникот $ABCDE$ е разбиен на три триаголници. Според тоа, за ортогонално проектирање на многуаголник важат истите правила за ортогонално проектирање на триаголник, наведени претходно. По-конкретно, имаме дека:



Цртеж 2.19

Ако многуаголникот е во општа положба во однос на проекционата рамнина π , тогаш неговата ортогонална проекција е истоимен многуаголник.

Ако рамнината на многуаголникот е нормална на проекционата рамнина π , тогаш неговата ортогонална проекција е отсечка.

Ако рамнината на многуаголникот е паралелна на проекционата рамнина π , тогаш неговата ортогонална проекција е многуаголник складен со него.



Прашања и задачи

1. Определи ја положбата во просторот и вистинската големина на отсечката AB ако е дадена нејзината ортогонална проекција и котите на крајните точки

а) $\overline{A'B'} = 4 \text{ cm}$ и $A'(1), B'(3)$

б) $\overline{A'B'} = 3 \text{ cm}$ и $A'(-2)$, $B'(-3)$

в) $\overline{A'B'} = 5 \text{ cm}$ и $A'(-1)$, $B'(3)$

г) $A' \equiv B'$ и $A'(2)$, $B'(5)$

д) $A' \equiv B'$ и $A'(-2)$, $B'(5)$

2. Најди ја вистинската големина на триаголникот ABC ако неговата ортогонална проекција е рамностран триаголник со страна 3 cm , и ако $A'(4)$, $B'(3)$ и $C'(5)$.

3. Определи ја вистинската големина на триаголникот ABC , ако неговата рамнина е нормална на проекционата рамнина π , ортогоналната проекција $\overline{A'B'} = 4 \text{ cm}$, C' е средина на отсечката $A'B'$, и $A'(4)$, $B'(3)$ и $C'(1)$.

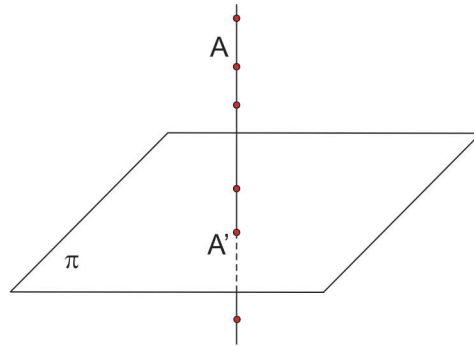
2.3. ОРТОГОНАЛНО ПРОЕКТИРАЊЕ НА ДВЕ РАМНИНИ

2.3.1. Ортогонална проекција на точка

Еден од поважните методи на нацртната геометрија е ортогоналното проектирање на две рамнини.

Нека се дадени хоризонтална рамнина π_1 и точка A , што не лежи на неа (цртеж 2.8). Како што веќе рековме, точката A' во која што нормалата спуштена од точката A ја прободува рамнината π е ортогонална проекција на точката A врз рамнината π_1 . Бидејќи од

точката A може да спуштиме единствена нормала кон рамнината π_1 заклучуваме дека секоја точка од просторот има единствена ортогонална проекција на рамнината π_1 .



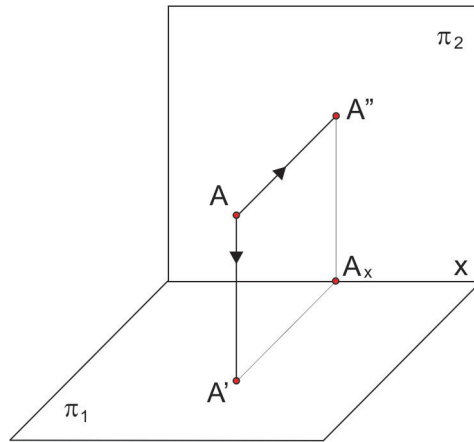
Цртеж 2.20

Знаеме дека со задавање на ортогонална проекција A' на точката A во рамнината π_1 не е наполно определена нејзината положба во просторот, односно од ортогоналната проекција A' на точката A може да заклучиме само дека таа точка лежи на нормалата издигната од точката A' , но не знаеме колку е таа точка оддалечена од рамнината π_1 . Сите точки од таа нормала ја имаат за ортогонална проекција точката A .

За да ја определиме положбата на точката A во просторот воведуваме вертикална рамнина π_2 , нормална на дадената рамнина π_1 . Точката A'' е ортогонална проекција на точката A на рамнината π_2 (цртеж 2.20).

Ортогоналната проекција A' на точката A на рамнината π_1 се вика **прва проекција** или **тлоцрт** на точката A , а ортогоналната проекција A'' на точката A на рамнината π_2 се вика **втора проекција** или **нацрт** на точката A . Хоризонталната рамнина π_1 се вика **прва проекциона рамнина** или **тлоцртна рамнина**, а вертикал-

ната рамнина π_2 се вика **втора проекциона рамнина** или **нацрт-на рамнина**. Правата во која се сечат проекционите рамнини се вика x -оска.



Цртеж 2.21

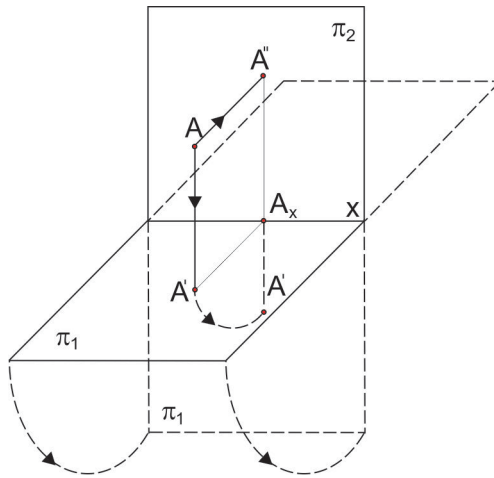
Ако низ правите AA' и AA'' поставиме рамнина, тогаш јасно е дека таа рамнина ќе биде нормална на рамнините π_1 и π_2 , исто така и на x -оската. Така поставената рамнина ќе ја сече рамнината π_1 во правата $A'A_x$, а рамнината π_2 во правата $A''A_x$. Четириаголникот $AA'A_xA''$ е правоаголник, па затоа

$$\overline{AA'} = \overline{A''A_x} \text{ и } \overline{AA''} = \overline{A'A_x}.$$

Тоа значи дека растојанието од точката A до хоризонталната рамнина π_1 е еднакво на растојанието од нејзиниот нацрт A'' до x -оската, а растојанието од точката A до вертикалната рамнина π_2 е еднакво на растојанието од нејзиниот тлоцрт A' до x -оската.

Нека со тлоцртот A' на точката A е зададен и нејзиниот нацрт A'' . За да ја определиме положбата на точката A во просторот од точката A' издигнуваме нормала на π_1 , а потоа од точката A''

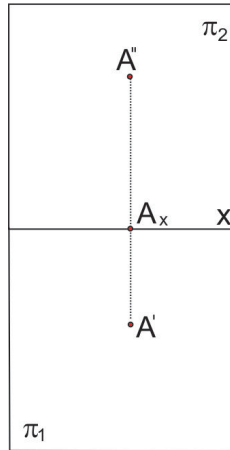
издигнуваме нормала на π_2 . Тогаш точката A е во пресечната точка на тие нормали. Според тоа положбата на една точка во просторот е напълно определена со нејзиниот нацрт и нејзиниот тлоцрт.



Цртеж 2.22

На цртеж 2.21 е прикажано како се поставени во просторот рамнините π_1 и π_2 , и проекциите A' и A'' . Се поставува прашање како проекциите и двете рамнини да ги нацртаме на една иста рамнина – во рамнината на листот за цртање. Тоа го постигнуваме на тој начин што рамнината π_1 ја ротираме околу x-оската надолу за 90° , така што да се совпадне со рамнината π_2 (цртеж 2.22).

Потоа така поклопените рамнини ги замислуваме како листот за цртање и го добиваме цртеж 2.23. Ваквото завртување на рамнината π_1 до поклопување на двете рамнини ќе го наречеме **расклопување на проекционите рамнини**.



Цртеж 2.23

Тлоцртот A' и нацртот A'' на точката A во вака расклопените рамнини се нарекуваат **придружени проекции** на точката A . Отсечките $A'A_x$ и $A''A_x$ се нормални на x -оската, па правата $A'A''$, наречена **ординала**, е нормална на x -оската.

Како што е важно да знаеме како можеме да дојдеме до придружените проекции на една точка во просторот, исто така важно е да знаеме како можеме да ја определиме положбата на една точка во просторот ако ги знаеме нејзините придружени проекции (цртеж 2.23).

Од точката A'' издигнуваме нормала на рамнината на цртежот, а потоа од точката A'' на нормалата ја нанесуваме должината A_xA' , бидејќи $\overline{A''A} = \overline{A_xA'}$, па така ја добиваме положбата на точката A во просторот. Така:

Положбата на една точка во просторот е напoлно определена со нејзините придружени проекции.

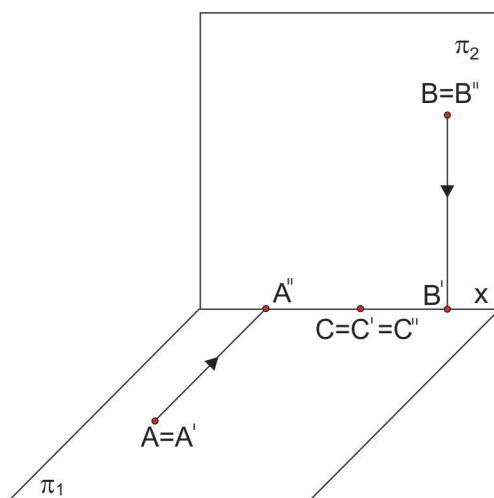


Прашања и задачи

1. Именувај ги првата и втората проекциона рамнина.
2. Што се придружени проекции на точка?
3. Објасни зошто положбата на една точка во просторот е напълно определена со нејзините придружени проекции.

2.3.2. Ортогонална проекција на точка во специјална положба

Точката што треба да ја проектираме во специјален случај може да лежи на хоризонталната или вертикалната рамнина, или пак, на самата x -оска.



Цртеж 2.24

Во продолжение ќе ги разгледаме наведените случаи.

▪ Да замислиме дека дадена точка A ја спуштаме по првата проектирачка права AA' кон хоризонталната рамнина π_1 . Тогаш нејзиниот нацрт A'' се спушта кон x -оската. Во моментот кога точката ќе падне во рамнината, нејзиниот нацрт ќе падне на x -оската (цртеж 2.24).

Ако точка лежи во првата проекциона рамнина π_1 , тогаш нејзиниот тлоцрт е во истата точка, а нејзиниот нацрт лежи на x -оската.

▪ Ако дадена точка B ја спуштаме по втората проектирачка права BB'' кон вертикалната рамнина π_2 (цртеж 2.24), тогаш нејзиниот тлоцрт B' се спушта кон x -оската. Во моментот кога точката ќе падне во рамнината, нејзиниот тлоцрт ќе падне на x -оската. Така:

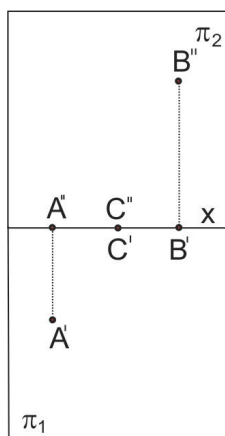
Ако точка лежи во втората проекциона рамнина π_2 , тогаш нејзиниот нацрт е во истата точка, а нејзиниот тлоцрт лежи на x -оската.

▪ Ако точката C лежи на x -оската, тогаш нејзините придружени проекции ќе се совпаднат со самата точка, односно

Ако точка лежи на x -оската, тогаш нејзините придружени проекции лежат на x -оската.

На цртеж 2.25 се прикажани точка A која лежи во хоризон-

талната рамнина π_1 , точка В која лежи во вертикалната рамнина π_2 и точка С која лежи на x -оската.



Цртеж 2.25



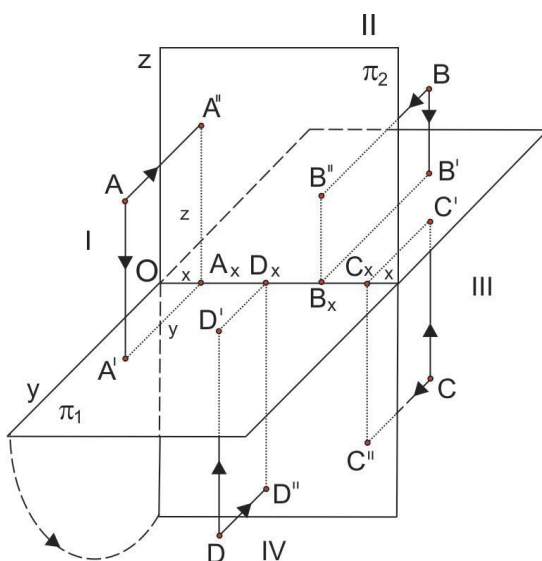
Прашања и задачи

1. Наведи ги основните карактеристики на придружените проекции на точка која лежи:

- а) во π_1 , б) во π_2 , в) на x -оската.

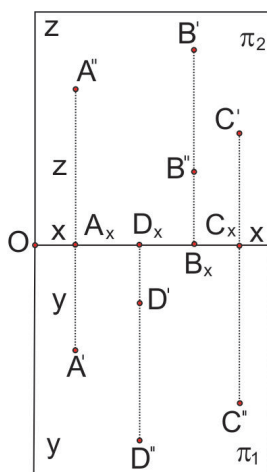
2.3.3. Квадранти. Координати на точка

Вертикалната и хоризонталната проекциона рамнина го делат просторот на четири квадранти: **прв квадрант (I)**, **втор квадрант (II)**, **трет квадрант (III)** и **четврт квадрант (IV)** (цртеж 2.26).



Цртеж 2.26

Од цртежот забележуваме дека точката A е во I квадрант и се наоѓа над π_1 и пред π_2 , точката B е во II квадрант и се наоѓа над π_1 и зад π_2 , точката C е во III квадрант и се наоѓа под π_1 и зад π_2 , а точката D е во IV квадрант и се наоѓа под π_1 и пред π_2 .



Цртеж 2.27

Ако ги расклопиме проекционите рамнини ќе го добиеме цртеж 2.27 на кој се прикажани придружените проекции на секоја точка од просторното претставување на цртеж 2.26, од каде што непосредно заклучуваме дека:

- Ако точката е во првиот квадрант, тогаш нејзиниот тлоцрт е под x -оската, а нејзиниот нацрт е над x -оската.
- Ако точката е во вториот квадрант, тогаш нејзиниот тлоцрт и нацрт се над x -оската.
- Ако точката е во третиот квадрант, тогаш нејзиниот тлоцрт е над x -оската, а нејзиниот нацрт е под x -оската.
- Ако точката е во четвртиот квадрант, тогаш нејзиниот тлоцрт и нацрт се под x -оската.

На цртеж 2.27 растојанието OA_x е 0,5 cm, растојанието A_xA' е 1,5 cm, растојанието A_xA'' е 2 cm. Со овие три броеви напълно е определена положбата на придружените проекции на точката A, а преку нив и положбата на точката A во просторот.

Точката O е произволно избрана точка на x -оската, наречена **координатен почеток**; растојанието OA_x се нарекува **апсциса** на точката A, A_xA' се нарекува **ордината** на точката A, а растојанието A_xA'' се нарекува **апликата** на точката A. Тие броеви со заедничко име се нарекуваат **координати на точката A** во просторниот правоаголен координатен систем O_{xyz} и пишуваме $A(0,5;2;1,5)$.

- Ако точката A_x е на десната страна од точката O земаме нејзината апсциса да биде позитивен број, а ако е на левата страна земаме нејзината апсциса да биде негативен број.
- Ако тлоцртот на точката е под x -оската земаме нејзината ордината да биде позитивен број, а ако е над x -оската земаме нејзината ордината да биде негативен број.
- Ако нацртот на точката е над x -оската земаме нејзината апликата да биде позитивен број, а ако е под x -оската земаме нејзината апликата да биде негативен број.

Пример. Според овој договор за точките на цртеж 2.27 имаме $A(0,5;2;1,5)$, $B(2,5;-2,5;1)$, $C(3;-1,5;-2)$ и $D(1,5;1;-2,5)$.



Прашања и задачи

1. Каде лежат во просторот точките за кои $x = 4$ cm?
2. Нацртај ги тлоцртот и нацртот на точките кои се на еднакво растојание (на пример 2 cm) од двете проекциони рамнини.
 - а) Колку вакви точки има?
 - б) Во кој квадрант се наоѓа секоја од нив?
3. Нацртај ги придружените проекции на точка A којашто има апсциса 3 cm и е оддалечена 2 cm од π_1 , а 4 cm од π_2 .
4. Нацртај ги придружените проекции на следниве точки:
 $A(2;1;5)$, $B(3,5;2;4)$, $C(-3;2;3)$, $D(0;6;1)$,
 $E(5,5;3;0)$, $F(7;0;3)$, $G(-1;2;0)$, $H(-4;0;6)$,

$I(8;0;0)$, $J(0;0;3)$, $K(0;9;0)$, $O(0;0;0)$.

а) Кои точки се еднакво оддалечени од π_1 , а кои од π_2 ?

б) Кои точки лежат во π_1 , кои во π_2 , а кои на x -оската?

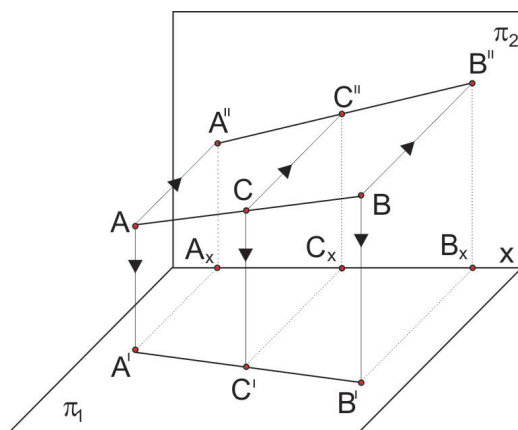
5. Нацртај ги придружените проекции на дадените точки и за секоја од нив одреди во кој квадрант се наоѓа:

а) $A(1;3;3)$; б) $B(3,5;2;4)$;

в) $C(3;-2,5;-2,5)$; г) $D(4;3;-3)$.

2.3.4. Ортогонално проектирање на отсечка

На цртеж 2.28 дадена е отсечка AB која е во општа положба во однос на проекционите рамнини.

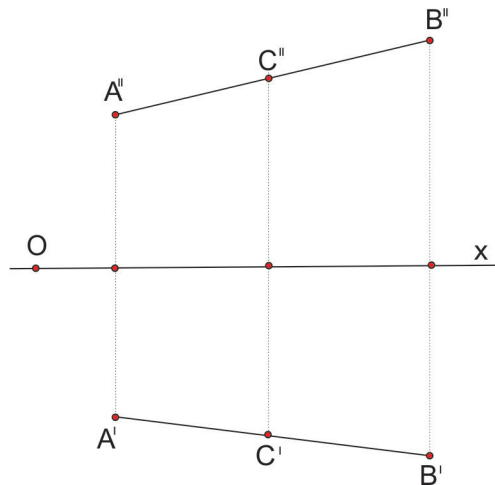


Цртеж 2.28

Придружените проекции на отсечката AB ги одредуваме на тој начин што ги одредуваме тлоцртите A' и B' , а потоа нацртите A'' и B'' , на нејзините крајни точки A и B . Со нивно сврзување ги добиваме тлоцртот $A'B'$ и нацртот $A''B''$ на отсечката AB . Според тоа, заклучуваме дека:

Придружените проекции на отсечка во општа положба во однос на проекционите рамнини се отсечки.

При расклопување на проекционите рамнини, ги добиваме придружените проекции (цртеж 2.29). И двете придружени проекции во овој случај се со помала должина од отсечката AB , и не се паралелни со неа.



Цртеж 2.29

Ако точката C е средишна точка на отсечката AB , тогаш нејзиниот тлоцрт C' е средишна точка на тлоцртот $A'B'$, а нејзиниот нацрт C'' средишна точка на нацртот $A''B''$. Според тоа, заклучуваме дека:

Средишна точка на отсечка се проектира во средишна точка на придружените проекции на отсечката.

Пример. На цртеж 2.29 нацртани се придружени проекции на отсечката AB , чиешто крајни точки имаат координати $A(0,5;2;1,5)$ и $B(3;2,5;2,2)$, што накусо се означува со

$AB[A(0,5;2;1,5), B(3;2,5;2,2)]$.



Прашања и задачи

1. Што претставуваат придружените проекции на отсечка?
2. Во што се проектира средишната точка на отсечка?
3. Нацртај ги придружените проекции на отсечката AB , зададена со $AB[A(1; 2,5; 3,5), B(4; 1,5; 4)]$.

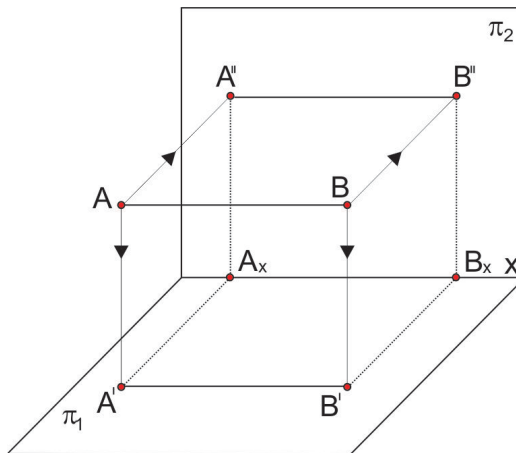
Потоа определи ги придружените проекции на средишната точка C на отсечката AB .

2.3.5. Ортогонално проектирање на отсечка во специјална положба

Во продолжение ќе разгледаме неколку специјални положби на отсечка во однос на проекционите рамнини.

- Отсечката AB на цртеж 2.30 е паралелна со проекционите рамнини π_1 и π_2 . Тогаш нејзините придружени проекции се паралелни на x -оската, која е пресечна права на рамнините.

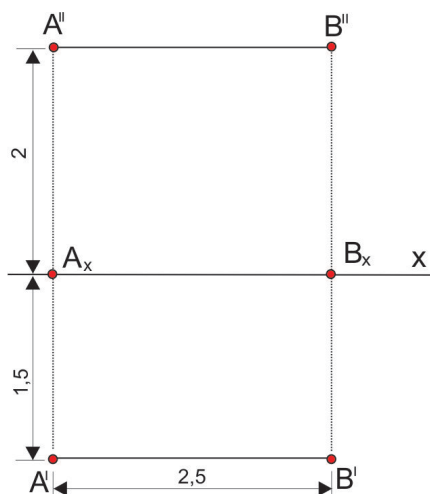
Од правоаголникот $ABB'A'$ имаме дека тлоцртот $A'B'$ на отсечката AB е паралелен и еднаков на неа. Слично, од правоаголникот $ABB''A''$ заклучуваме дека нацртот $A''B''$ на отсечката AB е паралелен и има должина еднаква на нејзината должина. Така, може да заклучиме дека:



Цртеж 2.30

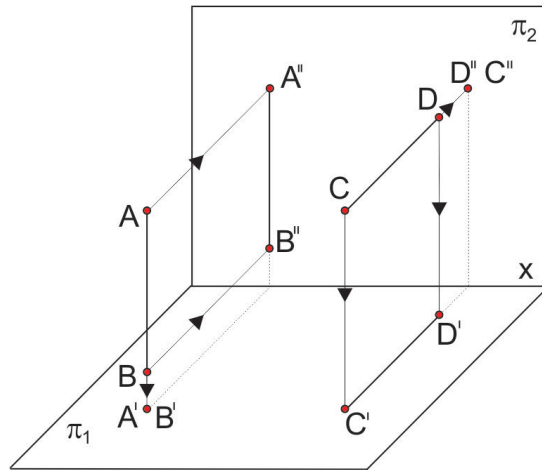
Ако отсечка е паралелна со проекционите рамнини, тогаш нејзините проекции се паралелни на x -оската и имаат должини еднакви на должината на отсечката.

Пример. На цртеж 2.31 нацртани се проекциите на отсечка AB којашто е паралелна на проекционите рамнини, долга е $2,5\text{ cm}$, оддалечена е 2 cm од π_1 , а $1,5\text{ cm}$ од π_2 .



Цртеж 2.31

▪ Отсечката AB на цртеж 2.32 е нормална на проекционата рамнина π_1 . Во тој случај придружените проекции A' и B' на крајните точки A и B се совпаѓаат. Оттука следува дека и придружените проекции на останатите точки од отсечката се совпаѓаат, па според тоа тлоцрт на отсечката AB е точката $A'=B'$.



Цртеж 2.32

Да забележиме дека отсечката AB е паралелна на проекционата рамнина π_2 . Од правоаголникот $ABB''A''$ заклучуваме дека $\overline{A''B''} = \overline{AB}$, па нацртот $A''B''$ на отсечката AB е нормален на x -оската со должина еднаква на нејзината должина. Така, заклучуваме дека:

Ако отсечка е нормална на проекционата рамнина π_1 , тогаш нејзиниот тлоцрт е точка, а нацртот е отсечка нормална на x -оската со должина еднаква на должината на отсечката.

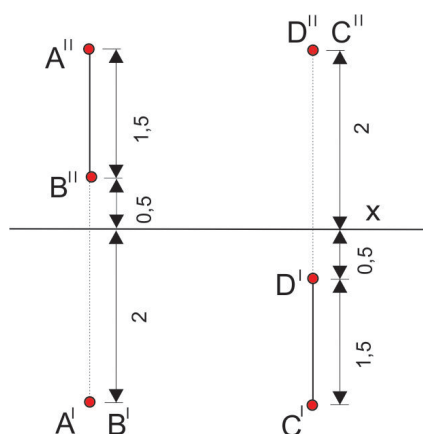
- Отсечката CD на цртеж 2.32 е нормална на проекционата рамнина π_2 . Придружените придружени проекции C'' и D'' на крајните точки C и D се совпаѓаат. Оттука следува дека придружените проекции на останатите точки од отсечката се совпаѓаат, па нацртот на отсечката CD е точката $C''=D''$, а тлоцртот $C'D'$ е отсечка нор-

мална на x -оската со должина еднаква на должината на отсечката CD .

Да забележиме дека отсечката е паралелна на проекционата рамнина π_1 . Од правоаголникот $CDD'C'$ заклучуваме дека тлоцртот $C'D'$ на отсечката CD е нормален на x -оската со должина еднаква на нејзината должина. Според тоа, имаме дека:

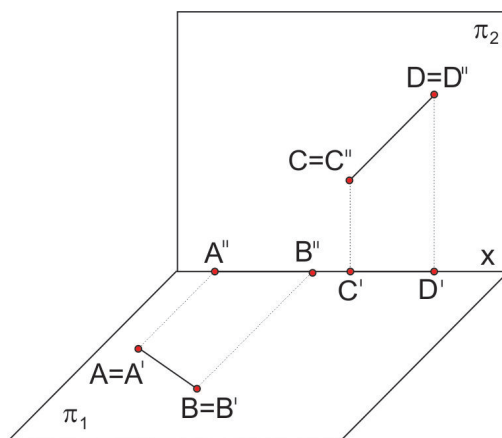
Ако отсечка е нормална на проекционата рамнина π_2 , тогаш нејзиниот нацрт е точка, а тлоцртот е отсечка нормална на x -оската со должина еднаква на должината на отсечката.

Пример. На цртеж 2.33 нацртани се придружените проекции на отсечка AB нормална на π_1 , долга $1,5\text{ cm}$, оддалечена $0,5\text{ cm}$ од π_1 и 2 cm од π_2 , како и придружените проекции на отсечка CD нормална на π_2 , долга $1,5\text{ cm}$, оддалечена 2 cm од π_1 и $0,5\text{ cm}$ од π_2 .



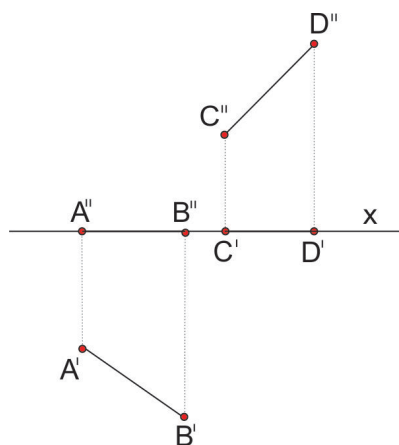
Цртеж 2.33

▪ Отсечката AB на цртеж 2.34 лежи во проекционата рамнина π_1 . Нејзиниот тлоцрт $A'B'$ се совпаѓа со самата отсечка, а нејзиниот нацрт $A''B''$ е на x -оската. (цртеж 2.35).



Цртеж 2.34

Отсечката CD на цртеж 2.34 лежи во проекционата рамнина π_2 . Нејзиниот тлоцрт $C'D'$ е на x -оската, а нејзиниот нацрт $C''D''$ се совпаѓа со самата отсечка (цртеж 2.35). Така, заклучуваме дека:

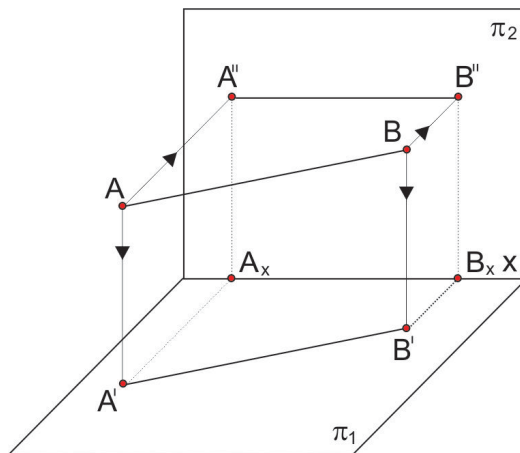


Цртеж 2.35

- Ако отсечка лежи во проекционата рамнина π_1 , тогаш нејзиниот тлоцрт е самата отсечка, а нацртот е на x -оската.
- Ако отсечка лежи во проекционата рамнина π_2 , тогаш нејзиниот тлоцрт е на x -оската, а нацртот е самата отсечка.

▪ Отсечката AB на цртеж 2.36 е паралелна на проекционата рамнина π_1 и е во општа положба во однос на проекционата рамнина π_2 .

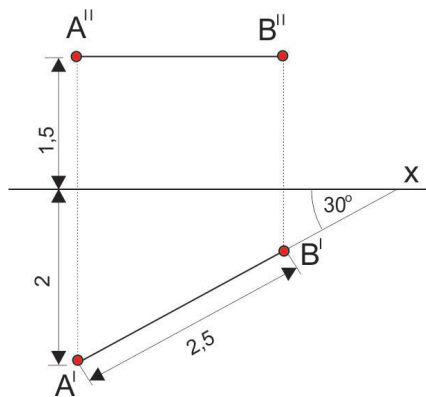
Од правоаголникот $ABB'A'$ имаме дека тлоцртот $A'B'$ е отсечка паралелна и еднаква по должина на отсечката AB , а бидејќи крајните точки A и B на отсечката се еднакво оддалечени од π_1 , нивните нацрти се еднакво оддалечени од x -оската, па заради тоа нацртот $A''B''$ е отсечка паралелна на x -оската. Според тоа, заклучуваме дека:



Цртеж 2.36

Ако отсечка е паралелна со проекционата рамнина π_1 , тогаш нејзиниот тлоцрт е паралелен на неа и има должина еднаква на нејзината должина, а нацртот е паралелен на x -оската и има помала должина од нејзината должина.

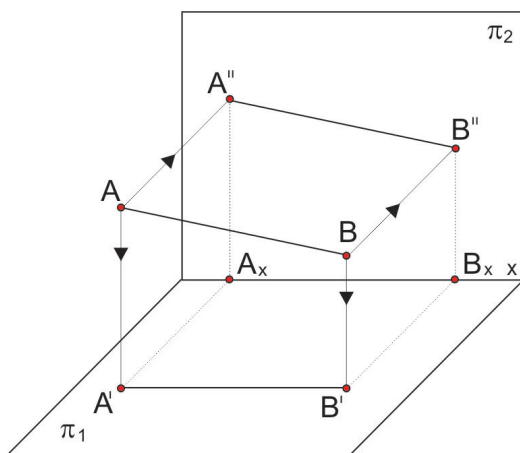
Пример. На цртеж 2.37 нацртани се придружени проекции на отсечка AB долга $2,5\text{ cm}$, паралелна со π_1 , оддалечена $1,5\text{ cm}$ од неа, а со π_2 зафаќа агол од 30° . Нејзината крајна точка A е оддалечена 2 cm од π_2 .



Цртеж 2.37

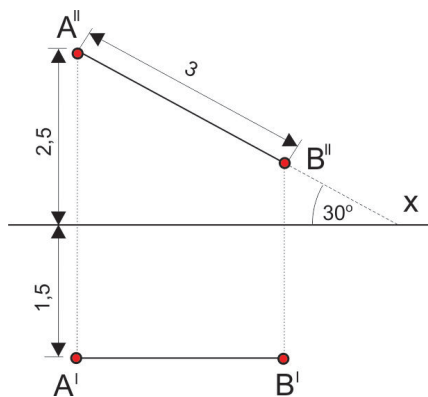
▪ Отсечката AB на цртеж 2.38 е паралелна на проекционата рамнина π_2 и е во општа положба во однос на проекционата рамнина π_1 .

Од правоаголникот $ABB''A''$ имаме дека нацртот $A''B''$ е отсечка паралелна и еднаква по должина на отсечката AB , а бидејќи крајните точки A и B на отсечката се еднакво оддалечени од π_2 , нивните тлоцрти A' и B' се еднакво оддалечени од x -оската, па тлоцртот $A'B'$ е отсечка паралелна на x -оската. Така, имаме дека:



Цртеж 2.38

Ако отсечка е паралелна со проекционата рамнина π_2 , тогаш нејзиниот тлоцрт е паралелен на x -оската и има должина помала од нејзината должина, а нејзиниот нацрт е паралелен и со еднаква должина на нејзината должина.



Цртеж 2.39

Пример. На цртеж 2.39 нацртани се придружени проекции на отсечка АВ долга 3 cm, паралелна со π_2 , оддалечена 1,5 cm, од неа, а со π_1 зафаќа агол од 30° . Нејзината крајна точка А е оддалечена 2,5 cm од π_1 .



Прашања и задачи

1. Што претставуваат придружените проекции на отсечка која што е:
 - а) паралелна на првата проекциона рамнина
 - б) паралелна на втората проекциона рамнина?
2. Во која проекција се добива вистинската големина на отсечката, ако таа е:
 - а) паралелна со рамнините π_1 и π_2 ;
 - б) нормална на рамнината π_1 ;
 - в) нормална на рамнината π_2 ;
 - г) лежи во рамнината π_1 ;
 - д) лежи во рамнината π_2 ;
 - ѓ) паралелна со рамнината π_1 ;
 - е) паралелна со рамнината π_2 .
3. Нацртај ги придружените проекции на отсечката АВ, зададена со $AB[A(1; 2; 4), B(4; 2; 3)]$.
Потоа определи ги придружените проекции на средишната точка С на отсечката АВ.
4. Нацртај ги придружените проекции на отсечката АВ, зададена со

$AB[A(1; 4; 3,5), B(4; 2; 3,5)]$.

Потоа определи ги придружените проекции на средишната точка C на отсечката AB .

5. Нацртај придружени проекции на отсечка AB која е долга 3 cm, паралелна е со рамнината π_1 и оддалечена 3 cm од неа, а со рамнината π_2 зафаќа агол од 45° . Нејзината крајна точка A е оддалечена за 3 cm од π_2 .

6. Нацртај придружени проекции на отсечка CD која е долга 3,5 cm, паралелна е со рамнината π_2 и оддалечена 3 cm од неа, а со рамнината π_1 зафаќа агол од 45° . Нејзината крајна точка C е оддалечена за 4 cm од π_1 .

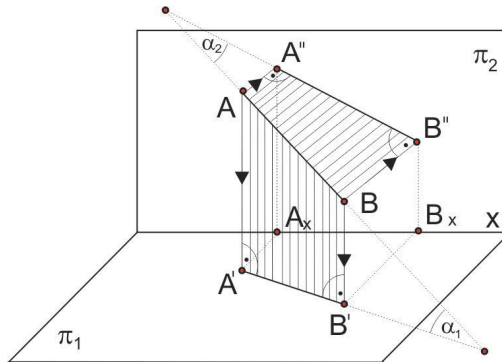
2.3.6. Вистинска големина на отсечка и агли на наклон

Како што рековме, придружени проекции на $A'B'$ и $A''B''$ на отсечка AB во општа положба се со помала должина од должината на отсечката и не се паралелни со неа. Во тој случај вистинската големина на отсечката мораме да ја определиме сами. Конструкцијата на вистинската големина на дадена отсечка може да се изведе на повеќе начини, но ние овде ќе проучиме два од нив.

Метод на трапез

На цртеж 2.40 прикажана е отсечката AB , која е во општа положба, нејзиниот тлоцрт $A'B'$ и нејзиниот нацрт $A''B''$. На цртежот

се шрафирани двата четириаголника $ABB'A'$ и $ABB''A''$. Тие четириаголници се трапези и имаат заедничка страна AB . Секој од нив има по два прави агли, два кај темињата A' и B' , и два кај темињата A'' и B'' .



Цртеж 2.40

Вистинската големина на отсечката AB можеме да ја определиме ако трапезот $ABB'A'$, наречен **прв проектирачки трапез**, го собориме во рамнината π_1 (го ротираме за 90° околу оската $A'B'$). Слично, вистинската големина на отсечката AB можеме да ја определиме ако трапезот $ABB''A''$, наречен **втор проектирачки трапез**, го собориме во рамнината π_2 (го ротираме за 90° околу оската $A''B''$).

Ако ја продолжиме отсечката AB и нејзиниот тлоцрт $A'B'$ го добиваме аголот меѓу нив α_1 , наречен **прв агол на наклон**, додека ако ја продолжиме отсечката AB и нејзиниот нацрт $A''B''$ го добиваме аголот меѓу нив α_2 , наречен **втор агол на наклон**.

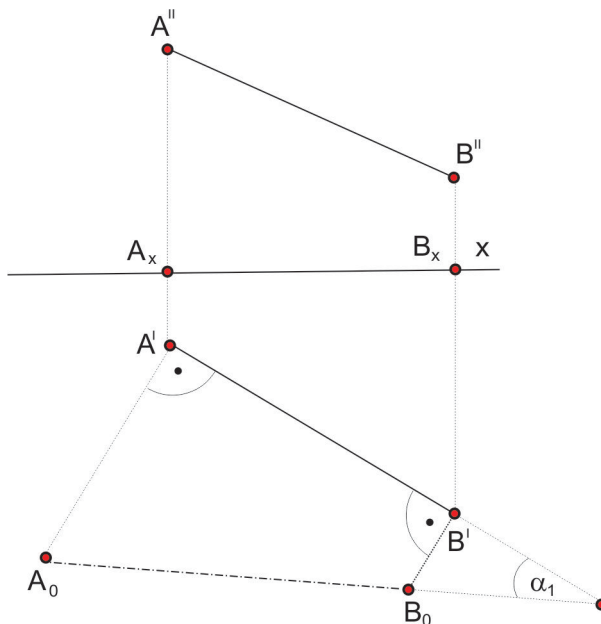
Кога се дадени должините на придружените проекции на отсечката AB , тогаш ги имаме сите елементи потребни за конструкција на трапезите $ABB'A'$ и $ABB''A''$, бидејќи за едниот трапез важи

$\overline{A'A} = \overline{A_x A''}$ и $\overline{B'B} = \overline{B_x B''}$, додека за другиот трапез имаме $\overline{A''A} = \overline{A_x A'}$ и $\overline{B''B} = \overline{B_x B'}$.

Соборените трапези ги конструираме на следниов начин: повлекуваме нормали на $A'B'$ во точките A' и B' и на тие нормали ги нанесуваме соодветно должините

$$\overline{A'A_0} = \overline{A_x A''} \text{ и } \overline{B'B_0} = \overline{B_x B''}.$$

Така го добивме трапезот $A'B'B_0A_0$ (цртеж 2.41). Со наоѓање на отсечката A_0B_0 велиме дека сме ја одредиле вистинската големина на отсечката AB . Ако ги продолжиме отсечките AB и A_0B_0 тогаш аголот меѓу нив е **првиот агол на наклон** прикажан во вистинска големина.

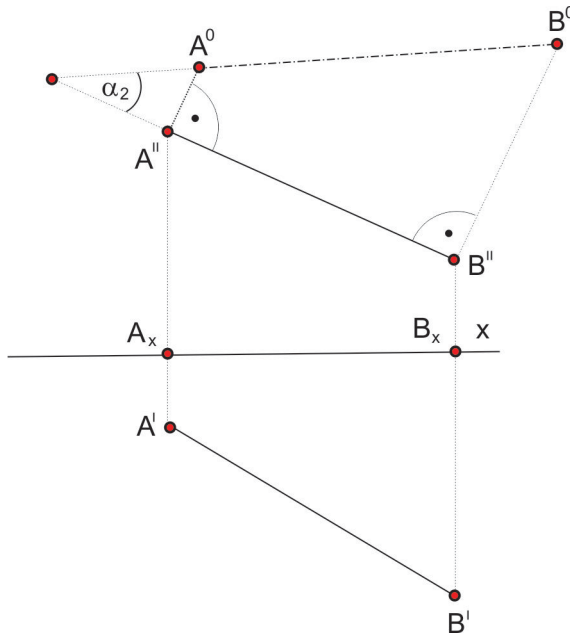


Цртеж 2.41

Слично, може да повлечеме нормали на $A''B''$ во точките A' и B' и на тие нормали ги нанесуваме соодветно должините

$$\overline{A''A_0} = \overline{A_x A'} \text{ и } \overline{B''B_0} = \overline{B_x B'}.$$

Така го добиваме трапезот $A''B''B^0A^0$ (цртеж 2.42). Со наоѓање на отсечката A^0B^0 велиме дека сме ја одредиле вистинската големина на отсечката AB . Ако ги продолжиме отсечките AB и B^0A^0 тогаш аголот меѓу нив е **вториот агол на наклон** прикажан во вистинска големина.



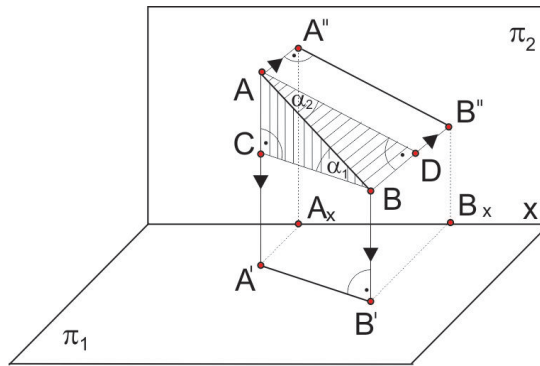
Цртеж 2.42

Ако конструкцијата на двата трапези ја изведеме правилно, тогаш мора $\overline{A_0B_0} = \overline{A^0B^0}$.

Според тоа, за наоѓање на вистинската големина на отсечка доволно е неа да ја собориме само еднаш (во π_1 или во π_2), но, ако треба да ги определиме нејзините агли на наклон α_1 и α_2 , тогаш неа треба да ја собориме и во π_1 и во π_2 . Вистинската големина на отсечката се исцтува со црта – точка – црта линија.

Метод на диференцијален триаголник

На цртеж 2.43 дадени се отсечката AB и нејзините придружени проекции $A'B'$ и $A''B''$. Од точката B повлечена е права BC паралелна со $A'B'$, а потоа од точката A повлечена е права AD паралелна со $A''B''$.



Цртеж 2.43

Така ги добиваме правоаголните триаголници ABC, наречен **прв диференцијален триаголник**, и ABD, наречен **втор диференцијален триаголник**. Тие имаат заедничка хипотенуза AB. За катетите на првиот диференцијален триаголник имаме

$$\overline{CB} = \overline{A'B'} \text{ и } \overline{CA} = \overline{A'A} - \overline{B'B} = \overline{A_x A''} - \overline{B_x B''},$$

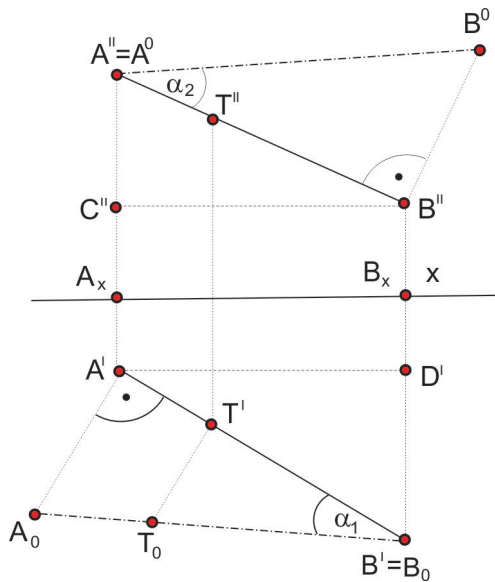
а за вториот диференцијален триаголник

$$\overline{DA} = \overline{B''A''} \text{ и } \overline{DB} = \overline{B''B} - \overline{A''A} = \overline{B_xB'} - \overline{A_xA'}.$$

Според тоа, кога ни се зададени придружените проекции на отсечката АВ, ги имаме сите елементи потребни за конструкција на двата диференцијални триаголници.

Како на цртеж 2.44 повлекуваме прво прави паралелни со хорската во точките A' и низ B'' , односно низ оние крајни точки коишто

имаат помала координата и ги добиваме точките D' и C'' . Потоа во точката A' поставуваме нормала на отсечката $A'B'$ и на таа нормала нанесуваме $\overline{A'A_0} = \overline{C''A''}$. Од складноста на триаголниците $A'B'A_0$ и ABC следува дека со определување на отсечката A_0B' сме ја определиле вистинската големина на отсечката AB . Аголот меѓу A_0B' и $A'B'$ е првиот агол на наклон α_1 . Или, поставуваме нормала на отсечката $A''B''$ во точката B'' , па на таа нормала нанесуваме $\overline{B''B^0}$. Од складноста на триаголниците $A''B''B^0$ и ADB следува дека со определување на отсечката $A''B^0$ сме ја определиле вистинската големина на отсечката AB . Аголот меѓу $A''B^0$ и $A''B''$ е вториот агол на наклон α_2 . По изведувањето на конструкциите добиваме дека $\overline{A_0B'} = \overline{A''B^0}$.



Цртеж 2.44

Нека точката T ја дели отсечката AB во даден однос, односно $\overline{AT} : \overline{BT} = k$. Избираме точка T_0 на отсечката A_0B' која ја дели отсеч-

ката во истиот однос, $\overline{A_0T_0} : \overline{B'T_0} = k$. Ако со помош на точката T_0 ги најдеме придружените проекции T' и T'' на точката T , тогаш T' и T'' ги делат придружените проекции на отсечката AB во истиот тој однос, односно,

$$\overline{A_0T_0} : \overline{B'T_0} = \overline{A'T'} : \overline{B'T'} = \overline{A''T''} : \overline{B''T''}.$$

Според тоа имаме дека:

Ако точката T ја дели отсечката AB во даден однос, тогаш придружените проекции на точката T ги делат придружените проекции на отсечката AB во истиот тој однос.



Прашања и задачи

1. Нацртај ги тлоцртот и нацртот на отсечката AB зададена со

$$AB[A(-1;4;6), B(3;1;2)]$$

и најди ја нејзината вистинска големина со методот на трапез. Најди ја големината на аглите на наклон.

2. Нацртај ги тлоцртот и нацртот на отсечката CD зададена со

$$CD[C(1;2;0), D(5;5;2)]$$

и најди ја нејзината вистинска големина со методот на триаголник. Најди ја големината на аглите на наклон.

3. Нацртај ги тлоцртот и нацртот на отсечката EF зададена со

$$EF[E(2;0;2), F(6;4;5)]$$

и најди ги придружените проекции на точката Т која е средина на отсечката EF.

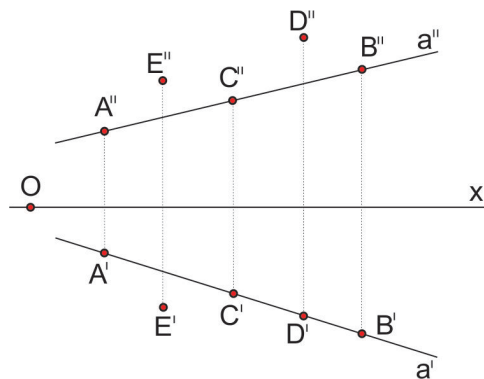
2.3.7. Ортогонално проектирање на права

Низ произволна права a поставуваме рамнина Σ_1 , нормална на проекционата рамнина π_1 , и рамнина Σ_2 нормална на проекционата рамнина π_2 . Пресекот на рамнините Σ_1 и π_1 е права a' која е тлоцрт на правата a . Слично, пресекот на рамнините Σ_2 и π_2 е права a'' која е нацрт на правата a . Значи, имаме дека:

Придружените проекции a' и a'' на права a се прави во рамнините π_1 и π_2 .

Пример. На цртеж 2.45 дадени се придружените проекции на права $a=(a',a'')$ определена со точките A и B, односно

$$a=AB[A(0,5;1;1,5),B(3;2;2)].$$

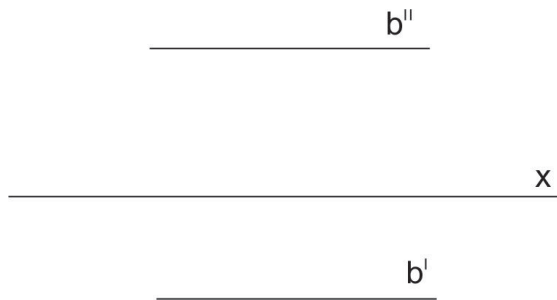


Цртеж 2.45

Точката C лежи на правата a , бидејќи нејзините придружени проекции лежат соодветно на придружените проекции на правата, односно $C' \in a'$ и $C'' \in a''$. Точките E и D не лежат на правата a , бидејќи $E' \notin a'$ и $D'' \notin a''$.

Во продолжение ќе разгледаме неколку специјални положби на права во однос на проекционите рамнини.

- Правата $b=(b',b'')$ е паралелна со проекционите рамнини π_1 и π_2 . Нејзините придружени проекции b' и b'' се паралелни на x -оската (цртеж 2.46).

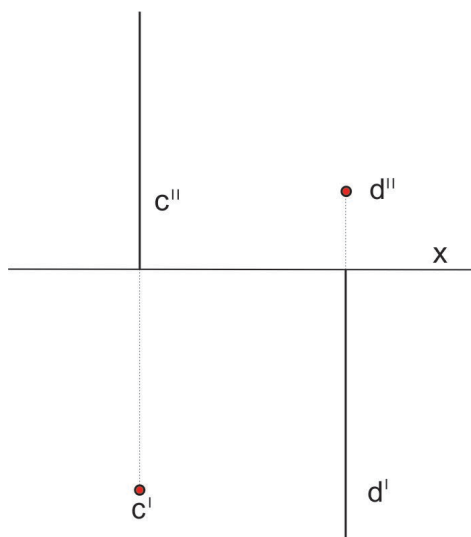


Цртеж 2.46

- Правата $c=(c',c'')$ е нормална на проекционата рамнина π_1 . Нејзиниот тлоцрт c' е точка, а нацртот c'' е нормален на x -оската (цртеж 2.47).

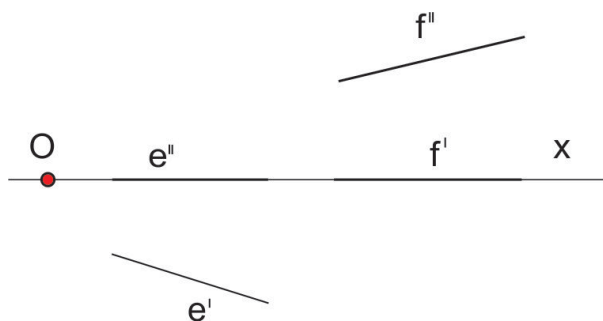
- Правата $d=(d',d'')$ е нормална на проекционата рамнина π_2 . Нејзиниот нацрт d'' е точка, а тлоцртот d' е нормален на x -оската (цртеж 2.47).

- Правата $e=(e',e'')$ лежи во проекционата рамнина π_1 . Нејзиниот тлоцрт e' се совпаѓа со правата e , а нацртот e'' е на x -оската (цртеж 2.48).



Цртеж 2.47

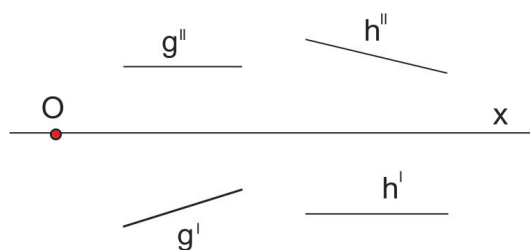
- Правата $f=(f',f'')$ лежи во проекционата рамнина π_2 . Нејзиниот нацрт f'' се совпаѓа со правата f , а тлоцртот f' е на x -оската (цртеж 2.48).



Цртеж 2.48

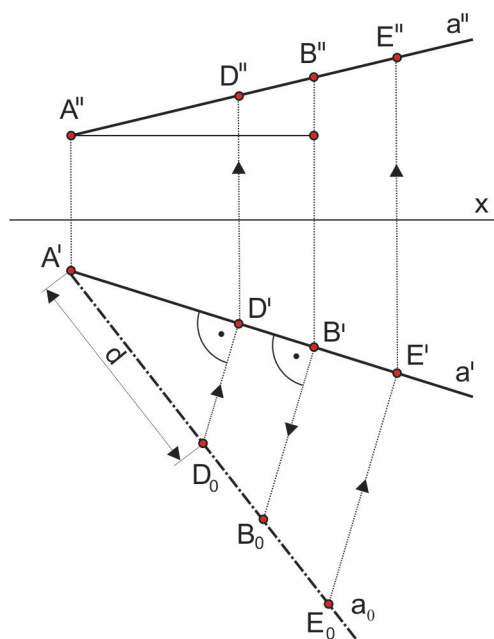
- Правата $g=(g',g'')$ е паралелна со проекционата рамнина π_1 . Нејзиниот нацрт g'' е права паралелна на x -оската (цртеж 2.49). Правите со ваква положба се викаат **хоризонтали**.

• Правата $h=(h',h'')$ е паралелна со проекционата рамнина π_2 . Нејзиниот тлоцрт h' е права паралелна на x -оската (цртеж 2.49). Правите со ваква положба се викаат **фронтали**.



Цртеж 2.49

Задача. На правата $a=(a',a'')$ определена со точките A и B, треба да определиме точка D која е на растојание d од точката A (цртеж 2.50).



Цртеж 2.50

Со методот на диференцијален триаголник ја определуваме соборената отсечката $A'B_0$ на отсечката AB .

На соборената права a_0 на растојание d од точката A' се наоѓа точката D_0 . Потоа цртаме нормала на a' . Подножната точка D' на нормалата е првата проекција на точката D . Втората проекција ја наоѓаме по ординалата, при услов D'' да лежи на a'' .

Со слична постапка на правата a можеме да определиме и други точки кои исполнуваат определени услови. На пример, точката E е точка од правата a која лежи надвор од отсечката AB .



Прашања и задачи

1. Нацртај ги придружените проекции на правата m зададена со

$$m=AB[A(0;3;2),B(7;4;6)]$$

и определи ја нејзината положба во просторот.

2. Нацртај ги придружените проекции на права n која минува низ точката $N(3,6,7)$ и

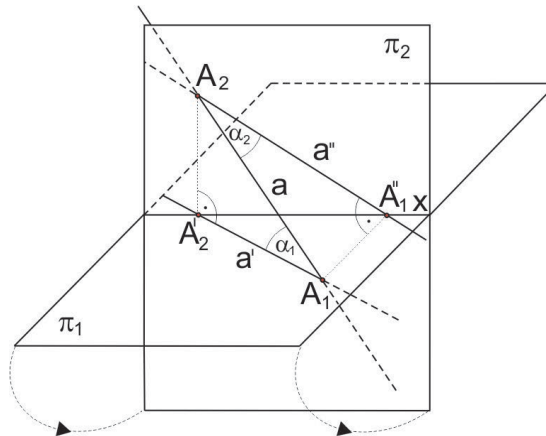
- а) е паралелна со рамнините π_1 и π_2 ;
- б) е нормална на рамнината π_1 ;
- в) е нормална на рамнината π_2 ;
- г) е паралелна со рамнината π_1 ;
- д) е паралелна со рамнината π_2 .

2.3.8. Прободи на права и агли на наклон

На цртеж 2.51 дадена е права $a=(a',a'')$ која ја прободува рамнината π_1 во точката A_1 , а рамнината π_2 во точката A_2 .

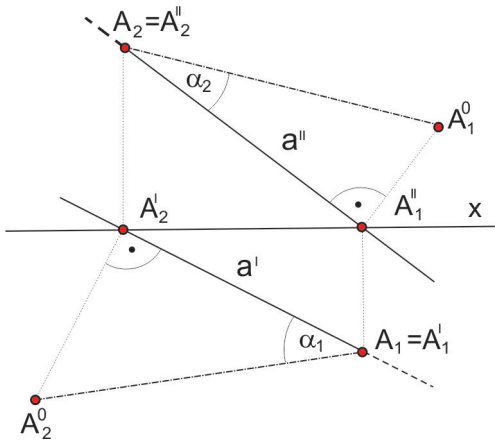
Точката A_1 се нарекува **прва прободна точка**, а точката A_2 **втора прободна точка** на правата a .

Тлоцртот A_1' се совпаѓа со точката A_1 , а нејзиниот нацрт A_1'' е на x -оската. Слично, нацртот A_2'' се совпаѓа со точката A_2 , а нејзиниот тлоцрт A_2' е на x -оската.



Цртеж 2.51

Остриот агол α_1 што го зафаќа правата a со тлоцртот a' се нарекува **прв агол на наклон**, а остриот агол α_2 што го зафаќа правата a со нацртот a'' се нарекува **втор агол на наклон**.



лево од првата прободна точка A_1 , а со испрекината линија делот десно од A_1 .

Ако ја гледаме правата a во правецот на проектирање на π_2 , односно однапред ќе го гледаме само делот на правата кој е пред π_2 . Затоа, со полна линија го цртаме делот десно од втората прободна точка A_2 , а со испрекината линија делот лево од A_2 .

За да ги најдеме големините на наклоните агли α_1 и α_2 ги соборуваме правоаголниот триаголник $A_1A_2A_2'$ околу катетата A_1A_2' во π_1 и правоаголниот триаголник $A_1A_2A_1''$ околу катетата A_2A_1'' во π_2 . Затоа од точката A_2' повлекуваме нормала на a' и на неа нанесуваме

$$\overline{A_2'A_2^0} = \overline{A_2'A_2},$$

а потоа ја сврзуваме точката A_2^0 со A_1 . Така го добивме правоаголниот триаголник $A_1A_2^0A_2'$ во кој првиот агол на наклон α_1 е во вистинска големина. Понатаму, од точката A_1'' повлекуваме нормала на a'' и на неа нанесуваме

$$\overline{A_1''A_1^0} = \overline{A_1''A_1},$$

а потоа ја сврзуваме точката A_1^0 со A_2 . Така го добиваме правоаголниот триаголник $A_1^0A_2A_1''$ во кој вториот агол на наклон α_2 е во вистинска големина.

Должината на отсечката $A_1A_2^0$ е еднаква на должината на отсечката $A_1^0A_2$ бидејќи тие се еднакви на вистинската големина на отсечката A_1A_2 од правата a која е заградена со тие прободни точки.



Прашања и задачи

1. Најди ги придружените проекции на прободните точки на правата

$$a=AB[A(1;3;1),B(6;1;4)]$$

со проекционите рамнини.

2. Најди ги наклоните агли α_1 и α_2 на правата

$$p=AB[A(0;4;4),B(5;6;1)].$$

3. Најди го

- а) првиот агол на наклон α_1 на правата

$$m=MN[M(1;2;4),N(3;2;2)];$$

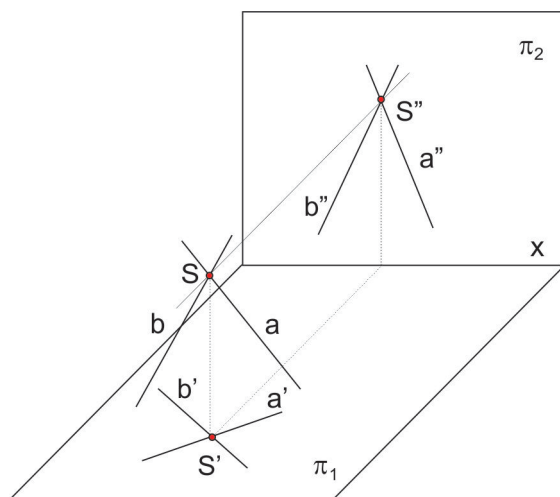
- б) вториот агол на наклон α_2 на правата

$$k=LM[L(1;4;3),M(3;2;3)].$$

2.3.9. Заемна положба на две прави

Како што е познато, две прави во просторот може да се сечат, да се паралелни или да се разминувачки.

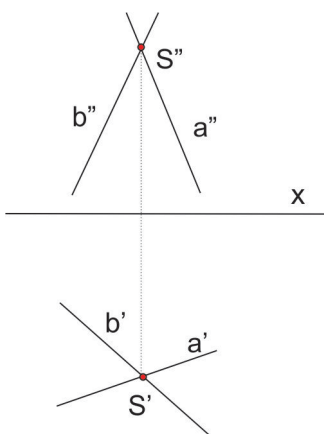
На цртежот 2.53 прикажани се правите $a=(a',a'')$ и $b=(b',b'')$ коишто се сечат во точката S . Бидејќи точката S е заедничка точка за правите a и b , во нејзиниот тлоцрт S' мора да се сечат тлоцртите a' и b' , а во нејзиниот нацрт S'' мора да се сечат нацртите a'' и b'' , на дадените прави.



Цртеж 2.53

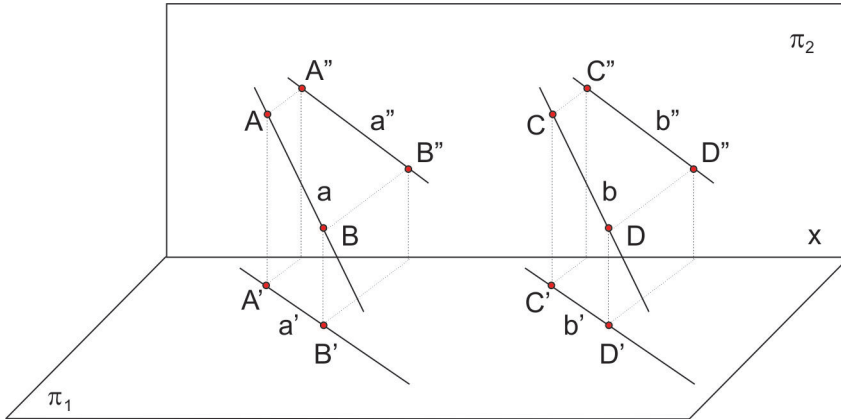
По расклопувањето на проекционите рамнини, проекциите S' и S'' на пресечната точка S , мора да лежат на иста ординала, односно мора $S'S''$ да биде нормална на x -оската.

На цртеж 2.54 нацртани се придружените проекции на правите a и b коишто се сечат во точката S .



Цртеж 2.54

На цртежот 2.55 прикажани се правите $a=(a',a'')$ и $b=(b',b'')$ коишто се паралелни.



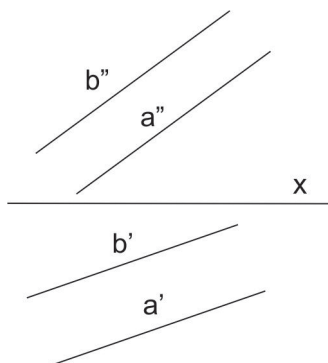
Цртежот 2.55

Рамнините кои минуваат низ една од правите a и b , соодветно и се нормални на проекционата рамнина π_1 , се меѓусебно паралелни. Тие ја сечат проекционата рамнина π_1 во правите a' и b' за кои може да заклучиме дека се меѓусебно паралелни.

Слично, рамнините кои минуваат низ една од правите a и b , соодветно и се нормални на проекционата рамнина π_2 , се меѓусебно паралелни. Тие ја сечат проекционата рамнина π_2 во правите a'' и b'' за кои може да заклучиме дека се меѓусебно паралелни. Според тоа, имаме дека:

Придружените проекции на две паралелни прави се паралелни прави.

На цртежот 2.56 прикажани се придружените проекции на две паралелни прави.

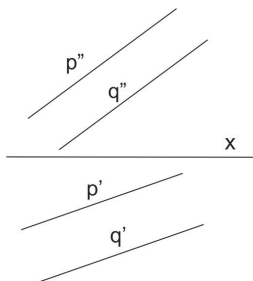


Цртежот 2.56

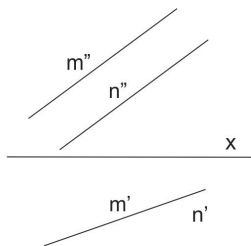
Пример. Правите $p=(p',p'')$ и $q=(q',q'')$ на цртежот 2.57а се паралелни.

Правите $m=(m',m'')$ и $n=(n',n'')$ на цртежот 2.57б се паралелни, и лежат во рамнина нормална на π_1 .

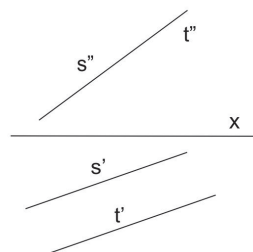
Правите $s=(s',s'')$ и $t=(t',t'')$ на цртежот 2.57в се паралелни, и лежат во рамнина нормална на π_2 .



Цртежот 2.57а

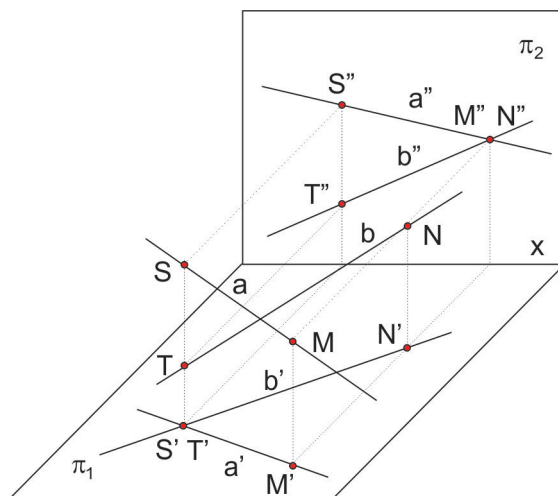


Цртежот 2.57б



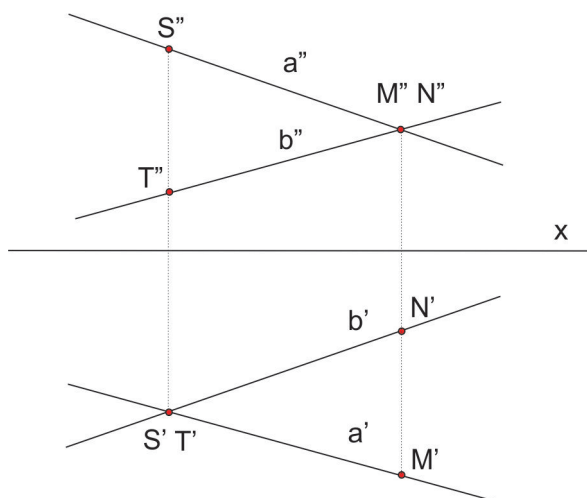
Цртежот 2.57в

На цртежот 2.58 прикажани се правите $a=(a',a'')$ и $b=(b',b'')$ коишто се разминувачки.



Цртежот 2.58

Нивните тлоцрти a' и b' се сечат во точката $S' = T'$, бидејќи таа е тлоцрт на точката S од правата a и тлоцрт на точката T од правата b . Нивните нацрти a'' и b'' се сечат во точката $M'' = N''$, бидејќи таа е нацрт на точката M од правата a и тлоцрт на точката N од правата b .

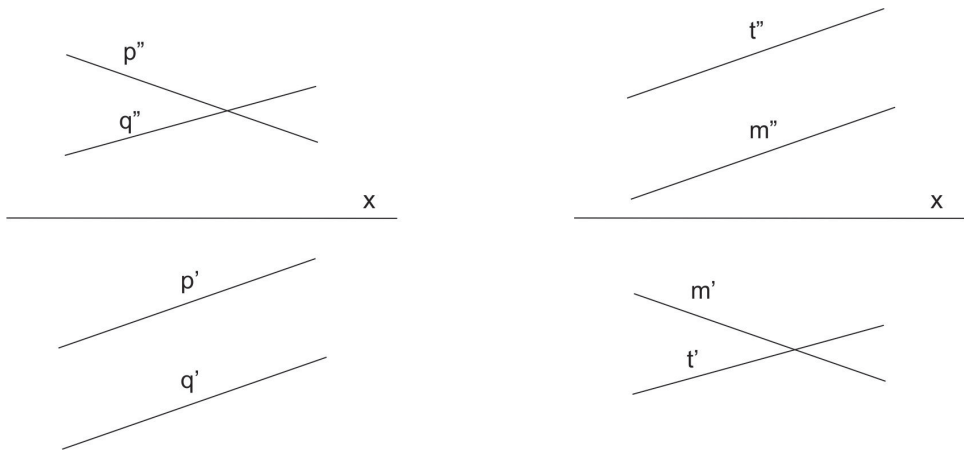


Цртежот 2.59

По расклопувањето на проекционите рамнини забележуваме дека тлоцртите a' и b' , како и нацртите a'' и b'' се сечат, но пресечните точки не лежат на иста ординала (цртеж 2.59).

Пример. Правите $p=(p',p'')$ и $q=(q',q'')$ на цртежот 2.60 се разминувачки, и лежат во рамнини коишто се меѓусебно паралелни и нормални на π_1 .

Правите $m=(m',m'')$ и $t=(t',t'')$ на цртежот 2.60 се разминувачки, и лежат во рамнини коишто се меѓусебно паралелни и нормални на π_2 .



Цртежот 2.60



Прашања и задачи

1. Низ точката $C(3;6;7)$ минува права m којашто е паралелна со правата:

$$n = MN[M(0;3;2), N(7;4;6)]$$

Нацртај ги тлоцртот и нацртот на правата m .

2. Нацртај ги проекциите на две паралелни хоризонталници коишто лежат во иста:

а) хоризонтална рамнина

б) фронтална рамнина.

3. Нацртај ги проекциите на две паралелни фронталници коишто лежат во иста:

а) хоризонтална рамнина

б) фронтална рамнина.

4. Дадена е правата

$$p=AB[A(0;4;4), B(5;6;1)]$$

и точката $T(2;3;1)$. Низ точката T постави:

а) права h која што е паралелна со π_1 и се сече со правата p ;

б) права f која што е паралелна со π_2 и се сече со правата p .

Нацртај ги придружените проекции на правите h и f .

5. Правите

$$m=MN[A(-3;6;2), B(3;2;5)] \text{ и } p=RS[R(4;5;1), S(-4;1;z)]$$

се сечат. Нацртај ги придружените проекции на пресечната точка P .

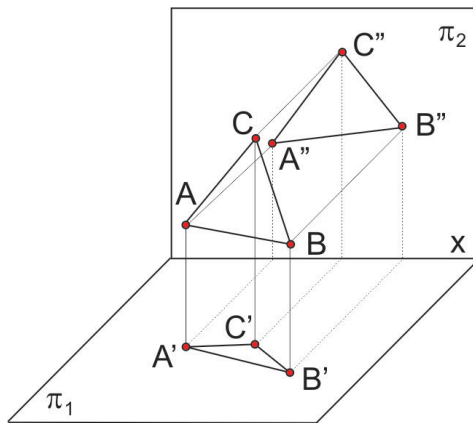
6. Правата

$$t=PQ[P(2;0;0), Q(5;4;3)]$$

е пресечена со права s којашто е паралелна со x -оската и е на растојание 2 единици од π_1 . Нацртај ги придружените проекции на пресечната точка T .

2.3.10. Ортогонално проектирање на рамнински фигури

На цртеж 2.61 прикажан е триаголник ABC којшто е во општа положба, односно рамнината во којашто лежи триаголникот не е ниту паралелна, ниту нормална на проекционата рамнина π_1 , односно π_2 . Неговите проекции $A'B'C'$ и $A''B''C''$ ќе ги определиме со проекциите на неговите темиња и потоа ги поврземе со отсечки.



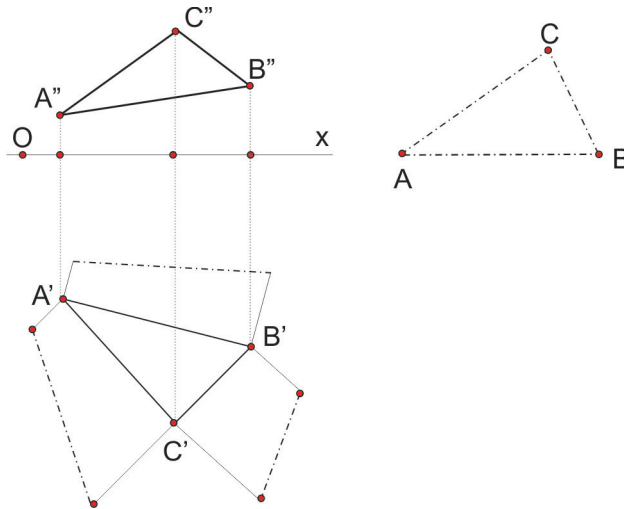
Цртеж 2.61

Ако триаголникот е во општа положба во однос на проекционите рамнини π_1 и π_2 , тогаш неговите придружени проекции се триаголници.

Задача. Нацртај ги придружените проекции на триаголникот ABC, ако $A(1;3;1)$, $B(6;4;2)$ и $C(4;6;3)$, а потоа определи ја неговата вистинска големина.

Прво ги наоѓаме тлоцртите A' , B' и C' , и нацртите A'' , B'' и C'' , на точките A , B и C , и со сврзување на соодветните проекции ги добиваме тлоцртот $A'B'C'$ и нацртот $A''B''C''$ на триаголникот ABC .

Потоа ја наоѓаме вистинската големина A_0B_0 , B_0C_0 и A_0C_0 , на секоја од отсечките AB , BC и AC , со методот на проектирачки трапез. На крај го конструираме триаголникот ABC чиешто страни се отсечките A_0B_0 , B_0C_0 и A_0C_0 , соодветно (цртеж 2.62).

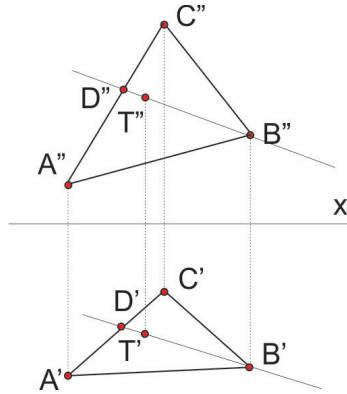


Цртеж 2.62

Задача. Даден е тлоцртот T' на точката T којашто лежи во рамнината определена со триаголникот ABC . Најди го нацртот T'' на точката T .

Низ точката T и едно теме на триаголникот, на пример темето B , повлекуваме права и ја наоѓаме пресечната точка D на правите AC и BD (цртеж 2.63). Тлоцртот $B'D'$ минува низ точката T' . Го наоѓаме нејзиниот нацрт $B''D''$. Нацртот T'' на точката T лежи во

пресекот на ординалата повлечена од точката T' и нацртот $B''D''$ на правата BD .

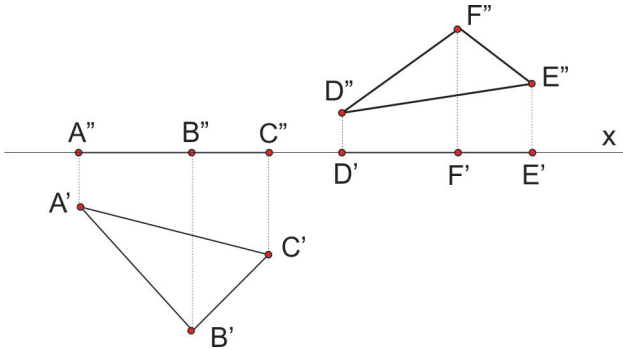


Цртеж 2.63

На цртеж 2.64 се прикажани придружените проекции на триаголниците ABC и DEF . Бидејќи нацртот на триаголникот ABC е отсечка на x -оската, заклучуваме дека триаголникот ABC лежи во проекционата рамнина π_1 . Затоа, неговиот тлоцрт се совпаѓа со самиот триаголник. Тлоцртот на триаголникот DEF е отсечка на x -оската, од каде што заклучуваме дека триаголникот DEF лежи во проекционата рамнина π_2 . Затоа, неговиот нацрт се совпаѓа со самиот триаголник. Според тоа, имаме дека

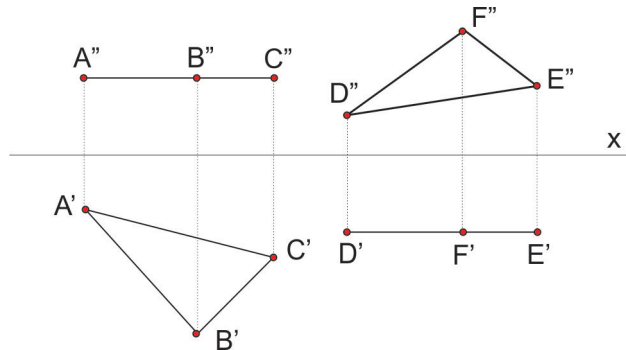
Ако триаголникот лежи во проекционата рамнина π_1 , тогаш неговиот нацрт е отсечка на x -оската, а неговиот тлоцрт се совпаѓа со триаголникот.

Ако триаголникот лежи во проекционата рамнина π_2 , тогаш неговиот тлоцрт е отсечка на x -оската, а неговиот нацрт се совпаѓа со триаголникот.



Цртеж 2.64

На цртеж 2.65 се прикажани придружените проекции на триаголниците ABC и DEF. Бидејќи нацртот на триаголникот ABC е отсечка паралелна на x-оската, заклучуваме дека триаголникот ABC лежи во рамнина паралелна на проекционата рамнина π_1 .



Цртеж 2.65

Неговиот нацрт е триаголник складен со триаголникот ABC. Тлоцртот на триаголникот DEF е отсечка паралелна на x-оската, од каде што заклучуваме дека триаголникот DEF лежи во рамнина

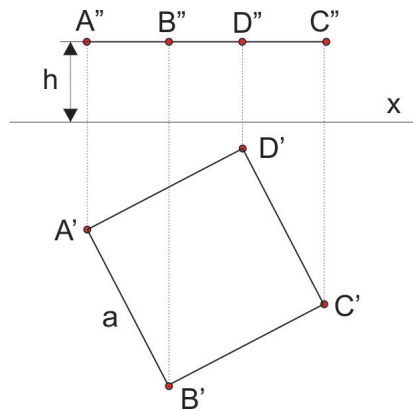
паралелна на проекционата рамнина π_2 . Неговиот нацрт се совпаѓа со триаголникот DEF. Според тоа, имаме дека

Ако триаголник лежи во рамнина паралелна на проекционата рамнина π_1 , тогаш неговиот нацрт е отсечка паралелна на x -оската, а неговиот тлоцрт е триаголник складен со него.

Ако триаголникот лежи во рамнина паралелна на проекционата рамнина π_2 , тогаш неговиот тлоцрт е отсечка паралелна на x -оската, а неговиот нацрт е триаголник складен со него.

Задача. Нацртај ги придружените проекции на квадрат со страна a којшто лежи во рамнина паралелна на проекционата рамнина π_1 , на растојание h од неа.

Квадратот ABCD со страна a лежи во рамнина паралелна на проекционата рамнина π_1 , затоа неговиот тлоцрт $A'B'C'D'$ е квадрат со страна a , чија што положба не е определена со услов во задачата, односно е произволна (цртеж 2.66).



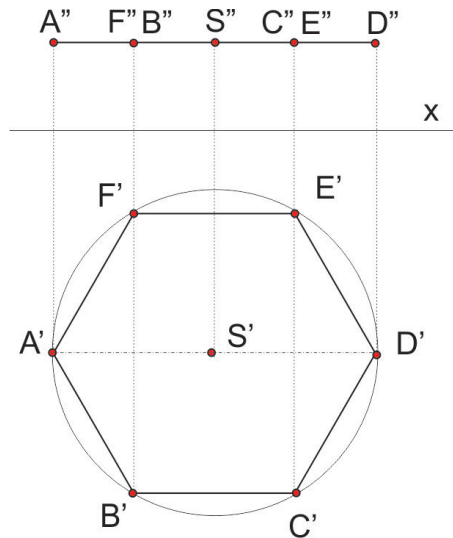
Цртеж 2.66

Нацртите A'' , B'' , C'' и D'' на неговите темиња A , B , C и D , се на растојание h од x -оската и се наоѓаат на ординалите повлечени од точките A' , B' , C' и D' , соодветно. Нацртот на квадратот $ABCD$ е отсечката $A''C''$.

Задача. Нацртај ги придружените проекции на правилен шестаголник паралелен на проекционата рамнина π_1 . Центарот на кружницата опшана околу шестаголникот е $S(3;3;1)$ и неговиот радиус е $r = 2\text{ cm}$.

Бидејќи рамнината во којашто лежи шестаголникот $ABCDEF$ е паралелна на проекционата рамнина π_1 , затоа неговиот тлоцрт $A'B'C'D'E'F'$ е шестаголник складен со шестаголникот $ABCDEF$. Неговиот нацрт е отсечката $A''D''$ паралелна со x -оската (цртеж 2.67).

Оддалеченоста на нацртот од x -оската е определена со апликатата $z = 1$ на центарот S .



Цртеж 2.67



Прашања и задачи

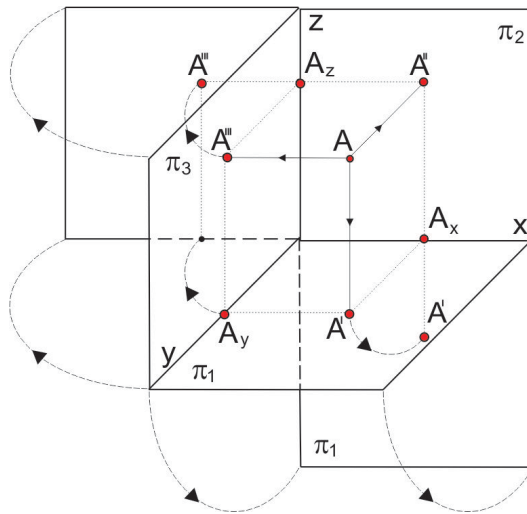
1. Нацртај ги проекциите на правилен шетаголник со страна $a = 2\text{ cm}$ којшто лежи во проекционата рамнина π_1 .
2. Нацртај ги придружените проекции на триаголникот ABC, ако $A(1;1,5;1)$, $B(4;3;3,5)$ и $C(5;1,5;2)$, а потоа определи ја неговата вистинска големина.
3. Нацртај ги проекциите на рамностран триаголник со страна $a = 2\text{ cm}$ којшто лежи во рамнина паралелна на проекционата рамнина π_2 , на растојание 2 cm од неа.
4. Нацртај ги проекциите на правоаголник со страна $a = 5\text{ cm}$ и $b = 3\text{ cm}$, којшто лежи во рамнина паралелна на проекционата рамнина π_1 , на растојание 4 cm од неа.

2.4. ОРТОГОНАЛНО ПРОЕКТИРАЊЕ НА ТРИ РАМНИНИ

2.4.1. Ортогонално проектирање на точка

Кога рамнината на една геометриска фигура е нормална на х-оската, фигурата се проектира во отсечка и во прва и во втора проекција, па од нејзините придружени проекции не може да се одреди нејзината форма, големина и положбата во просторот. Во тој случај е згодно таа да се проектира на уште една, трета рамнина,

нормална на рамнините π_1 и π_2 , наречена **трета проекциона рамнина**, која ќе ја означуваме со π_3 (цртеж 2.68).



Цртеж 2.68

Рамнините π_1 , π_2 и π_3 се сечат во три заемно нормални прави x , y и z , кои се нарекуваат **координатни оски**. Тие имаат заедничка точка O , наречена **координатен почеток**.

Третата проекција на точката A ќе ја определиме на ист начин како што ги определувавме тлоцртот и нацртот. Од точката A спуштаме нормала на рамнината π_3 . Подножната точка на нормалата кон рамнината π_3 се нарекува **трета проекција** на точката A , и ќе ја означуваме со A''' . На цртеж 2.68 прикажана е точка A и нејзините проекции A' , A'' и A''' на рамнините π_1 , π_2 и π_3 .

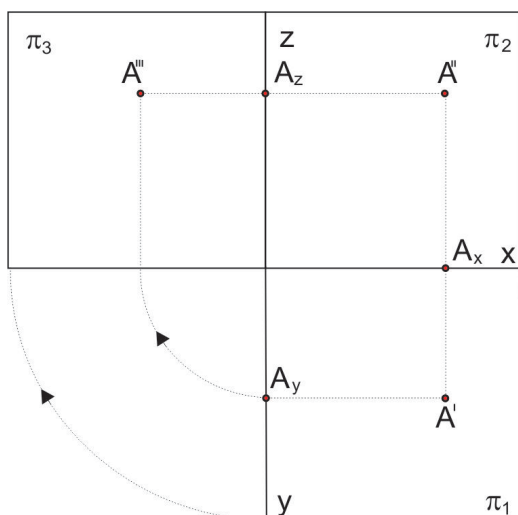
Од правоаголникот $AA'''A_zA''$ имаме дека $\overline{A'''A_z} = \overline{AA''}$. Бидејќи $\overline{AA''} = \overline{A'A_x}$ имаме дека $\overline{A'''A_z} = \overline{A'A_x}$, односно

Третата проекција на точка A е оддалечена од z -оската за онолку колку што е оддалечен нејзиниот тлоцрт од x -оската.

Од правоаголникот $AA''A_yA'$ имаме дека $\overline{A'''A_y} = \overline{AA'}$. Бидејќи $\overline{AA'} = \overline{A''A_x}$ имаме дека $\overline{A'''A_y} = \overline{A''A_x}$, односно

Третата проекција на точка A е оддалечена од y -оската за онолку колку што е оддалечен нејзиниот нацрт од x -оската.

Сега се прашуваме како да ги нацртаме проекциите и трите рамнини на една иста рамнина – рамнината на листот за цртање.



Цртеж 2.69

За таа цел рамнината π_1 ја ротираме околу x-оската надолу за 90° така што да се совпадне со рамнината π_2 , а рамнината π_3 ја ротираме околу z-оската налево долу за 90° така што да се совпадне со рамнината π_2 .

Потоа расклопените рамнини ги замислуваме како листот за цртање и го добиваме цртеж 2.69, на којшто е прикажано како се добива третата проекција A''' на точката A, ако се дадени тлоцртот A' и нацртот A'' . Забележи дека наједноставниот начин за добивање на третата проекција A''' на точката A е да се повлече нормала на z-оската низ A'' , а потоа на неа да се пренесе растојанието $A'A_x$ налево од z-оската.



Прашања и задачи

1. Најди ја третата проекција на точката:

а) $A(3;2;4)$, б) $B(5;7;2)$.

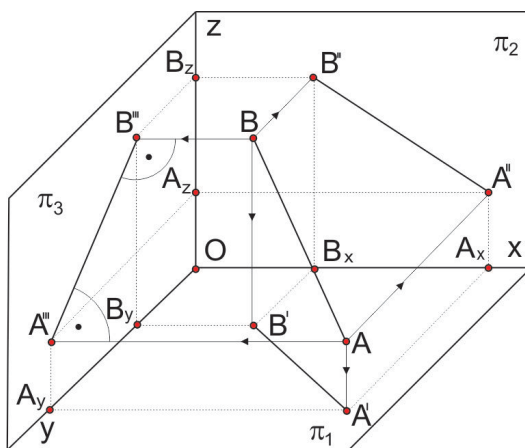
2. Најди ја третата проекција на точката:

а) $M(0;2;4)$, б) $N(4;0;2)$, в) $K(5;7;0)$.

2.4.2. Ортогонално проектирање на рамнински фигури

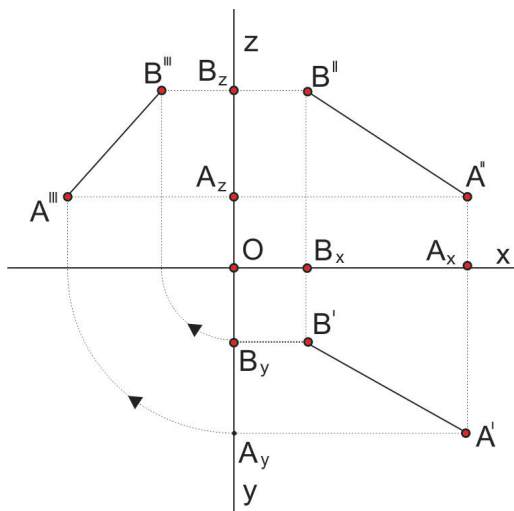
На цртеж 2.70 се прикажани трите проекционите рамнини π_1 , π_2 и π_3 , потоа отсечката AB и нејзините три проекции. Ако A''' е третата проекција на едната, а B''' е третата проекција на другата

крајна точка на отсечката AB , тогаш отсечката $A'''B'''$ е трета проекција на отсечката AB .



Цртеж 2.70

Задача. Дадени се тлоцртот и нацртот на отсечката AB . Најди ја третата проекција на отсечката AB .



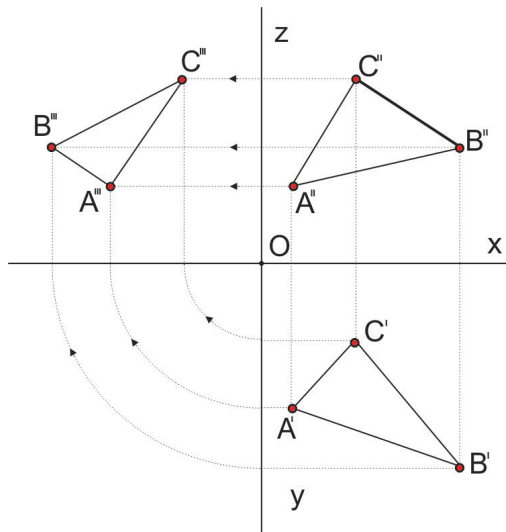
Цртеж 2.71

За да ја најдеме третата проекција на отсечката AB треба да ги најдеме третите проекции A''' и B''' на нејзините крајни точки A и B .

За таа цел повлекуваме нормала на z -оската од A'' а потоа на неа го пренесуваме растојанието од A' до A_x налево од z -оската. Слично, повлекуваме нормала на z -оската од B'' , а потоа на неа го пренесуваме растојанието од B' до B_x налево од z -оската.

Третата проекција на отсечката AB ќе ја најдеме со сврзување на третите проекции A''' и B''' на нејзините крајни точки A и B (цртеж 2.71).

Задача. Дадени се тлоцртот и нацртот на триаголникот ABC . Најди ја третата проекција на триаголникот ABC .



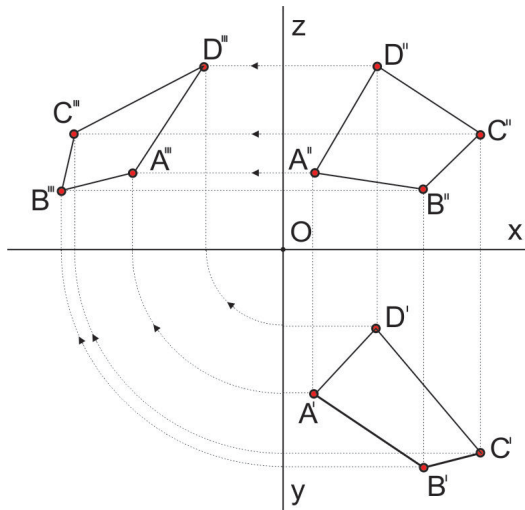
Цртеж 2.72

Третата проекција на триаголникот ABC ќе ја најдеме со сврзување на третите проекции A''' , B''' и C''' на неговите темиња A , B и C (цртеж 2.72).

Како што споменавме на почетокот, воведувањето на третата проекција овозможува да ја согледаме формата, големината и положбата на објектот во просторот, во случај кога тоа не е можно да се согледа од првата и втората проекција. Да ја разгледаме следнава задача.

Задача. Дадени се тлоцртот и нацртот на четириаголникот ABCD. Најди ја третата проекција на четириаголникот ABCD.

Третата проекција на четириаголникот ABCD ќе ја најдеме со сврзување на третите проекции A''' , B''' , C''' и D''' на неговите темиња A, B, C и D (цртеж 2.73).



Цртеж 2.73



Прашања и задачи

1. Нацртај ја третата проекција на триаголникот ABC, ако

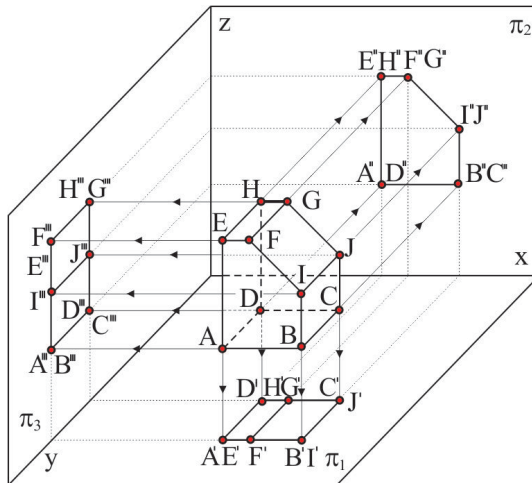
$A(3;2;3)$, $B(6;4;5)$ и $C(4;7;1)$.

2. Нацртај ја третата проекција на четириаголникот ABCD, ако

$A(1;2;3)$, $B(3;1;5)$, $C(5;3;1)$ и $D(7;1;5)$.

2.4.3. Ортогонално проектирање на геометриски тела

Ортогоналните проекции на геометриско тело ги добиваме со проектирање на површините што го заградуваат телото врз трите проекциони рамнини (цртеж 2.74).



Цртеж 2.74

Површините што го заградуваат телото се заградени со рабови или криви, па нивните проекции ги добиваме со проектирање на рабовите или кривите. Специјално, рабовите ги проектираме со проектирање на нивните врвови. Значи, ако се одредат проекциите на

сите врвови на телото, и ако тие се сврзат по истиот редослед како што се тие врвови сврзани во просторот, се добиваат проекциите на рабовите и површините со кои е заградено телото.

Кога едно геометриско тело го гледаме во правецот на проектирањето, еден дел од телото го гледаме, а другиот не го гледаме. Рабовите или кривите кои го разделуваат видливиот од невидливиот дел ја чинат контурата или границата на телото во однос на избраната насока на проектирање, а проекциите на тие рабови или криви на проекционата рамнина ја чинат контурата или границата на телото во однос на избраната насока на проектирање.

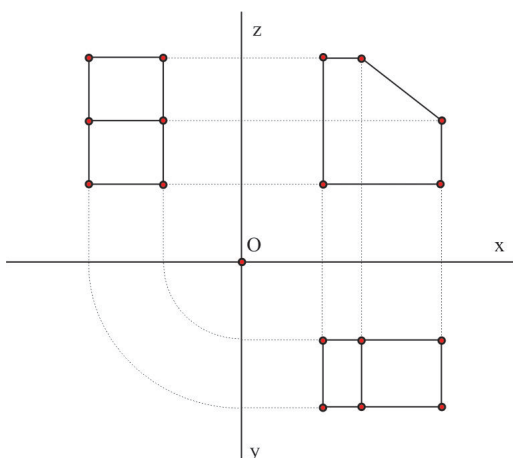
Ако го гледаме телото прикажано на цртеж 2.74, во правец на ортогоналното проектирање на рамнината π_1 , ќе ги гледаме само правоаголниците EFGH и FIJG. За таа насока на проектирање, просторниот многуаголник EFIJGH е граница, а тлоцртот E'F'I'J'G'H' е граница на тлоцртот на телото.

Слично, ако го гледаме телото во правец на ортогоналното проектирање на рамнината π_2 , многуаголникот ABIFE е граница на телото, а нацртот A''B''I''F''E'' е граница на нацртот на телото.

Во правец на ортогоналното проектирање на рамнината π_3 , просторниот многуаголник BCJGFI е граница на телото, а просторниот многуаголник B'''C'''J'''G'''F'''I''' е граница на третата проекција на телото.

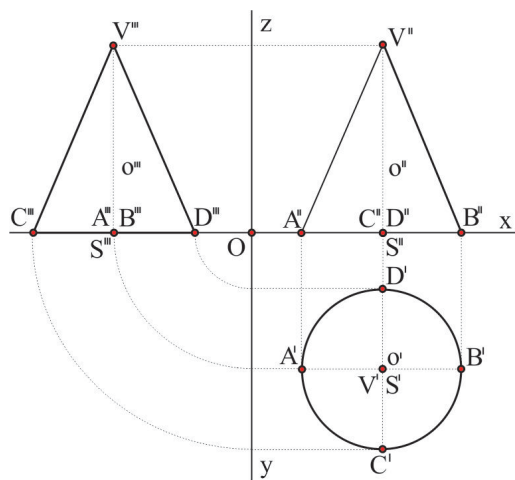
На цртеж 2.75 дадени се трите проекции на телото прикажано на цртеж 2.74.

Пример. На цртеж 2.76 дадени се трите проекции на конус со оска нормална на рамнината π_1 . Неговиот радиус на основата $r=1\text{cm}$, центарот на основата е во точката $S(1,5;1,5;0)$, а висината $h=2,5\text{cm}$.



Цртеж 2.75

Тлоцртот е круг со радиус $r=1\text{cm}$ и центар во точката S' . Во тој круг се проектира и обвивката на конусот, а во центарот на кругот е тлоцртот V' на врвот V , како и тлоцртот o' на оската o . Радиусите на тој круг се тлоцртите на изводниците на конусот. Сите изводници се видливи во тлоцртот.



Цртеж 2.76

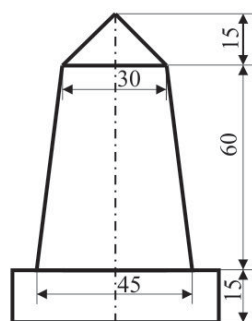
Границата на нацртот на конусот е триаголникот $A''B''V''$. Тоа е всушност нацртот на оскиниот пресек на конусот кој е паралелен на рамнината π_2 и го дели конусот на два дела, преден и заден дел. Изводниците AV и BV се гранични изводници на предниот и задниот дел, па затоа во нацртот се видливи.

Границата на третата проекција на конусот е триаголникот $C'''D'''V'''$. Тоа е третата проекција на оскиниот пресек на конусот кој е паралелен на рамнината π_3 и го дели конусот на два дела, лев и десен дел. Изводниците CV и DV се гранични изводници, па затоа во трета проекција се видливи.

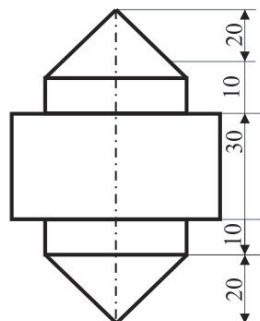


Прашања и задачи

1. Нацртај ги трите проекции на телото дадено на цртеж 2.77а и цртеж 2.77б.

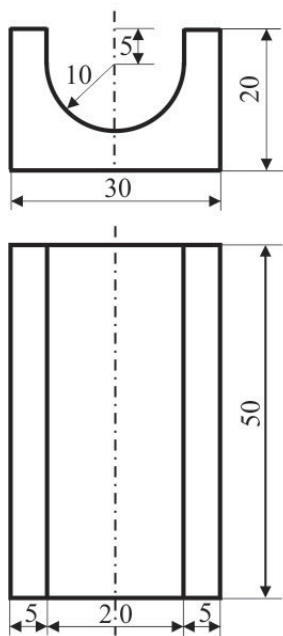


Цртеж 2.77а

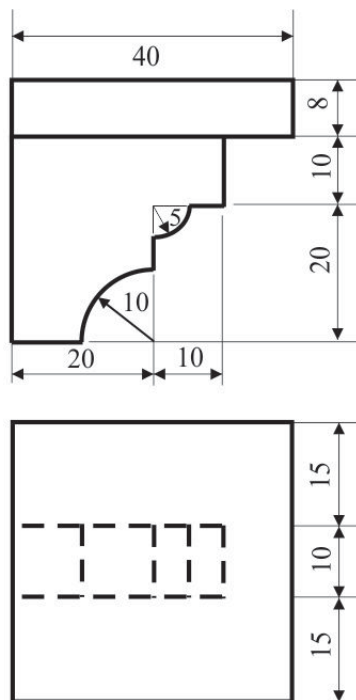


Цртеж 2.77б

2. Нацртај ги трите проекции на телото дадено на цртеж 2.78a и цртеж 2.78б.



Цртеж 2.78a



Цртеж 2.78б

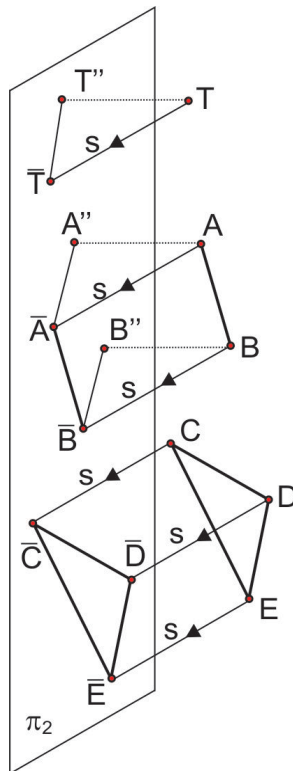
3. КОСА ПРОЕКЦИЈА

3.1. ПОИМ ЗА КОСА ПРОЕКЦИЈА

Косата проекција на објектите се употребува често во архитектурата и градежништвото, бидејќи со нејзина помош се добива јасна претстава за објектот и на лесен начин се забележуваат определени просторни односи.

Ако од точка T (цртеж 3.1) во просторот повлечеме коса права s и го најдеме прободот $\bar{T}$ со вертикалната рамнина π_2 , тогаш велиме дека точката T сме ја проектирале косо на рамнината π_2 . Точката $\bar{T}$ се вика **коса проекција** на точката T на рамнината π_2 . Правата s се вика **правец на проектирањето** или **проектирачки зрак**, а рамнината π_2 се вика **рамнина на проектирањето**. Во точката $\bar{T}$ се сечат проектирачкиот правец s и неговата ортогонална проекција s'' на π_2 .

Да забележиме дека при ортогонално проектирање користиме две или три рамнини, додека при косо проектирање користиме една рамнина.



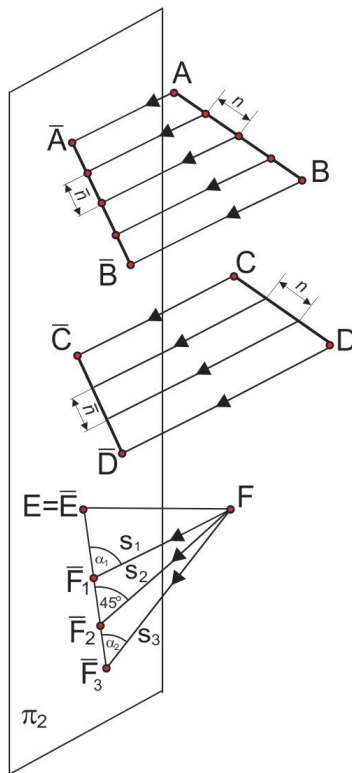
Цртеж 3.1

На цртеж 3.1 е нацртана отсечка AB која е паралелна на рамнината π_2 . Отсечката $A''B''$ е нејзин нацрт, додека отсечката $\overline{A'B'}$ е косата проекција на отсечката AB . Од паралелограмот $\overline{A'A''B''B}$ следува дека отсечката $\overline{A'B'}$ е паралелна на отсечката AB и има еднаква должина на неа. На истиот цртеж е нацртан триаголник CDE кој е паралелен на рамнината π_2 . Триаголникот $\overline{C'D'E'}$ е коса проекција на триаголникот CDE . Бидејќи сите негови страни се складни со страни-

те на триаголникот CDE, триаголникот $\overline{\overline{CDE}}$ е складен со CDE. Според тоа, имаме дека:

Коса проекција на рамнинска фигура која е паралелна на рамнината на проектирање е фигура складна и паралелна на неа.

На цртеж 3.2 нацртани се рамнината π_2 и две паралелни отсечки со различни должини: $\overline{AB} = 4n$ и $\overline{CD} = 3n$. Отсечката $\overline{\overline{AB}}$ е коса проекција на отсечката AB, додека отсечката $\overline{\overline{CD}}$ е коса проекција на отсечката CD.



Цртеж 3.2

Бидејќи рамнината низ $\overline{AABB}$ е паралелна на рамнината низ $\overline{CDDC}$, тие се сечат во рамнината на проектирање π_2 во паралелни прави. Така, заклучуваме дека:

Паралелни отсечки имаат паралелни и во ист размер продолжени, односно скратени коси проекции.

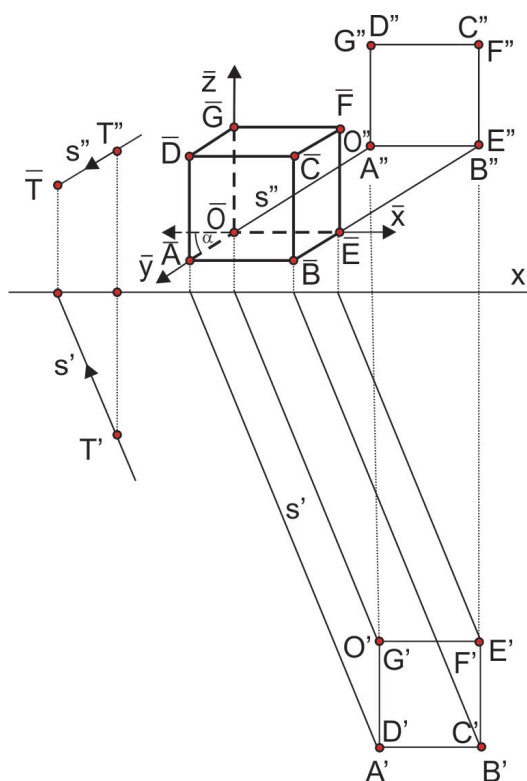
Од ова правило следува дека:

Паралелни и еднакви отсечки имаат паралелни и еднакви коси проекции.

На цртеж 3.2 нацртана е отсечка EF која е нормална на рамнината π_2 и нејзината крајна точка E лежи во π_2 . Косата проекција $\overline{E}$ на точката E е во истата точка. Нацртани се косите проекции $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_3$ на другата крајна точка F на таа отсечка кога проектирачките правци s_1 , s_2 и s_3 со рамнината π_2 зафаќаат агли $\alpha_1 > 45^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$ и $\alpha_3 < 45^\circ$, соодветно.

Косата проекција на отсечката EF ќе биде $\overline{EF}_1$, $\overline{EF}_2$ или $\overline{EF}_3$. Како што забележуваме косата проекција на отсечката EF може да биде помала, еднаква или поголема од неа, во зависност од аголот што го зафаќаат проектирачките правци со рамнината π_2 . Проекцијата ќе биде помала од отсечката, ако тој агол е поголем од 45° , ќе биде еднаква на отсечката, ако тој агол е еднаков на 45° , а проекцијата ќе биде поголема од отсечката ако тој агол е поголем од 45° . Според тоа, заклучуваме дека:

Коса проекција на отсечка, којашто е нормална на рамнината на проектирање може да биде отсечка со помала, еднаква или поголема должина од должината на отсечката, во зависност дали аголот што го зафаќа проектирачкиот правец со рамнината π_2 е поголем, еднаков или помал од 45° .



Цртеж 3.3

На цртеж 3.3 нацртани се придружените проекции на точка T којашто е оддалечена од рамнините π_1 и π_2 за 2cm. Нацртани се и придружените проекции s' и s'' на проектирачкиот правец s кој минува низ точката T и не е нормален на ниту една од рамнините π_1

и π_2 . Ако ја најдеме прободната точка на проектирачкиот правец s со рамнината π_2 ќе ја добиеме косата проекција $\bar{T}$ на точката T на рамнината π_2 при проектирачки правец s .

На истиот цртеж дадени се тлоцртот и нацртот на коцка која е во фронтална положба, чиј раб е $1,5\text{ cm}$. Ако низ темињата A, B, C и E повлечеме прави паралелни со проектирачкиот правец s и ги најдеме нивните прободни точки со рамнината π_2 ќе ги добиеме нивните коси проекции $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ и $\bar{E}$. Ако ја споиме точката $\bar{B}$ со точките $\bar{A}, \bar{C}$ и $\bar{E}$ ќе ги добиеме косите проекции $\bar{BA}, \bar{BC}$ и $\bar{BE}$ на рабовите BA, BC и BE кои имаат еднакви должини, соодветно. Косите проекции на останатите рабови можат да се најдат аналогно.

Предниот квадрат $ABCD$ на коцката, како и нејзиниот заден квадрат $O'EFG$ се проектираат во складни квадрати.

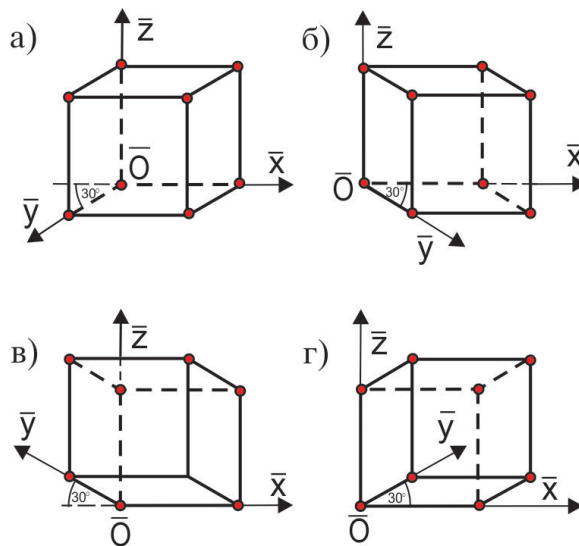
Рабовите OA, EB, FC и GD меѓусебно се паралелни и нормални на рамнината π_2 . Нивните коси проекции се паралелни, имаат еднакви должини и зафаќаат агол α со косата проекција $\bar{OE}$ на работ OE , којшто е паралелен со рамнината на проектирање π_2 . Тогаш косите проекции на тие рабови можат да бидат помали, еднакви или поголеми од должината на рабовите во просторот. Вообичаено се избира, рабовите кои се нормални на рамнината π_2 по својата должина да бидат $1/2, 2/3$ или $3/4$ од нивната вистинска големина. Овие односи се означуваат со буквата q и се нарекуваат **коефициент на скратување**. Ако се познати аголот α и коефициентот на скратување q , тогаш наполно е определен и правецот на проектирањето s . Затоа α и q се викаат **податоци на косото проектирање**.

Од темето O во просторот поаѓаат три раба на коцката OE, OA и OG . Ако ги продолжиме овие рабови добиваме три прави x, y и z , во правец на должината, ширината и висината на коцката, кои се заемно нормални и сочинуваат координатен систем $O(x,y,z)$ во кој е

сместена коцката. Косите проекции $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ на правите x , y и z се викаат **оски на косата проекција**, а точката O **координатен почеток**.

Сите рабови на објектот кои се паралелни со x -оската, односно z -оската се цртаат паралелно на $\bar{x}$ -оската, односно $\bar{z}$ -оската и тоа во вистинска големина, а оние рабови кои се паралелни со y -оската се цртаат во правец кој со $\bar{x}$ -оската зафаќа агол α , во однос q со вистинската големина.

За секој објект може да се нацрта коса проекција како што е тоа направено за коцката со раб долг $1,5\text{ cm}$ за $\alpha=30^\circ$ и $q=\frac{1}{2}$ (цртеж 3.4).



Цртеж 3.4

На цртежот под а) погледот е **одгоре оддесно**, бидејќи на неа се видливи горната основа и десниот бочен сид, а на цртежот под б) погледот е **одгоре одлево**, бидејќи на неа се видливи горната основа и левиот бочен сид. На цртежот под в) и под г) погледот е **одоздола**, и тоа на в) **оддесно**, а на г) **одлево**.



Прашања и задачи

1. Што претставува косата проекција?
2. Каква е заемната положба на косите проекции на паралелни отсечки?
3. Наброј ги податоците на косото проектирање?
4. Искажи го правилото за цртање во коса проекција на рамнината π_2 на објект којшто е во фронтална положба.
5. Наброј ги видливите бочни сидови на коцката на цртеж 3.4 во секој од четирите случаи.

3.2. КОСА ПРОЕКЦИЈА НА РАМНИНСКИ ФИГУРИ

Задача. Нацртај ја косата проекција на точката

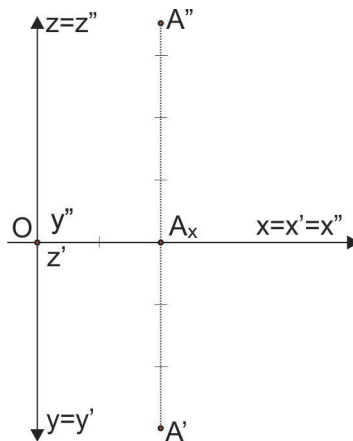
$A(2;3;3,5)$ (цртеж 3.5).

Во даден правоаголен координатен систем $O(x,y,z)$ имаме три координатни оски x,y,z кои се заемно нормални и три координатни рамнини $\pi_1=(x,y)$, $\pi_2=(x,z)$ и $\pi_3=(y,z)$ коишто се исто така заемно нормални.

На цртеж 3.5 нацртани се проекциите на трите координатни оски и проекциите на точка A

$$\overline{OA_x} = 2\text{cm}, \overline{A_xA'} = 3\text{cm} \text{ и } \overline{A_xA''} = 3,5\text{cm}.$$

За да можеме да нацртаме коса проекција на точката A мора да избереме агол, коефициент на скратување q и погледот кој сакаме да го добиеме во тој координатен систем со косата проекција. Нека, на пример, $\alpha=45^\circ$, $q = 1/2$, погледот е одгоре и оддесно.



Цртеж 3.5

Ако ја земеме координатната рамнина π_2 за рамнина на проектирање, тогаш косата проекција на оските x и z се самите оски, а косата проекција $\bar{y}$ на y со x -оската треба да зафаќа агол $\alpha=45^\circ$.

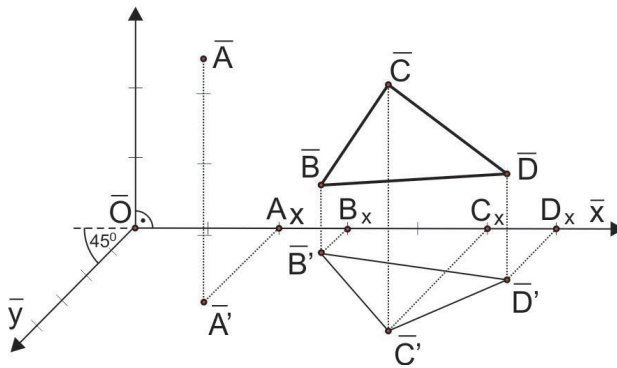
Единиците на оските $\bar{x}$ и $\bar{z}$ се нанесуваат во вистинска големина, а единиците на оската $\bar{y}$ се нанесуваат со половина од вистинската големина, бидејќи $q = 1/2$.

Според тоа, $\overline{OA_x}$ ќе биде долга 2 cm, потоа $\overline{A_xA'} \parallel y$, $\overline{A_xA''}$ ќе биде долга $1/2 \cdot 3\text{cm} = 1,5\text{cm}$, $\overline{A'A} \parallel z$ и $\overline{A'A}$ ќе биде долга 3 cm. Точката $\bar{A'}$ е коса проекција на тлоцртот на точката A во рамнината

π_1 , а точката $\bar{A}$ е коса проекција на точката A .

Задача. Нацртај коса проекција на триаголник со темиња $B(3;1;1)$, $C(5;4;3,5)$, $D(6;2;2,5)$.

Ако претпоставиме дека триаголникот BCD се наоѓа во истиот координатен систем во кој се наоѓаше точката A , тогаш конструкцијата на косата проекција на врвовите на триаголникот е иста со конструкцијата на косата проекција на точката A .



Цртеж 3.6

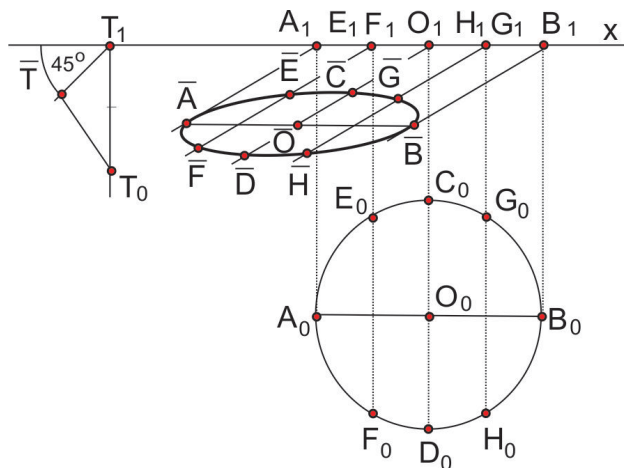
Триаголникот $\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ е коса проекција на тлоцртот на триаголникот на рамнината π_1 , а триаголникот $\bar{BCD}$ е бараната коса проекција (цртеж 3.6). Според тоа, може да заклучиме дека:

Коса проекција на триаголник, односно многуаголник се наоѓа така што се конструира косата проекција на неговиот тлоцрт, а потоа од секое теме од косата проекција на тлоцртот се издига права паралелна со z -оската и се нанесуваат апликатите на тоа теме. Така се добива косата проекција на темињата на триаголникот, односно многуаголникот.

полуправи повлечени од A_1 и A_0 , B_1 и B_0 , C_1 и C_0 , D_1 и D_0 , E_1 и E_0 , F_1 и F_0 , ги добиваме точките $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, $\bar{E}$ и $\bar{F}$, со чиешто поврзување ја добиваме косата проекција $\bar{ABCDEF}$ на шестаголникот $ABCDEF$.

Задача. Нацртај коса проекција круг со радиус r и податоци $\alpha=45^\circ$ и $q=1/2$.

Го цртаме кругот во вистинска големина под x -оската (цртеж 3.8). Потоа според податоците го цртаме помошниот триаголник $T_0T_1\bar{T}$.



Цртеж 3.8

Бидејќи границата на кругот нема истакнати точки, за да ја определеме неговата коса проекција треба да избереме определен број на точки на кружницата (границата на кругот) и да ги најдеме нивните коси проекции кои понатаму ќе ги сврземе во една крива линија. Колку повеќе точки проектираме толку попрецизно ќе ја определеме косата проекција на кругот.

Го повлекуваме дијаметарот A_0B_0 , кој е паралелен на x -оската и го разделуваме на произволен број еднакви делови, на пример, че-

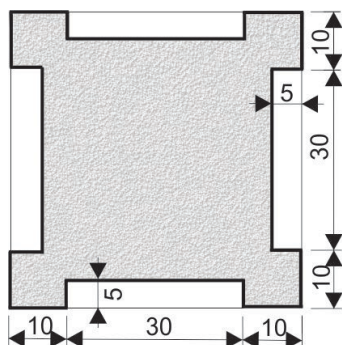
тири еднакви делови. Потоа низ крајните точки A_0 и B_0 , како и низ трите добиени делбени точки повлекуваме нормали на дијаметарот A_0B_0 . Тие ја сечат кружницата во точките C_0, D_0, E_0, F_0, G_0 и H_0 , а x -оската во точките $A_1, C_1=O_1=D_1, E_1=F_1, G_1=H_1$ и B_1 .

Проектирањето на добиените точки $A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0, G_0$ и H_0 на кружницата на рамнината π_2 го изведуваме така што, низ точките $A_1, C_1=O_1=D_1, E_1=F_1, G_1=H_1$ и B_1 повлекуваме полуправи паралелни со $T_1\bar{T}$, а низ точките $A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0, G_0$ и H_0 повлекуваме полуправи паралелни со $T_0\bar{T}$. Во пресекот на секои две по две соодветни полуправи од двете множества полуправи ги добиваме точките $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ и $\bar{H}$ со чиешто последователно поврзување ја добиваме косата проекција на кружницата, односно кругот. Да забележиме дека добиената проекција на кружницата е затворена крива која се вика **елипса**.



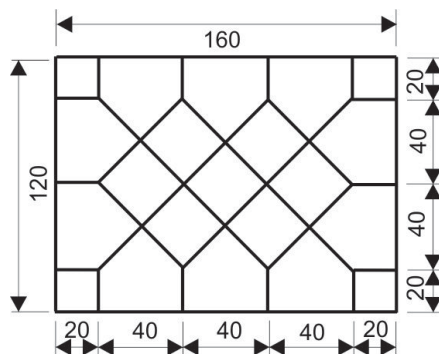
Прашања и задачи

1. Нацртај коса проекција на рамностран триаголник ABC со страна долга 2 cm и податоци $\alpha=45^\circ$ и $q = 1/2$.
2. Нацртај коса проекција на квадрат $ABCD$ со страна долга 3 cm и податоци $\alpha=30^\circ$ и $q = 3/4$.
3. Нацртај во размер 1:10 за $\alpha=45^\circ$ и $q = 2/3$ коса проекција на хоризонтален пресек на бетонски столб прикажан на цртеж 3.9 во размер 1:15.
4. Нацртај во размер 1:20 за $\alpha=45^\circ$ и $q = 1/2$ коса проекција на дел од бетонски плочник прикажан на цртеж 3.10 во размер 1:40.



P 1:15

Цртеж 3.9



P 1:40

Цртеж 3.10

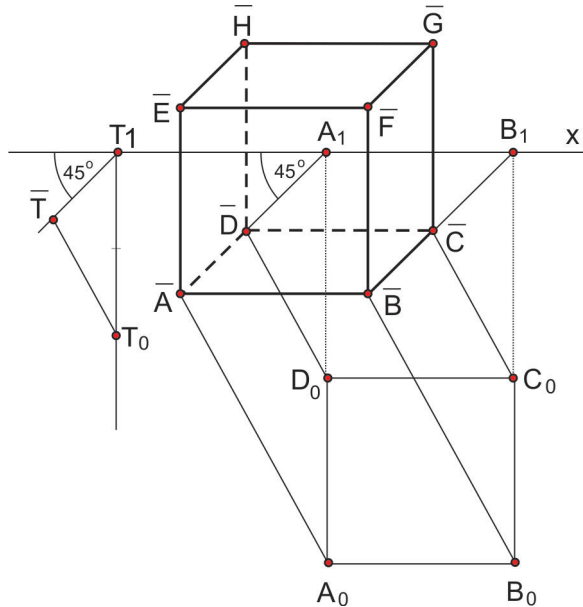
3.3. КОСА ПРОЕКЦИЈА НА ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

Задача. Нацртај коса проекција на коцка со раб долг 2 cm и податоци $\alpha=45^\circ$ и $q = 1/2$.

Нека коцката со долната основа лежи во рамнината π_1 пред вертикалната рамнина π_2 , така што два нејзини бочни сидови се паралелни на рамнината π_2 и се на определено растојание од неа.

Ја цртаме долната основа на коцката, односно квадратот $A_0B_0C_0D_0$, под x -оската во вистинска големина и со еден раб паралелен на x -оската. Потоа ја цртаме косата проекција на квадратот $A_0B_0C_0D_0$ во рамнината π_2 , според еден од двата претходно опишани начини (го препорачуваме начинот со помошен триаголник $T_0T_1\bar{T}$). Така го добиваме паралелограмот $\overline{ABCD}$, кој е коса проекција на

долната основа на коцката, поточно на квадратот $A_0B_0C_0D_0$ (цртеж 3.11).



Цртеж 3.11

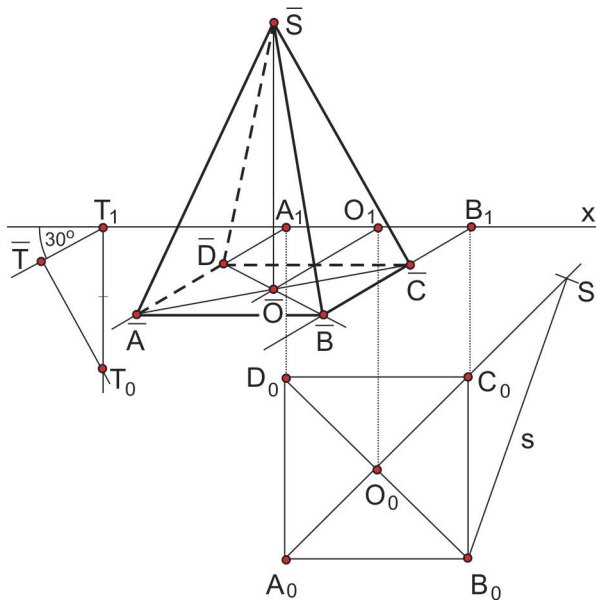
Бочните рабови на коцката се паралелни на рамнината π_2 , па тие ќе се проектираат во паралелни отсечки со должини еднакви на нив.

За да ги нацртаме нивните проекции доволно е од точките $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ и $\bar{D}$ да подигнеме нормали на рамнината π_2 и на нив да нане-
семе должина од 2 cm (колку што се долги бочните рабови на коц-
ката). Добиените точки $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ и $\bar{H}$ се коси проекции на темињата
на горната основа на коцката. Со нивно поврзување добиваме коса
проекција на горната основа на коцката, а со тоа ја добиваме
коцката во коса проекција.

Така нацртаната коса проекција на коцката ни создава сличен впечаток како кога неа ја набљудуваме одгоре и оддесно. Во тој случај ако сидовите на коцката се непровидни, меѓу нејзините рабови ќе има и такви кои не ги гледаме. Тоа се рабовите $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DH}$, и нив ги цртаме со испрекината линија, а останатите - видливите рабови малку ги задебелуваме.

Задача. Нацртај коса проекција на права правилна четириаголна пирамида со основен раб долг 2 см и бочен раб долг 4 см, при податоци $\alpha=30^\circ$ и $q = 1/2$.

Под х-оската ја конструираме основата на пирамидата, односно квадратот $A_0B_0C_0D_0$ со страна долга 2 см. Во него го наоѓаме центарот O_0 на опишаната кружница околу квадратот како пресечна точка на дијагоналите на квадратот. Потоа ја конструираме косата проекција на квадратот заедно со проекцијата на неговиот центар (цртеж 3.12).



Цртеж 3.12

Бидејќи висината на пирамидата не е дадена, неа ја определуваме конструктивно. Висината на пирамидата е нормална на основата (квадратот), па според тоа, таа е нормална и на дијагоналите на квадратот. Тоа значи дека висината на пирамидата и половинката од дијагоналата на квадратот се катети, а бочниот раб е хипотенуза на правоаголен триаголник. Со конструкција на правоаголниот триаголник над половинката од дијагоналата на квадратот ја добиваме бараната висина на пирамидата O_0S .

Сега од точката $\bar{O}$ издигнуваме нормала на отсечката $\bar{OS}$ кон x -оската, која по должина е еднаква на висината O_0S на пирамидата, па така ја определуваме косата проекција на $\bar{S}$ на врвот на пирамидата. На крајот, соединувајќи го врвот на пирамидата $\bar{S}$ со темињата $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ и $\bar{D}$ ја добиваме бараната коса проекција на пирамидата.

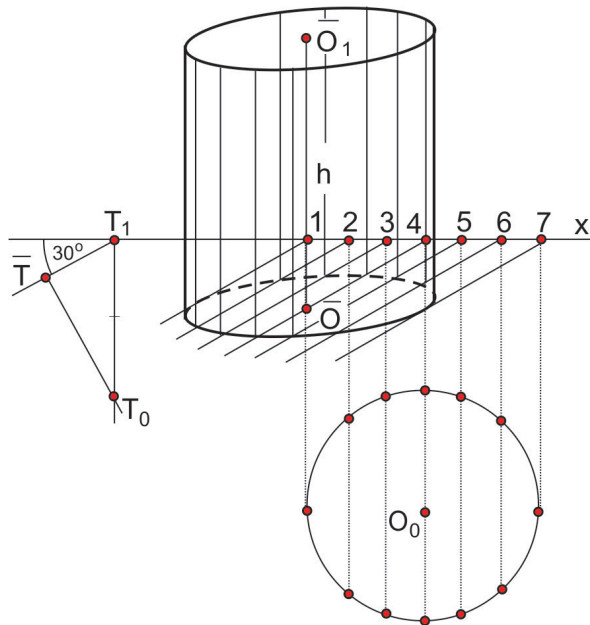
Невидливи рабови се рабовите $\bar{CD}$, $\bar{AD}$ и $\bar{DS}$.

Задача. Нацртај коса проекција на прав цилиндар со радиус на основата $r = 1,5 \text{ cm}$ и висина $h = 3 \text{ cm}$, и дадени податоци $\alpha = 30^\circ$ и $q = 1/2$.

Замислуваме дека цилиндарот лежи со својата долна основа во рамнината π_1 . Во тој случај е јасно дека висината и сите генератрисы на цилиндарот ќе бидат паралелни на рамнината π_2 , па ќе се проектираат во неа во вистинска големина (цртеж 3.13).

Прво ќе ја нацртаме косата проекција на основата на цилиндарот, којашто претставува круг. Потоа во секоја точка од границата на косата проекција на границата на основата (кружницата) на цилиндарот, којашто е елипса, издигнуваме нормали на x -оската, кои по должина се еднакви на генератрисата, односно висината на цилиндарот. Горните крајни точки на тие отсечки, кога ќе ги сврземе

последователно една со друга, ја даваат косата проекција на горната основа на цилиндарот.



Цртеж 3.13

Од сите издигнати генератриси задебелуваме само две – оние коишто лежат на контурата. На крајот ја определуваме видливоста. Погледот е одгоре и оддесно, па затоа елипсата при горната основа е видлива целата, а од елипсата при долната основа видлив е само предниот дел меѓу контурните генератриси.



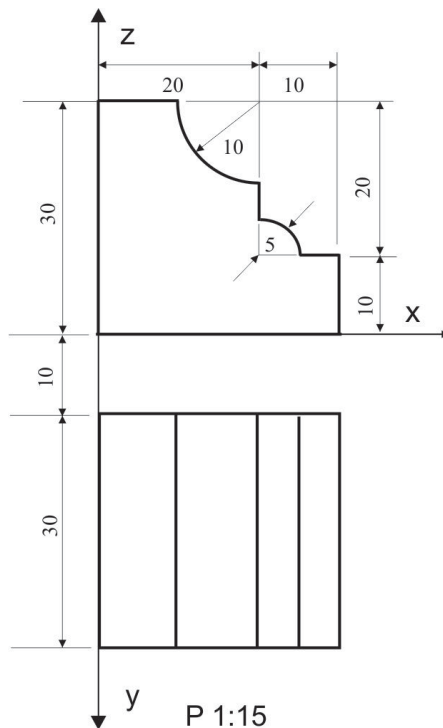
Прашања и задачи

1. Квадар со должина 5cm, ширина 3cm и висина 2cm е поставен во рамнината π_1 , така што два негови основни рабови се паралелни со x-оската, а поблискиот е

оддалечен од неа за 1,5 cm. Нацртај коса проекција на квадарот при податоци:

а) $\alpha=30^\circ$ и $q = 1/2$;

б) $\alpha=60^\circ$ и $q = 1/3$.



Цртеж 3.14

2. Нацртај коса проекција на права правилна шестаголна призма со основен раб долг 3,5 cm и висина 4,5 cm при податоци

а) $\alpha=45^\circ$ и $q = 1/2$;

б) $\alpha=30^\circ$ и $q = 3/4$.

3. Нацртај коса проекција на правилен тетраедар со основен раб долг 4 cm при податоци

а) $\alpha=30^\circ$ и $q = 1 / 2$;

б) $\alpha=45^\circ$ и $q = 2 / 3$.

4. Нацртај коса проекција на конус со димензии:

а) $r = 2\text{ cm}$, $h = 5\text{ cm}$;

б) $s = 3\text{ cm}$, $h = 4,5\text{ cm}$;

при податоци $\alpha=45^\circ$ и $q = 1 / 2$.

5. Нацртај во размер 1:10 коса проекција на исклесан камен, ако неговата положба во координатниот систем $O(x,y,z)$ е како на цртеж 3.14 во размер 1:15, при податоци $\alpha=45^\circ$ и $q = 1 / 2$.

4. РАМНИНИ

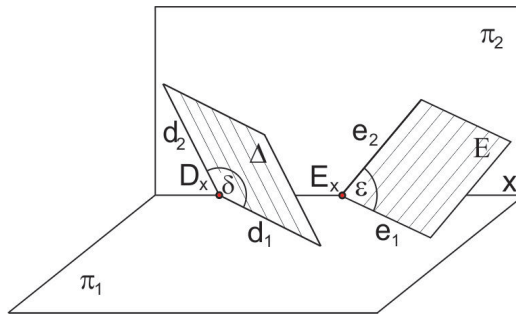
4.1. ТРАГИ НА РАМНИНА

Од геометрија ни е познато дека една рамнина е определена со две прави што се сечат. Се покажува практично рамнината да ја определиме со две нејзини прави што се сечат кои се во специјална положба. Тоа се двете прави во кои рамнината ги сече проекционите рамнини π_1 и π_2 (цртеж 4.1).

Тие прави се нарекуваат **траги** на рамнината и вообичаено се означуваат со мала буква од латинската азбука која одговара на грчката буква со која е означена рамнината.

Во таа смисла e_1 е **прва трага**, а e_2 е **втора трага** на рамнината E , додека d_1 е **прва трага**, а d_2 е **втора трага** на рамнината Δ . Трагите на рамнината се сечат во точка која лежи на x -оската, бидејќи таа е прободната точка на x -оската со рамнината. Така тра-

гите на рамнината E се сечат во точката E_x , трагите на рамнината Δ се сечат во точката D_x .



Цртеж 4.1

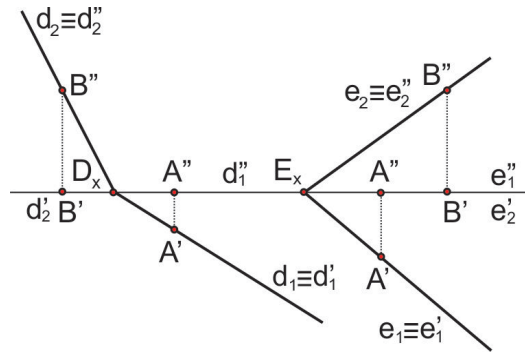
Тие точки се означуваат со голема буква од латинската азбука која одговара на грчката буква со која е означена рамнината.

Вообичаено се црта со полна линија оној дел од првата трага кој е пред рамнината π_1 , како и делот од втората трага кој е над рамнината π_2 .

Бидејќи првата трага на рамнината е во π_1 , таа се совпаѓа со својот тлоцрт, а нејзиниот нацрт е на x -оската. Така имаме дека $e_1 \equiv e_1'$ и $d_1 \equiv d_1'$, додека e_1'' и d_1'' се на x -оската. Втората трага на рамнината е во π_2 , па таа се совпаѓа со својот нацрт, а нејзиниот тлоцрт е на x -оската. Така $e_2 \equiv e_2''$ и $d_2 \equiv d_2'$, додека e_2' и d_2' се на x -оската.

Рамините E и Δ се еднозначно определени со проекциите на своите траги (цртеж 4.2). Ако ја доведеме рамнината π_1 со ротација околу x -оската во вертикална положба, тогаш со правите e_1 и e_2 , односно d_1 и d_2 еднозначно се определени рамнините E и Δ . Секоја точка од првата трага, на пример, точката A има тлоцрт во самата

точка, а нацрт на x -оската, додека секоја точка од втората трага, на пример, точката B има нацрт во самата точка, а тлоцрт на x -оската.



Цртеж 4.2

Рамнините E и Δ се во **општа положба**, но сепак тие се разликуваат по тоа што трагите на рамнината E се од истра страна на точката E_x , додека трагите на рамнината Δ се на различни страни од точката D_x . За рамнината E велíme дека има **конвергентни траги**, додека за рамнината Δ велíme дека има **дивергентни траги**. Да забележиме дека аголот ε што го зафаќаат трагите e_1 и e_2 на рамнината E е помал од 90° , додека аголот δ што го зафаќаат трагите d_1 и d_2 на рамнината Δ е поголем од 90° . Значи, имаме дека:

Рамнина чиешто траги зафаќаат агол помал од 90° има конвергентни траги, а рамнина чиешто траги зафаќаат агол поголем од 90° има дивергентни траги.

Да забележиме дека ако рамнината има конвергентни траги, тогаш кога ја гледаме во правецот на проектирање на π_1 или π_2 , ја

гледаме нејзината горна страна. Ако рамнината има дивергентни траги тогаш кога ја гледаме во правецот на проектирање на π_1 ја гледаме нејзината горна страна, а кога гледаме во правецот на проектирање на π_2 ја гледаме нејзината долна страна.

Во иднина, на проекциите на трагите ќе ставаме само ознака за првата и втората трага, а ќе ги испуштаме ознаките за тлоцртот и нацртот на првата и втората трага.



Прашања и задачи

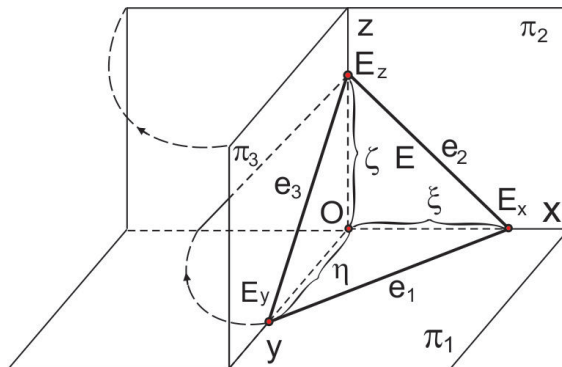
1. Што се траги на рамнина?
2. а) Кои траги на рамнина се нарекуваат конвергентни, а кои дивергентни?

б) Каков агол зафаќаат конвергентните траги, а каков дивергентните?

4.2. КООРДИНАТИ НА РАМНИНА

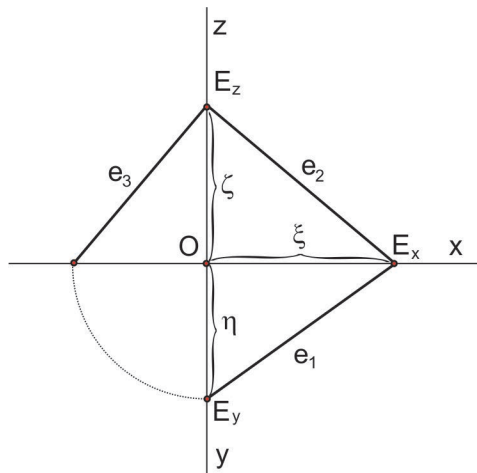
Нека при проектирањето на рамнината E воведеме трета проекциона рамнина π_3 . Пресечната права e_3 на рамнината E со третата проекциона рамнина π_3 се нарекува **трета трага** на рамнината E (цртеж 4.3).

Ако се дадени првата и втората трага на рамнината E и точките E_x , E_y и E_z кои се прободни точки на координатните оски x , y и z со рамнината E , тогаш третата трага се добива со поврзување на точките E_y и E_z .



Цртеж 4.3

Ако на рамнината π_2 ги расклопиме рамнините π_1 и π_3 ги добиваме придружените проекции на трагите e_1 , e_2 и e_3 (цртеж 4.4).



Цртеж 4.4

Нека E_x , E_y и E_z се прободните точки на координатните оски x , y и z со рамнината E . Мерните броеви на должините на отсечките OE_x , OE_y и OE_z се нарекуваат координати на рамнината E .

Координатите на рамнина вообичаено се означуваат со малите букви од грчката азбука.

Пример. Рамнината E на цртеж 4.4 има координати:

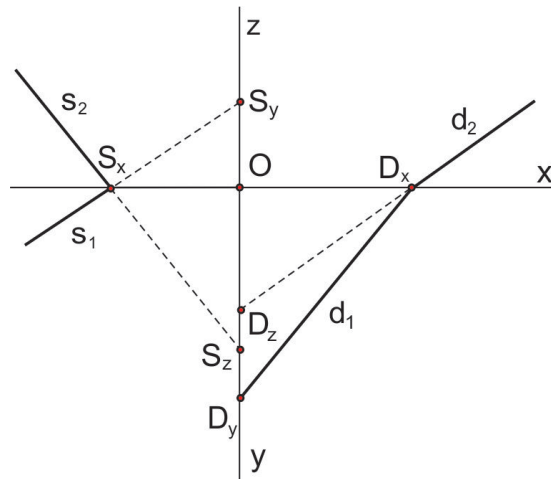
$$\xi = 2,5 \text{ cm} \quad \eta = 1,8 \text{ cm} \quad \text{и} \quad \zeta = 2 \text{ cm}.$$

Во тој случај пишуваме $E(2,5;1,8;2)$.

Задача. Нацртај ги трагите на рамнините

$$\Delta(2;2,5;-1,5) \text{ и } \Sigma(-1,5;-1;-2).$$

Да ги определиме точките D_x при услов $\overline{OD_x} = 2 \text{ cm}$, и D_y при услов $\overline{OD_y} = 2,5 \text{ cm}$ (цртеж 4.5). Бидејќи z координатата на рамнината Δ е ненегативна и е еднаква на $-1,5$, точката D_z ќе се наоѓа на негативниот дел на z -оската, под точката O , односно $\overline{OD_z} = -1,5 \text{ cm}$. Правата $d_1 = D_x D_y$ е првата трага на рамнината Δ , додека правата $d_2 = D_x D_z$ е нејзината втора трага.



Цртеж 4.5

Со полна линија го цртаме оној дел од првата трага кој е под x -оската и делот од втората трага кој е над x -оската, додека другите

делови на трагите ги цртаме со испрекината линија или воопшто не ги цртаме.

Трите координати на рамнината Σ се негативни, па точката S_x ќе биде лево од координатниот почеток O , точката S_y ќе биде над O , а точката S_z под O . Нејзината прва трага е правата $s_1 = S_x S_y$, а втората трага е правата $s_2 = S_x S_z$.



Прашања и задачи

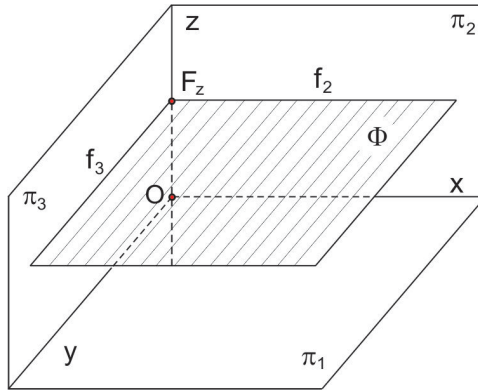
1. Што претставува третата трага на една рамнина?
2. Кое е геометриското толкување на координатите на една рамнина?
3. Нацртај ги трите траги на рамнината:
 - а) $\Gamma(3;2;4)$; б) $\Gamma(3;7;5)$.
4. Нацртај ги првата и втората трага на рамнината:
 - а) $\Lambda(3;-2;-3)$; б) $\Gamma(-3,5;-4;2)$.

4.3. РАМНИНИ ПАРАЛЕЛНИ НА ПРОЕКЦИОНИТЕ РАМНИНИ

Рамнина паралелна на π_1

Пред модел на три проекциони рамнини од картон поставуваме правоаголно парче од картон, паралелно на рамнината π_1 . Ако парчето од картон го замислиме како рамнина во просторот, забележуваме дека таа има само втора и трета трага. Таа ги сече x -оска-

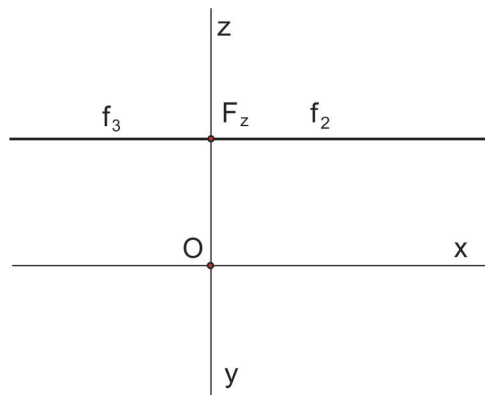
та и у-оската во бесконечност. Нејзината втора трага е паралелна со х-оската, а третата трага е паралелна со у-оската (цртеж 4.6).



Цртеж 4.6

Рамнина која е паралелна со π_1 има втора трага паралелна со х-оската, а третата трага паралелна со у-оската.

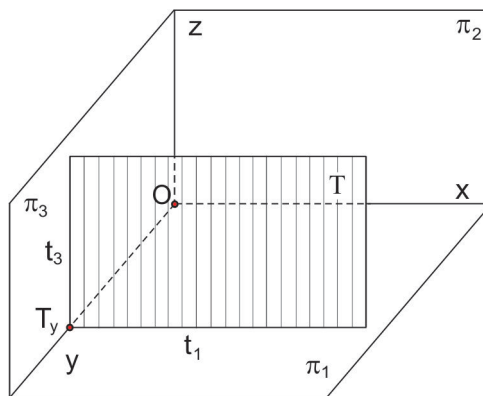
Пример. На цртеж 4.7 нацртани се трагите на рамнината $\Phi(\infty; \infty; 1, 7)$ која е паралелна на рамнината π_1 .



Цртеж 4.7

Рамнина паралелна на π_2

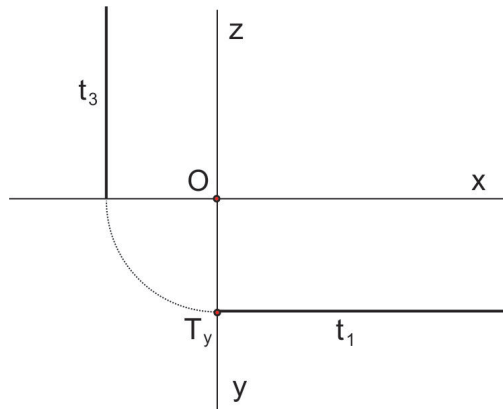
Повторно, пред модел на три проекциони рамнини од картон поставуваме правоаголно парче од картон, но сега паралелно на рамнината π_2 . Ако парчето од картон го замислиме како рамнина во просторот, забележуваме дека таа има само прва и трета трага. Таа ги сече x -оската и z -оската во бесконечност. Нејзината прва трага е паралелна со x -оската, а третата трага е паралелна со z -оската (цртеж 4.8).



Цртеж 4.8

Рамнина која е паралелна со π_2 има прва трага паралелна со x -оската, а трета трага паралелна со z -оската.

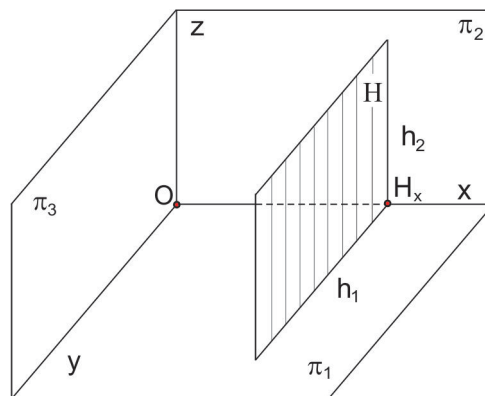
Пример. На цртеж 4.9 нацртани се трагите на рамнината $H(\infty; 1, 5; \infty)$ која е паралелна на рамнината π_2 .



Цртеж 4.9

Рамнина паралелна на π_3

Пред модел на три проекциони рамнини од картон поставуваме правоаголно парче од картон, паралелно на рамнината π_3 . Ако парчето од картон го замислиме како рамнина во просторот, забележуваме дека таа има само прва и втора трага. Таа ги сече y -оската и z -оската во бесконечност.

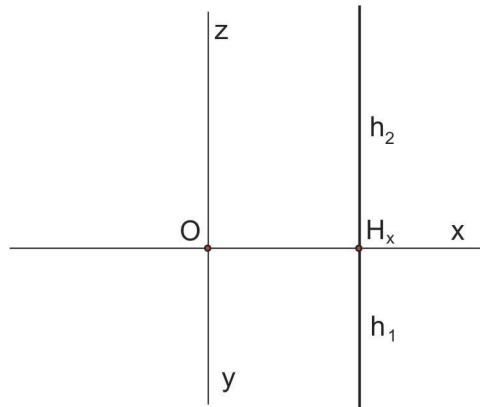


Цртеж 4.10

Нејзината прва трага е паралелна со y -оската, а втората трага е паралелна со z -оската (цртеж 4.10).

Рамнина која е паралелна со π_3 има прва трага паралелна со y -оската, а втора трага паралелна со z -оската.

Пример. На цртеж 4.11 нацртани се трагите на рамнината $H(2; \infty; \infty)$ која е паралелна на рамнината π_3 .



Цртеж 4.11



Прашања и задачи

1. Нацртај ги трагите на следниве рамнини:

- а) $M(2, 5; \infty; \infty)$; б) $N(4; \infty; \infty)$.

Каква е положбата на рамнините во однос на проекционите рамнини?

2. Нацртај ги трагите на следниве рамнини:

- а) $T(\infty; 3; \infty)$; б) $K(\infty; 4; \infty)$.

Каква е положбата на рамнините во однос на проекционите рамнини?

3. Нацртај ги трагите на следниве рамнини:

- а) $L(\infty; \infty; 6)$; б) $B(\infty; \infty, 3, 5)$.

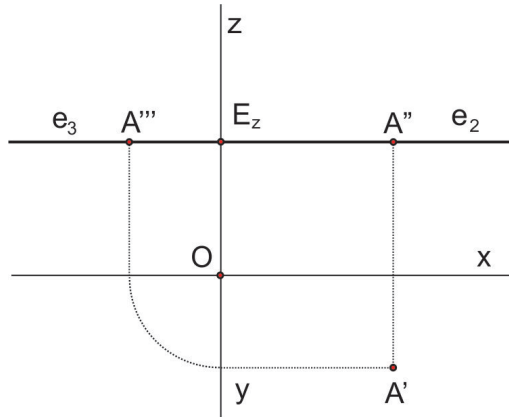
Каква е положбата на рамнините во однос на проекционите рамнини?

4.4. ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ ВО РАМНИНИ ПАРАЛЕЛНИ НА ПРОЕКЦИОНТЕ РАМНИНИ

Во овој дел ќе разгледуваме ортогонални проекции на геометрички фигури кои лежат во рамнина паралелна на проекционите рамнини.

Ако дадена точка A лежи во рамнина E паралелна на π_1 , тогаш нејзината втора проекција A'' ќе лежи на втората трага e_2 на рамнината, додека нејзината трета проекција A''' ќе лежи на третата трага e_3 на рамнината (цртеж 4.12).

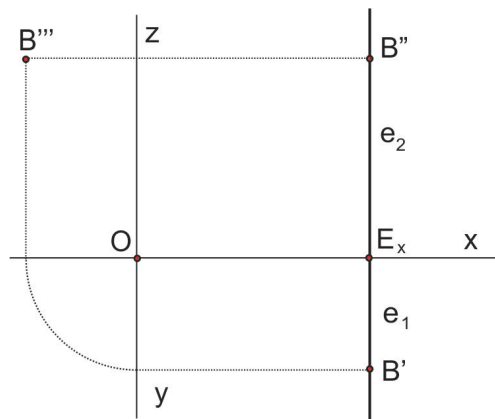
Ако дадена точка A лежи во рамнина E паралелна на π_2 , тогаш нејзината прва проекција A' ќе лежи на првата трага e_1 на рамнината, додека нејзината трета проекција A''' ќе лежи на третата трага e_3 на рамнината.



Цртеж 4.12

Задача. Нацртај ги трите проекции на точката $B(x;1,5;2,5)$ која што лежи во рамнината $E(3;\infty;\infty)$.

Точката B лежи во рамнината E која е паралелна на π_3 , па нејзината прва проекција B' ќе лежи на првата трага e_1 на рамнината, додека нејзината втора проекција B'' ќе лежи на втората трага e_2 на рамнината. Според тоа, првата координата $x = 3$ (цртеж 4.13)



Цртеж 4.13

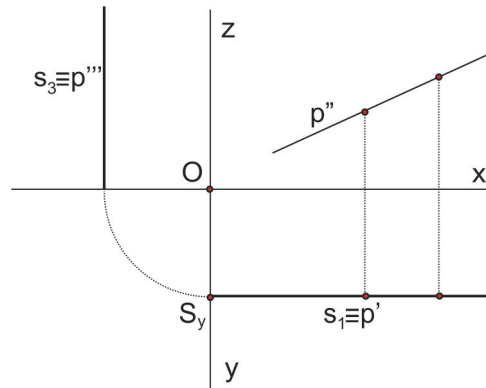
Ако дадена права p лежи во рамнина Σ паралелна на π_1 , тогаш нејзината втора проекција p'' ќе лежи на втората трага s_2 на рамнината, додека нејзината трета проекција p''' ќе лежи на третата трага s_3 на рамнината.

Задача. Нацртај ги трите проекции на правата

$$p=AB[A(2;y;1),B(3;y;1,5)]$$

којашто лежи во рамнина $\Sigma(\infty;3;\infty)$.

Правата p лежи во рамнина Σ којашто е паралелна на π_2 , па нејзината прва проекција p' ќе лежи на првата трага s_1 на рамнината, додека нејзината трета проекција p''' ќе лежи на третата трага s_3 на рамнината (цртеж 4.14). Според тоа, втората координата на точките A и B е $y = 3$.



Цртеж 4.14

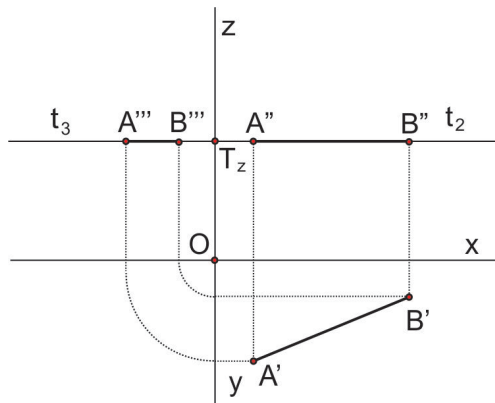
Ако дадена права p лежи во рамнина Σ паралелна на π_3 , тогаш нејзината прва проекција p' ќе лежи на првата трага s_1 на рамнината, додека нејзината втора проекција p'' ќе лежи на втората трага s_2 на рамнината.

Задача. Нацртај ги трите проекции на отсечката

$$AB[A(0,5;1,5;z),B(2,5;0,5;z)]$$

којашто лежи во рамнина $T(\infty;\infty;1,5)$.

Отсечката AB лежи во рамнина T којашто е паралелна на π_1 , па нејзината втора проекција $A''B''$ ќе лежи на втората трага t_2 на рамнината, додека нејзината трета проекција $A'''B'''$ ќе лежи на третата трага t_3 на рамнината (цртеж 4.15). Според тоа, третата координата на точките A и B е $z=1,5$. Во прва проекција отсечката AB се проектира во вистинска големина, односно во отсечка $A'B'$ со должина еднаква на AB .

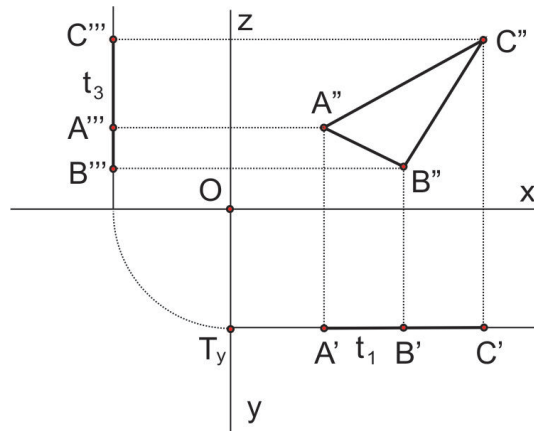


Цртеж 4.15

Задача. Нацртај ги трите проекции на триаголникот ABC , кој лежи во рамнината $T(\infty;1,5;\infty)$, ако $A(1;y;1)$, $B(2;y;0,5)$ и $C(3;y;2)$.

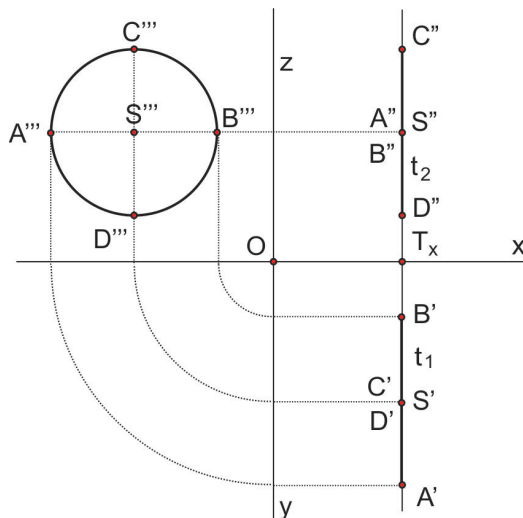
Триаголникот ABC лежи во рамнина T којашто е паралелна на π_2 , па неговата прва проекција $A'B'$ ќе лежи на првата трага t_1 на рамнината, додека нејзината трета проекција $A'''B'''$ ќе лежи на третата трага t_3 на рамнината (цртеж 4.16). Според тоа, втората коор-

дината на точките A , B и C е $y = 1,5$. Во втора проекција триаголникот ABC се проектира во вистинска големина.



Цртеж 4.16

Задача. Нацртај ги трите проекции на круг со центар во точката $S(x;1,5;2,5)$ и радиус $r=1$ кој лежи во рамнината $T(1,5;\infty;\infty)$.



Цртеж 4.17

Кругот лежи во рамнина T којашто е паралелна на π_3 , па неговата прва проекција ќе лежи на првата трага t_1 на рамнината, додека неговата втора проекција ќе лежи на втората трага t_2 на рамнината (цртеж 4.17). Според тоа, првата координата на центарот S е $x = 1,5$. Во трета проекција кругот се проектира во вистинска големина. Воочи ги придружените проекции на дијаметрите AB и CD .



Прашања и задачи

1. Нацртај ги трите проекции на точката $A(x;1;2)$ којашто лежи во рамнината $E(4;\infty;\infty)$.

2. Нацртај ги трите проекции на правата

$$p=AB[A(3;y;2),B(4;y;1)]$$

којашто лежи во рамнина $\Sigma(\infty;4;\infty)$.

3. Нацртај ги трите проекции на отсечката

$$AB[A(1;2;z),B(2;1;z)]$$

којашто лежи во рамнина $T(\infty;\infty;2)$.

4. Нацртај ги трите проекции на триаголникот ABC , кој лежи во рамнината $T(\infty;2;\infty)$, ако $A(2;y;2)$, $B(3;y;1)$ и $C(4;y;3)$.

5. Нацртај ги трите проекции на круг со центар во точката $S(x;1;2)$ и радиус $r=1$ кој лежи во рамнината $T(2;\infty;\infty)$.

6. Нацртај ги трите проекции на правата $p=[M(4;2;z),N(7;5;z)]$ којашто лежи во рамнина $\Sigma(\infty;\infty;3)$.

7. Нацртај ги трите проекции на триаголникот ABC , кој лежи во рамнината $T(4;\infty;\infty)$, ако $A(x;0,5;1)$, $B(x;4;3,5)$ и $C(x;2;2)$.

8. Нацртај ги трите проекции на правоаголникот $ABCD$, кој лежи во рамнината $T(\infty;2,5;\infty)$, ако $A(1;y;1)$, $B(3;y;1)$ и $C(3;y;7)$.

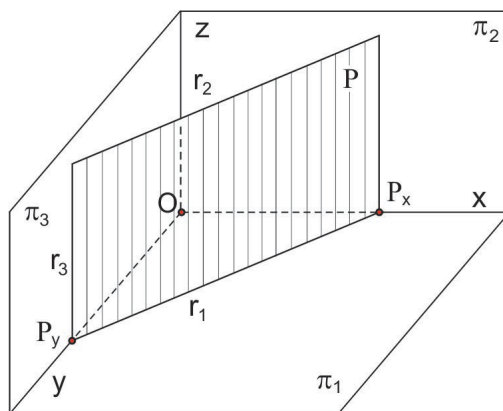
4.5. РАМНИНИ НОРМАЛНИ НА ПРОЕКЦИОНИТЕ РАМНИНИ

Рамнини коишто се нормални на проекционите рамнини се нарекуваат **проектирачки рамнини**.

Рамнина нормална на π_1

Пред модел на три проекциони рамнини од картон поставуваме правоаголно парче од картон, нормално на рамнината π_1 . Ако парчето од картон го замислиме како рамнина во просторот, забележуваме дека таа ја сече z -оската во бесконечност, односно втората и третата трага се паралелни на z -оската (цртеж 4.18).

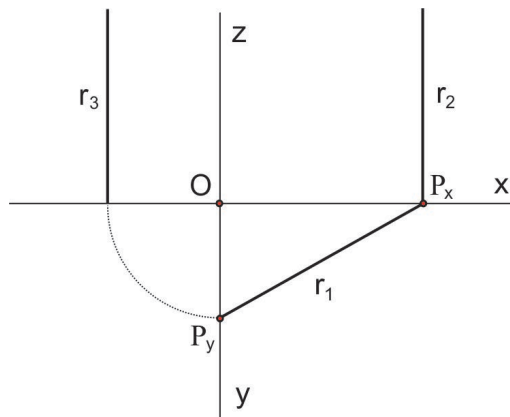
Рамнина којашто е нормална на π_1 се нарекува **првопроектирачка рамнина**.



Цртеж 4.18

Првопроектирачка рамнина има втора и трета трага паралелна со z -оската.

Пример. На цртеж 4.19 нацртани се трагите на првопроектирачката рамнината $P(2,5;1,5;\infty)$.

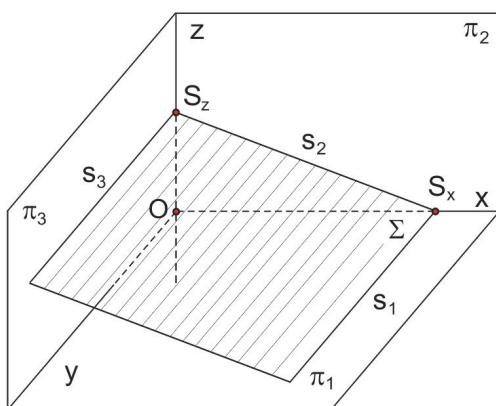


Цртеж 4.19

Рамнина нормална на π_2

Пред модел на три проекциони рамнини од картон поставуваме правоаголно парче од картон, нормално на рамнината π_2 . Ако парчето од картон кој го замислиме како рамнина во просторот, забележуваме дека таа ја сече y -оската во бесконечност, односно првата и третата трага се паралелни на y -оската (цртеж 4.20).

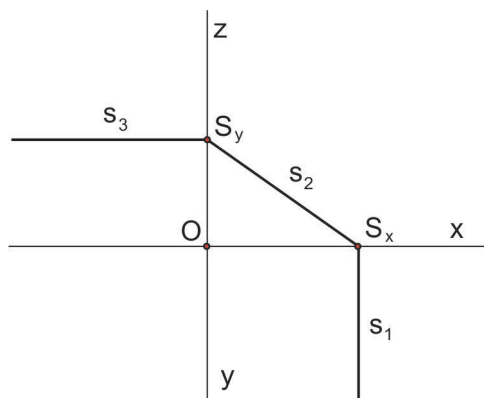
Рамнина којашто е нормална на π_2 се нарекува **второпроектирачка рамнина**.



Цртеж 4.20

Второпроектирачка рамнина има прва и трета трага паралелна со у-оската.

Пример. На цртеж 4.21 нацртани се трагите на второпроектирачката рамнината $\Sigma(2; \infty; 1; 5)$.

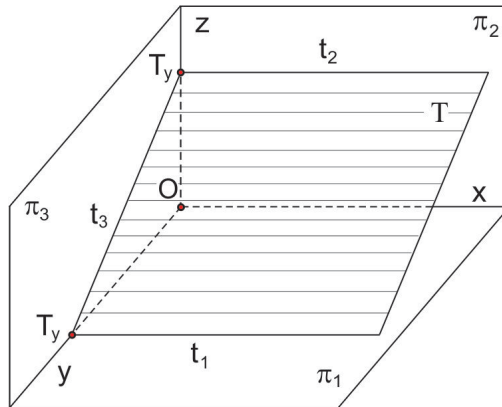


Цртеж 4.21

Рамнина нормална на π_3

Пред модел на три проекциони рамнини од картон поставуваме правоаголно парче од картон, нормално на рамнината π_3 . Ако парчето од картон го замислиме како рамнина во просторот, забележуваме дека таа ја сече x -оската во бесконечност, односно првата и втората трага се паралелни на x -оската (цртеж 4.22).

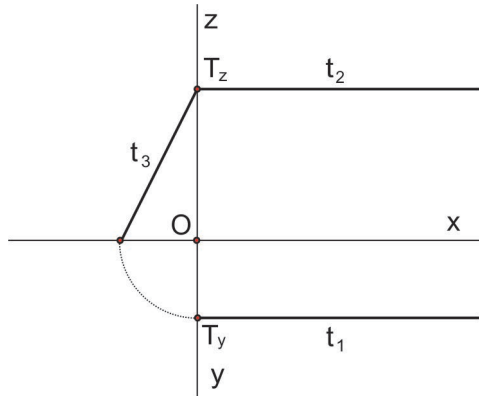
Рамнина којашто е нормална на π_3 се нарекува **третопроектирачка рамнина**.



Цртеж 4.22

Третопроектирачка рамнина има прва и втора трага паралелна со x -оската.

Пример. На цртеж 4.23 нацртани се трагите на третопроектирачката рамнината $T(\infty, 1; 2)$.



Цртеж 4.23

**Прашања и задачи**

1. Нацртај ги трагите на следниве рамнини:

- а) $M(2,5;7;\infty)$; б) $N(3,5;3;\infty)$.

Каква е положбата на рамнините во однос на проекционите рамнини?

2. Нацртај ги трагите на следниве рамнини:

- а) $T(\infty;3;2)$; б) $K(\infty;3;5,5)$.

Каква е положбата на рамнините во однос на проекционите рамнини?

3. Нацртај ги трагите на следниве рамнини:

- а) $L(3;\infty;6)$; б) $B(2;\infty;3,5)$.

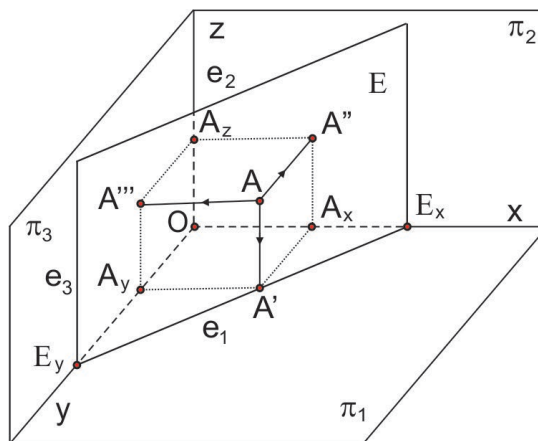
Каква е положбата на рамнините во однос на проекционите рамнини?

4.6. ТОЧКА И ПРАВА ВО ПРОЕКТИРАЧКА РАМНИНА

Во овој дел ќе разгледуваме ортогонални проекции на точка и права, во случај кога тие лежат во една од проектирачките рамнини.

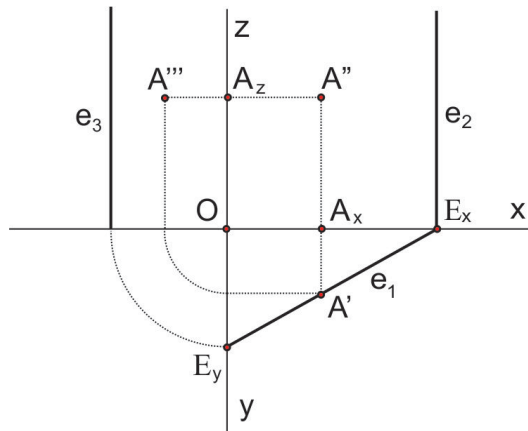
Ако дадена точка A лежи во првопроектирачка рамнина E , тогаш нејзината прва проекција A' ќе лежи на првата трага e_1 на рамнината.

Важи и обратното, ако првата проекција A' на дадена точка A лежи на првата трага e_1 на првопроектирачката рамнина E , тогаш точката A лежи во рамнината E (цртеж 4.24).



Цртеж 4.24

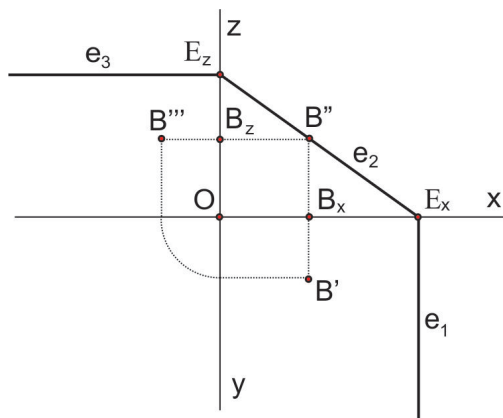
По расклопувањето на проекционите рамнини го добиваме цртеж 4.25.



Цртеж 4.25

Точката B лежи во второпроектирачката рамнината E , па нејзината втора проекција B'' ќе лежи на втората трага e_2 на рамнината E (цртеж 4.26).

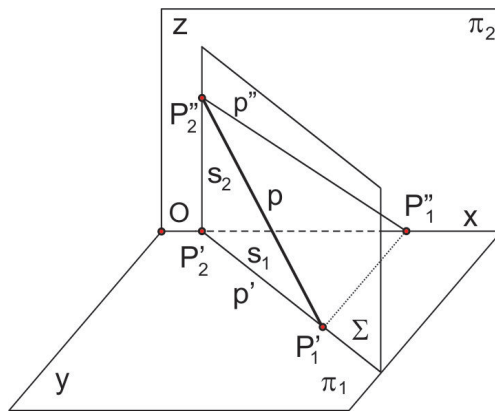
Важи и обратното, ако нацртот B'' на дадена точка B лежи на втората трага e_2 на второпроектирачката рамнина E , тогаш точката B лежи во рамнината E .



Цртеж 2.26

Ако дадена точка C лежи во рамнина E нормална на π_3 , тогаш нејзината трета проекција C''' ќе лежи на третата трага e_3 на рамнината. Важи и обратното, ако третата проекција C''' на дадена точка C лежи на третата трага e_3 на третопроектирачката рамнина E , тогаш точката C лежи во рамнината E .

Ако дадена права p лежи во рамнина Σ нормална на π_1 , тогаш нејзината прва проекција p' ќе лежи на првата трага s_1 на рамнината (цртеж 4.27).

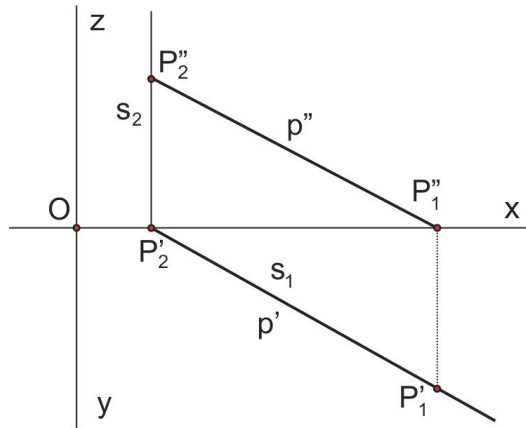


Цртеж 4.27

Притоа, правата p ги сече сите прави кои лежат во рамнината и не се паралелни со неа. Според тоа, таа ги сече двете траги s_1 и s_2 на рамнината Σ . Пресечните точки се всушност пробојните точки P_1 и P_2 на правата p со проекционите рамнини π_1 и π_2 , соодветно.

Важи и обратното, ако првата проекција p' на дадена права p лежи на првата трага e_1 на првoprojectирачката рамнина Σ , тогаш правата p лежи во рамнината Σ .

По расклопувањето на проекционите рамнини го добиваме цртеж 4.28.



Цртеж 4.28

Задача. Нацртај ги трите проекции на правата

$$p=AB[A(2;1;z),B(3;1,5;z)]$$

којашто лежи во рамнината $\Sigma(4,5;\infty;2)$.

Дадена права p лежи во рамнина Σ нормална на π_2 , па нејзината втора проекција p'' ќе лежи на втората трага s_2 на рамнината. Тоа ни овозможува да ги определиме непознатите координати на точките A и B , со тоа и нацртот p'' на правата p .

Тлоцртот p' е определен со тлоцртите A' и B' на точките A и B .

Ако дадена права p лежи во рамнина Σ нормална на π_3 , тогаш нејзината трета проекција p''' ќе лежи на третата трага s_3 на рамнината.

Важи и обратното, ако третата проекција p''' на дадена права p лежи на третата трага s_3 на третопроектирачката рамнина Σ , тогаш правата p лежи во рамнината Σ .



Прашања и задачи

1. Нацртај ги трите проекции на точката $A(2;3;z)$ којашто лежи во рамнината $E(5;\infty;4)$.
2. Нацртај ги трите проекции на точката $B(3;y;3)$ којашто лежи во рамнината $E(\infty;5;6)$.
3. Нацртај ги трите проекции на правата

$$a=AB[A(1;1;z),B(4;3;z)]$$
 којашто лежи во рамнината $\Sigma(6;\infty;4)$.
4. Нацртај ги трите проекции на правата

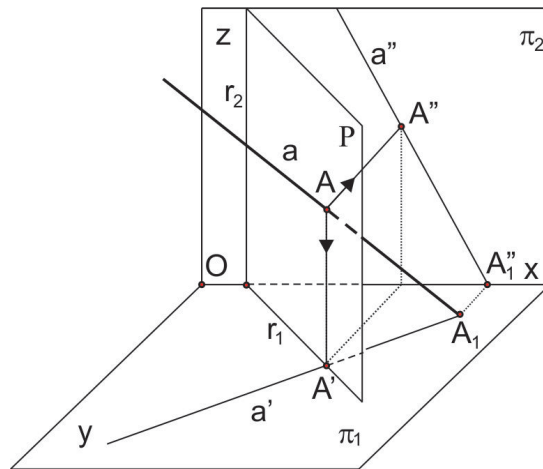
$$m=MN[M(2;y;1),N(6;y;4)]$$
 којашто лежи во рамнината $\Sigma(\infty;4;5)$.
5. Триаголникот $ABC[A(1;y;1),B(3;y;4),C(5;y;2)]$ лежи во рамнината $\Sigma(7;4;\infty)$. Нацртај ги придружените проекции.

4.7. ПРОБОД НА ПРАВА НИЗ ПРОЕКТИРАЧКА РАМНИНА

Во овој дел ќе го разгледуваме проблемот на пробод на права низ проектирачка рамнина.

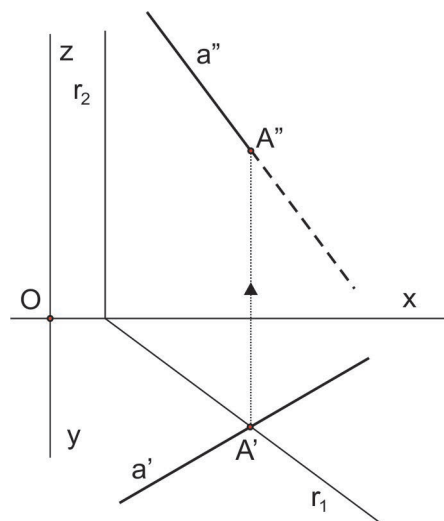
Пробод на права низ првоектирачка рамнина

На цртеж 4.29 прикажана е првоектирачка рамнина P со траги r_1 и r_2 , како и права a со своите придружени проекции a' и a'' .



Цртеж 4.29

Прободот A е заедничката точка на рамнината P и правата a . Бидејќи тлоцртот на сите точки од рамнината P се наоѓаат на нејзината прва трага r_1 , тлоцртот A' на прободот A ќе лежи на r_1 .



Цртеж 4.30

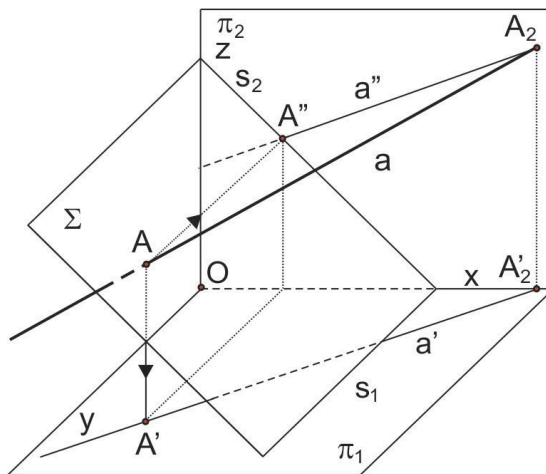
Од друга страна, точката A лежи и на правата a , па нејзиниот тлоцрт A' мора да биде во пресекот на правите r_1 и a' . Врз основа на

оваа дискусија на цртеж 4.30 се определени придружените проекции на прободот на првопроектирачката рамнина P и правата a . Тлоцртот на прободот A' е пресекот на правите r_1 и a' , а нацртот A'' е пресекот на правата a'' со ординалата повлечена од точката A' .

Кога ги гледаме рамнината P и правата a одгоре, ја гледаме целата права бидејќи рамнината P се прикажува како правата r_1 , па затоа на цртеж 4.30 тлоцртот на правата a е нацртан со полна линија. Ако пак, рамнината P и правата a ги гледаме однапред, не го гледаме оној дел на правата кој е десно од прободот A бидејќи го сокрива рамнината, па заради тоа нацртот на тој дел од правата е нацртан со испрекината линија.

Пробод на права низ второпроектирачка рамнина

На цртеж 4.31 прикажана е второпроектирачка рамнина Σ со траги s_1 и s_2 , права a со своите придружени проекции a' и a'' , како и прободот A со придружените проекции A' и A'' .

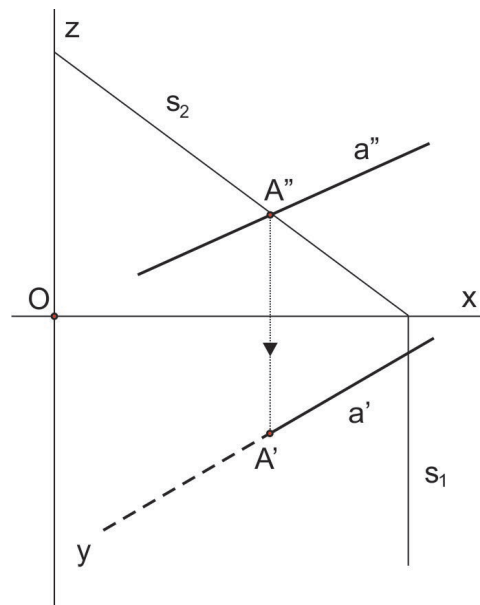


Цртеж 4.31

Бидејќи точката A лежи во рамнината Σ , нејзиниот нацрт A'' се наоѓа на втората трага s_2 .

Од друга страна, точката A лежи и на правата a , па нејзиниот нацрт A'' мора да лежи на нацртот a'' на правата a , па според тоа A'' се наоѓа во пресекот на правите s_2 и a'' .

Врз основа на оваа дискусија на цртеж 4.32 се определени придружените проекции на прободот на второпректирачката рамнина Σ и правата a . Нацртот на прободот A'' е пресекот на правите s_2 и a'' , тлоцртот A' е пресекот на правата a' со ординалата повлечена од точката A'' .



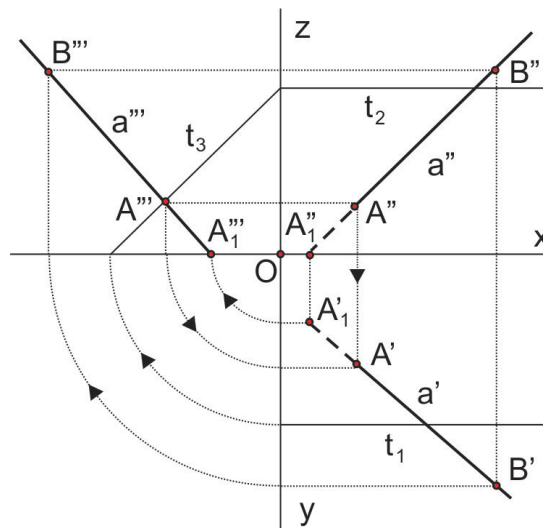
Цртеж 4.32

Кога ги гледаме рамнината Σ и правата a одгоре, не го гледаме оној дел на правата кој е лево од прободот A , па затоа на цртеж 4.32 тлоцртот на тој дел од правата е нацртан со непрекината ли-

нија. Ако пак, рамнината Σ и правата a ги гледаме однапред ја гледаме целата права бидејќи рамнината Σ се прикажува како правата s_2 , па затоа нацртот на правата a е нацртан со полна линија.

Пробод на права низ третопроектирачка рамнина

На цртеж 4.33 прикажани се трагите t_1 , t_2 и t_3 на третопроектирачка рамнина T , придружени проекции a' , a'' и a''' на права a и придружените проекции A' , A'' и A''' на прободот A . За определување на третата проекција a''' на правата a ја користиме третата проекција A_1''' на нејзиниот прв пробод A_1 и третата проекција B''' на која било нејзина точка B . Бидејќи точката A лежи во рамнината T , нејзината трета проекција A''' се наоѓа на третата трага t_3 .



Цртеж 4.33

Од друга страна, точката А лежи и на правата a , па нејзината трета проекција A''' мора да лежи на трета проекција a''' на правата

а, па според тоа A''' се наоѓа во пресекот на правите t_3 и a''' .

Врз основа на оваа дискусија можеме да ги определиме придружените проекции на прободот на третопректирачката рамнина T и правата a . Нацртот на прободот A'' е пресекот на правата a'' и ординалата повлечена од A''' нормално на z -оската, а тлоцртот A' е пресекот на правата a' со ординалата повлечена од точката A'' нормално на x -оската.

Кога ги гледаме рамнината T и правата a одозгора или однапред, не го гледаме оној дел на правата кој е лево од прободот A , па затоа на цртеж 4.33 тлоцртот и нацртот на тој дел од правата се нацртан со непрекината линија. Ако пак, ги гледаме рамнината T и правата a во насока на проектирањето на π_3 , ја гледаме целата права бидејќи рамнината T се прикажува како правата t_3 , па затоа третата проекција на правата a е нацртана со полна линија.



Прашања и задачи

1. Најди го прободот на правата

$$a=AB[A(1;1;1),B(6;2;3)]$$

со рамнината $T(5;3;\infty)$.

2. Најди го прободот на правата $m=MN[M(1;2;1),B(5;4;3)]$

со рамнината $E(5;\infty;4)$.

3. Најди го прободот на правата $r=PQ[P(1;1;1),Q(5;5;6)]$

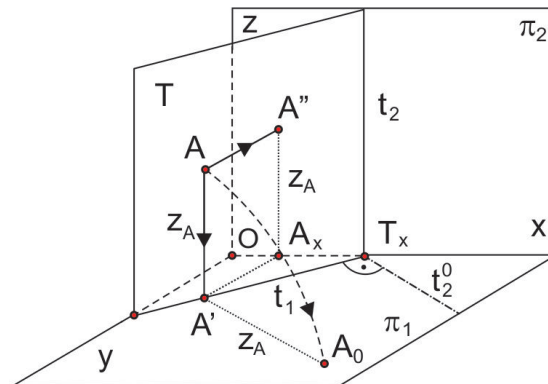
со рамнината $T(\infty;4;5)$.

4.8. СОБОРУВАЊЕ НА ПРОЕКТИРАЧКИ РАМНИНИ

За да ја добиеме вистинската големина на отсечка, агол или рамнинска фигура која лежи во проектирачката рамнина, рамнината ја ротираме околу нејзината трага така што да се совпадне со една од проекционите рамнини.

Соборување на првопроектирачка рамнина

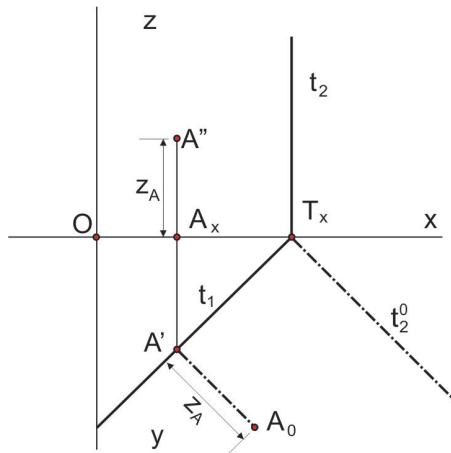
На цртеж 4.34 и цртеж 4.36 прикажана е првопроектирачката рамнината T . Неа може да ја собориме во π_1 или во π_2 , во зависност од тоа дали ќе ја завртиме околу првата или втората трага.



Цртеж 4.34

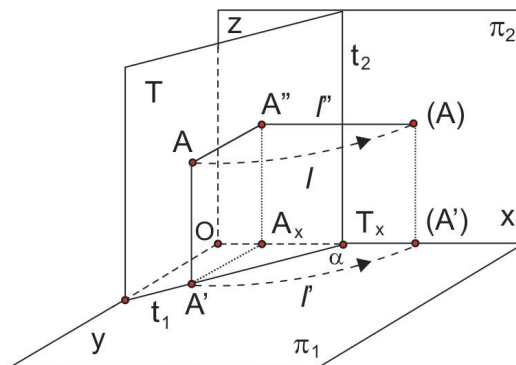
Најнапред ќе покажеме како рамнината T можеме да ја собориме во π_1 , ротирајќи за 90° околу првата трага t_1 (цртеж 4.34). Бидејќи двете траги t_1 и t_2 , се нормални помеѓу себе, тие и по соборувањето на рамнината ќе бидат нормални една на друга. Затоа од точката T_x повлекуваме нормала на t_1 за да ја добиеме втората трага во соборената положба t_2^0 .

Со соборувањето на рамнината T , ги соборуваме и сите точки коишто лежат на неа. Да ја означиме со A_0 точката A во соборена положба. Заради $\overline{AA'} = \overline{A_x A''} = \overline{A' A_0}$ точката A_0 се добива од тлоцртот A' ако нормално на t_1 ја нанесеме z координатата на точката A , односно растојанието $\overline{A_x A''}$ (цртеж 4.35). Слично се добиваат и други точки кои лежат на рамнината T во соборена положба.



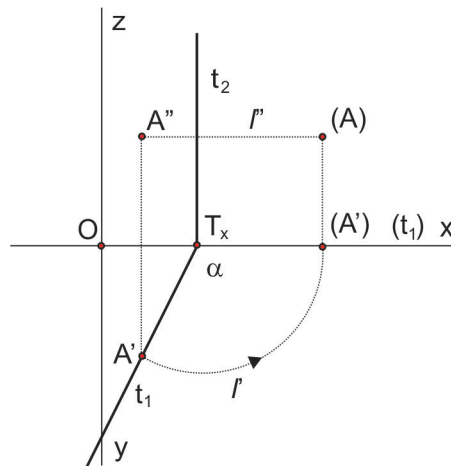
Цртеж 4.35

На цртеж 4.36 прикажан е вториот начин за соборување на рамнината T .



Цртеж 4.36

Рамнината T ја ротираме (вообичаено за тапиот агол α), околу втората трага t_2 , која е нормална на x -оската, сè додека таа не се совпадне со втората проекциона рамнина π_2 . По соборувањето, втората трага t_2 останува нормална на x -оската. Точката A , ротирајќи се заедно со рамнината T , опишува кружен лак којшто е во рамнина паралелна со π_1 и нормална на π_2 . Центарот на кружниот лак се наоѓа на t_2 . Првата проекција I' на кружниот лак I ќе биде во вистинска големина, со радиус $\overline{T_x A'}$ и центар во T_x . Втората проекција I'' ќе биде отсечката $A''(A)$, паралелна со x -оската. Затоа, од T_x со радиус $\overline{T_x A'}$ опишуваме лак до пресекот A' со x -оската. Од (A') повлекуваме нормала на x -оската, а од A'' паралелна права со x -оската. Во нивниот пресек ја добиваме точката (A) (цртеж 4.37).



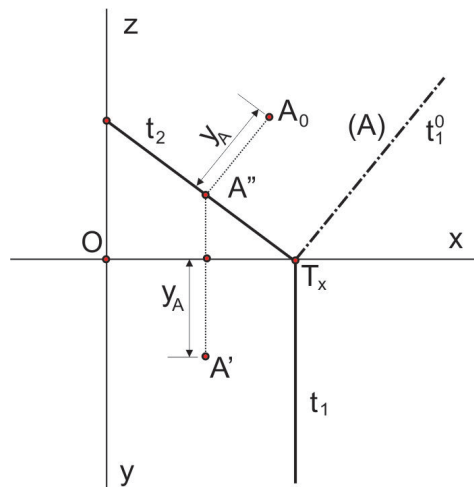
Цртеж 4.37

Соборување на второпроектирачка рамнина

Второпроектирачките рамнини ги соборуваме на сличен начин како и првопроектирачките, со таа разлика што улогите на проек-

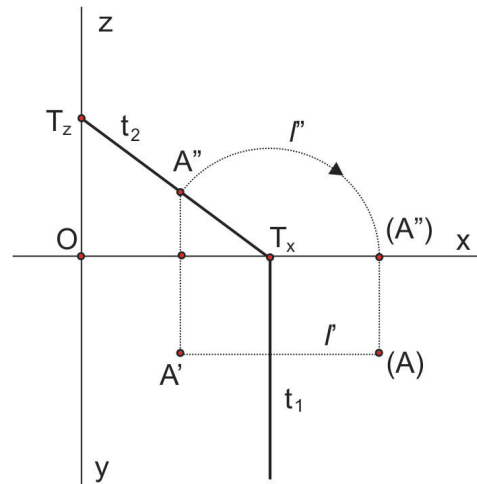
циите се променети.

На цртеж 4.38 прикажано е соборувањето на рамнината T во π_2 со ротација околу втората трага t_2 , а на цртеж 4.39 прикажано е соборувањето на рамнината T во π_1 со ротација околу првата трага t_1 . За да ја собориме рамнината T во π_2 , од T_x повлекуваме нормала на t_2 и ја добиваме првата трага t_1^0 во соборена положба. Точката A во соборена положба A_0 ја добиваме ако, од A'' повлечеме нормала на t_2 , а потоа ја нанесеме у координатата на точката A .



Цртеж 4.38

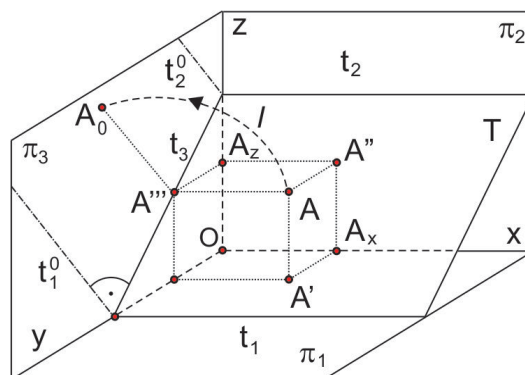
Кога ја соборуваме рамнината T во π_1 , тогаш втората трага t_2 се совпаѓа со x -оската. Точката A во соборена положба (A) се добива ако со радиус $\overline{A''T_x}$ опишеме кружен лак со центар во T_x до пресе-кот со x -оската. Во пресекот се добива точката (A'') . Од A' повлекуваме паралелна права со x -оската, а од (A'') нормала на x -оската. Во пресекот ја добиваме (A) , односно точката A во соборена положба (цртеж 4.39).



Цртеж 4.39

Соборување на третопроектирачка рамнина

На цртеж 4.40 прикажана е третопроектирачката рамнина Т. Трагите t_1 и t_2 , нормални се на третата проекциона рамнина π_3 , па според тоа нормални се и на третата трага t_3 . Рамнината Т ќе ја собориме во π_3 , ако ја ротираме за 90° околу третата трага t_3 . Така

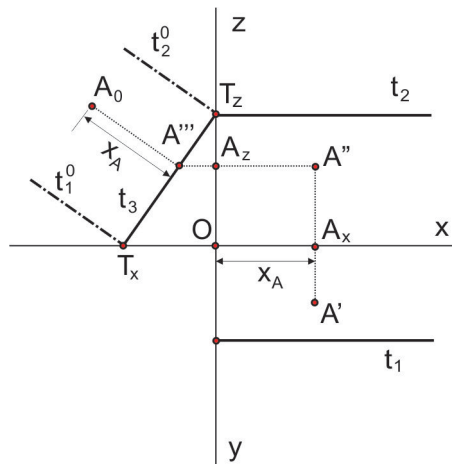


Цртеж.4.40

таа ќе се совпадне со рамнината π_3 . Бидејќи трагите t_1 и t_2 се нормални на трагата t_3 , тие и по соборувањето ќе бидат нормални на t_3 .

Според тоа, од T_x и T_z нормално на t_3 ги повлекуваме соборените положби t_1^0 и t_2^0 , на трагите t_1 и t_2 (цртеж 4.41). Лакот / којшто го опишува точката A при ротацијата околу трагата t_3 во третата проекција се проектира како отсечка $A'''A_0$ нормална на трагата t_3 . Соборената положба A_0 на точката A се добива ако нормално на трагата t_3 од A''' ја нанесеме x координатата на точката A , бидејќи

$\overline{A_0A'''} = \overline{A'''A} = \overline{OA_x}$. На овој начин се добиваат соборените положби и на другите точки коишто лежат на рамнината T .



Цртеж 4.41



Прашања и задачи

1. Нацртај ја соборената положба на точката $A(5;y;7)$ која лежи во рамнината $T(8;5;\infty)$, со соборување на рамнината во:

а) π_1 ; б) π_2 .

2. Нацртај ја соборената положба на точката $B(5;7;z)$ која лежи во рамнината $T(6;\infty;10)$, со соборување на рамнината во:

а) π_1 ; б) π_2 .

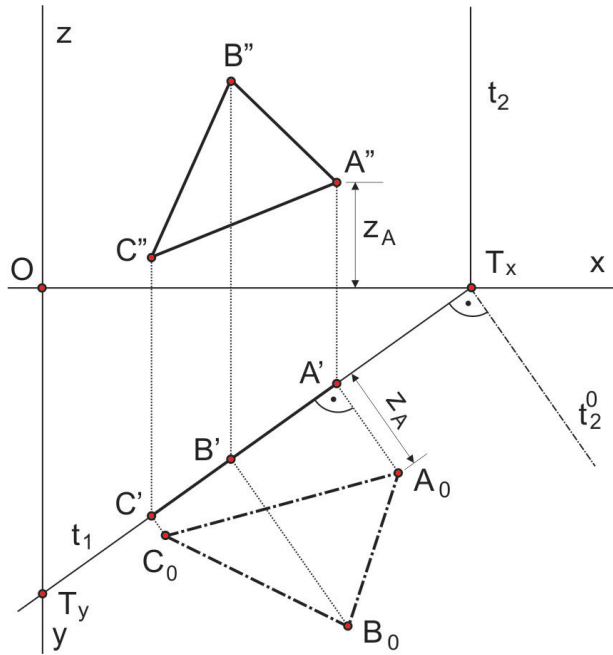
4.9. ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ КОИ ЛЕЖАТ ВО ПРОЕКТИРАЧКИ РАМНИНИ

Ако знаеме како се добива соборена проекција на точка што лежи на проектирачка рамнина, тогаш лесно може да нацртаме геометриски фигури што лежат во проектирачки рамнини. Ова ќе го илустрираме со неколку примери.

Задача. Нацртај ја вистинската големина на триаголникот ABC кој лежи во рамнината $T(8;6,\infty)$, ако $A(5,5;y;2)$, $B(3,5;y;4)$, $C(2;y;0,5)$ (цртеж 4.42).

Откако ќе ги нацртаме трагите на рамнината T , ги нанесуваме координатите на точките A , B и C . Бидејќи рамнината T е првопроектирачка, првата проекција $A'B'C'$ на триаголникот ABC е на трагата t_1 . Според тоа, првата проекција на триаголникот ABC ќе ја добиеме ако од A'' , B'' и C'' повлечеме нормали до пресекот со првата трага t_1 .

Рамнината T ќе ја собориме во π_1 . Од точката T_x нормално на t_1 ја цртаме соборената положба t_2^0 на втората трага t_2 . Потоа од тлоцртот A' , на темето A , нормално на првата трага t_1 ја нанесуваме z координатата на точката A . Така ја добиваме точката A_0 , односно точката A во соборена положба.



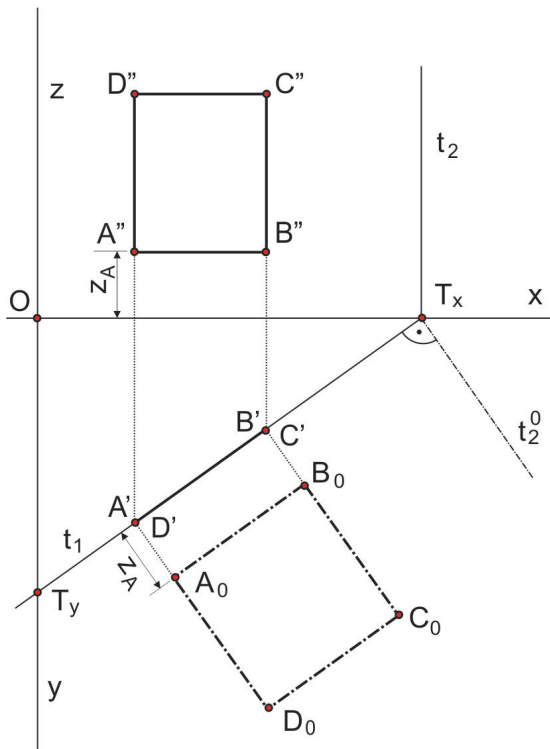
Цртеж 4.42

Истото ќе го сториме и за точките В и С, со што ќе ги добиеме B_0 и C_0 , односно точките В и С во соборена положба. Со сврзување на точките A_0 , B_0 и C_0 го добиваме триаголникот $A_0B_0C_0$, односно триаголникот ABC во вистинска големина.

Задача. Точката $A(1; y; 1,5)$ е теме на квадратот ABCD којшто лежи во рамнината $T(4,5; 4,5; \infty)$. Нацртај ги придружените проекции на квадратот, ако страната AB е долга 3 единици и е паралелна на π_1 (цртеж 4.43).

Откако ќе ја собориме рамнината Т заедно со точката А, од A_0 паралелно со t_1 нанесуваме должина од 3 единици, со што ја добиваме точката B_0 . Знаеме дека ако права или отсечка е паралелна со π_1 , таа во соборена положба ќе биде паралелна со t_1 . Го цртаме квадратот во вистинска големина, па ги добиваме точките C_0 и D_0 . Од точките B_0 , C_0 и D_0 повлекуваме нормала кон трагата t_1 . Во пресекот

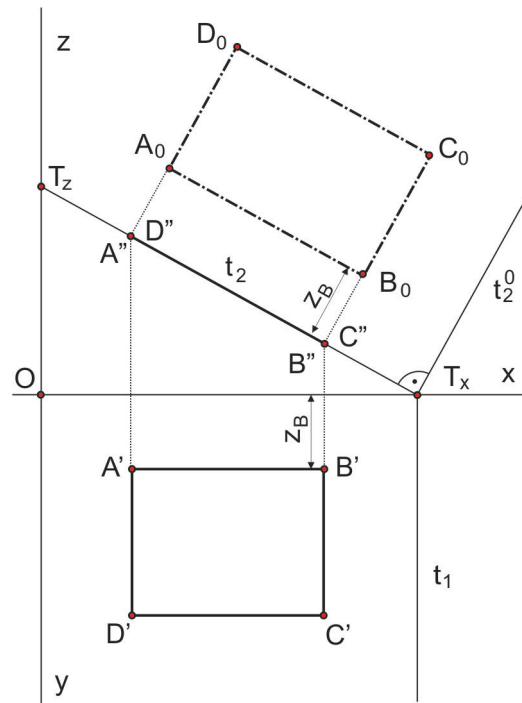
со неа ги добиваме тлоцртите A' , B' , C' и D' , односно тлоцртот на квадратот $ABCD$. Растојанија од точките A_0 , B_0 , C_0 и D_0 до трагата t_1 , всушност се z координатите на тие точки. Со соодветно нанесување на z координатите од x -оската го добиваме нацртот $A''B''C''D''$ на квадратот.



Цртеж 4.43

Задача. Во рамнината $T(6,5;\infty;3,5)$ лежи правоаголник $ABCD$ со темиња $A(1,5;1,5;z)$, $B(5;1,5;z)$, $C(5;4;z)$ и $D(1,5;4;z)$. Нацртај го правоаголникот во вистинска големина (цртеж 4.44).

Ако од точките A' , B' , C' и D' повлечеме нормали на x -оската до пресекот со трагата t_2 , ќе ја добиеме втората проекција $A''B''C''D''$ на правоаголникот. Рамината T ја соборуваче во π_2 .



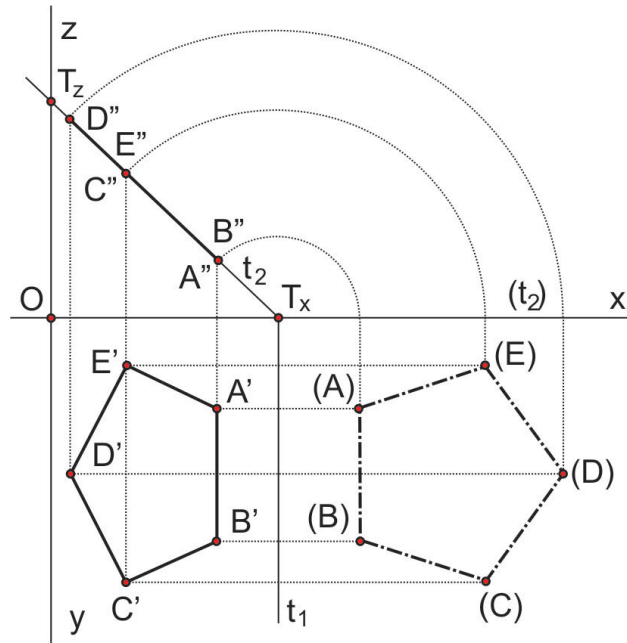
Цртеж 4.44

Ако од нацртите A'' , B'' , C'' и D'' , нормално на трагата t_2 , ги нанесеме у координатите на точките A , B , C и D , ќе ја добиеме соборената положба $A_0B_0C_0D_0$ на правоаголникот $ABCD$, што е и негова висинска големина.

Задача. Правилен петаголник со страна AB долга 3 единици лежи во рамнина $T(5; \infty; 5)$. Нацртај ги придружените проекции на петаголникот, ако страната AB е паралелна со трагата t_1 и оддалечена од неа за 2 единици (цртеж 4.45).

Рамнината T ја ротираме околу трагата t_1 , така да се совпадне со рамнината π_1 . Втората трага t_2 во соборена положба ќе се совпадне со x -оската. Сите точки што лежат на рамнината T , ротирајќи околу трагата t_1 , опишуваат кружни лаци со центри на трагата t_1 . Овие

лаци во втората проекција се проектираат во вистинска големина, додека во првата проекција се проектираат во отсечки нормални на трагата t_1 .

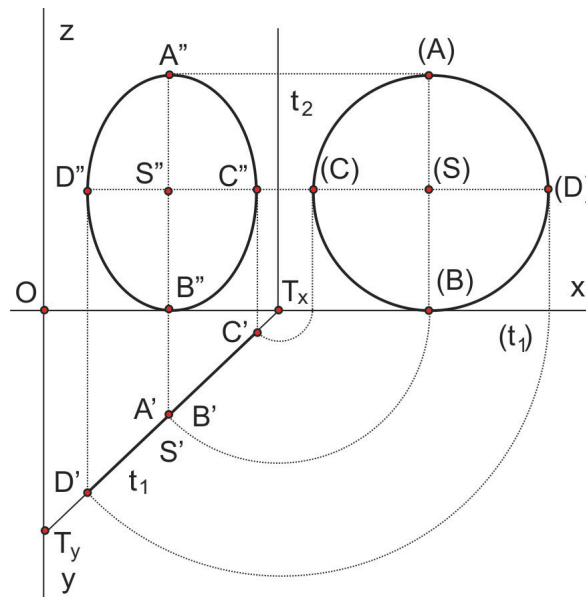


Цртеж 4.45

Откако ќе ја нацртаме соборената положба $(A)(B)$ на страната AB , го цртаме петаголникот $(A)(B)(C)(D)(E)$, односно петаголникот $ABCDE$ во вистинска големина. Како се добиваат тлоцртот $A'B'C'D'E'$ и нацртот $A''B''C''D''E''$ на петаголникот ќе покажеме преку точката A , бидејќи и останатите точки се добиваат на ист начин.

Со радиус 2 единици од T_x цртаме кружен лак до пресекот со трагата t_2 и ја добиваме A'' . Од (A) повлекуваме нормала на трагата t_1 , а од A'' нормала на x -оската. Во пресекот на двете нормали се добива A' .

Задача. Кружница со радиус 3 единици и центар во точката $S(3;y;3)$ лежи во рамнината $T(6;5;\infty)$. Нацртај ги придружените проекции на кружницата (цртеж 4.46).

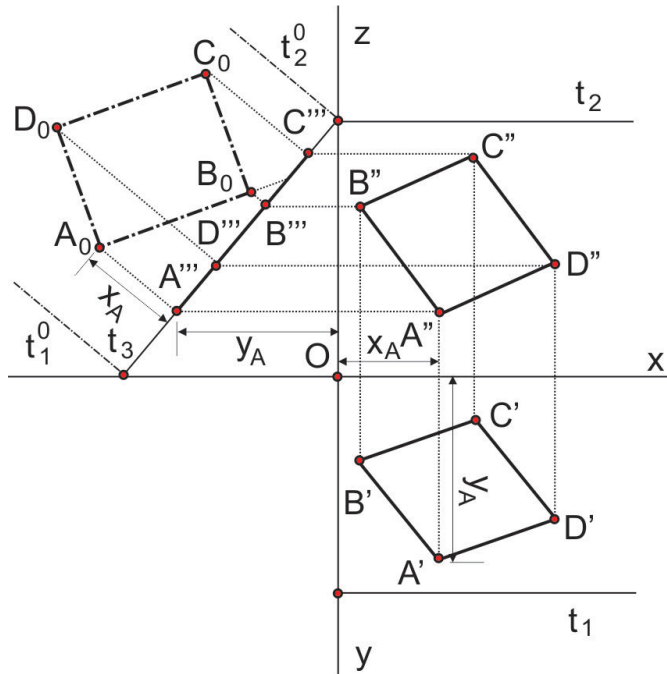


Цртеж 4.46

Рамнината T ја соборуваме во рамнината π_2 , ротирајќи ја околу трагата t_2 . Тогаш трагата t_1 ќе се совпадне со x -оската. Прво ја наоѓаме точката (S) , а потоа со дадениот радиус цртаме кружница, со што ја добиваме кружницата во соборена положба. Потоа повлекуваме два заемно нормални дијаметри $(A)(B)$ и $(C)(D)$, така што дијаметарот $(A)(B)$ е паралелен на трагата t_2 , а дијаметарот $(C)(D)$ е нормален на трагата t_2 . Овие дијаметри ги враќаме назад во прва и втора проекција на претходно опишаниот начин и ги добиваме оските на елипсата.

Елипсата ја цртаме со една од конструкциите на елипса или со враќање назад на доволно голем број на точки на елипсата.

Задача. Нацртај ги придружените проекции на правоаголник ABCD кој лежи во рамнина $T(\infty; 5; 6)$, ако A $(2, 5; y; 1)$, страната AB е долга 4 единици и зафаќа агол 30° со трагата t_3 , додека страната BC е долга 3 единици (цртеж 4.37).



Цртеж 4.47

Кога рамнината е третопроектирачка, како што е случајот со рамнината T , рамнината ја соборуваме во π_3 . Откако ќе ја добиеме A_0 , за дадените услови од задачата го цртаме правоаголникот $A_0B_0C_0D_0$ во соборена положба, а потоа ги наоѓаме првата проекција $A'B'C'D'$ и втората $A''B''C''D''$ проекција на правоаголникот, на сличен начин како што е опишано во претходното поглавје, каде што имаме пример за соборување на третопроектирачка рамнина.



Прашања и задачи

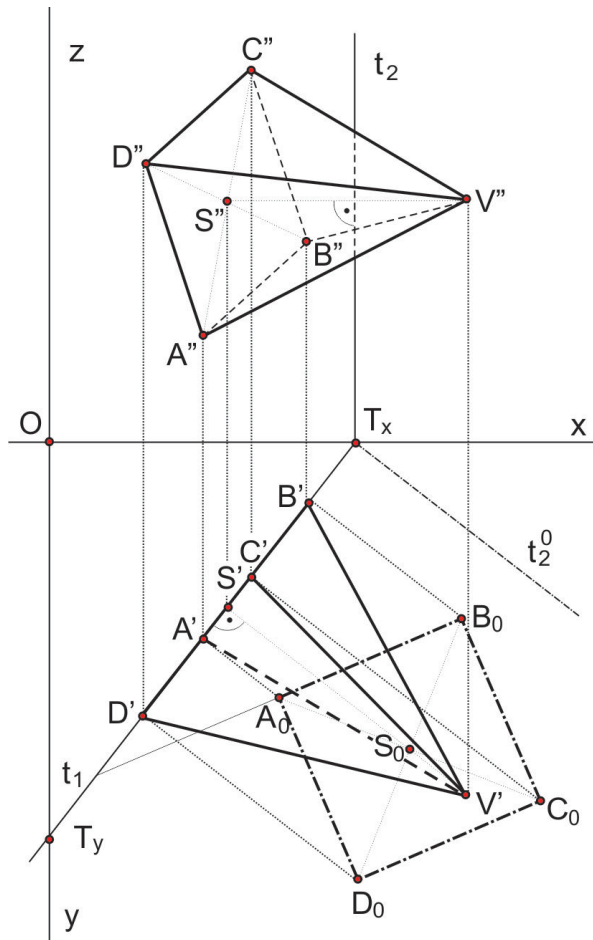
1. Нацртај ја вистинската големина на триаголник ABC којшто лежи на рамнината $T(7;\infty;6)$, ако $A(0;4;z)$, $B(2;1;z)$ и $C(5;3;z)$.
2. Точката $A(1;y;2)$ е теме на правилен петаголник ABCDE со страна долга 3 cm, којшто лежи во рамнината $T(5;5;\infty)$. Нацртај ги проекциите на петаголникот, ако страната AB е паралелна со рамнината π_1 .
3. Точката $M(4;y;4)$ е центар на опишаната кружница околу шестаголник со страна долга 3 cm. Нацртај ги проекциите на шестаголникот, ако тој лежи во рамнината $T(\infty;8;8)$.
4. Нацртај ги проекциите на кружница со центар во точката $S(4;3;z)$ која лежи во рамнината $T(7;\infty;6)$ и ја допира рамнината π_2 .

4.10. ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА КОИ ЛЕЖАТ СО ОСНОВАТА ВО ПРОЕКТИРАЧКИ РАМНИНИ

Во овој дел ќе ги цртаме проекциите на геометриски тела чија-што основа е во проектирачка рамнина. Со неколку примери ќе ја илустрираме постапката за решавање вакви задачи.

Задача. Нацртај ги проекциите на права правилна пирамида чијашто основа ABCD лежи во првопроектирачка рамнина T и основниот раб AB со рамнината π_1 зафаќа агол од 30° (црт 4.48).

Од точката A_0 , под агол од 30° кон трагата t_1 ја нанесуваме вистинската големина на основниот раб AB и ги добиваме A_0B_0 .



Цртеж 4.48

Го конструираме квадратот $A_0B_0C_0D_0$ и ги повлекуваме дијагоналите со што ја добиваме точката S_0 , која е подножје на висината на пирамидата. Потоа ги цртаме тлоцртот $A'B'C'D'$ и нацртот $A''B''C''D''$ на основата. Исто така, ги наоѓаме тлоцртот S' и нацртот S'' на точката S , на веќе претходно опишаниот начин.

Бидејќи висината е нормална на основата, а основата лежи на рамнината T , од S' нормално на трагата t_1 повлекуваме нормала n' , а од S'' нормално на трагата t_2 повлекуваме нормала n'' .

Висината на пирамидата SV е паралелна со π_1 , па во првата проекција се проектира во вистинска големина. Затоа од S' на n' ја нанесуваме должината на висината SV и го добиваме тлоцртот V' на врвот V . Втората проекција V'' се добива кога од V' ќе се издигне нормала на x -оската до пресекот со n'' . Ако го сврземе V со другите темиња од основата ги добиваме проекциите на пирамидата.

Во прва проекција ќе биде видлива контурата и работ $C'V'$, затоа што точката C е највисока во правецот на гледање, додека точката A е најниска, па работ $A'V'$ ќе биде невидлив.

Во втора проекција ќе биде видлива контурата и работ $D''V''$, додека работ $B''V''$ ќе биде невидлив, затоа што точката B е најоддалечена во правецот на гледање.

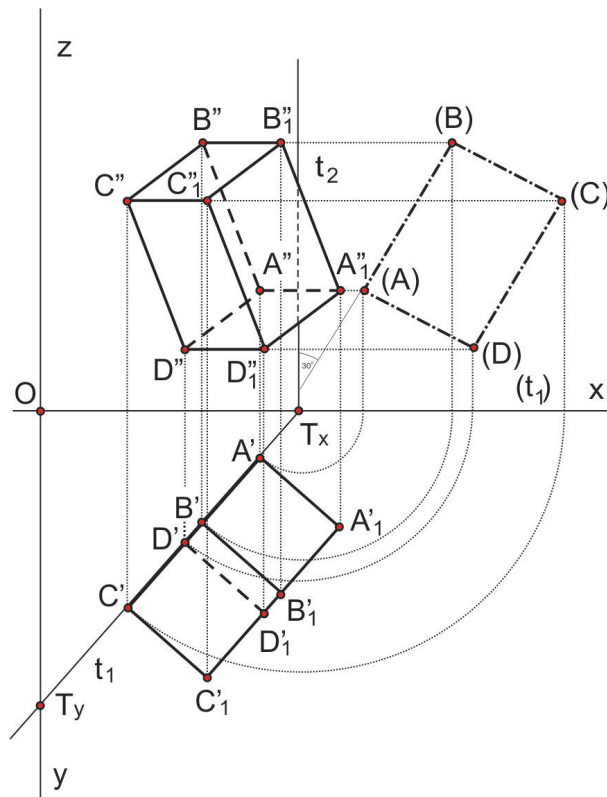
Задача. Нацртај ги проекциите на права призма со основни рабови AB , CD и висина h , која со основата лежи во првопроектирачка рамнина T , а основниот раб AB со рамнината π_2 зафаќа агол од 30° (цртеж 4.49).

Рамнината T ќе ја собориме во π_2 ротирајќи ја околу трагата t_2 . Од точката (A) под агол од 30° кон трагата t_2 го нанесуваме основниот раб AB , а потоа го цртаме правоаголникот $(A)(B)(C)(D)$, односно вистинската големина на основата. Потоа го цртаме тлоцртот $A'B'C'D'$ и нацртот $A''B''C''D''$ на основата. Од нацртот на темињата на основата цртаме нормали кон трагата t_2 , а од тлоцртот на основата цртаме нормали кон трагата t_1 . Висината во прва проекција се проектира во вистинска големина, па затоа на нормалите во прва проекција ја нанесуваме висината h , со што ги добиваме темињата

од горната основа на призмата во прва проекција. Ако од нив издигнеме ординали до пресекот со соодветните нормали во втора проекција, ќе ги добиеме вторите проекции на темињата од горната основа на призмата.

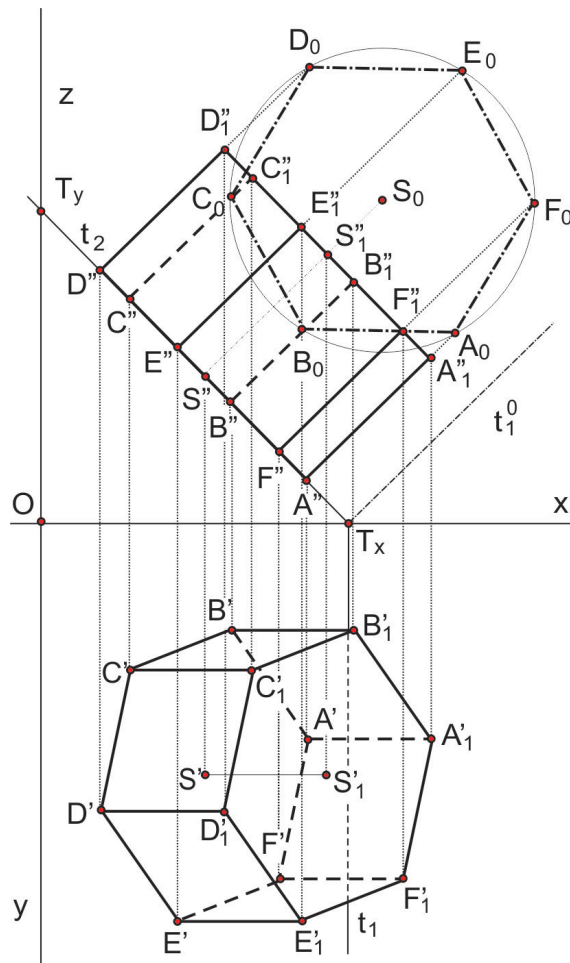
Во прва проекција ќе биде видлива контурата и работ $B'B_1'$, затоа што е највисок во правецот на гледање, додека работ $D'D_1'$ нема да биде видлив бидејќи е најнизок во правецот на гледање.

Во втора проекција ќе биде видлива контурата и работ $C''C_1''$. Најоддалечена точка во правецот на гледање е точката A , па сите рабови кои таа ги сврзува се невидливи.



Цртеж 4.49

Задача. Нацртај ги проекциите на права правилна шестаголна призма со основен АВ и висина Н, која со основата лежи во второ-проектирачка рамнина Т и точката S е центар на опишаната кружница околу шестаголникот (цртеж 4.50).



Цртеж 4.50

Рамнината Т ја соборуваче во π_2 и ја добиваче точката S_0 . По-тоа цртаме една од можните соборени положби $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ на

шестаголникот $ABCDEF$, а потоа овие темиња ги враќаме назад во прва и втора проекција, со што ги добиваме првата проекција $A'B'C'D'E'F'$ и втората проекција $A''B''C''D''E''F''$ на основата на призмата.

На нормалите подигнати од вторите проекции на темињата на t_2 ја нанесуваме вистинската големина на висината, па ги добиваме вторите проекции на темињата од горната основа на призмата. Потоа ја наоѓаме првата проекција на горната основа.

Во првата проекција видлива ќе биде контурата и рабовите што ги сврзуваат точките C_1' и D_1' бидејќи точките C_1 и D_1 се највисоки во правецот на гледање. Точките A и F се најниски, па тлоцртите на рабовите кои тие ги сврзуваат ќе бидат невидливи.

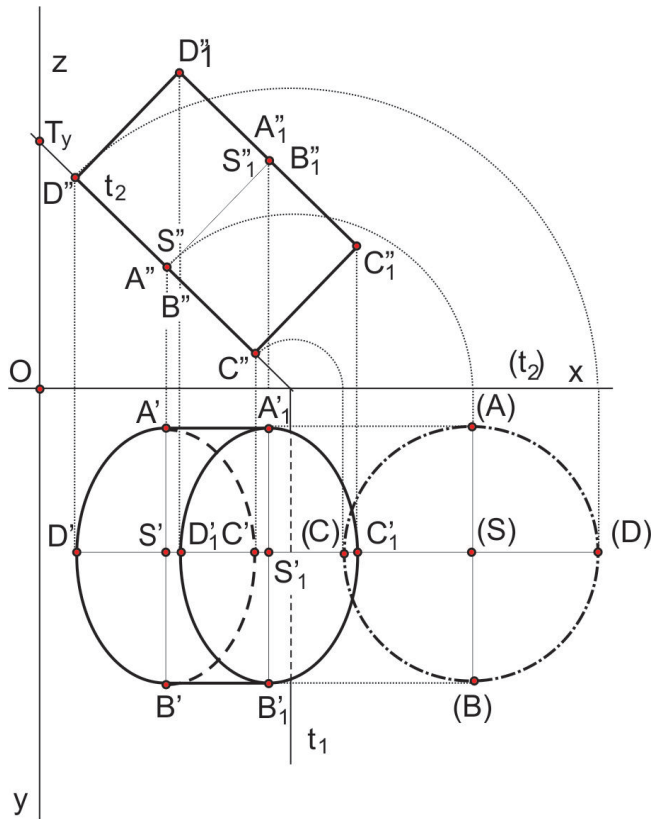
Во втората проекција видлива ќе биде контурата на призмата и рабовите $E''E_1''$ и $F''F_1''$, бидејќи се најблиску во правецот на гледање. Точките B и C се најоддалечени во правецот на гледање, па проекциите на рабовите кои тие ги сврзуваат ќе бидат невидливи.

Задача. Нацртај ги проекциите на прав кружен цилиндар, со даден радиус, висина и центар на основата S , со којашто лежи во второпроектирачка рамнина T (цртеж 4.51).

Откако ќе ја собориме рамнината T , заедно со точката S , цртаме кружница со дадениот радиус со центар во (S) . Повлекуваме два дијаметри такви што $(A)(B)$ е паралелен со трагата t_1 и $(C)(D)$ е нормален на трагата t_1 . Ги наоѓаме првата проекција $A'B'$ и $C'D'$ и втората проекција $A''B''$ и $C''D''$. Во прва проекција ја цртаме елипсата со една од познатите конструкции или со избор на доволно голем број на точки од елипсата.

Бидејќи висината во втора проекција се проектира во вистинска големина, ја нанесуваме на нормалата издигната од S'' и ја доби-

ваме S_1'' . Втората проекција на долната и горната основа се отсечки со должина еднаква на дијаметарот на кругот, од кои долната ќе лежи на трагата t_2 , а горната е паралелна на неа. Потоа ги повлекуваме контурните изводници $C''C_1''$ и $D''D_1''$.



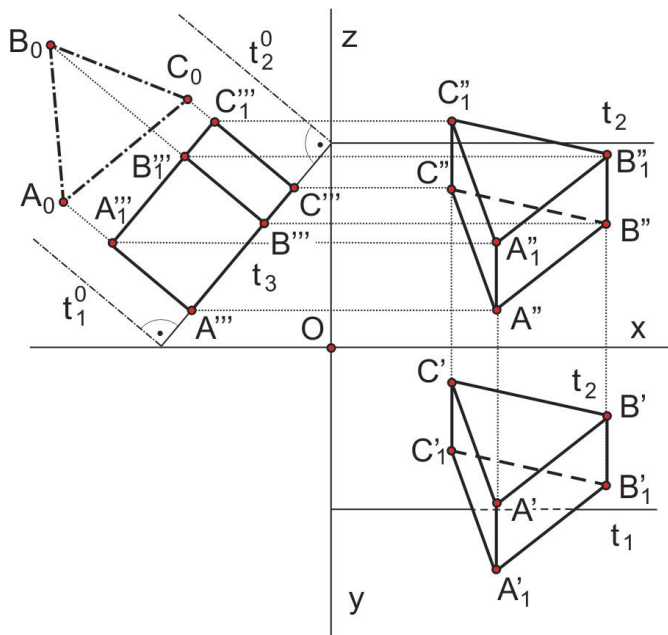
Цртеж 4.51

Откако ќе го нацртаме тлоцртот на горната основа на цилиндарот и ќе ги повлечеме контурните изводници $A'A_1'$ и $B'B_1'$, ја определуваме видливоста на цилиндарот. Во прва проекција ќе биде видлива контурата и горната основа на цилиндарот. Граница на видли-

вата и невидливата површина на цилиндарот ќе бидат изводниците $A'A_1'$ и $B'B_1'$.

Во втора проекција видлива ќе биде контурата на цилиндарот, а границата на видливата и невидливата површина на цилиндарот ќе бидат изводниците $C''C_1''$ и $D''D_1''$.

Задача. Нацртај ги проекциите на права правилна тристрана призма со висина h , ако една нејзина основа ABC лежи во третопроектирачка рамнина T (цртеж 4.52).



Цртеж 4.52

Рамнината T ја соборуваче во π_3 . Откако ќе ја нацртаме соборената положба $A_0B_0C_0$ на основата на призмата којашто лежи во рамнината T , овие точки ги враќаме назад во прва проекција $A'B'C'$, втора проекција $A''B''C''$ и трета проекција $A'''B'''C'''$.

Бидејќи бочните рабови се нормални на рамнината T , тие во трета проекција ќе се проектираат во вистинска големина. Затоа на нормалите подигнати од $A'''B'''C'''$ на трагата t_3 ја нанесуваме висината на призмата h со што се добиваат третите проекции на темињата од горната основа, која во третата проекција ќе се проектира како отсечка, додека долната основа ќе биде на t_3 .

Првата проекција $A_1'B_1'C_1'$ на горната основа на призмата ќе биде на нормалите повлечени од $A'B'C'$ на трагата t_1 .

Втората проекција $A_1''B_1''C_1''$ на горната основа на призмата ќе биде на нормалите повлечени од $A''B''C''$ на трагата t_2 .

Во првата проекција видлива ќе биде контурата на призмата, додека рабовите кои ги сврзува точката A' ќе бидат невидливи, бидејќи точката A е најниска во правецот на гледање.

Во втората проекција видлива ќе биде контурата на призмата, а невидлив ќе биде работ $B''C''$, бидејќи работ BC е најоддалечен во правецот на гледање.

Во третата проекција видлива ќе биде контурата и работ $B'''B_1'''$, бидејќи работ $B'B_1'$ е најблизок во правецот на гледање.



Прашања и задачи

1. Нацртај ги проекциите на коцка со основен раб 3 единици, ако еден нејзин бочен сид лежи во првопроектирачка рамнина T и основниот раб со рамнината π_1 зафаќа агол од 45° .
2. Нацртај ги проекциите на права пирамида со основни рабови AB , CD и висина h , која со основата лежи во првопроектирачка рамнина T , а основниот раб AB со рамнината π_2 зафаќа агол од 60° .

3. Нацртај ги проекциите на права правилна шестаголна пирамида со основен раб 2 единици и висина 5 единици, чијашто основа лежи во второпроектирачка рамнина T . Точката $S(8;6;7)$ е центар на опишаната кружница околу шестаголникот.
4. Нацртај ги проекциите на прав рамностран цилиндар со радиус 3 единици и центар на основата $S(7,6,5)$ со која лежи во второпроектирачка рамнина T .
5. Нацртај ги проекциите на права правилна четириаголна призма со основен раб долг 3 единици и висина 5 единици, чијашто основа лежи во третопроектирачка рамнина T .

5. ТРАНСФОРМАЦИЈА

5.1. ПОИМ ЗА ТРАНСФОРМАЦИЈА

Некои предмети се така направени што нивната трета проекција може полесно да се нацрта ако проекционата рамнина π_3 не е нормална на двете проекционата рамнини π_1 и π_2 , туку е нормална само на рамнината π_1 или само на рамнината π_2 . Таквата проекционата рамнина π_3 која не е поставена бочно туку странично на предметот се вика **трансформациска рамнина**, а нормалната проекција на предметот на таа рамнина се вика **трансформирана проекција** на предметот.

Постапката на воведување нови рамнини и определување проекции на нив се вика **трансформација**.

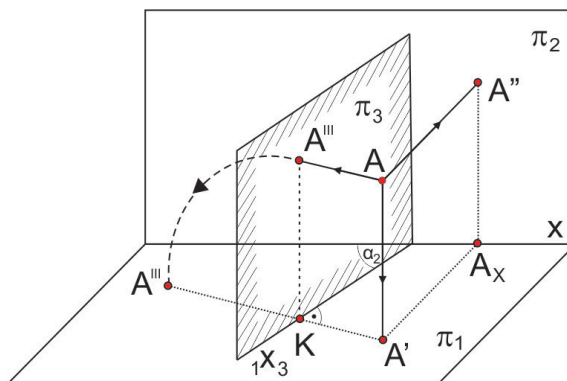
Со помош на трансформација некои технички предмети можеме полесно да ги предочиме. Исто така има и технички задачи кои може полесно да се решат ако на рамнините π_1 и π_2

се додаде проекционата рамнина π_3 која е нормална само на една од нив, а освен тоа има некоја специјална положба во однос на некои елементи од задачата што треба да ја решиме.

5.2. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА ТОЧКА

Кај трансформација на точка ќе проучиме детално три случаи во зависност од положбата на трансформациската рамнина.

- Нека трансформациската рамнина π_3 е нормална само на рамнината π_1 .



Цртеж 5.1

На цртеж 5.1 прикажани се проекционите рамнини π_1 и π_2 , точката A во просторот заедно со нејзиниот тлоцрт A' и нацртот A'' . На рамнините π_1 и π_2 им е додадена уште и трансформациската рамнина π_3 која е нормална на π_1 , а со π_2 зафаќа

агол α_2 . Таа ја сече рамнината π_1 во права која е означена со $1x_3$.

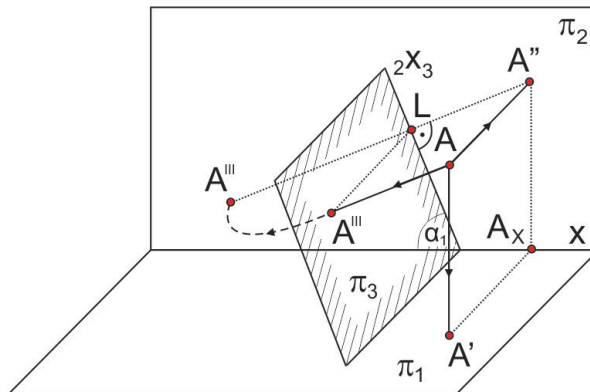
Ако од точката A повлечеме нормала на трансформациската рамнината π_3 тогаш нејзиното подножје A^{III} е трансформирана проекција или трансформација на точката A на рамнината π_3 која е нормална само на рамнината π_1 . Рамнината која ја сочинуваат нормалите AA' и AA^{III} спуштени од точката A на π_1 и на π_3 е нормална на $1x_3$ -оската во којашто се сечат тие две рамнини. Ако таа рамнина ја сече $1x_3$ -оската во точката K , тогаш отсечките $A'K$ и $A^{III}K$ се нормални на таа оска. Од правоаголниците $AA'KA^{III}$ и $AA'A_xA''$ следува $\overline{KA^{III}} = \overline{A'A} = \overline{A_xA''}$, односно $\overline{KA^{III}} = \overline{A_xA''}$. Според тоа, може да заклучиме дека

Растојанието на проекцијата A^{III} на точката A до $1x_3$ -оската еднакво е на растојанието на нацртот A'' на точката A до x -оската.

Ако сега трансформациската рамнина π_3 ја собориме околу $1x_3$ -оската на лева страна на рамнината π_1 тогаш точката A^{III} од рамнината π_3 опишува во насоката на стрелките на часовникот четвртина кружница за која точката K е центар и паѓа на π_1 во точката A^{III} која со точката A' е на нормала повлечена од A' кон $1x_3$ оската. Така ги добивме новите проекции A' и A^{III} од точката A , како што претходно беа A' и A'' проекции на точката A .

Задача. Дадени се тлоцртот A' и нацртот A'' на точката A . Нацртај ја трансформацијата на точката A , ако трансформа-

на π_3 која е нормална само на π_2 . Рамнината на нормалите AA'' и AA''' спуштени од точката A на π_2 и на π_3 е нормална на $2X_3$ -оската во која се сечат тие две рамнини.



Цртеж 5.3

Ако таа рамнина ја сече $2X_3$ -оската во точката L тогаш отсечките $A''L$ и $A'''L$ се нормални на таа оска. Од правоаголниците $AA''LA'''$ и $AA'A_xA''$ следува $\overline{LA'''} = \overline{A''A} = \overline{A_xA}$, односно $\overline{LA'''} = \overline{A_xA}$. Според тоа, може да заклучиме дека:

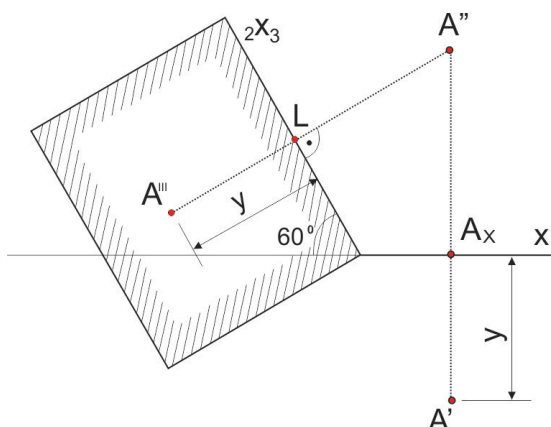
Растојанието на проекцијата A''' на точката A до $2X_3$ -оската е еднакво на растојанието на тлоцртот A' на точката A до x -оската.

Ако сега трансформациската рамнина π_3 ја собориме околу $2X_3$ -оската на левата страна на рамнината π_2 , тогаш точката A''' од рамнината π_3 опишува во правецот на стрелките на часовникот четвртина кружница на која точката L е центар и

паѓа на π_2 во точката A''' која со точката A'' е на нормала од A'' кон $2X_3$ -оската.

Задача 2. Дадени се тлоцртот A' и нацртот A'' на точката A . Нацртај ја трансформацијата на точката A , ако трансформациската рамнина е нормална на рамнината π_2 , а со рамнината π_1 зафаќа агол од 60° (цртеж 5.4).

Од нацртот A'' на точката A повлекуваме нормала на новата $2X_3$ -оска која со x -оската зафаќа агол од 60° . На таа нормала мора да биде трансформацијата A''' која се добива од условот $\overline{LA'''} = \overline{A_x A'} = y$.



Цртеж 5.4

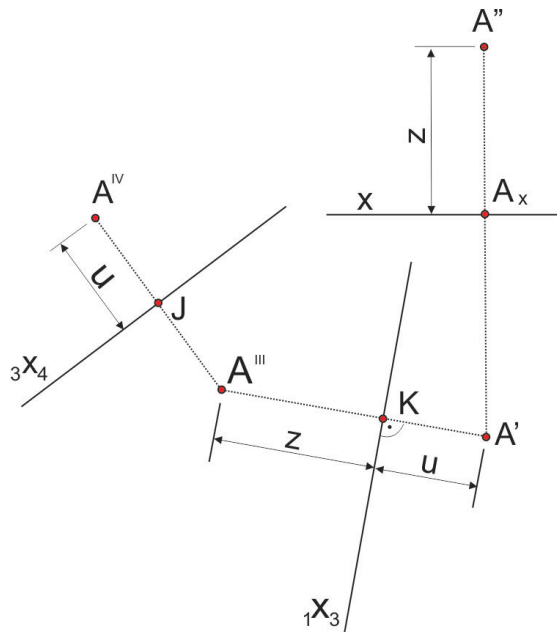
На цртеж 5.2 и на цртеж 5.4 соборената трансформациска рамнина заградена е со правоаголник чијашто една страна е на $1X_3$ -оската, односно $2X_3$ -оската.

- Нека трансформациската рамнина π_4 е нормална на трансформациската рамнината π_3 .

На цртеж 5.5 прикажани се проекционите рамнини π_1 и π_2 , точката A во просторот, како и нејзиниот тлоцрт A' и нацртот

Растојанието на проекцијата A^{IV} до $3x_4$ -оската е еднакво е на растојанието на тлоцртот A' на точката A до $1x_3$ -оската.

Ако сега трансформациска рамнина π_4 ја собориме околу $3x_4$ -оската спрема горе на рамнината π_3 , тогаш точката A^{IV} од рамнината π_4 опишува во правецот на стрелката на часовникот четвртина кружница чијшто центар е точката J и паѓа на π_3 во точката A^{IV} која со точката A^{III} се наоѓа на права низ точката A^{III} нормална на $3x_4$ -оската. На крајот трансформациската рамнина π_3 заедно со точките A^{III} и A^{IV} ја соборуваме околу $1x_3$ -оската на левата страна на рамнината π_1 , како на цртеж 5.1.



Цртеж 5.6

Задача 3. Дадени се тлоцртот A' и нацртот A'' на точката A и оските π_3 и π_4 . Нацртај ги трансформираниите проекции A''' и A^{IV} на точката A (цртеж 5.6).

Прво се црта трансформацијата A''' на таа точка како на цртеж 5.2, а потоа од точката A''' се поставува нормала на π_4 -оската. Потоа се наоѓа точката A^{IV} така што $\overline{JA^{IV}} = \overline{KA'} = u$.



Прашања и задачи

1. Нацртај ја трансформацијата на точката A , дадена со придружените проекции A' и A'' , ако трансформационската рамнина е:

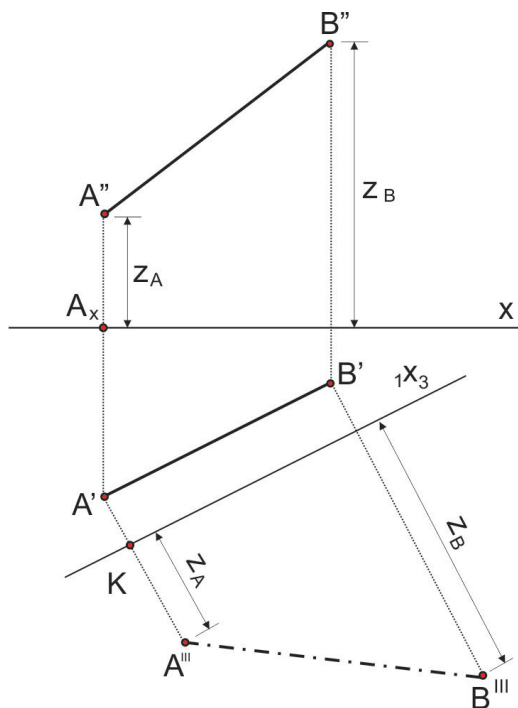
а) нормална на π_1 а со π_2 зафаќа агол од 45° .

б) нормална на π_2 , а со π_1 зафаќа агол од 30° .

5.3. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

На цртеж 5.7 дадени се проекциите на отсечка AB . Потоа е поставена π_3 -оската во која се сечат рамнините π_1 и трансформационската рамнина π_3 која е нормална само на проекционата рамнина π_1 .

Конструкција на трансформацијата на отсечката се изведува на начин прикажан во претходното поглавје за секоја од крајните точки на отсечката, на пример, $A'A''' \perp \pi_3$, $\overline{KA'''} = \overline{A_xA''}$ итн. Трансформацијата на отсечката $A'''B'''$ ја добиваме со сврзување на трансформациите A''' и B''' на крајните точки.



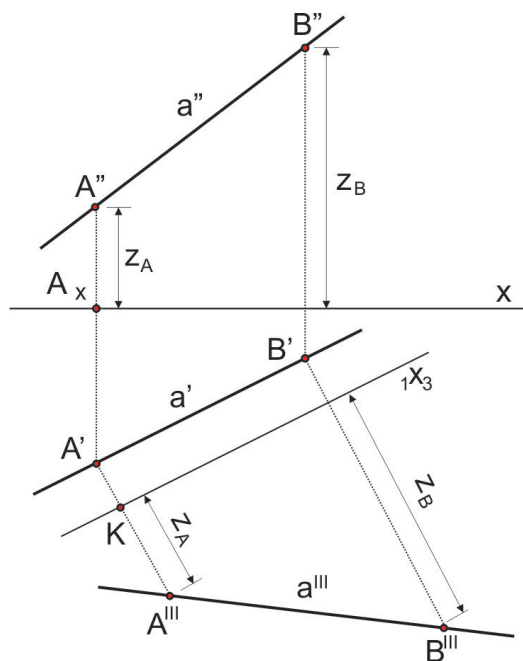
Цртеж 5.7

Специјално, ако трансформациската рамнина е паралелна на отсечката AB тогаш отсечката во трансформираната проекција ќе се прикаже во вистинска големина.

На цртеж 5.8 дадени се проекциите на правата $a=AB$. Поставена е $1x_3$ -оска во која се сечат рамнините π_1 и трансформациската рамнина π_3 која е нормална само на проекционата рамнина π_1 .

Конструкција на трансформацијата на правата се изведува со трансформација на две произволни точки A и B на правата, на начин прикажан во претходното поглавје, на пример, $A'A''' \perp 1x_3$, $\overline{KA'''} = \overline{A_x A''}$ итн. Трансформацијата на правата a''' ја

добиваме со сврзување на трансформираните проекции A^{III} и B^{III} на двете избрани точки, односно $a^{III}=A^{III}B^{III}$.

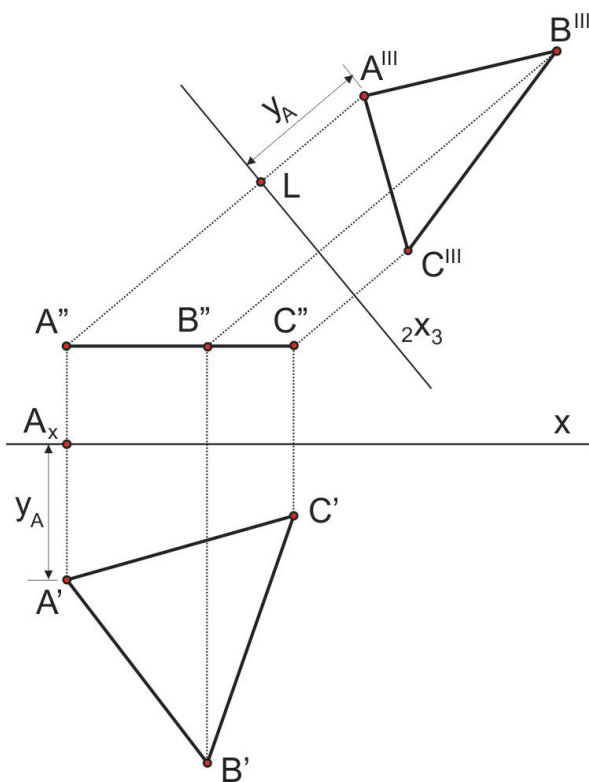


Цртеж 5.8

Специјално, ако трансформациската рамнина е паралелна на правата $a=AB$ тогаш во трансформираната проекција можеме да решаваме проблеми сврзани со растојанија.

На цртеж 5.9 дадени се проекциите на триаголникот ABC кој е паралелен со рамната π_1 . Поставена е $2x_3$ -оска во која се сечат рамнините π_2 и трансформациската рамнина π_3 која е нормална само на рамнината π_2 .

Конструкција на трансформацијата на триаголникот се изведува на начин прикажан во претходното поглавје за секое од темињата на триаголникот, $A''A^{III} \perp 2x_3$, $\overline{LA^{III}} = \overline{A_x A'}$ итн.



Цртеж 5.9

Трансформацијата на триаголникот $A'''B'''C'''$ ја добиваме со сврзување на трансформираните проекции A''' , B''' и C''' на темињата на триаголникот.



Прашања и задачи

1. Со помош на трансформација определи ја висинската големина на отсечките и нивните агли на наклон:

а) $AB[A(1;3;4), B(4;1;0)]$

б) $CD[C(2;1;2), D(5;6;1)]$.

2. Со помош на трансформација определи го растојанието од точката A до отсечката BC, ако

a) $A(3;1;1)$, $BC[B(1;5;1), C(5;2;5)]$

б) $A(3;1;5)$, $BC[B(0;1;2), C(4;5;2)]$.

3. Со помош на трансформација определи го растојанието меѓу паралелните прави a и b, ако

a) $a=AB[A(1;3;1), B(5;6;1)]$

$b=CD[C(4;2;3), D(x;y;z)]$

б) $a=AB[A(1;3;1), B(4;2;4)]$

$b=CD[C(4;4;4), D(x;y;z)]$.

4. Со помош на трансформација определи го растојанието меѓу разминувачките прави $a=AB$ и $b=CD$, за $A(1;3;1)$, $B(4;2;4)$, $C(0;2;6)$, $D(5;5;4)]$.

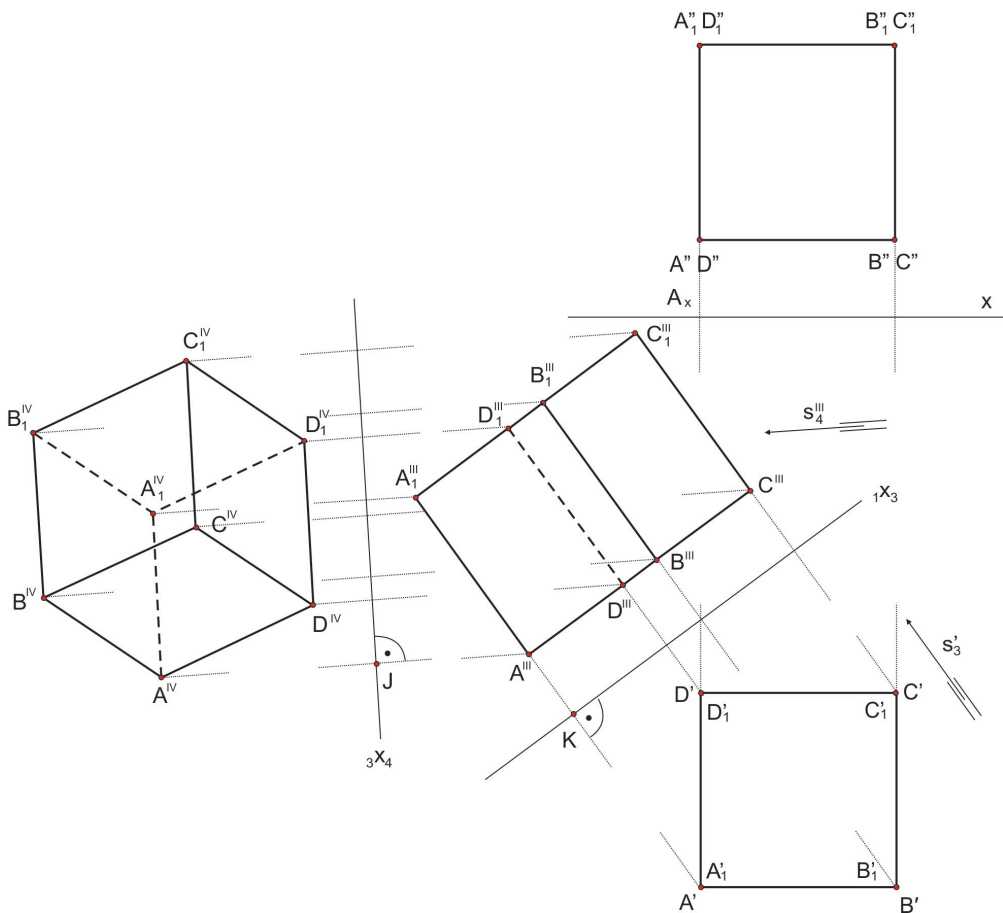
5.4. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

На цртеж 5.10 дадени се проекциите на коцка која е во фронтална положба, со долна основа ABCD и горна основа $A_1B_1C_1D_1$. Потоа е поставена π_3 -оската во која се сечат рамните π_1 и трансформациската рамнина π_3 која е нормална само на проекционата рамнина π_1 .

Конструкција на трансформацијата на коцката се изведува на начин прикажан во претходното поглавје, на пример $A'A'' \perp \pi_3$, $\overline{KA''} = \overline{A'A''}$ итн. Таа трансформација би била еднаква на нацртот на коцката кога таа не би се наоѓала во фронт-

тална положба. Кога коцката се гледа во насока на нормалното проектирање на рамнината π_3 – првата проекција во таа насока на проектирање означена е на сликата со s'_3 – тогаш при таа трансформација се гледаат рабовите AA_1 , BB_1 и CC_1 , а не се гледа работ DD_1 .

Ако сакаме да добиеме вистинска претстава за коцката ќе употребиме и трансформациска рамнина π_4 која е нормална на трансформациската рамнина π_3 и ја сече во $3X_4$ -оската.



Цртеж 5.10

Од трансформираната проекција на секој врв од коцката ќе поставиме нормала на $3x_4$ -оската и ќе го нанесеме од $3x_4$ -оската растојанието на првата проекција на тој врв од $1x_3$ -оската, на пример $\overline{JA^{IV}} = \overline{A'K}$ итн.

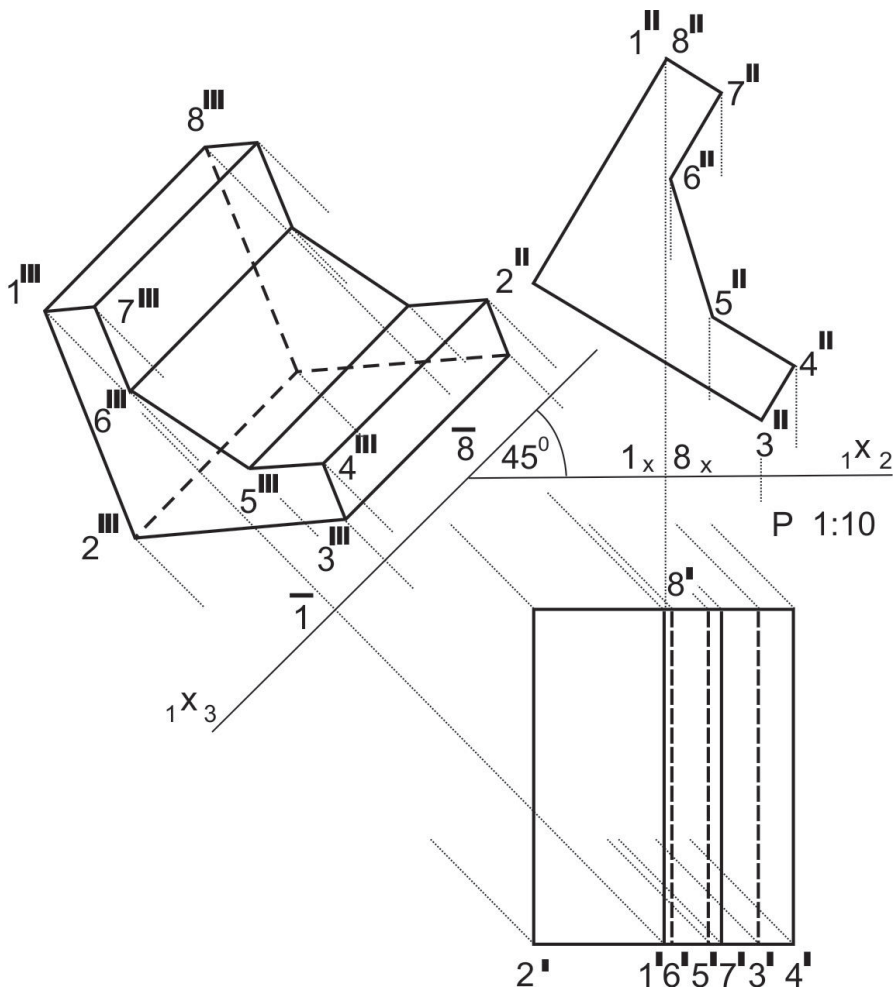
Ако ја гледаме коцката во правецот на нормалното проектирање на рамнината π_4 – третата проекција на правецот на проектирање означена на цртежот со s_4^{III} – ќе ја гледаме нејзината долна основа ABCD и рабовите BB₁, CC₁ и DD₁, а нема да ја гледаме нејзината горна основа A₁B₁C₁D₁ и работ AA₁. Четвртата проекција на коцката дава впечаток како коцката да ја гледаме оддолу и од нејзината десна страна.

Од претходниот пример согледаваме дека мораме да употребиме две трансформациски рамнини за да добиеме слика на коцка која е зададена во фронтална положба, и дека од тлоцртот и нацртот на коцка која не е во фронтална положба можеме и само со една трансформациска рамнина да ја добиеме и нејзината слика.

Така на цртеж 5.11 нацртани се во размер P=1:10 тлоцртот и нацртот на призматично тело кое не е во фронтална положба, па неговата слика е конструирана со помош на само една трансформациска рамнина. Трансформациската рамнина π_3 е поставена нормално на рамнината π_1 и зафаќа агол од 45° со рамнината π_2 .

Конструкција на трансформацијата извршена е на следниот начин. Прво врвовите од предната основа ги означуваме во тлоцртот и нацртот со броевите од 1 до 7, потоа од тлоцртот и нацртот на секој врв ја наоѓаме неговата трансформација. На пример, одредена точка 1^{III} е на ординалата од 1^I нормално на $1x_3$ -оската, а со помош на релацијата $\bar{11}^{III} = 1_x 1^{II}$. Кога

ќе ги сврземе трансформациите на сите тие врвови по ред се добива трансформацијата на предната основа. Од трансформација на задната основа доволно е да определиме трансформација на еден нејзин врв. Определена е трансформацијата $8'''$ на точката 8 која со точката 1 го формира бочниот раб 18, чијашто трансформација е $1'''8'''$.



Цртеж 5.11

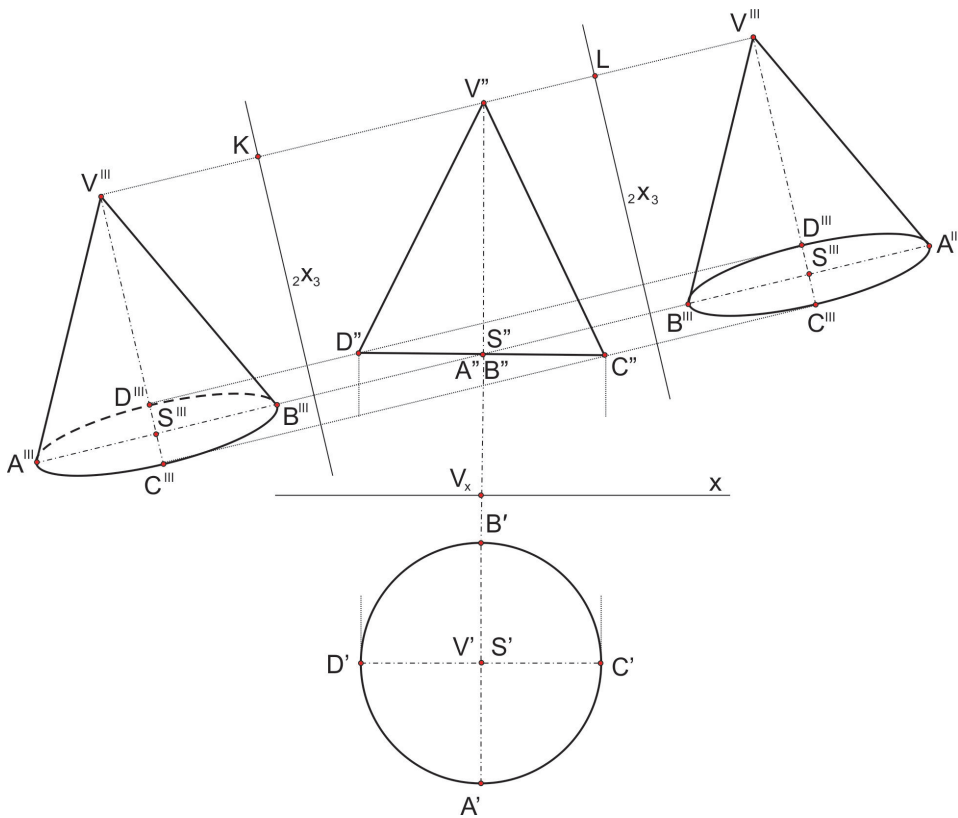
Бидејќи сите бочни рабови на телото се паралелни и еднакви и нивните трансформации ќе мора да бидат еднакви и меѓу себе паралелни. Кога ќе ги нацртаме трансформациите на сите седум бочни рабови и кога ќе ги сврземе редоследно нивните крајни точки на задната основа ќе ја добиеме трансформација на задната основа.

При така избрана положба на телото и положба на трансформационската рамнина, трансформацијата создава просторна претстава како да го гледаме телото одгоре од неговата лева страна.

На цртеж 5.12 дадени се проекциите на ротационен конус чијашто основа е паралелна со рамнината π_1 . Треба да конструираме трансформација на конусот на рамнината π_3 која е нормална на рамнината π_2 , поставена еднаш од десната, а другпат од левата страна на конусот.

$2x_3$ -оските се паралелни меѓу себе, а тоа значи дека во рамнината π_3 се меѓу себе паралелни. Конструкцијата на трансформацијата на определени точки на конусот се изведува на начинот прикажан во претходниот дел, на пример, имаме $V^{II}V^{III} \perp 2x_3$, $\overline{KV^{III}} = \overline{V_x V'}$ и $\overline{LV^{III}} = \overline{V_x V'}$.

За да ја добиеме големата и малата оска на елипсата којашто е трансформација на кружницата на основната ги означуваме проекциите на двата дијаметри на кружницата АВ и CD, од коишто дијаметарот АВ е паралелен на π_3 , а дијаметарот CD е нормален на дијаметарот АВ. Трансформација на дијаметарот АВ е големата оска $A^{III}B^{III}$, а трансформацијата на дијаметарот CD е малата оска $C^{III}D^{III}$ на елипсата. Тангентите повлечени од V^{III} на елипсата ја затвораат трансформацијата на конусот.



Цртеж 5.12

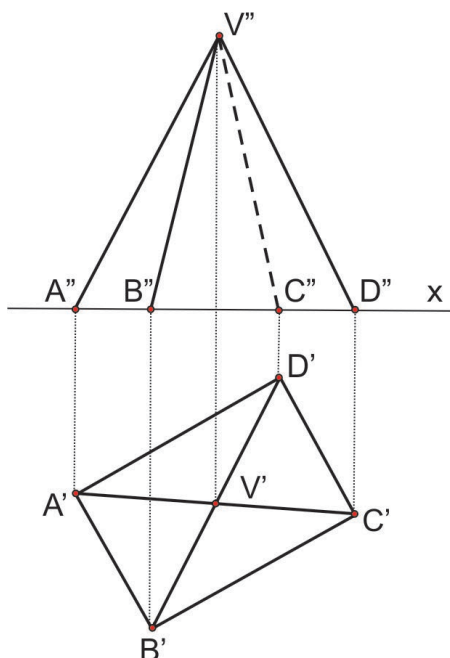
Имајќи во вид дека рамнините π_3 се меѓу себе паралелни, контурите на тие трансформации се складни, со таа разлика што во трансформацијата на конусот на рамнината π_3 која од неговата десна страна основата е видлива, додека во трансформацијата на рамнината π_3 која е од негова лева страна основата е невидлива.



Прашања и задачи

1. Нацртај трансформација на пирамидата прикажана на цртеж 5.13, ако трансформациската рамнина π_3 е нормална на рамнината π_2 , а $2X_3$ -оската е поставена паралелно со $A''V''$ и тоа од:

- а) левата страна на нацртот на пирамидата,
- б) десната страна на нацртот на пирамидата.

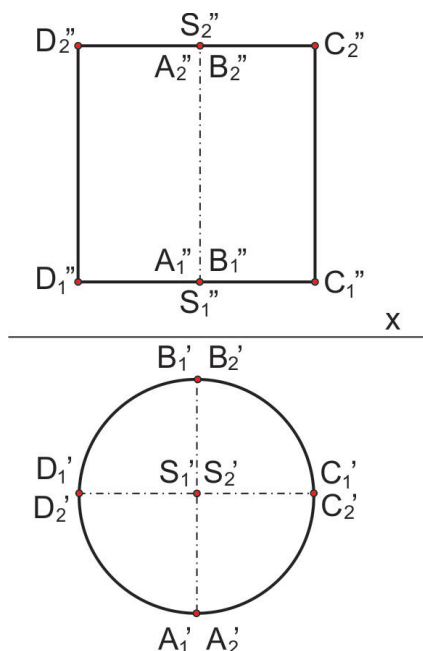


Цртеж 5.13

2. Нацртај трансформација на ротациониот цилиндар прикажан на цртеж 5.14, ако трансформациската рамнина π_3 е нормална на рамнината π_2 , а $2X_3$ -оската е поставена паралелно со $S_1''S_2''$ и тоа од:

- а) левата страна на нацртот на цилиндарот,

б) десната страна на нацртот на цилиндарот.



Цртеж 5.14

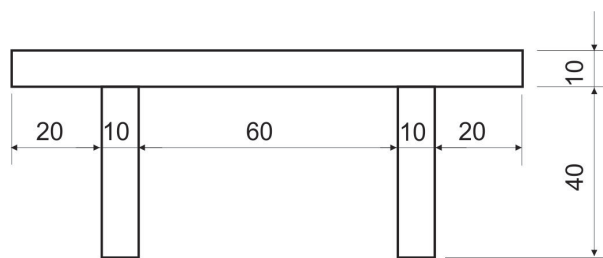
3. Нацртај ги во размер $P=1:1$ тлоцртот и нацртот на предметот прикажан на:

а) цртеж 5.15а

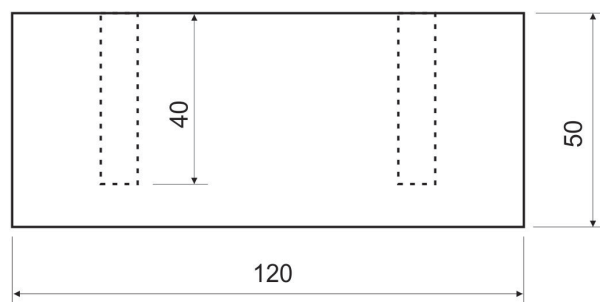
б) цртеж 5.15б

в) цртеж 5.15в

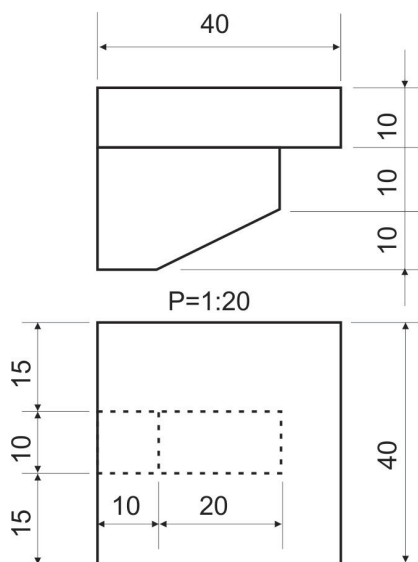
ако два негови основни раба зафаќаат со x -оската агол од 30° . Потоа конструирај ја неговата трансформација, ако трансформационската рамнина π_3 е нормална на рамнината π_2 , а $2X_3$ -оската зафаќа со x -оската агол од 60° и се наоѓа од левата страна на нацртот на предметот.



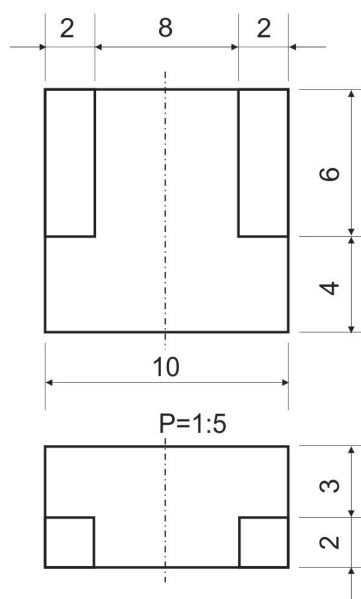
$P=1:30$



Цртеж 5.15а



Цртеж 5.15б



Цртеж 5.15в

6. ОПШТА РАМНИНА

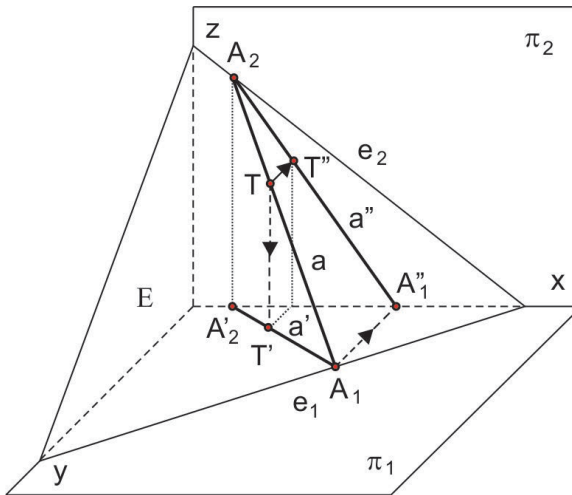
6.1. ТОЧКА И ПРАВА ВО ОПШТА РАМНИНА

На цртеж 6.1 прикажана е општа рамнина E и права a што лежи во неа. Правата a ги сече трагите e_1 и e_2 на рамнината E во точките A_1 и A_2 . Притоа точката A_1 е првата прободна точка на правата, а точката A_2 е втората прободна точка на правата a . Секоја права којашто лежи во рамнината E ги сече нејзините траги во своите прободни точки. Според тоа, имаме дека:

Правата a лежи во лежи на рамнината E ако и само ако нејзиниот прв пробод лежи на првата трага, а нејзиниот втор пробод лежи на втората трага на рамнината E .

Со помош на прободните точки на цртеж 6.1 се определени

придружени проекции a' и a'' на правата a . Освен тоа за произволна точка T од правата a нацртани се нејзините придружени проекции T' и T'' .



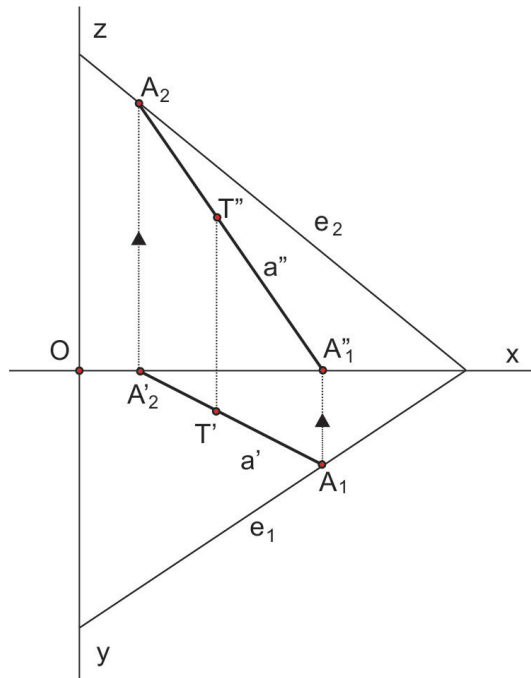
Цртеж 6.1

Задача. Дадени се трагите e_1 и e_2 на рамнината E и тлоцртот a' на правата a . Нацртај го нејзиниот нацрт a'' (цртеж 6.2).

Тлоцртот a' на правата a ја сече првата трага e_1 на рамнината E во првиот пробод A_1 на правата a , а x -оската во тлоцртот A_2' на вториот пробод A_2 на правата a . Потоа со помош на ординалите на точките A_1 и A_2' ги наоѓаме нацртот A_1'' на првиот пробод A_1 и вториот пробод A_2 . Бараниот нацрт a'' на правата a е правата $A_1''A_2$.

На цртеж 6.2 нацртани се уште и придружените проекции T' и T'' на произволна точка T од правата a .

Цртеж 6.2 може да ни послужи и за решавање на следнава задача.



Цртеж 6.2

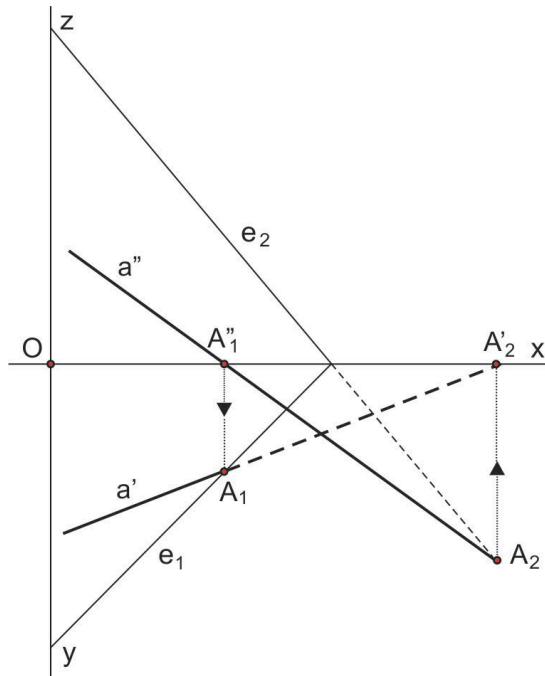
Задача. Дадени се трагите e_1 и e_2 на рамнината E и тлоцртот T' на точката T којашто лежи во рамнината E . Нацртај го нејзиниот нацрт T'' .

Ако замислиме дека низ точката T минува која било права од рамнината E (цртеж 6.1), тогаш a' ќе минува низ T' , а a'' низ T'' . Заради тоа низ точката T' повлекуваме произволна права a' (цртеж 6.2), а потоа го цртаме a'' . На крај низ точката T' повлекуваме ординала, која ја сече правата a'' во бараниот нацрт T'' на точката T .

Задача. Дадени се трагите e_1 и e_2 на рамнината E и нацртот a'' на правата a . Нацртај го нејзиниот тлоцрт a' (цртеж 6.3).

Нацртот a'' на правата a ја сече x -оската во нацртот A_1'' на првиот пробод A_1 на правата a , а втората трага e_2 на рамнината E во вториот пробод A_2 на правата a . Потоа со помош на ординалите пов-

лечени во точките A_2 и A_1'' ги одредуваме првиот пробод A_1 и тлоцртот A_2' на вториот пробод A_2 . Бараниот тлоцрт a' на правата a е права A_1A_2' .

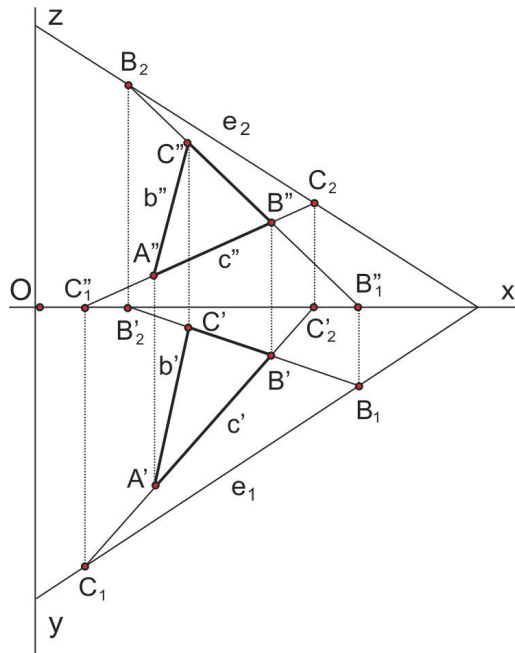


Цртеж 6.3

Задача. Дадени се трагите e_1 и e_2 на рамнината E и нацртот T'' на точката T којашто лежи во рамнината E . Нацртај го нејзиниот тлоцрт T' .

Аналогно како во задача 2, ако замислиме дека низ точката T минува која било права од рамнината E (цртеж 6.1), тогаш a' ќе минува низ T' , а a'' низ T'' . Заради тоа низ точката T'' повлекуваме произволна права a'' (цртеж 6.2), а потоа го цртаме a' . На крај низ точката T'' повлекуваме ординала, која ја сече правата a' во бараниот тлоцрт T' на точката T .

Задача. Дадени се трагите e_1 и e_2 на рамнината E и нацртот $A''B''C''$ на триаголникот ABC којшто лежи во рамнината E . Нацртај го нацртот на триаголникот (цртеж 6.4).



Цртеж 6.4

Ако ги продолжиме страните $A''C''$ и $A''B''$ на триаголникот $A''B''C''$, ги добиваме нацртите $b''=A''C''$ и $c''=A''B''$ на две помошни прави b и c коишто лежат во рамнината E .

Потоа, како во задача 3 ги определуваме нивните тлоцрти b' и c' , а на крај со помош на ординалите повлечени од точките A'' , B'' и C'' и ги наоѓаме тлоцртите A' , B' и C' .



Прашања и задачи

1. Нацртај го нацртот на правата

$$a=AB[A(3;2,5;z),B(5;1;z)]$$

која лежи во рамнината $E(10;7;8)$.

2. Нацртај го тлоцртот на точката $T(5,y,2)$ којашто лежи во рамнината $E(4;4,5;4)$.

3. Нацртај го нацртот на триаголникот ABC којшто лежи во рамнината $E(7;4,5;5)$, ако е даден неговиот тлоцрт

$$[A(2;2;z),B(3;0,5;z),C(5;1;z)].$$

4. Нацртај го тлоцртот на триаголникот ABC којшто лежи во рамнината $E(10;7;5)$, ако е даден неговиот нацрт

$$[A(1;y;3),B(2,5;y;4),C(5;y;2)].$$

6.2. ГЛАВНИ ПРАВИ И НИВНА ПРИМЕНА

Секоја права во рамнина која е паралелна со една нејзина трага се вика **главна права**.

Знаеме дека една рамнина има три траги, прва трага, втора трага и трета трага. Според тоа разликуваме три вида главни прави, прави кои се паралелни на првата трага на рамнината, прави кои се паралелни на втората трага на рамнината и прави кои се паралелни на третата трага на рамнината.

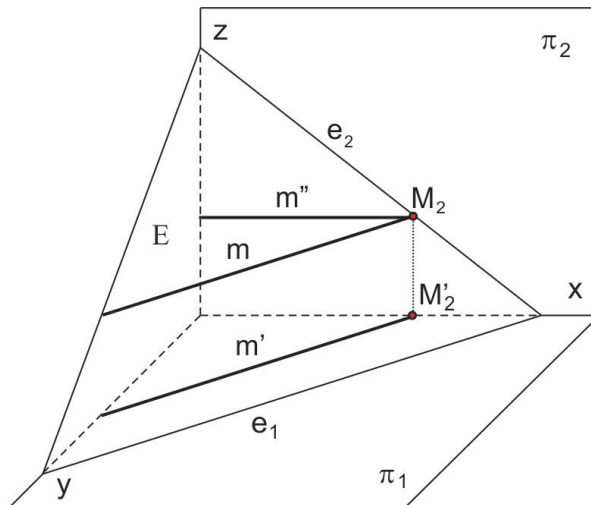
Поодделно ќе ги проучиме првите два вида на главни прави.

На крајот ќе се задржиме на нивната примена во решавањето практични задачи.

Секоја права во рамнина која е паралелна со нејзината прва трага се вика **хоризонтала**.

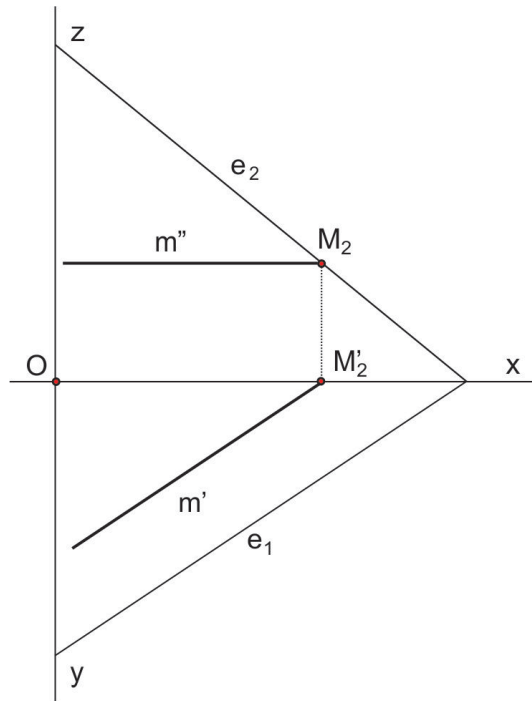
Во една рамнина има бесконечно многу хоризонтали. На цртеж 6.5 прикажана е една хоризонтала m во рамнината E . Нејзиниот втор пробод M_2 се наоѓа на втората трага e_2 на рамнината, а нејзиниот прв пробод е бескрајно далеку на првата трага на рамнината.

Бидејќи хоризонталата m е паралелна со првата трага e_1 , нејзиниот тлоцрт m' е паралелен на e_1 , а нејзиниот нацрт m'' е паралелен на x -оската бидејќи таа е паралелна на рамнината π_1 .



Цртеж 6.5

Задача. Дадени се трагите e_1 и e_2 на рамнината E . Нацртај ги придружените проекции на произволна хоризонтала m од рамнината E (цртеж 6.6).

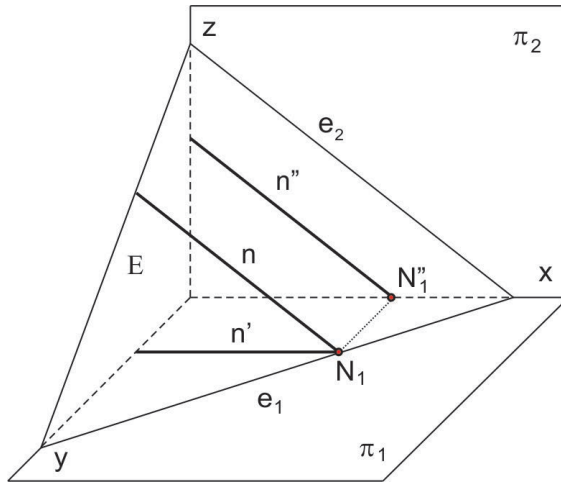


Цртеж 6.6

Повлекуваме произволна права m' паралелна со првата трага e_1 , до нејзиниот пресек со x -оската. Потоа ги означуваме редоследно, тлоцртот M_2' на вториот пробод M_2 на хоризонталата и вториот пробод M_2 . На крај од точката M_2 повлекуваме права m'' паралелна со x -оската.

Секоја права во рамнина која е паралелна со нејзината втората трага се вика **фронтала**.

Во една рамнина има бесконечно многу фронтали. На цртеж 6.7 прикажана е една фронтална n во рамнината E . Нејзиниот прв пробод N_1 се наоѓа на првата трага e_1 на рамнината, а нејзиниот втор пробод е бескрајно далеку на втората трага на рамнината.

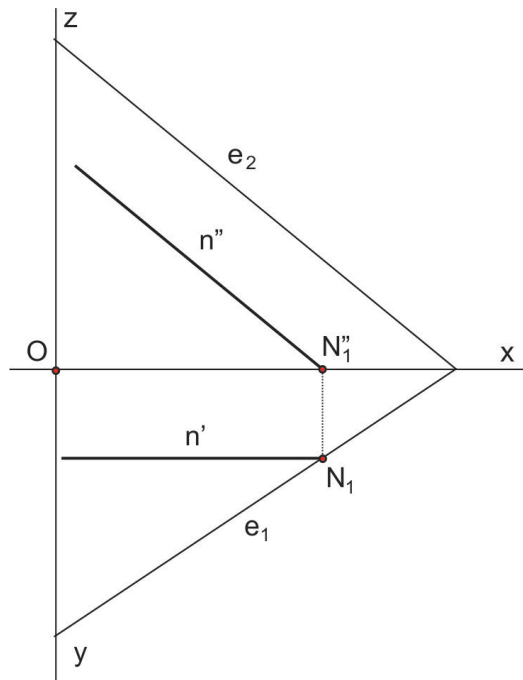


Цртеж 6.7

Бидејќи фронталата n е паралелна со втората трага e_2 , нејзиниот нацрт n'' е паралелен на e_2 , а нејзиниот тлоцрт n' е паралелен на x -оската бидејќи таа е паралелна на рамнината π_2 .

Задача 2. Дадени се трагите e_1 и e_2 на рамнината E . Нацртај ги придружените проекции на произволна фронтала n од рамнината E (цртеж 6.8).

Повлекуваме произволна права n'' паралелна со втората трага e_2 , до нејзиниот пресек со x -оската. Потоа ги означуваме редоследно, нацртот N_1'' на првиот пробод N_1 на фронталата и првиот пробод N_1 . На крај од точката N_1 повлекуваме права n' паралелна со x -оската.

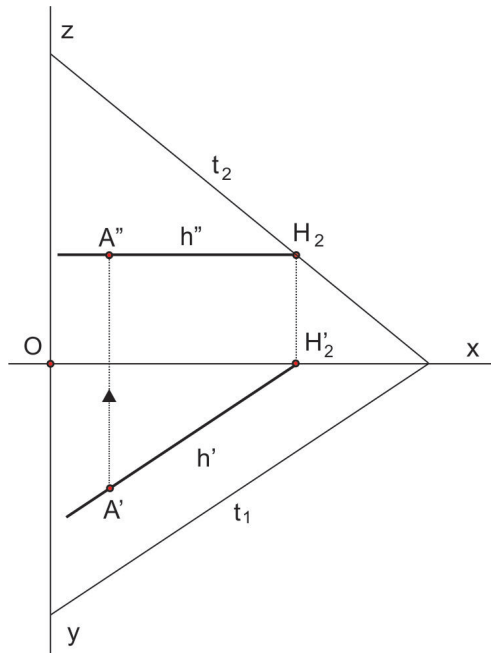


Цртеж 6.8

Задача 3. Даден е тлоцртот A' на точка A од рамнината T со траги t_1 и t_2 . Најди го нејзиниот нацрт A'' (цртеж 6.9).

Низ точката A' го цртаме тлоцртот h' на хоризонтала h која лежи во рамнината T (h' е паралелна со првата трага t_1 на рамнината T), до нејзиниот пресек со x -оската, каде што го наоѓаме тлоцртот H_2' на вториот пробод H_2 . Од точката H_2' повлекуваме ординала до пресекот со втората трага t_2 каде што го наоѓаме прободот H_2 . Низ H_2 го цртаме нацртот h'' на хоризонталата h . На крај низ точката A' повлекуваме ординала, која ја сече хоризонталата h'' во бараниот нацрт A'' на точката A .

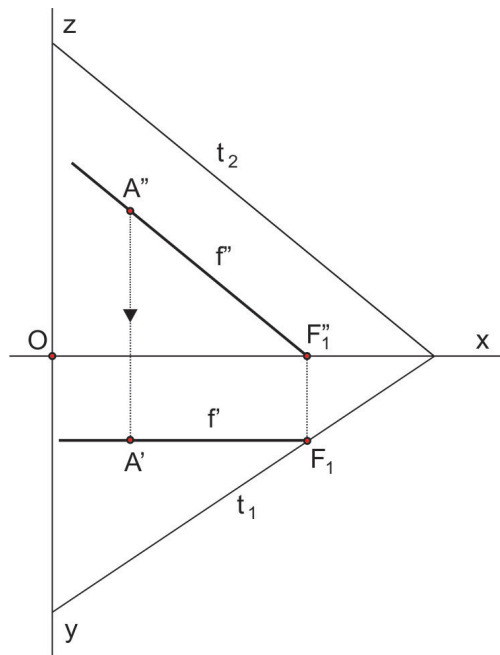
Задача 4. Даден е нацртот A'' на точка A од рамнината T со траги t_1 и t_2 . Најди го нејзиниот тлоцрт A' (цртеж 6.10).



Цртеж 6.9

Низ точката A'' го цртаме нацртот f'' на фронталата f која лежи во рамнината T (f'' е паралелна со втората трага t_2 на рамнината T), до нејзиниот пресек со x -оската, каде што го наоѓаме нацртот F_1'' на првиот пробод F_1 . Од точката F_1'' повлекуваме ординала до пресекот со првата трага t_1 каде што го наоѓаме прободот F_1 . Низ F_1 го цртаме тлоцртот f' на фронталата f . На крај низ точката A'' повлекуваме ординала, која ја сече фронталата f' во бараниот тлоцрт A' на точката A .

Ако е дадена геометрииска фигура што лежи во дадена рамнина, при определувањето на нејзина проекција, ја повторуваме горе изложената постапка за секое негово теме. Според тоа, заклучуваме дека



Цртеж 6.10

Ако во една општа рамнина зададена со своите траги е дадена едната проекција на точка или геометрииска фигура, другата нејзина проекција се определува наједноставно со употреба на главните прави.

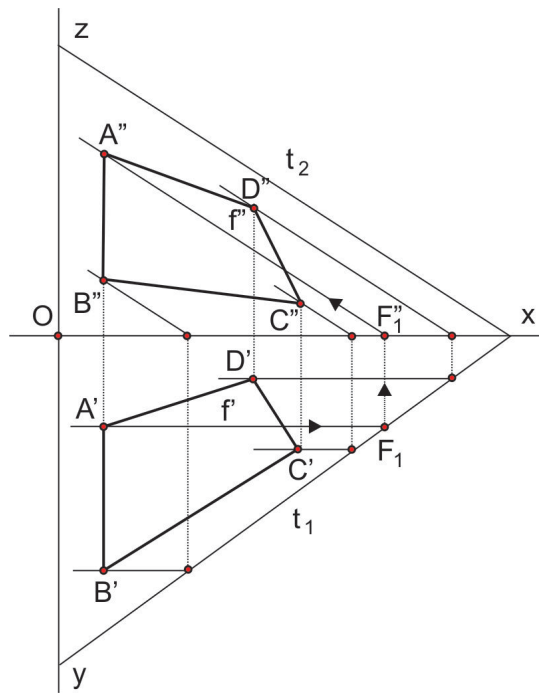
Задача. Дадена е рамнината $T(9;7;6,5)$ и четириаголникот

$ABCD[A(1;2;z), B(1;5;z), C(5;2,5;z), D(4;1;z)]$

којшто лежи во неа. Најди го нацртот на дадениот четириаголник (цртеж 6.11).

Задачата ќе ја решиме со повлекување фронтالي низ тлоцртите A' , B' , C' и D' , коишто ги наоѓаме од дадените координати на

точките A, B, C и D. Така, низ точката A' го повлекуваме тлоцртот f на фронталата сè до трагата t_1 каде што се наоѓа првиот пробод F_1 . Од точката F_1 повлекуваме ординала до пресекот со x-оската каде што го добиваме нејзиниот нацрт F_1'' . Од F_1'' го повлекуваме нацртот f'' , кој со ординалата подигната во точката A' се сече во бараната проекција A'' на точката A. Постапката ја повторуваме и за другите темиња на четириаголникот.



Цртеж 6.11



Прашања и задачи

1. Кои прави ги нарекуваме хоризонтали, а кои фронтали?
2. Во рамнината $T(8;6;7)$ повлечи хоризонтала h која-

што е 2 cm над π_1 и фронтала f која што е 1 cm пред π_2 .

3. Ако во една општа рамнина е дадена едната проекција на точка или геометриска фигура, кој е наједноставниот метод за определување на другата проекција?

4. Најди го нацртот на триаголникот ABC кој лежи во рамнината $T(10;7;6)$, ако $A(3;1;z)$, $B(2;5;z)$ и $C(6;1;z)$.

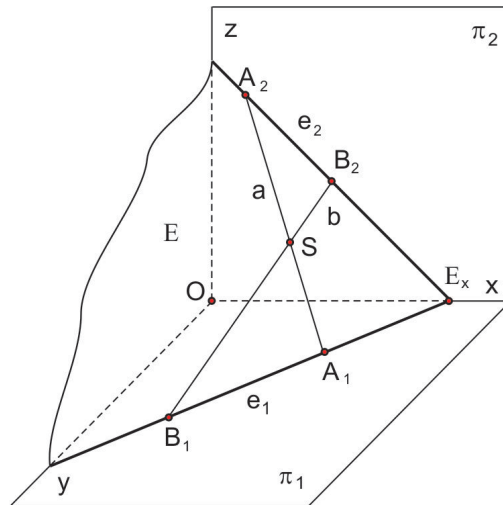
5. Најди го нацртот на четириаголникот ABCD кој лежи во рамнината $T(11;7;6)$, ако $A(2;1;z)$, $B(1;5;z)$, $C(4;y;1)$ и $D(6;y;2)$.

6.3. ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА ТРАГИ НА РАМНИНА ЗАДАДЕНА СО ТОЧКИ И ПРАВИ

Од геометрија е познато дека рамнината може да биде определена со две пресечни прави, со две паралелни прави, со права и точка што не лежи на неа или со три неколинеарни точки.

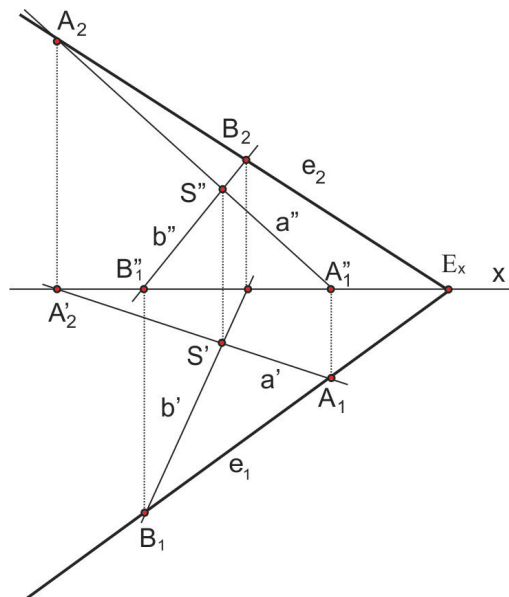
Рамнина определена со две пресечни прави или две паралелни прави

На цртежот 6.12 прикажана е правата a со прободните точки A_1 и A_2 , и правата b со прободните точки B_1 и B_2 . Дадените прави се сечат во точката S и определуваат рамнина E . Знаеме дека првите прободни точки на правите мора да лежат на првата трага на рамнината, а вторите прободни точки на втората трага на рамнината. Така, прободните точки A_1 и B_1 ја одредуваат првата трага e_1 , а прободните точки A_2 и B_2 ја определуваат втората трага e_2 . Бидејќи трите рамнини π_1 , π_2 и E може да имаат само една заедничка точка, трагите e_1 и e_2 ја сечат x -оската во точка E_x .



Цртеж 6.12

Трагите на рамнината E , која е зададена со две прави што се сечат ги конструираме така што прво ги наоѓаме прободните точки на дадените прави, а потоа низ истоимените прободи ја цртаме соодветната трага.



Цртеж 6.13

Според тоа, првата трага e_1 минува низ првите прободните точки A_1 и B_1 , а втората трага e_2 минува низ вторите прободни точки A_2 и B_2 . Ако конструкцијата е правилно изведена, трагите e_1 , e_2 и x -оската се сечат во една иста точка (цртеж 6.13).

Со аналогна постапка се конструираат трагите на рамнина зададена со две паралелни прави.

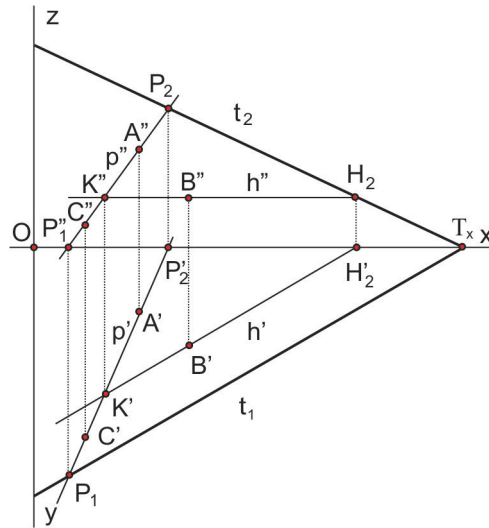
Рамнина определена со точка и права

И во овој случај определувањето на трагите на рамнина зададена со права и точка што не лежи на правата се сведува на претходниот случај, бидејќи низ дадената точка може да се повлече права што ја сече или е паралелна со дадената права. Постапката значително се олеснува ако користиме хоризонтала или фронтала од рамнината чишто траги ги бараме.

Задача. Дадена е права $p=AC$ и точка B што не лежи на правата p . Конструирај ги трагите на рамнината определена со правата p и точката B .

На цртежот 6.14 прикажани се ортогоналните проекции на правата $p=AC$ и точката B . Задачата ќе ја решиме со поставување на хоризонтала низ точката B .

Низ B'' го повлекуваме нацртот h'' на хоризонталата h , кој го сече нацртот p'' на правата p во точката K'' . Тлоцртот K' го наоѓаме на правата p' . Ако ги сврземе точките K' и B' го добиваме и тлоцртот h' на хоризонталата h , што го определува правецот на првата трага t_1 . За да ја нацртаме трагата, освен нејзиниот правец, потребна ни е една нејзина точка. За таа цел го наоѓаме прободот на правата p со рамнината π_1 , односно точката P_1 . Потоа низ P_1 ја повлекуваме трагата t_1 паралелна на h' .



Цртеж 6.14

Втората трага t_2 на рамнината T ќе ја определиме откако ќе ја најдеме втората прободна точка P_2 на правата p и ја сврземе со точката T_x (пресечната точка на t_1 и x -оската).

Како проверка на решението ќе ни послужи прободната точка H_2 на хоризонталата h со рамнина π_2 .

Задачата може да се реши и со користење на фронтала.

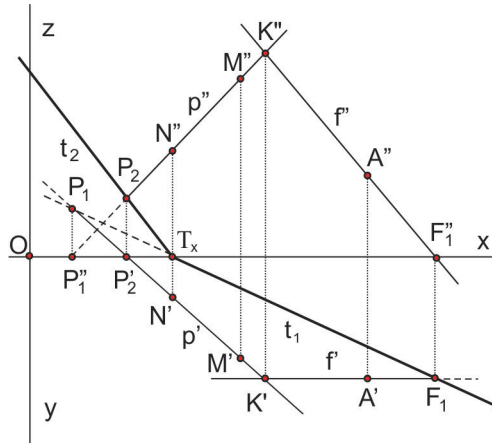
Задача. Дадени се правата

$$p = MN[M(9;4;7), N(6;1,5;4)]$$

и точката $A(14;5;3)$. Конструирај ги трагите на рамнината T определена со нив.

На цртежот 6.15 дадено е решението на задачата. Имено, низ тлоцртот A' на точката A го повлекуваме тлоцртот f' на фронталата f којашто ја сече тлоцртот p' на правата p во точката K' . Нацртот K'' го наоѓаме на правата p'' . Ако ја сврземе точката A'' со K'' го добиваме нацртот f'' на фронталата f , со што е определен правецот на втората

трага t_2 . Со помош на прободите P_1, P_2, F_1 на правите p и f ги цртаме трагите t_1 и t_2 на рамнината T .



Цртеж 6.15

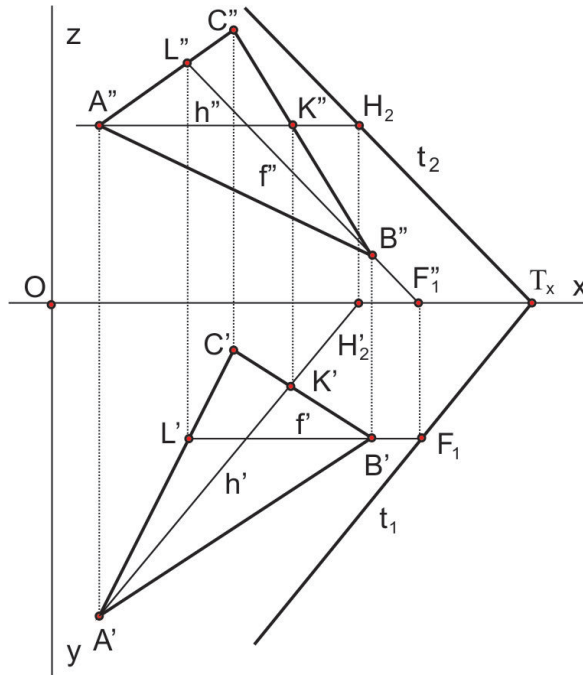
Рамнина определена со три неколинеарни точки (триаголник)

И овој случај може да се сведе на претходниот бидејќи три точки определуваат две прави што се сечат, или две паралелни прави. Меѓутоа, за определување на трагите на така зададената рамнина ќе користиме хоризонтални и фронтални за кои знаеме дека ги имаат правците на бараните траги.

Задача. Конструирај ги трагите на рамнината T определена со точките A, B и C (цртеж 6.16).

Низ нацртот A'' на точката A го повлекуваме нацртот h'' на хоризонталата h што го сече нацртот $B''C''$ на страната BC во точката K'' . Тлоцртот K' се наоѓа на ординалата повлечена од точката K'' , и на

страната $B'C'$. Со сврзување на точките A' и K' го добиваме тлоцртот h' на хоризонталата h .



Цртеж 6.16

За да ги нацртаме придружените проекции на фронталата f , низ B' повлекуваме права паралелна со x -оската, со што ја добиваме f' . Таа се сече со страната $A'C'$ во точката L' . Од точката L' повлекуваме ординала сè до пресекот со страната $A''C''$ со што ја добиваме L'' . Правата $B''L''$ го претставува нацртот f'' на фронталата f .

Бидејќи првата трага t_1 е паралелна на h' , а втората трага t_2 е паралелна со f'' , каде t_1 и t_2 се бараните траги на рамнината определена со трите зададени точки, правците на трагите t_1 и t_2 се наплно определени. Но, за да ги конструираме трагите, освен правците потребна е барем една точка од трагите. За таа цел ги наоѓаме

прободите H_2 и F_1 и низ нив ги повлекуваме трагите t_1 и t_2 , односно t_1 минува низ F_1 и е паралелна со h' , а t_2 минува низ H_2 и е паралелна со f'' .

Како проверка за точноста на конструкцијата ни служи точката T_x во која се сечат трагите t_1 , t_2 и x -оската.



Прашања и задачи

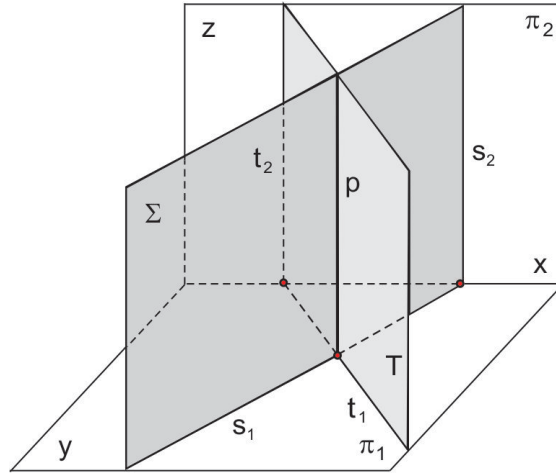
1. На кои начини може да ги определиме трагите на една општата рамнина кога не се зададени нејзините координати?
2. Дадени се точките $A(7;2,5;2)$, $B(10;1;5)$ и $C(12;7;2)$. Конструирај ги трагите на рамнината зададена со нив со определување на:
 - а) две пресечни прави;
 - б) две паралелни прави;
 - в) права и точка што не лежи на неа.
3. Определи ги трагите на рамнината T зададена со триаголникот $ABC[A(4;1;0,5), B(7;3;4), C(3;5;2)]$.
4. Определи ги трагите на рамнината T зададена со правите $a=AB[A(2;5;0), B(4;1;3)]$ и $b=BC[B(4;1;3), C(0;0;6)]$.

6.4. ПРЕСЕК НА ДВЕ РАМНИНИ

Две рамнини се сечат во права којашто ја нарекуваме **пресечка** и која им припаѓа на двете рамнини. Во овој дел ќе разгледаме три поодделни случаи.

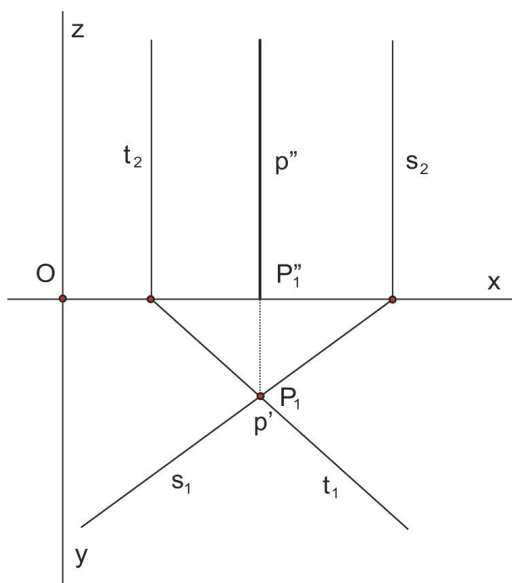
Пресек на две проектирачки рамнини

На цртеж 6.17 прикажан е пресек на две првопроектирачки рамнини T и Σ . Нивната пресечка p , бидејќи им припаѓа на двете рамнини, исто така, е нормална на рамнината π_1 .



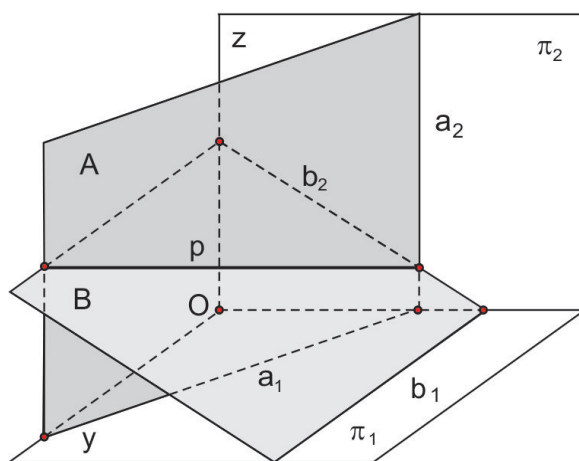
Цртеж 6.17

Тлоцртот p' на пресечката p се проектира во точка, поточно во пресечната точка на трагите t_1 и s_1 . Нејзиниот нацрт p'' е права паралелна на трагите t_2 и s_2 , односно нормална на x -оската (цртеж 6.18).



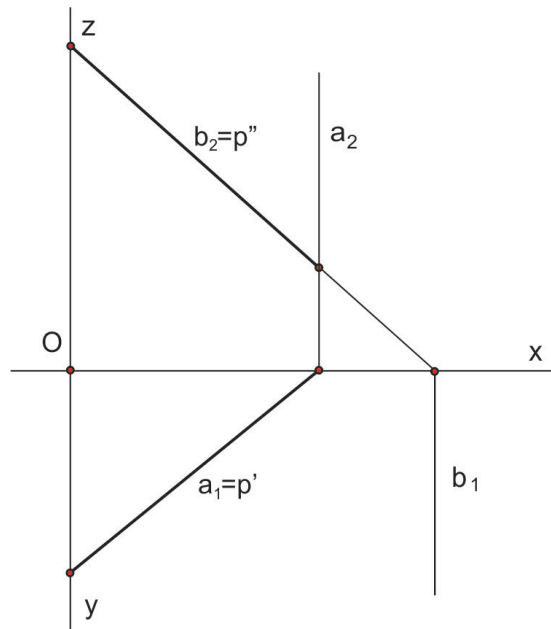
Цртеж 6.18

На цртеж 6.19 е прикажан пресек на првоектирчка рамнина A и второектирчка рамнина B.



Цртеж 6.19

Во овој случај тлоцртот p' на пресечката p се совпаѓа со првата трага a_1 на рамнината A , а нацртот p'' се совпаѓа со втората трага b_2 на рамнината B (цртеж 6.20).

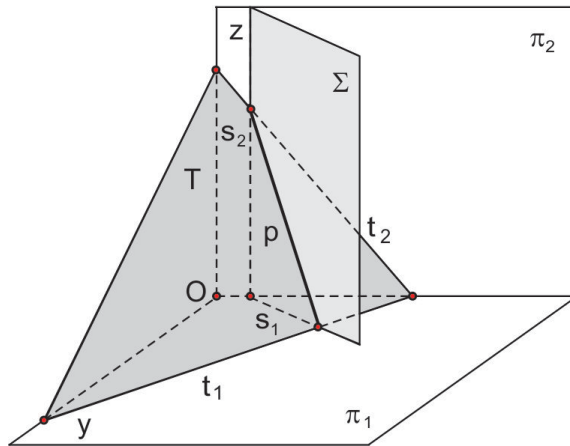


Цртеж 6.20

Пресек на проектирачка рамнина со општа рамнина

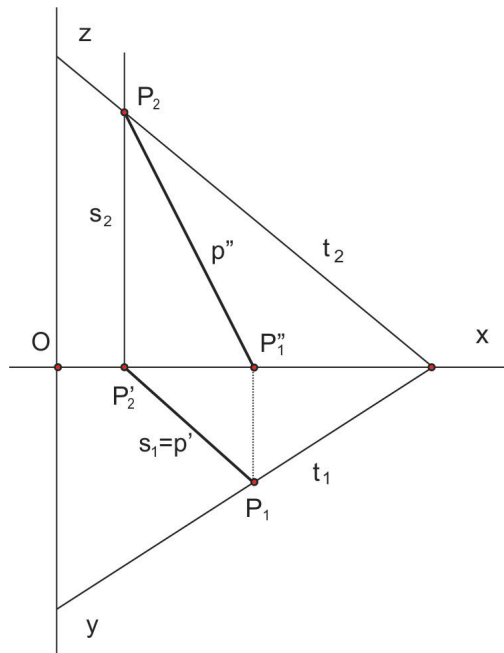
На цртеж 6.21 е прикажан пресек на првoprojectирачка рамнина Σ и општа рамнина T .

И двете рамнини се зададени со ортогоналните проекции на своите траги s_1, s_2 и t_1, t_2 . Бидејќи рамнината Σ е првoprojectирачка, сè што лежи на неа има тлоцрт на првата трага s_1 , според тоа и тлоцртот p' на пресечката p лежи на s_1 . Тлоцртот p' ќе го определиме од условот правата p да лежи во рамнината T , односно пробојните точки P_1 и P_2 да лежат соодветно на нејзините траги t_1 и t_2 .



Цртеж 6.21

Потоа ги наоѓаме точките P_1'' и P_2 , а со тоа и нацртот p'' на пресечката p (цртеж 6.22).



Цртеж 6.22

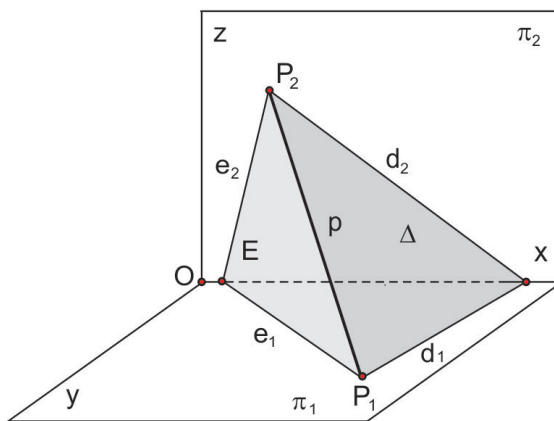
Ако имаме пресек на второпроектирачка рамнина со општа рамнина, тогаш нацртот на пресечницата ќе се совпадне со втората трага на проектирачката рамнина.

Според тоа, може да заклучиме дека:

При пресек на проектирачка рамнина со општа рамнина секогаш едната проекција на пресечката се совпаѓа со трагата на проектирачката рамнина во која таа се проектира.

Пресек на две општи рамнини

На цртеж 6.23 се прикажани две општи рамнини E и Δ кои се сечат во пресечка p .

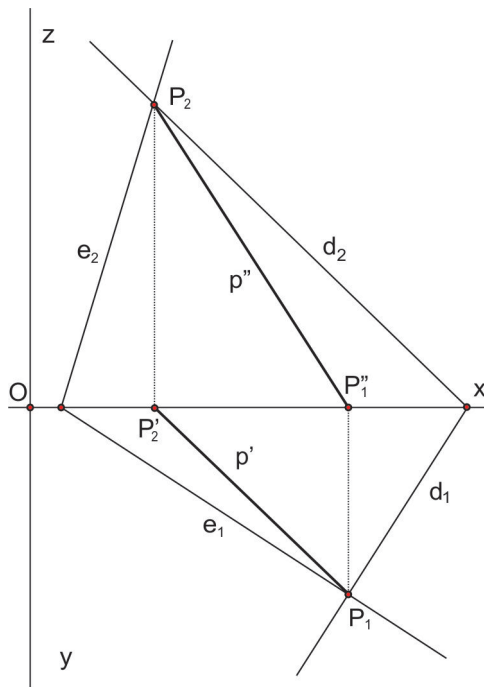


Цртеж 6.23

Бидејќи правата p лежи на двете рамнини, нејзиниот прв про-бод P_1 припаѓа на првата трага на едната и на другата рамнина, што значи е нивна пресечна точка.

Според тоа, кога се зададени трагите e_1 , e_2 и d_1 , d_2 на рамнините E и Δ определени се и прободите P_1 (пресечна точка на трагите e_1 и d_1) и P_2 (пресечна точка на трагите e_2 и d_2) на пресечката p , а со тоа и самата пресечка, бидејќи секоја права е определена со две нејзини точки.

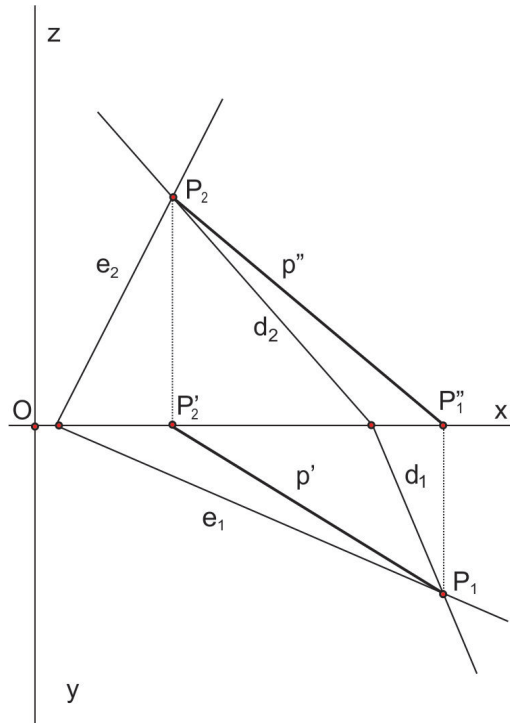
На цртеж 6.24 прикажана е конструкцијата на пресечката p на двете општи рамнини E и Δ , чии траги се конвергентни. Најнапред ги наоѓаме прободите P_1 (пресечна точка на трагите e_1 и d_1) и P_2 (пресечна точка на трагите e_2 и d_2). Притоа точките P_1'' и P_2' лежат на x -оската.



Цртеж 6.24

Тлоцртот p' минува низ точките P_1 и P_2' , а нацртот p'' минува низ точките P_1'' и P_2 .

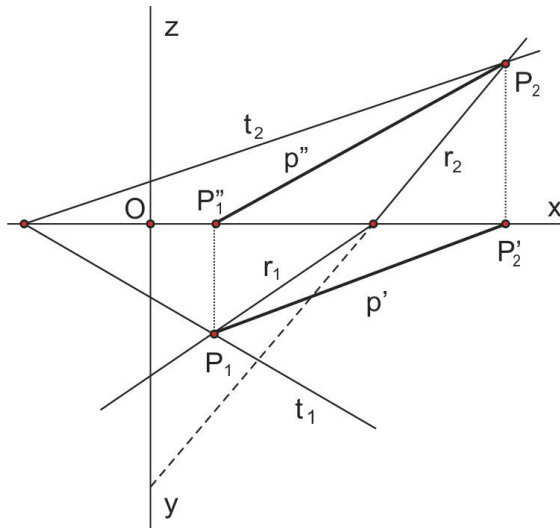
На цртеж 6.25 прикажана е конструкцијата на проекциите на пресечката p на општите рамнини E и Δ , во случај кога рамнината E има конвергентни, а рамнината Δ има дивергентни траги. Постапката е аналогна на претходно изложената.



Цртеж 6.25

Задача. Дадени се рамнините $T(-3;2;1)$ и $R(5;3;5;-6)$. Најди ја нивната пресечка.

Решението на задачата е прикажано на цртеж 6.26. Постапката за нејзино решавање започнува со определување на проекциите на прободите P_1 и P_2 . Тогаш тлоцртот p' минува низ точките P_1 и P_2' , а нацртот p'' минува низ точките P_1'' и P_2 .



Цртеж 4.26



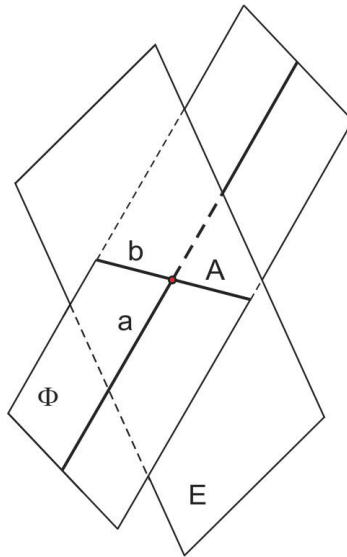
Прашања и задачи

1. Објасни ја постапката за наоѓање пресек на:
 - а) две проектирачки рамнини;
 - б) проектирачка рамнина со општа рамнина;
 - в) две општи рамнини.
2. Нацртај ги придружените проекции на пресечката p на рамнините $T(7;\infty;3)$ и $R(3;\infty;-4)$.
3. Нацртај ги придружените проекции на пресечката p на рамнините $\Sigma(5;4;4,5)$ и $\Delta(\infty;2;2)$.
4. Нацртај ги придружените проекции на пресечката p на рамнините
 - а) $P(-3;2;1,5)$ и $\Theta(3;3;4)$;
 - б) $\Gamma(2;4;-4)$ и $\Omega(-4;-3;2)$.

6.5. ПРОБОД НА ПРАВА НИЗ ОПШТА РАМНИНА

Пробод на права низ општа рамнина

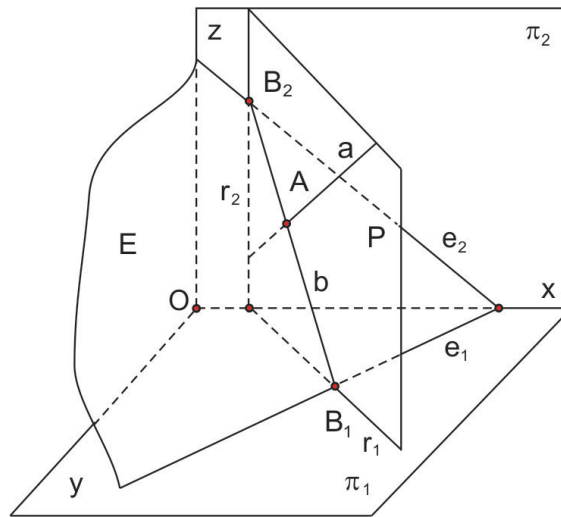
Прободот A кој е заедничка точка на општата рамнина E и правата a можеме да го најдеме кога низ правата a ќе поставиме која било помошна рамнина Φ и ќе ја определите пресечката b на рамнините E и Φ (цртеж 6.27). Бидејќи на пресечката b се наоѓаат сите заеднички точки на рамнините E и Φ , на неа ќе лежи и бараниот пробод A . Според тоа, прободот A ќе се наоѓа во пресекот на правата a и пресечката b .



Цртеж 6.27

Низ правата a може да се постават бесконечно многу рамнини, а меѓу нив се наоѓаат и проектирачките рамнини. При определување на прободот многу практично е да се користат проектирачките рам-

нини, бидејќи конструкцијата на пресечката на рамнината со една од проектирачките рамнини е поедноставна, од конструкцијата на пресечка на две општи рамнини.



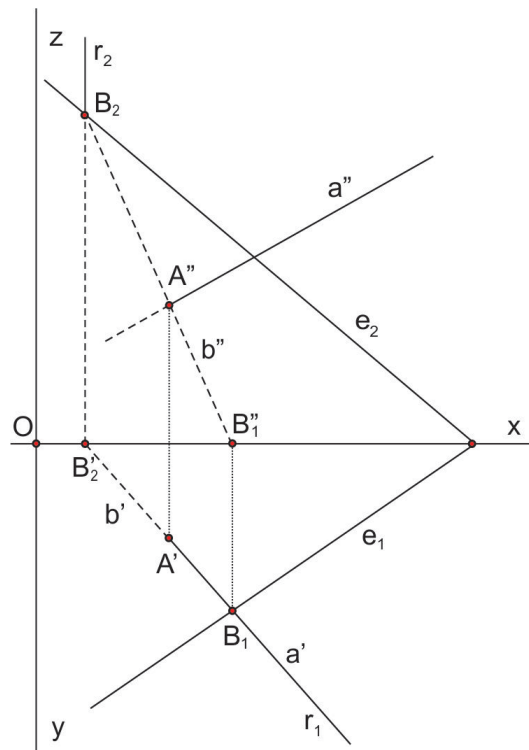
Цртеж 6.28

На цртеж 6.28 е илустрирана постапката за определување на прободот A на правата a со рамнината E , со помош на првoproектирачка рамнина P , која е поставена низ правата a . При поставувањето на првoproектирачка рамнина низ права, првата трага r_1 на рамнината P се совпаѓа со тлоцртот a' на правата a , додека нејзината втора трага r_2 е нормална на x -оската. Рамнините E и P се сечат во правата b којашто минува низ точките B_1 и B_2 , бараниот пробод е пресечната точка на правите a и b . Сега можеме да ја решиме следнава задача.

Задача. Дадени се трагите e_1 и e_2 на рамнината E и проекциите a' и a'' на правата a . Нацртај ги проекциите на прободот A на правата a со рамнината E .

а) Рамнината Е има конвергентни траги

Првата трага r_1 на рамнината Р поставена низ правата а се совпаѓа со a' , додека втората трага r_2 е нормална на x -оската. Проекциите b' и b'' на пресечката b на рамнините Е и Р се наоѓаат со постапката за определување пресечка на две рамнини, разгледана во претходниот дел. Во пресекот на правите a'' и b'' е нацртот A'' на бараниот пробод А, а неговиот тлоцрт A' се наоѓа на правата a' (цртеж 6.29).



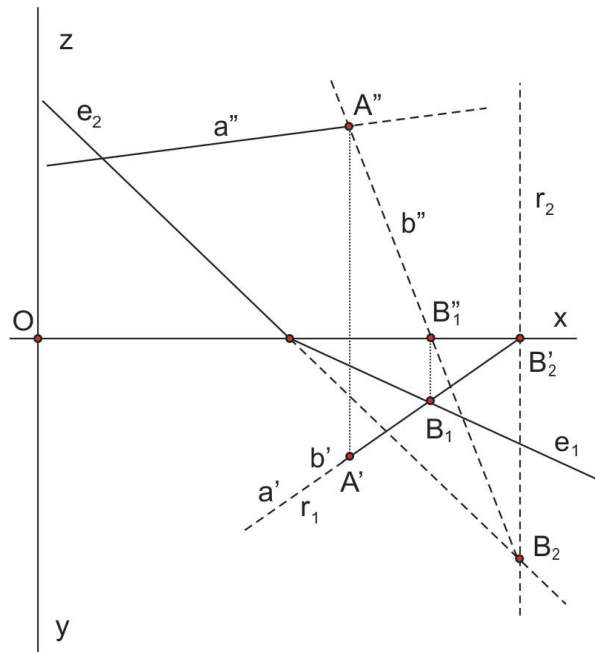
Цртеж 6.29

Прободот А е во делот од рамнината Е кој е во првиот квадрант, а бидејќи рамнината има конвергентни траги, ја гледаме горната страна на таа рамнина и прободот А, било да ги гледаме одгоре

или однапред. Ако рамнината E е непровидна, тогаш таа ни го сокрива делот од правата a кој е под неа, а тоа е оној дел од правата лево од прободот A , па затоа проекциите на тој дел од правата се нацртани со испрекината линија.

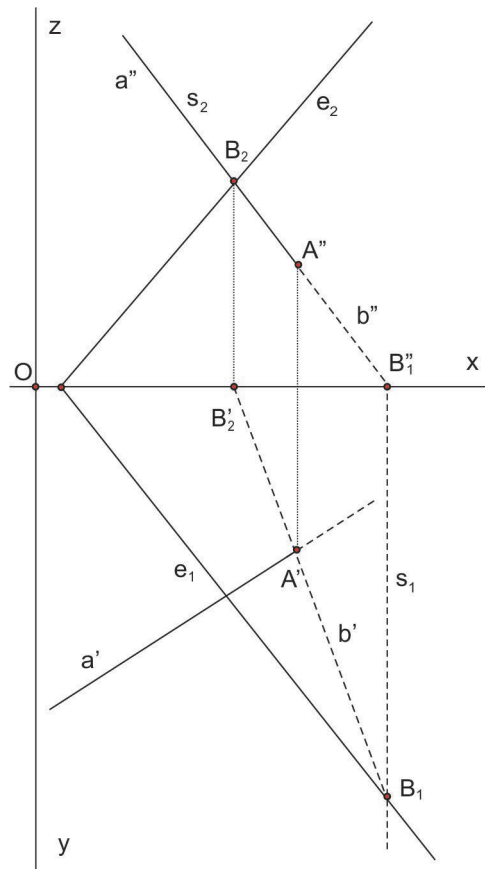
б) Рамнината E има дивергентни траги

Низ правата a поставуваме првоектирчка рамнина P и ги наоѓаме проекциите на пресечката b на рамнините E и P . Првите траги на рамнините E и P се сечат во точката B_1 а нивните втори траги се сечат во точката B_2 , која не е над x -оската како претходно, туку е под неа. Потоа на x -оската ги наоѓаме точките B_1'' и B_2' , па тлоцртот b' на пресечката b е правата определена со точките B_1 и B_2' , а нејзиниот нацрт b'' е правата определена со точките B_1'' и B_2 . Проектиите на бараниот пробод A се пресечните точки на правите a'' , b'' и a' , b' , соодветно (цртеж 6.30).



Цртеж 6.30

Бидејќи рамнината E има дивергентни траги кога ја гледаме одгоре ја гледаме нејзината горна страна, а кога ја гледаме однапред ја гледаме нејзината долна страна. Според тоа, кога гледаме одгоре рамнината ни го сокрива оној дел од правата a кој е под неа, односно оној дел од правата којшто е лево од прободот A , па затоа тлоцртот на тој дел на правата е нацртан со испрекинатата линија. Ако ја гледаме рамнината однапред, таа ни го сокрива оној дел од правата a којшто е зад неа, односно оној дел кој е десно од прободот A , па затоа нацртот на тој дел на правата е нацртан со испрекинатата линија.



Цртеж 6.31

Ако низ правата a поставиме второпроектирачка рамнина Σ , тогаш втората трага s_2 на рамнината се совпаѓа со нацртот a'' на правата a , а нејзината прва трага s_1 е нормална на x -оската. Проекцииите b' и b'' на пресечката b на рамнините Σ и E ги наоѓаме како во случајот кога поставуваме првотроектирачка рамнина, а проекциите на бараниот пробод A се пресечните точки на правите a' , b' и a'' , b'' , соодветно (цртеж 6.31).

Пробод на права низ триаголник

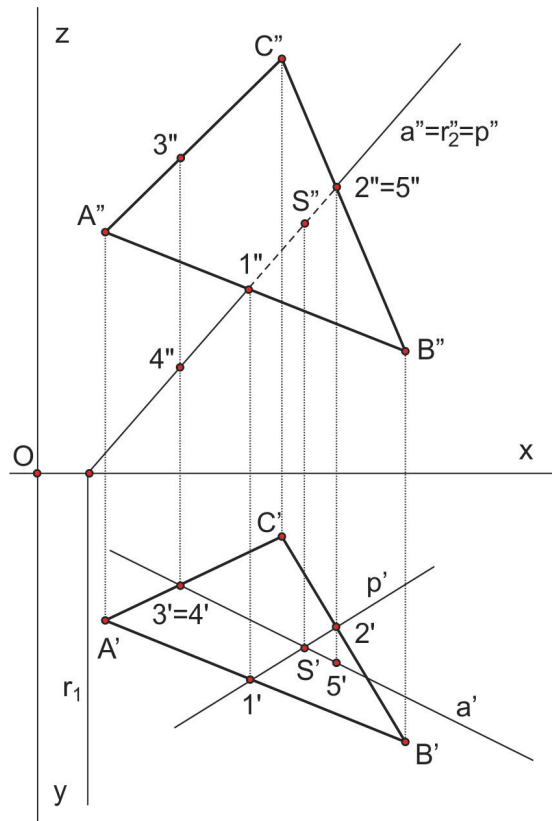
Најпрво ги цртаме проекциите на трите темиња на триаголникот и проекциите на правата a (цртеж 6.32).

Помошната рамнина P што ја поставуваме низ правата a нека е второпроектирачка, што значи дека нејзината втора трага r_2 се совпаѓа со нацртот a'' на правата a , а нејзината прва трага r_1 е нормална на x -оската. Од положбата на помошната рамнина произлегува дека нацртот p'' на пресечката p се совпаѓа со втората трага r_2 . Треба да го определиме и тлоцртот p' на пресечката p .

За таа цел земаме две различни точки кои лежат на страните на триаголникот. Со $1''$ ќе ја означиме пресечната точка на правата p'' со страната $A''B''$, а со $2''$ ќе ја означиме пресечната точка на правата p'' и страната $B''C''$. Нивните тлоцрти $1'$ и $2'$ ќе лежат на соодветните страни $A'B'$ и $B'C'$. На тој начин е задоволен условот пресечката p да припаѓа на рамнината определена со триаголникот.

Пресечната точка на правите p' и a' е S' , а тоа е и тлоцртот на прободната точка S на правата a низ рамнината на триаголникот. Нејзиниот нацрт S'' треба да лежи на правата a'' , односно се наоѓа во пресекот на ординалата повлечена од S' и a'' .

Видливоста се определува со помош на преклопни точки.



Цртеж 6.32

За таа цел во прва проекција избираме две поклопни точки во пресекот на правата a' со страната $A'C'$, и тоа $3'$ од страната $A'C'$ и $4'$ од правата a' . Нивните нацрти лежат соодветно на страната $A''C''$, односно на правата a'' . Забележуваме дека точката $3''$ е повисоко од точката $4''$. Бидејќи гледаме одгоре, точката 3 ја покрива точката 4 , што значи дека страната AC во тој дел го сокрива тлоцртот на правата a којшто до тлоцртот на прободот S' е невидлив. Другиот дел од правата е над триаголникот, па тој е видлив.

Аналогно постапуваме при определување на видливоста кога гледаме однапред.



Прашања и задачи

1. Најди го прободот на правата

$$a = AB[A(1;1,5;1), B(3;2,5;4)]$$

низ рамнината $T(5;5;3)$.

2. Најди го прободот на правата

$$c = CD[C(1;1,5;3), D(3;3;0,5)]$$

низ рамнината $T(3;4;-2)$.

3. Најди го прободот на правата

$$e = EF[E(3;5;5), F(7;1;1)]$$

низ рамнината определена со точките $A(2;3;2)$, $B(6;5;1)$ и $C(8;2;5)$.

3. Најди го прободот на правата

$$m = MN[M(0;7;1), N(10;0;4)]$$

низ рамнината определена со паралелограмот

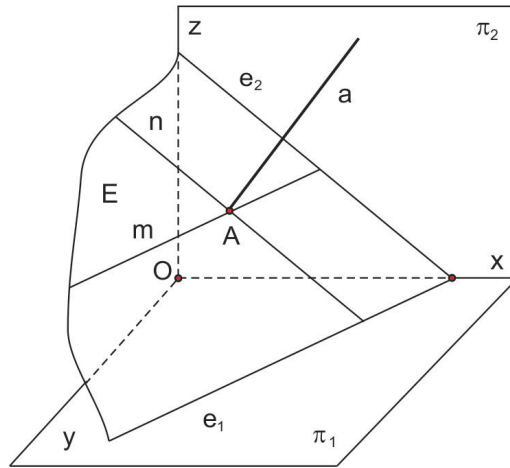
$$ABCD[A(6;0;1), B(10;1;2), C(3;4;4), D].$$

Упатство. За определување на проекциите на точката D користи го својството дека паралелни отсечки имаат паралелни проекции.

6.6. НОРМАЛА НА ОПШТА РАМНИНА

Од геометријата е познато дека ако права a е нормална на рамнина E , тогаш таа е нормална на секоја права од рамнината.

Оттука следува дека правата a ќе биде нормална на хоризонталата m и фронталата n од рамнината кои минуваат низ прободната точка A на нормалата a (цртеж 6.33).



Цртеж 6.33

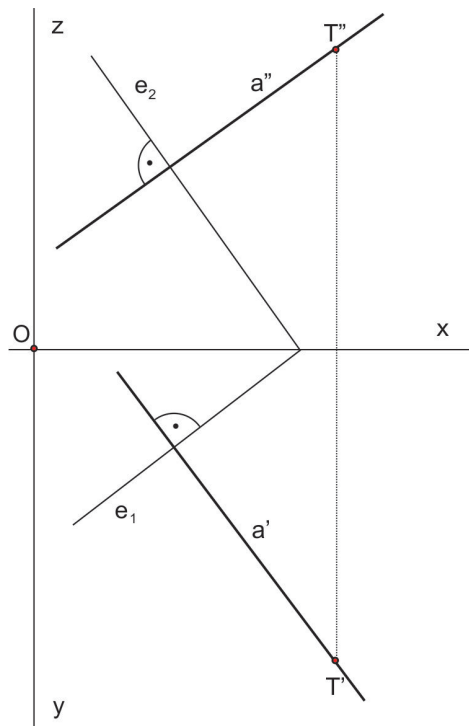
Бидејќи хоризонталата m е паралелна на π_1 , правиот агол што го зафаќаат хоризонталата m и нормалата a ќе се проектира во прав агол во рамнината π_1 . Според тоа, аголот меѓу тлоцртот a' на нормалата a и тлоцртот m' на хоризонталата m ќе биде прав агол. Бидејќи правата m' е паралелна на првата трага на рамнината E и аголот меѓу тлоцртот a' на нормалата a и првата трага e_1 на рамнината E ќе биде прав агол.

Слично, бидејќи фронталата n е паралелна на π_2 , правиот агол што го зафаќаат фронталата n и нормалата a ќе се проектира во прав агол во рамнината π_2 . Според тоа, аголот меѓу нацртот a'' на нормалата a и нацртот n'' на фронталата n ќе биде прав агол. Бидејќи правата n'' е паралелна на втората трага на рамнината E и

аголот меѓу нацртот a'' на нормалата a и втората трага e_2 на рамнината E ќе биде прав агол. Според тоа, имаме дека

Ако права е нормална на рамнина, тогаш нејзиниот тлоцрт е нормален на првата трага на рамнината, а нејзиниот нацрт е нормален на втората трага на рамнината.

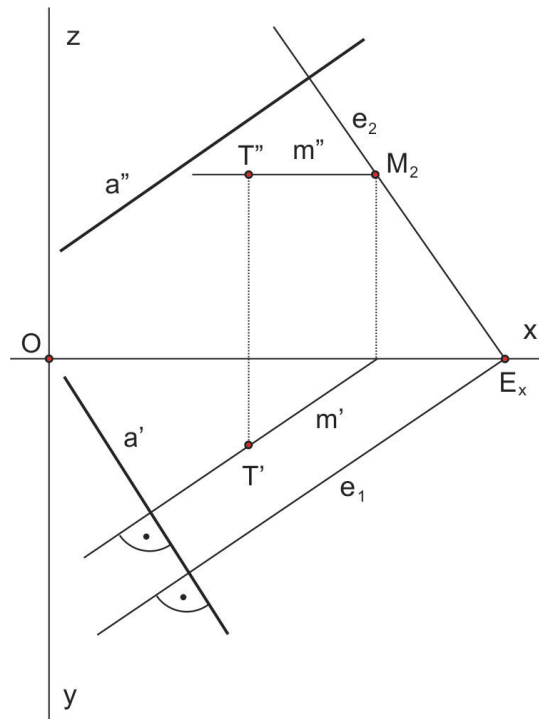
Задача. Дадени се трагите e_1 и e_2 на рамнината E и проекциите T' и T'' на точката T . Нацртај ги проекциите a' и a'' на правата a која минува низ точката T и е нормална на рамнината E (цртеж 6.34).



Цртеж 6.34

Тлоцртот a' на правата a мора да минува низ точката T' и мора да биде нормален на првата трага e_1 на рамнината E . Слично, нацртот a'' на правата a мора да минува низ точката T'' и мора да биде нормален на втората трага e_2 на рамнината E .

Задача. Дадени се проекциите T' и T'' на точката T и проекциите a' и a'' на права a . Нацртај ги трагите e_1 и e_2 на рамнината E која минува низ точката T и е нормална на правата a (цртеж 6.35).



Цртеж 6.35

Според горното правило, првата трага e_1 на рамнината E мора да биде нормална на правата a' , а втората трага e_2 мора да биде нормална на правата a'' . Бидејќи ни се познати правците на трагите можеме да ги нацртаме проекциите на една хоризонтала или фронтала од рамнината E која минува низ точката T . Тлоцртот m' на хо-

ризонталата m која минува низ точката T мора да минува низ точката T' нормално на a' , а нејзиниот нацрт m'' мора да минува низ точката T'' паралелно на x -оската. Ако со помош на m' и m'' ја најдеме втората прободна точка M_2 на хоризонталата m , тогаш имаме една точка од втората трага e_2 на бараната рамнина E .

Низ точката M_2 минува втората трага e_2 нормално на a'' до точката E_x на x -оската, а низ E_x минува и првата трага e_1 на рамнината нормално на a' .



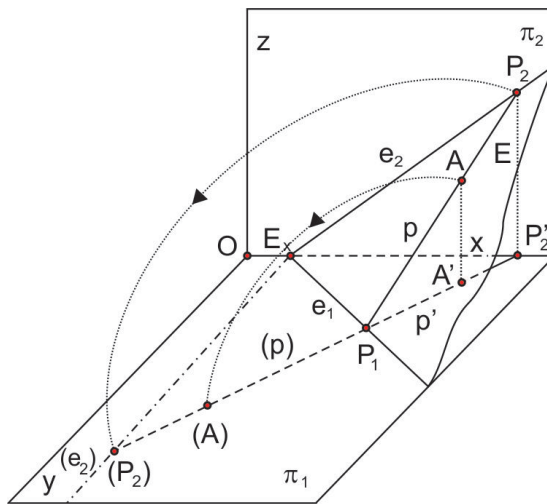
Прашања и задачи

1. Низ точката $A(4;4;3)$ повлечи нормала кон рамнината $T(6;4;\infty)$.
2. Низ точката $T(3;4;1)$ постави рамнина E нормална на правата $p=AB[A(1;4;6),B(5;1;2)]$.
3. Дадена е отсечката $AB[A(2;3;2),B(6;5;4)]$. Низ точката B постави рамнина E нормална на отсечката AB .
4. Во рамнината $T(7;4;8)$ лежи точката $A(3;y;4)$. Од точката A издигни нормала на рамнината T и на неа определи точка D , така што $\overline{AD} = 5 \text{ cm}$.

6.7. СОБОРУВАЊЕ ВО ОПШТА РАМНИНА

Соборување околу првата трага

На цртеж 6.36 претставени се рамнините π_1 и π_2 , како и делот од општата рамнина E која се наоѓа меѓу нејзините траги e_1 и e_2 . Исто така, прикажана е точка A од рамнината E , права p којашто е нормална на првата трага e_1 и минува низ точката A , нејзиниот втор пробод P_2 и тлоцртот p' .



Цртеж 6.36

Ако рамнината E ја собориме околу нејзината прва трага e_1 во π_1 , тогаш секоја нејзина точка опишува кружен лак од кружница со центар на e_1 којашто е нормална на e_1 . Тогаш точката P_2 опишува лак $P_2(P_2)$ од кружница со центар во прободната точка P_1 на правата p којашто минува низ P_2 , со радиус $\overline{P_1P_2}$. Точката A која лежи на правата p опишува кружен лак $A(A)$ од кружница со центар во P_1 и

радиус $\overline{P_1A}$. Правата p е нормална на првата трага e_1 и ја сече e_1 во точката P_1 , па соборената права (p) ќе биде нормална на e_1 и ќе минува низ точката P_1 . Соборената точка (P_2) ќе лежи на соборената права (p), а должината на отсечката $P_1(P_2)$ ќе биде еднаква на должината на отсечката P_1P_2 . Исто така, соборената точка (A) ќе лежи на соборената права (p), а должината на отсечката $P_1(A)$ ќе биде еднаква на должината на отсечката P_1A . Ако точката E_x во која се сечат трагите e_1 и e_2 ја сврземе со точката (P_2) ја добиваме правата (e_2), односно втора трага на рамнината во соборена положба.

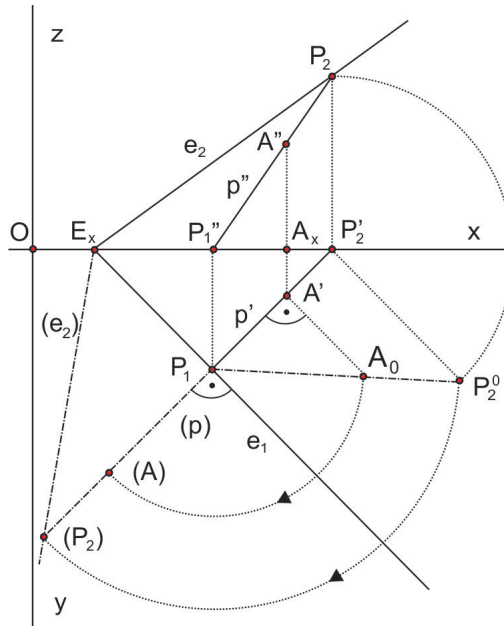
Врз основа на горната дискусија можеме да ја решиме следнава задача.

Задача. Дадени се трагите e_1 и e_2 на рамнината E и тлоцртот A' на точката A . Собори ги во рамнината π_1 , околу првата трага e_1 , втората трага e_2 на рамнината и точката A (цртеж 6.37).

Најнапред го определуваме нацртот A'' на точката A со помош на правата p од рамнината E која минува низ точката A и е нормална на нејзината прва трага e_1 . Потоа ја цртаме соборената права (p) на правата p која минува низ точката P_1 и е нормална на e_1 . На правата (p) мора да лежи нејзината втора прободна точката (P_2).

Сега да го определиме растојанието на точката P_2 од првата трага e_1 , односно вистинската големина на отсечката P_1P_2 . Ако $P_2'P_2^0$ е нормално на p' и $\overline{P_2'P_2^0} = \overline{P_2'P_2}$, тогаш $\overline{P_1P_2^0} = \overline{P_1P_2}$. Ако ја пренесеме отсечката $P_1P_2^0$ од P_1 на (p) ја добиваме соборената втора прободна (P_2) на правата p , па правата $E_x(P_2)$ е соборената втора трага (e_2).

Соборената точка (A) ќе ја најдеме ако ја нацртаме вистинската големина P_1A_0 на отсечката P_1A (ако $A'A_0$ е нормална на p' и $\overline{A'A_0} = \overline{A_xA''}$, тогаш $\overline{P_1A_0} = \overline{P_1(A)}$), па почнувајќи од P_1 ја нанесеме на (p).



Цртеж 6.37

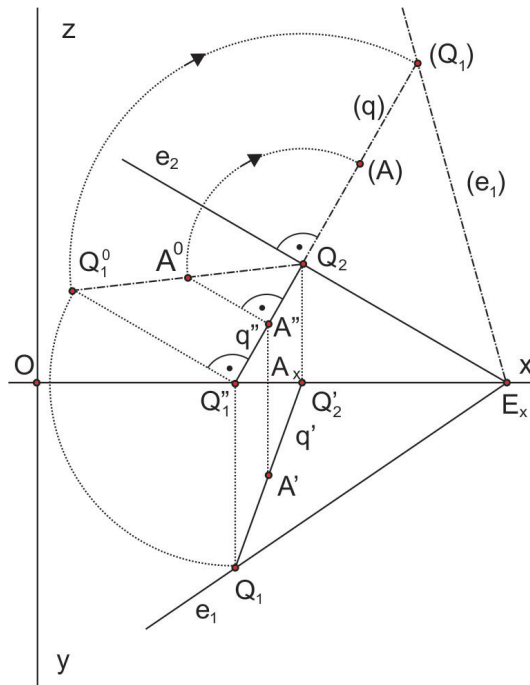
Соборување околу втората трага

При соборување на рамнината E околу втората трага e_2 , секоја нејзина точка опишува лак од кружница нормална на e_2 и со центар на e_2 . Радиусот на кружницата е еднаков на делот од правата q која лежи во рамнината и е нормална на втората трага, заграден со нејзиниот втор пробод и точката.

Задача 2. Дадени се трагите e_1 и e_2 на рамнината E и нацртот A'' на точката A . Собори ги во рамнината π_2 , околу втората трага e_2 , првата трага e_1 на рамнината и точката A .

Најнапред го определуваме нацртот A'' на точката A со помош на правата q од рамнината E која минува низ точката A и е нормална на нејзината втората трага e_2 . Потоа ја цртаме соборената права (q) на

правата q која минува низ точката Q_2 и е нормална на e_2 . Потоа ги определуваме вистинските големини $Q_2Q_1^0$ и Q_2A^0 на отсечките Q_2Q_1 и Q_2A ($Q_1''Q_1^0$ нормално на q'' , $Q_1''Q_1^0 = \overline{Q_1Q_1^0}$, $A''A^0$ нормално на q'' , $A''A^0 = \overline{A_xA^0}$). Ако овие големини ги нанесеме на правата (q) ги добиваме точките (Q_1) и (A). Правата $E_x(Q_1)$ е соборената прва трага (e_1), а точката (A) е соборувањето на точката A .



Цртеж 6.38



Прашања и задачи

1. Дадена е рамнината $T(5;4;3)$ и во неа точката $A(1;2;z)$. Собори ги во рамнината π_1 , околу првата трага e_1 , втората трага e_2 на рамнината и точката A .

2. Дадена е рамнината $T(6;6;6)$ и во неа точката $A(3;y;1,5)$. Собори ги во рамнината π_1 , околу првата трага e_1 , втората трага e_2 на рамнината и точката A .

3. Дадена е рамнината $T(6;5;6)$ и во неа точката $A(1,5;1;z)$. Собори ги во рамнината π_2 , околу втората трага e_2 , првата трага e_1 на рамнината и точката A .

6.8. ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ КОИ ЛЕЖАТ ВО ОПШТА РАМНИНА

Со соборување на општа рамнина, можеме да решиме два проблема и тоа:

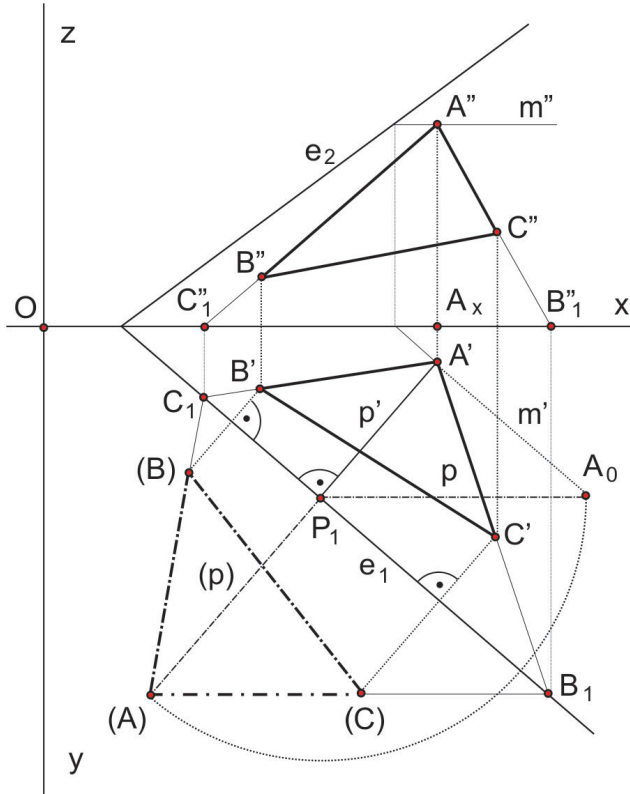
- да определиме вистинска големина на геометриска фигура кога се зададени нејзините ортогонални проекции, и
- да нацртаме ортогонални проекции на геометриска фигура кога е дадена нејзината вистинска големина.

И во двата случаи геометриската фигура лежи во определена рамнина. Решавањето на наведените проблеми ќе го илустрираме со примери.

Задача. Дадени се трагите e_1 и e_2 на рамнината E и тлоцртот $A'B'C'$ на триаголникот ABC кој лежи во неа. Нацртај го триаголникот во вистинска големина (цртеж 6.39).

Прво со помош на хоризонтала m која минува низ точката A ќе го определиме нацртот A'' на точката A . Потоа со помош на првиот

пробод C_1 на правата AB и првиот пробод B_1 на правата AC го наоѓаме нацртот на точките B и C .



Цртеж 6.39

Понатаму ја соборваме точката A околу трагата e_1 во π_1 со постапката изложена во претходното поглавје. Имено, ја цртаме соборената права (p) на правата p која минува низ точката A и е нормална на e_1 . Тогаш p' минува низ A' и е нормална на e_1 . Од A' цртаме нормала на p' и на неа го нанесуваме растојанието од A_x до A'' . Така ја добиваме точката A_0 . Соборената точка (A) ја наоѓаме од условот $\overline{P_1 A_0} = \overline{P_1 (A)}$.

За да не ги соборуваме точките B и C со истата постапка доволно е да го воочиме следното:

При соборувањето на рамнината E околу трагата e_1 секоја точка од трагата останува на своето место. Според тоа и точките C_1 и B_1 во кои правите на кои лежат страните на триаголникот се сечат со трагата e_1 ќе останат на своето место. Така отсечката $C_1(A)$, односно $B_1(A)$ ќе биде соборена на отсечката C_1A , односно B_1A . Ако сега од B' повлечеме нормала на e_1 , таа ќе ја сече отсечката $C_1(A)$ во бараната точка (B) , додека нормалата повлечена од C' на e_1' ќе ја сече отсечката $B_1(A)$ во бараната точка (C) . Триаголникот $(A)(B)(C)$ е вистинска големина на триаголникот ABC .

Задача. Дадени се трагите e_1 и e_2 на рамнината E и тлоцртот $A'B'$ на отсечка којашто лежи во неа. Нацртај ги проекциите на квадратот $ABCD$ којшто лежи во рамнината E (цртеж 6.40).

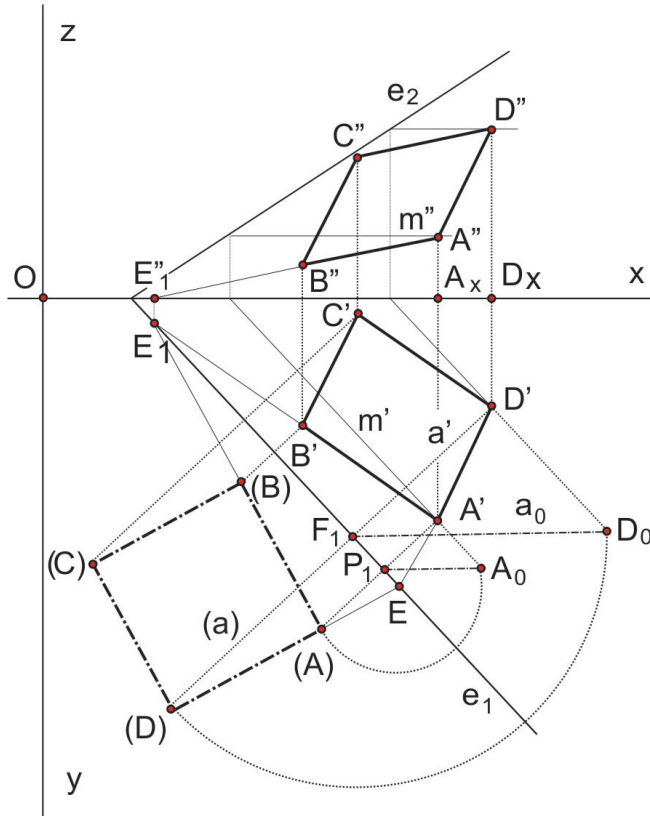
Со помош на хоризонтала m која минува низ точката A ќе го определиме нацртот A'' на точката A . Потоа со помош на првиот пробој E_1 на правата AB и нејзиниот нацрт $E_1''A''$ го определуваме нацртот B'' на точката B .

Бидејќи проекциите на квадратот нема да бидат квадрати, мораме рамнината E заедно со отсечката AB да ја собориме околу e_1 или e_2 . Потоа со помош на соборената отсечка ќе го нацртаме соборениот квадрат, а со негова помош ќе ги нацртаме неговите проекции.

Соборената отсечка AB на π_1 околу трагата e_1 ќе ја најдеме со помош на соборената точка (A) и првиот пробој E_1 на правата AB , а потоа над страната $(A)(B)$ ќе го нацртаме квадратот.

Бидејќи можеме да нацртаме два квадрати, еден на едната, а друг на другата страна, задачата има две решенија. На цртежот е

нацртан квадратот $(A)(B)(C)(D)$ кој се наоѓа на левата страна од отсечката.



Цртеж 6.40

За да го нацртаме тлоцртот D' на темето D низ него повлекуваме права a која лежи во рамнината и е нормална на трагата e_1 . Тогаш нејзиниот тлоцрт a' и соборената права (a) околу e_1 на π_1 се совпаѓаат со нормалата повлечена од (D) кон e_1 . Сите прави кои лежат во рамнината E и се нормални на првата трага e_1 зафаќаат ист агол α_1 со рамнината π_1 , па затоа ако низ F_1 повлечеме права паралелна на отсечката P_1A_0 ќе ја добиеме правата a_0 која е соборена права на правата a во π_1 околу својот тлоцрт a' . Ако правата a_0 ја пресечеме

со кружница со центар во F_1 опишана од точката (D), ќе ја добиеме точката D_0 . Правата повлечена од D_0 нормално на a' ја сече a' во тлоцртот D' на точката D.

За да го определиме тлоцртот C' на точката C низ точката (C) повлекуваме нормала на e_1 , бидејќи на неа треба да лежи C' . Потоа низ B' цртаме права паралелна со $A'D'$. Бидејќи паралелни страни имаат паралелни проекции, па во пресекот на овие две прави се наоѓа точката C' . Нацртот C'' на точката C мора да биде во пресекот на ординалата повлечена од C' и правата повлечена низ точката B'' паралелна на $A''D''$.

Ако сите конструкции се точно изведени, тогаш на крајот терба да биде $C'D'$ паралелна на $A'B'$ и $C''D''$ паралелна на $A''B''$.

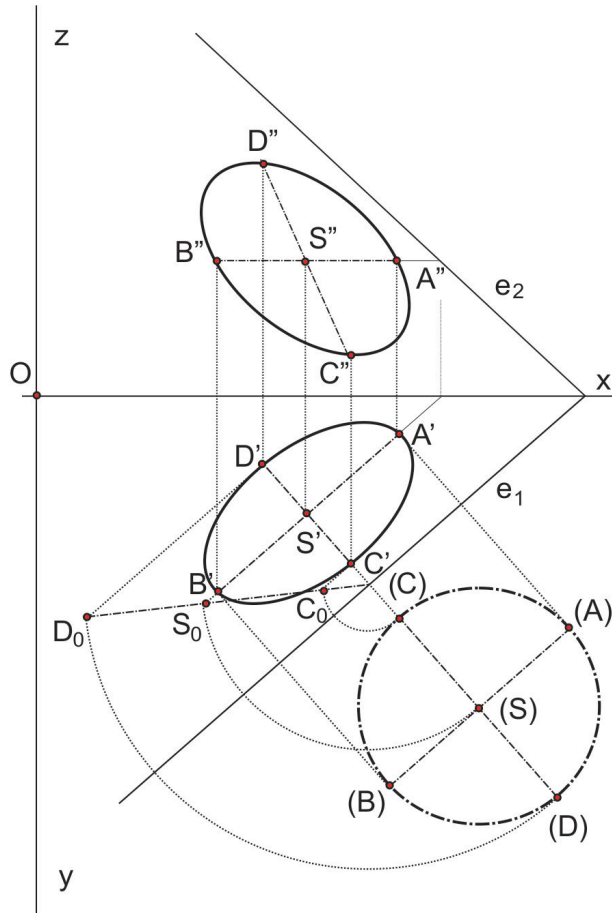
Задача. Нацртај ги проекциите на кружница која лежи во рамнината E со траги e_1 и e_2 , со центар во точката S и радиус r (цртеж 6.41).

Со соборување на рамнината E околу трагата e_1 во π_1 ќе го добиеме соборениот центар (S) на точката S. Опишуваме кружница (k) со центар во (S) и радиус r . Така ја добиваме соборената кружница на бараната кружница.

Во кружницата (k) цртаме два заемно нормални дијаметри (A)(B) и (C)(D), од кои (A)(B) паралелен на e_1 и (C)(D) нормален на e_1 . Тогаш за тлоцртите на овие дијаметри имаме дека $A'B'$ е паралелен на e_1 и $C'D'$ е нормален на e_1 . Така добиваме дека важат равенствата $\overline{A'B'} = \overline{(A)(B)} = 2r$, од каде што следува дека $A'B'$ е големата оска на елипсата, а $C'D'$ е малата оска на елипсата.

Конструкцијата на елипсата ја изведуваме по некоја од познатите постапки за конструкција на елипса. Алтернативно елипсата

можеме да ја конструираме со наоѓање на проекциите на доволно голем број точки од елипсата.



Цртеж 6.41



Прашања и задачи

- Во рамнината $E(7;6;5)$ лежи паралелограмот $ABCD[A(0,5;3;z), B(2,5;3;z), C(3,5;1;z), D]$.

Нацртај го неговиот нацрт, а потоа најди ја неговата вистинска големина со соборување на рамнината E

а) околу првата трага во π_1 ;

б) околу втората трага во π_2 .

2. Во рамнината $E(4;5;-5)$ лежи паралелограмот

$$ABCD[A(2;y;2), B(5;y;3), C(6;y;5), D].$$

Нацртај го неговиот тлоцрт, а потоа најди ја неговата вистинска големина со соборување на рамнината E

а) околу првата трага во π_1 ;

б) околу втората трага во π_2 .

3. Нацртај ги проекциите на правилен шестаголник којшто лежи во рамнината $E(10;7;6)$, ако точката $S(3;2,5;z)$ е негов центар, а точката $A(2,5;4;z)$ е едно негово теме.

4. Нацртај ги проекциите на кружница која лежи во рамнината E , со центар во точката $S(3;2,5;z)$ и радиус $r=2,5$.

6.9. ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА КОИ ЛЕЖАТ СО ОСНОВАТА ВО ОПШТА РАМНИНА

Во ова поглавје ќе цртаме проекции на геометрички тела чија што основа е во општа рамнина. Со неколку примери ќе ја илустрираме постапката за решавање вакви задачи.

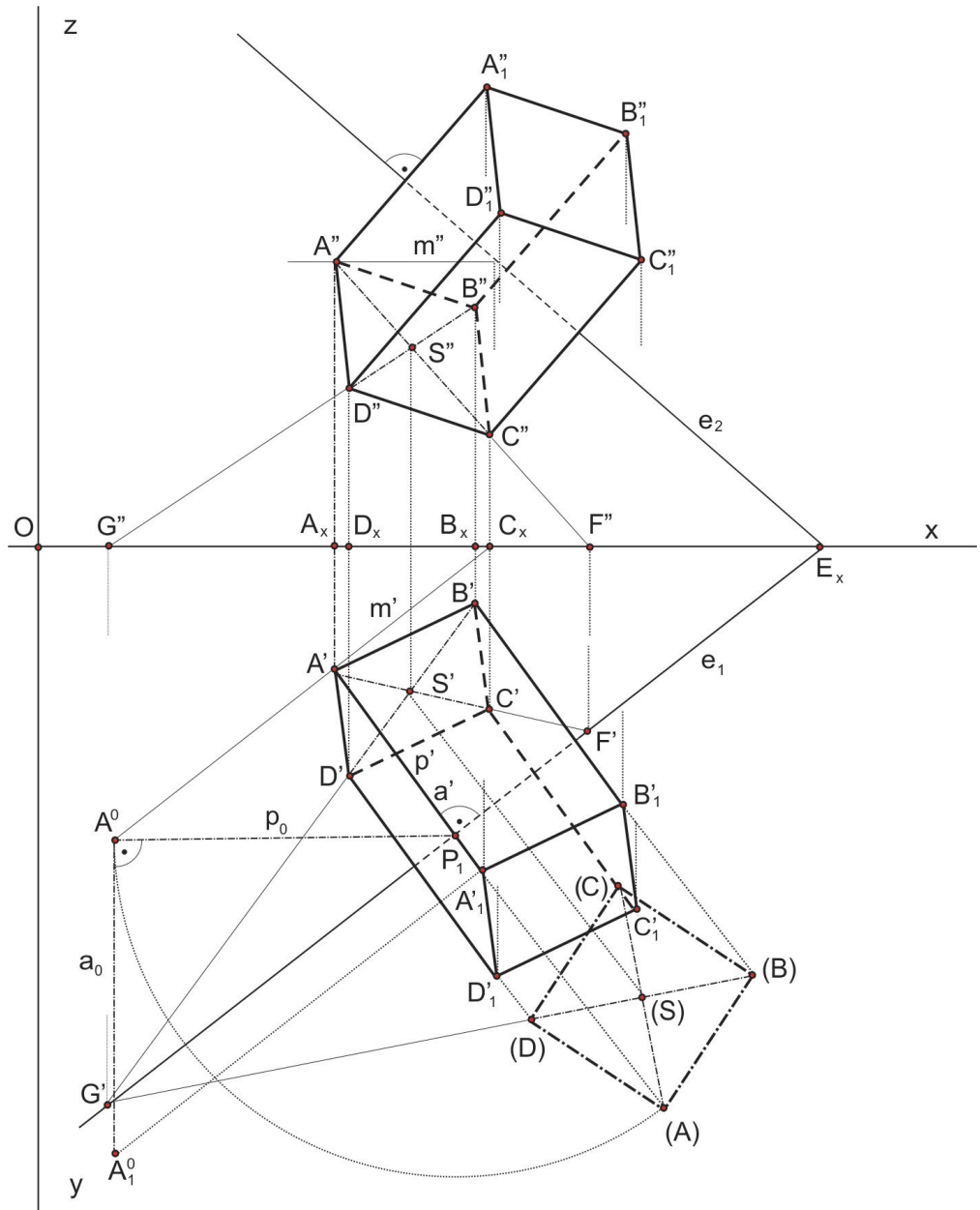
Задача. Дадени се трагите e_1 и e_2 на рамнината E и тлоцртот $A'C'$ на отсечката AC која лежи во неа. Нацртај ги проекциите на

права правилна четиристрана призма чијашто основа лежи во рамнината E , ако отсечката AC е дијагонала на основата, а висината $h=3\text{cm}$ (цртеж 6.42).

За да ги нацртаме проекциите на основата $ABCD$ најнапред ќе нацртаме хоризонтала m која минува низ точката A со цел да го определиме нацртот A'' на точката A . Потоа го наоѓаме нацртот C'' на точката C со помош на нацртот $A''F''$ на правата на која лежи дијагоналата AF со тлоцрт $A'F'$. Понатаму ја цртаме соборената положба $(A)(C)$ на дијагоналата AC на рамнината π_1 околу првата трага e_1 на рамнината E , па со помош на неа го цртаме квадратот $(A)(B)(C)(D)$ чишто дијагонали се сечат во точката (S) . Сега ќе ги определиме тлоцртот S' и нацртот S'' на точката S којашто е на дијагоналата AC , па со помош на проекциите на точката S ја наоѓаме проекцијата на дијагоналата BD . Ако правата на која лежи дијагоналата $(B)(D)$ ја сече првата трага e_1 во точката G' , тогаш правата $G'S'$ е тлоцрт на правата на која лежи таа дијагонала, а на неа лежат тлоцртот B' на точката B и тлоцртот D' на точката D . Правата $G''S''$ е нацрт на правата на која лежи таа дијагонала, а на неа лежат нацртите B'' на точката B и D'' на точката D . На тој начин е определен тлоцртот и нацртот на основата $ABCD$.

Бидејќи бочниот раб a кој ги сврзува темињата A и A_1 на призмата е нормален на рамнината E , неговите проекции a' и a'' ќе бидат нормални на истоимените траги на рамнината.

Во продолжение ќе ја изложиме постапката за наоѓање на проекцијата на темето A_1 од работ a . Бидејќи работ a кој ги сврзува темињата A и A_1 е нормален на рамнината E , тој е нормален на правата p која минува низ точката A и е нормална на првата трага на рамнината. Заради тоа низ точката A повлекуваме нормала на соборената права p_0 и нанесуваме $a_0 = \overline{A_0A_1} = 3\text{cm}$.



Цртеж 6.42

Ако низ точката A_1^0 повлечеме права паралелна со отсечката A_0A' , тогаш таа ќе ја сече правата a' во точката A_1' . Нацртот A_1'' на темето A_1 ќе го добиеме на правата a'' со помош на ординалата повлечена од точката A_1' .

Бидејќи бочните рабови на призмата се паралелни и еднакви, тие имаат паралелни и еднакви проекции. Затоа се паралелни и еднакви отсечките $A'A_1'$, $B'B_1'$, $C'C_1'$ и $D'D_1'$, како и отсечките $A''A_1''$, $B''B_1''$, $C''C_1''$ и $D''D_1''$.

Ако сега ги сврземе меѓу себе тлоцртите, а потоа нацртите на точките A_1 , B_1 , C_1 и D_1 , ќе ги добиеме проекциите на горната основа на призмата.

На крајот треба да определиме кои рабови на призмата се видливи, а кои не се видливи. Сите рабови на призмата кои припаѓаат на контурата на некоја проекција на призмата се видливи во таа проекција. Заради тоа со полна линија ги цртаме контурите на двете проекции на призмата, а потоа ја испитуваме видливоста на оние темиња на призмата чишто проекции се во внатрешноста на контурата на призмата.

Бидејќи во внатрешноста на контурата на тлоцртот на призмата останаа само точките C' и A_1' , треба да испитае која од двете точки C' и A_1' е видлива. Бидејќи нацртот A_1'' на точката A_1 е над нацртот C'' на точката C , заклучуваме дека во тлоцртот точката A_1 е видлива, а точката C не е видлива. Според тоа, во тлоцртот се гледаат сите оние рабови кои излегуваат од нацртот на темето A_1 , а не се видливи сите оние кои излегуваат од темето C .

Во контурата на нацртот на призмата се наоѓаат точките B'' и D_1'' . Бидејќи тлоцртот D_1' на точката D_1 е пред тлоцртот B' на точката B , заклучуваме дека во нацртот точката D_1 се гледа, а точката B не се гледа, па во нацртот се видливи сите оние рабови кои излегу-

ваат од темето D_1 , а сите оние кои излегуваат од темето B не се видливи.

На крајот, мораме оние делови од трагите на рамнината E кои останале под проекцијата на призмата да ги нацртаме со испрекинатата линија.

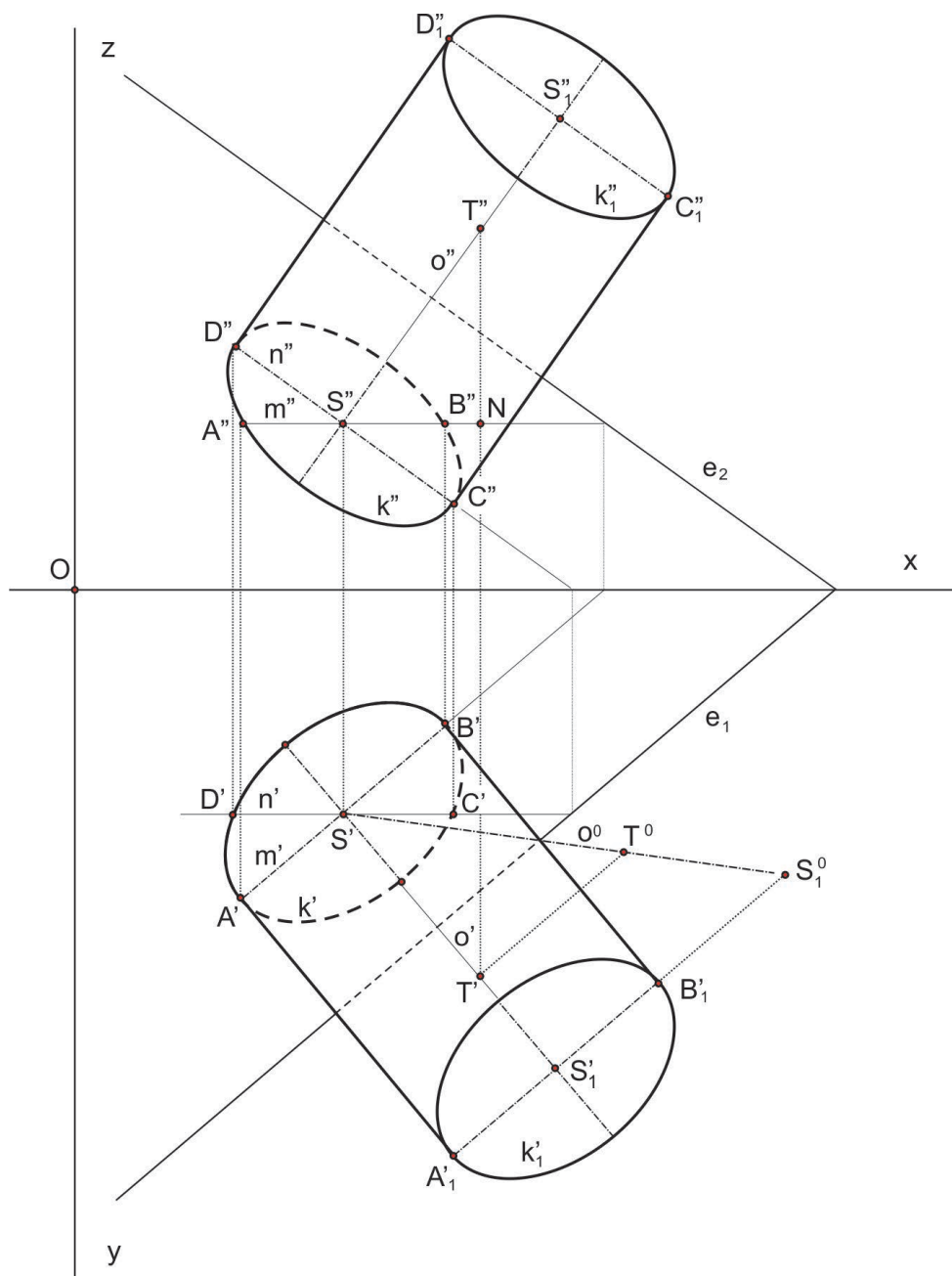
Задача. Нацртај ги проекциите на прав цилиндар со основа во рамнината $E(8;7;6)$, ако центарот на основата е $S(2,5;2,5;z)$, радиусот на основата е 3cm , а висината е $h=5\text{cm}$ (цртеж 6.43).

Прво цртаме хоризонталата m која минува низ точката S со цел да го определиме нацртот S'' на точката S . Потоа го цртаме тлоцртот $A'B'$ и нацртот $A''B''$ на оној дијаметар AB на долната основа кој лежи на хоризонталата m , како и нацртот $C''D''$ и тлоцртот $C'D'$ на оној дијаметар CD на долната основа кој лежи на фронталата n која минува низ точката S .

За елипсата k' којашто е тлоцрт на основата на цилиндарот ја имаме големата оска $A'B'$ и две точки C' и D' , а за елипсата k'' којашто е нацрт на основата, отсечката $C''D''$ е големата оска, а A'' и B'' се две нејзини точки. Според тоа можеме да ги нацртаме елипсите k' и k'' .

За да ги нацртаме проекциите на горната основа на цилиндарот, мораме да ги нацртаме проекциите o' и o'' на оските на цилиндарот и проекциите S_1' и S_1'' на центарот S_1 на таа основа. Правата o' е нормална на трагата e_1 , а правата o'' е нормална на трагата e_2 .

Да ја проследиме постапката за наоѓање на проекциите S_1' и S_1'' на центарот S_1 на горната основа. На проекциите на оската на цилиндарот ги означуваме проекциите T' и T'' на произволна точка T . Потоа ја определуваме вистинската големина $S'T^0$ на отсечката ST со помош на диференцијниот триаголник $S'T'T^0$ ($T'T^0$ е нормална на



Цртеж 6.43

$S'T'$ и $\overline{T'T^0} = \overline{NT''}$). Сега на соборената оска o^0 која минува низ точките S' и T^0 ја наоѓаме точката S_1^0 така што $\overline{S'S_1} = h = 5\text{cm}$, па со помош на точката S_1^0 ги определуваме тлоцртот S_1' и нацртот S_1'' на центарот S_1 на горната основа.

Проекциите на горната основа на цилиндарот се елипсите k_1' и k_1'' кои се складни и со истоимените проекции на долната основа, Изводниците AA_1 и BB_1 се контурни изводници на тлоцртот на цилиндарот, додека изводниците CC_1 и DD_1 се контурни изводници на неговиот нацрт.

Рамнината E има конвергентни траги и долната основа на цилиндарот е во рамнината, а горната основа е паралелна со неа. Според тоа, во тлоцртот и нацртот ќе ја гледаме истата страна од горната основа на цилиндарот, а неговата долна основа нема да ја гледаме. Нема да го гледаме ниту оној дел од првата трага e_1 кој е под цилиндарот, како и оној дел од втората трага e_2 која останал зад него.



Прашања и задачи

1. Нацртај ги проекциите на коцка која со една основа лежи во рамнината $P(8;7;6)$, ако центарот на таа основа е $S(2,5;2,5;z)$, а точката $A(4;2;z)$ е едно нејзино теме.
2. Нацртај ги проекциите на права правилна шестаголна пирамида чијашто основа лежи во рамнината $E(-10;8;10)$, ако центарот на основата е $S(-3,5;3;z)$, точката $A(-2;2,5;z)$ е едно теме на основата, а висината на пирамидата е $h=6\text{cm}$.

3. Нацртај ги проекциите на прав цилиндар со основа во рамнината $E(10;7;6)$, ако центарот на основата е $S(3,5;2,5;z)$, радиусот на основата е 3cm , а висината е $h=5\text{cm}$.
4. Нацртај ги проекциите на прав конус со основа во рамнината $E(-10;7;6)$, ако центарот на основата е $S(-3,5;2,5;z)$, радиусот на основата е 3cm , а висината е $h=7\text{cm}$.

7. ПРЕСЕЦИ НА ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА СО РАМНИНИ

7.1. ПРЕСЕК НА ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА СО ПРОЕКТИРАЧКИ РАМНИНИ

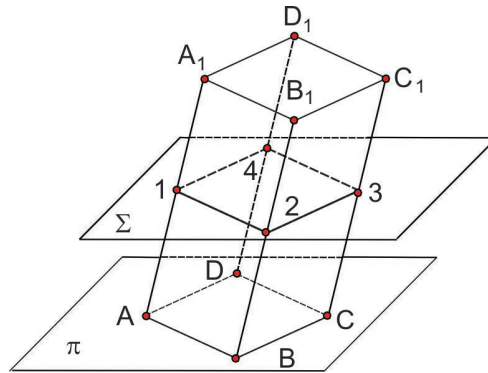
Пресек на призма со проектирачка рамнина

Ако четириаголна призма чијашто основа $ABCD$ лежи во рамнина π (цртеж 7.1) ја пресечеме со рамнина Σ којашто е паралелна на рамнината π ќе добиеме четириаголник $1-2-3-4$ којшто е складен со основата. Темињата на добиениот четириаголник се прободите на рамнината Σ со бочните рабови на призмата. Така, имаме дека:

Пресек на призма со рамнина паралелна со нејзината основа е многуаголник складен со основата.

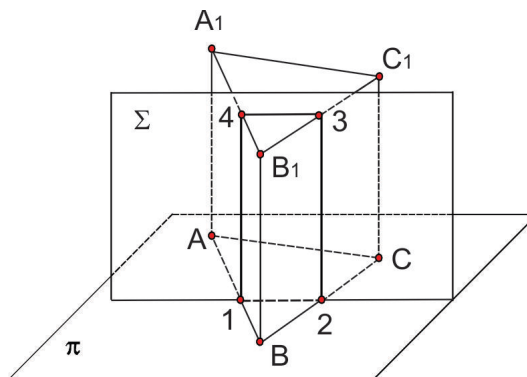
Ако права триаголна призма чија основа ABC лежи во рамнина π (цртеж 7.2) ја пресечеме со рамнина Σ којашто е нормална на рамнината π ќе добиеме правоаголник $1-2-3-4$ чишто две

страни се паралелни со бочните рабови на призмата а другите две страни се пресечките на призмата со рамнина Σ . Така, имаме дека:



Цртеж 7.1

Пресек на права призма со рамнина нормална на нејзината основа е правоаголник чишто две страни се паралелни со бочните рабови на призмата, а другите две страни се пресечките на призмата со рамнината.

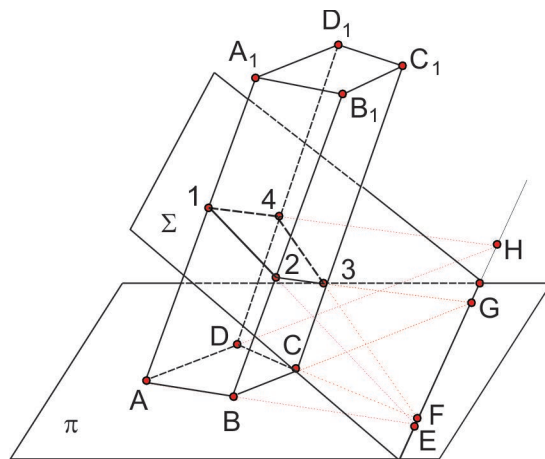


Цртеж 7.2

Ако четириаголна призма чијашто основа $ABCD$ лежи во рамнина π (цртеж 7.3) ја пресечеме со рамнина Σ којашто не е ниту паралелна ниту нормална на рамнината π , и не ја сече основата на призмата, ќе добиеме четириаголник $1-2-3-4$ којшто не е складен со основата, но за основата и добиениот четириаголник може да ги воочиме следните својства.

Имено, правите $A-1$, $B-2$, $C-3$ и $D-4$ се паралелни, додека правите AB и $1-2$, BC и $2-3$, CD и $3-4$, AD и $4-1$, се сечат во точките E , F , G и H , соодветно, коишто лежат на пресечната права на рамнините π и Σ . Според тоа, може да заклучиме дека:

Пресек на призма со рамнина којашто не ниту паралелна ниту нормална со нејзината основа е многуаголник афино перспективен со основата, со правец на бочните рабови на призмата и оска во пресекот на пресечната рамнина и рамнината на проектирање.

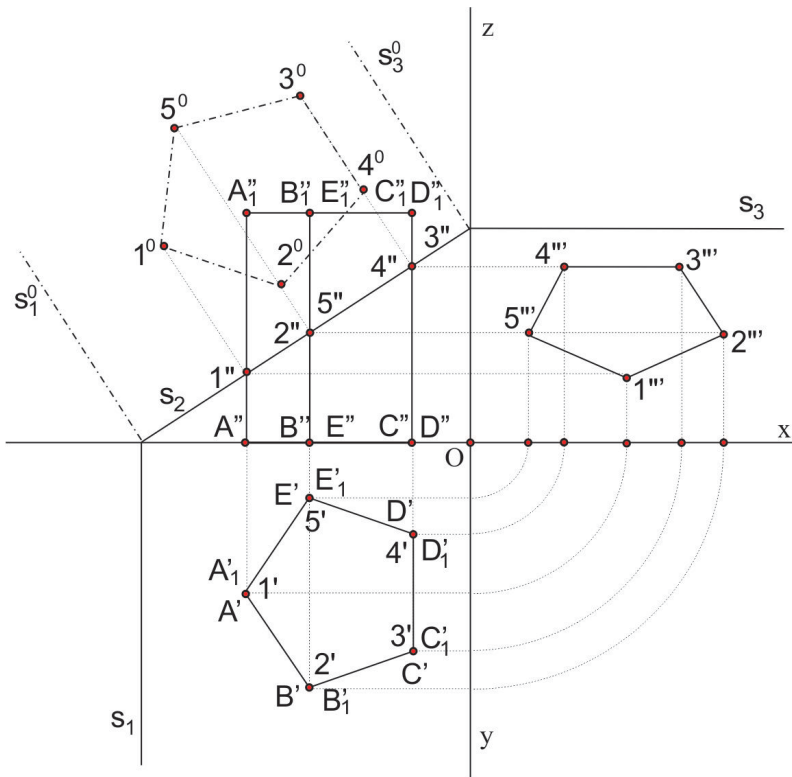


Цртеж 7.3

Задача. Дадени се трагите s_1 и s_2 на второпројектирачка рамнина Σ и придружените проекции на правилна петаголна призма чијашто основа $ABCDE$ лежи во π_1 и нејзиниот основен раб CD е нормален на π_2 . Нацртај го пресекот на призмата со рамнината Σ .

Темињата на пресечниот петаголник ќе ги определиме со наоѓање на прободните точки 1, 2, 3, 4 и 5, на бочните рабови на призмата со рамнината Σ .

Бидејќи рамнината Σ е второпројектирачка, нацртите на прободните точки $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ и $5''$, ќе лежат на нејзината втора трага s_2 , па нацртот на пресечниот петаголник ќе лежи на втората трага s_2 , од точката $1''$ до точката $3'' = 4''$.



Цртеж 7.4

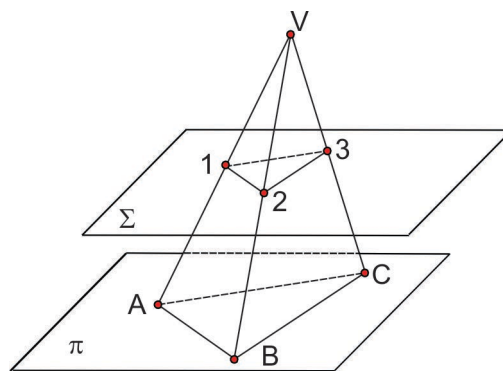
Тлоцртот на пресечниот петаголник се совпаѓа со тлоцртот на призмата, бидејќи нејзините бочни рабови се нормални на π_1 .

На цртеж 7.4 прикажана е третата проекција на пресечниот петаголник $1''2''3''4''5''$, и неговата вистинска големина $1^02^03^04^05^0$ добиена со соборување на рамнината Σ околу втората трага s_2 во π_2 .

Пресек на пирамида со проектирачка рамнина

Ако триаголна пирамида чијашто основа ABC лежи во рамнина π (цртеж 7.5) ја пресечеме со рамнина Σ којашто е паралелна на рамнината π ќе добиеме триаголник 1–2–3 којшто е сличен со основата. Темињата на тој триаголник се прободите на бочните рабови на пирамидата со рамнината Σ , а неговите страни се пресечки на рамнината Σ со бочните сидови на пирамидата. Така, имаме дека:

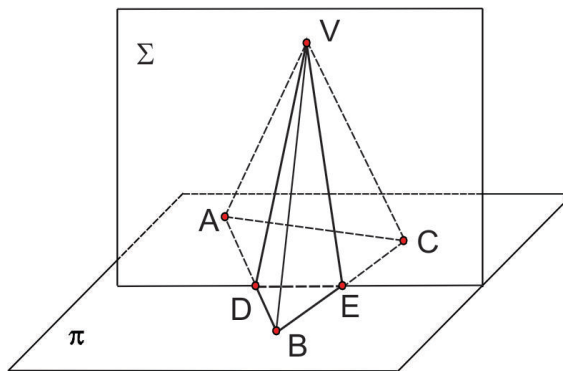
Пресек на пирамида со рамнина паралелна со нејзината основа е многуаголник којшто е сличен со основата.



Цртеж 7.5

Ако триаголна пирамида чијашто основа ABC лежи во рамнина π (цртеж 7.6) ја пресечеме со рамнина Σ којашто минува низ врвот на пирамидата ќе добиеме триаголник DEV чишто две страни го имаат за заедничко теме врвот на пирамидата, а третата страна е пресечката на рамнината Σ со основата на пирамидата. Така, имаме дека:

Пресек на пирамида со рамнина којашто минува низ врвот на пирамидата е триаголник чишто две страни го имаат за заедничко теме врвот на пирамидата, а третата страна е пресечката на рамнината со основата на пирамидата.

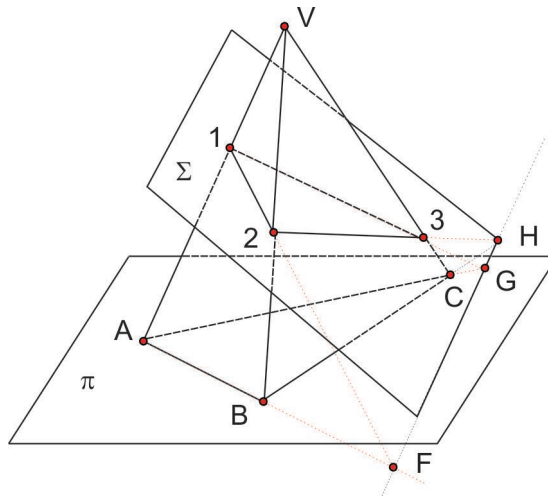


Цртеж 7.6

Ако триаголна пирамида чијашто основа ABC лежи во рамнина π (цртеж 7.7) ја пресечеме со рамнина Σ којашто не е ниту паралелна со основата ниту минува низ врвот на пирамидата, и не ја сече основата на пирамидата, ќе добиеме триаголник $1-2-3$ којшто не е складен со основата, но за основата и добиениот триаголник може да ги воочиме следните својства. Имено, правите

$A-1$, $B-2$ и $C-3$ минуваат низ врвот V на пирамидата, додека правите AB и $1-2$, BC и $2-3$, AC и $1-3$, се сечат во точките F , H и G , соодветно, коишто лежат на пресечната права на рамнините π и Σ . Според тоа, може да заклучиме дека:

Пресек на пирамида со рамнина којашто не е ниту паралелна со основата ниту минува низ врвот на пирамидата, и не ја сече основата на пирамидата, е многуаголник перспективно колинеарен со основата, со правци по бочните рабови на пирамидата, центар во врвот на пирамидата и оска во пресекот на пресечната рамнина и рамнината на проектирање.

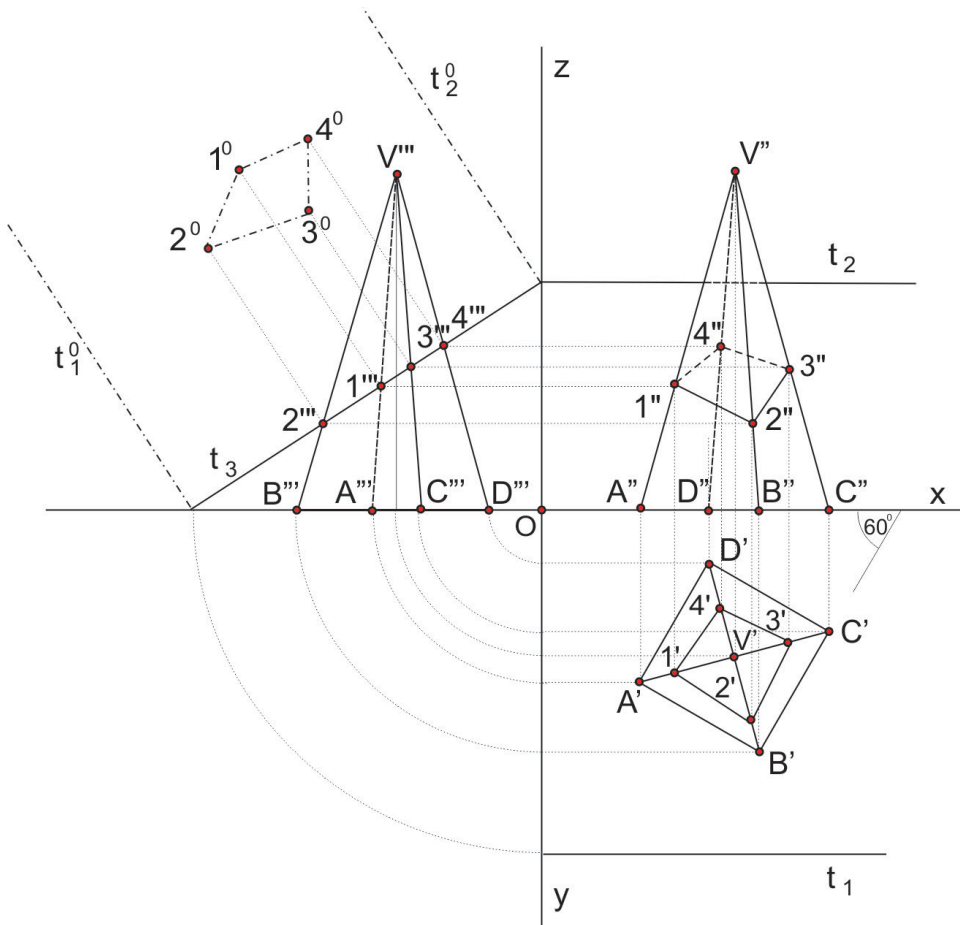


Цртеж 7.7

Задача. Дадени се трагите t_1 и t_2 на третопроектирачка рамнина Σ и придружените проекции на правилна четириаголна пирамида чијашто основа $ABCD$ лежи во π_1 и два нејзини основни рабови со x -

оската зафаќаат агол од 60° . Нацртај го пресекот на пирамидата со рамнината Σ .

Темињата на пресечниот четириаголник 1–2–3–4 ќе ги определиме со наоѓање на прободните точки 1, 2, 3 и 4, на бочните рабови на пирамидата со рамнината Σ .



Цртеж 7.8

Бидејќи рамнината Σ е третопроектирачка, третите проекции на прободните точки 1''', 2''', 3''' и 4''', ќе лежат на нејзината трета

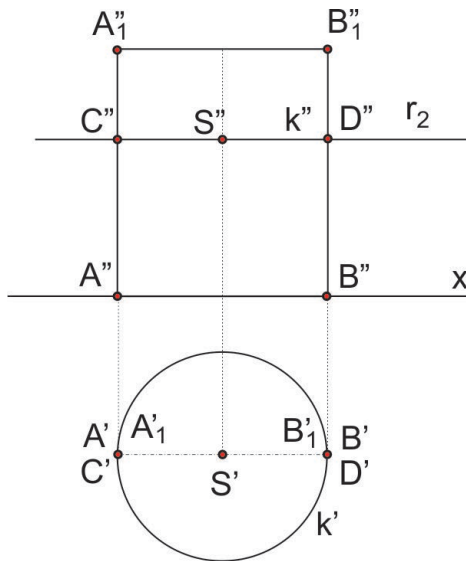
трага t_3 , па третата проекција на пресечниот четириаголник ќе лежи на третата трага t_3 , од точката $2'''$ до точката $4'''$.

Со помош на третата проекција и ординали нормални на z-оската може да го конструираме нацртот на пресекот $1''2''3''4''$, а потоа од нацртот со ординали нормални на x-оската го добиваме неговиот тлоцрт $1'2'3'4'$.

На цртеж 7.8 прикажана е и неговата вистинска големина $1^02^03^04^0$ добиена со соборување на рамнината Σ околу третата трага t_3 во π_3 .

Пресек на ротационен цилиндар со проектирачка рамнина

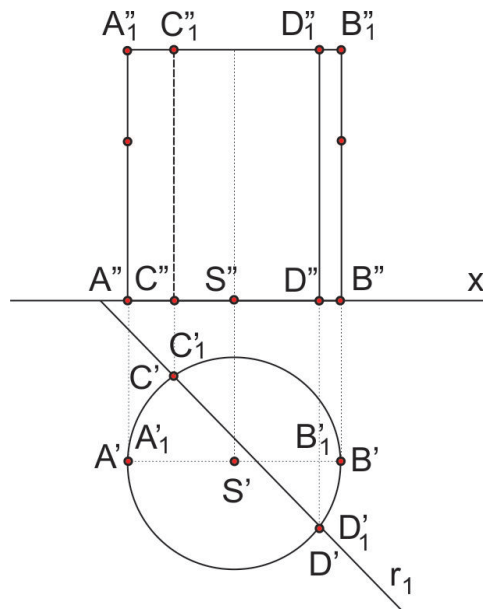
На цртеж 7.9 прикажани се придружените проекции на цилиндар чијашто основа лежи во рамнината π_1 .



Цртеж 7.9

Рамнината којашто е нормална на неговата оска (паралелна на рамнината π_1) и има втора трага r_2 , го сече ротациониот цилиндар во кружница k , со придружени проекции k' и k'' , складна со кружницата на основата.

На цртеж 7.10 прикажани се придружените проекции на цилиндар чијашто основа лежи во рамнината π_1 . Рамнината којашто е паралелна на неговата оска (нормална со рамнината π_1) и има прва трага r_1 , го сече ротациониот цилиндар во правоаголникот CDC_1D_1 . Притоа, страните CC_1 и DD_1 се изводници на цилиндарот, додека страните CD и C_1D_1 се тетиви на основите на цилиндарот.

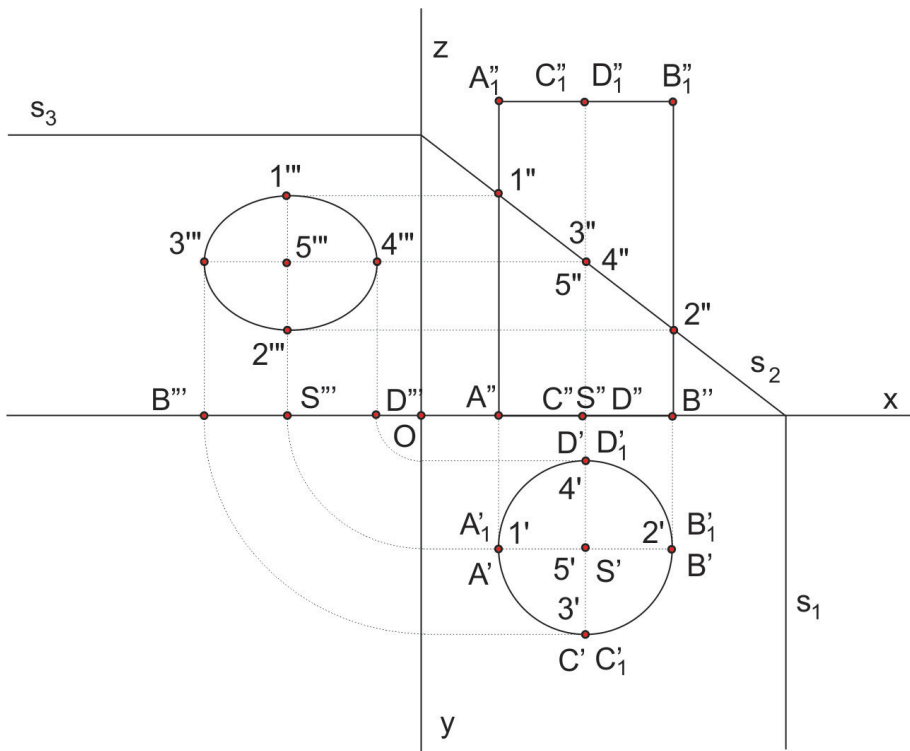


Цртеж 7.10

Доколку ротациониот цилиндар го пресечеме со рамнина којашто не е ниту паралелна ниту нормална на неговата оска, пресекот е елипса или дел од елипса, доколку рамнината сече барем една основа на цилиндарот.

Задача. Дадени се трагите s_1 и s_2 на второпроектирачка рамнина Σ и придружените проекции на ротационен цилиндар чијашто основа лежи во π_1 . Нацртај го пресекот на цилиндарот со рамнината Σ .

На цртеж 7.11 дадени се придружените проекции на ротационен цилиндар чијашто основа лежи во π_1 , и трагите s_1 и s_2 на второпроектирачка рамнина Σ .



Цртеж 7.11

Пресекот на цилиндарот со рамнината е елипса, таква што нејзината голема оска е определена со точките 1 и 2 , додека малата оска е определена со точките 3 и 4 . Притоа, големата оска е пара-

лелна на рамнината π_2 , додека малата оска е нормална на рамнината π_2 . Големата оска има должина еднаква на $1''2''$, а малата оска има должина еднаква на дијаметарот на ротациониот цилиндар. Нацртот на елипсата е отсечката $1''2''$ којашто лежи на втората трага s_2 на рамнината Σ , додека тлоцртот на елипсата се совпаѓа со основата на ротациониот цилиндар.

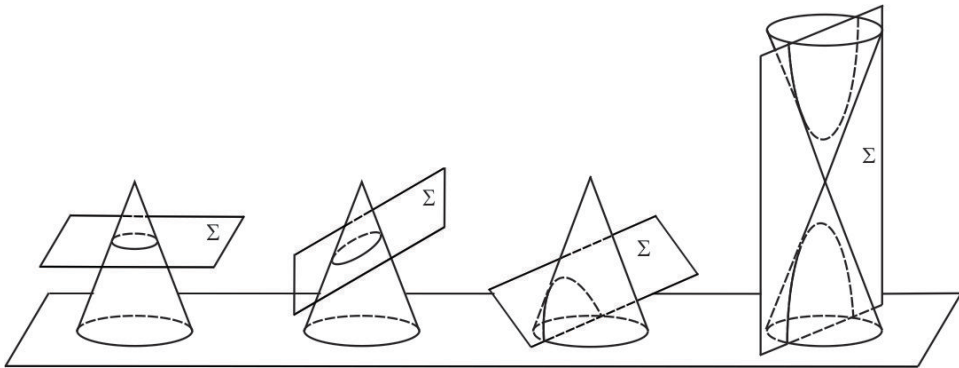
За да ја изведеме третата проекција на пресекот, којшто претставува елипса, ги наоѓаме третите проекции на точките 1, 2, 3 и 4, со што ја добиваме малата оска на третата проекција $1'''2'''$ и големата оска на третата проекција $3'''4'''$. Конструкцијата на елипсата e''' во трета проекција ја изведуваме со една од познатите методи на конструкција на елипса.

Пресек на ротационен конус со проектирачка рамнина

Ако ротационен конус се пресече со рамнина Σ којашто не минува низ врвот на конусот, тогаш пресекот е:

- кружница, ако рамнината Σ ги сече сите изводници на ротациониот конус и е паралелна на неговата основа;
- елипса, ако рамнината Σ ги сече сите изводници на ротациониот конус и не е паралелна на неговата основа;
- парабола, ако рамнината Σ е паралелна на една изводница на ротациониот конус;
- хипербола, ако рамнината Σ е паралелна на две изводници на ротациониот конус (цртеж 7.12).

Ако ротационен конус се пресече со рамнина Σ којашто минува низ врвот на конусот, тогаш пресекот е



Цртеж 7.12

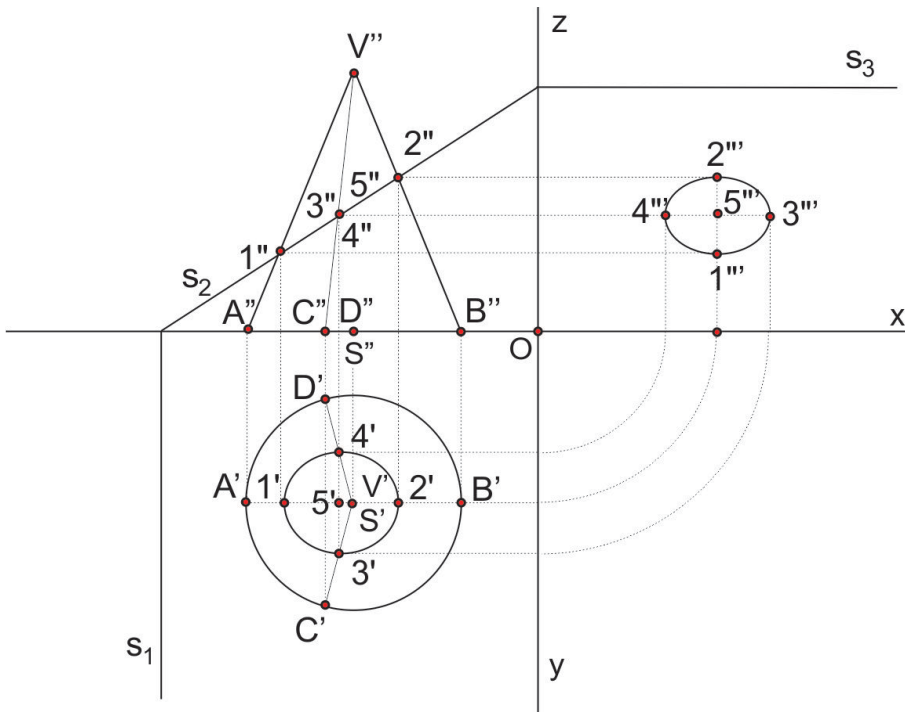
- само врвот на ротациониот конус, ако аголот на наклон на рамнината Σ и рамнината на неговата основа е помал од аголот на наклон на изводниците на ротациониот конус;
- една изводница на ротациониот конус, ако аголот на наклон на рамнината Σ и рамнината на неговата основа е еднаков на аголот на наклон на изводниците на ротациониот конус;
- две изводници, ако аголот на наклон на рамнината Σ и рамнината на неговата основа е поголем од аголот на наклон на изводниците на ротациониот конус.

Задача. Дадени се трагите s_1 и s_2 на второпројектирачка рамнина Σ и придружените проекции на ротационен конус чијашто основа лежи во π_1 . Нацртај го пресекот на конусот со рамнината Σ .

На цртеж 7.13 дадени се придружените проекции на ротационен конус чијашто основа лежи во π_1 , и трагите s_1 и s_2 на второпројектирачка рамнина Σ .

Пресекот на конусот со рамнината е елипса таква што големата оска, определена со точките 1 и 2, е паралелна на рамнината π_2 , додека малата оска, определена со точките 3 и 4, е нормална на рамнината π_2 . Нека точката 5 е центарот на елипсата.

Нацртот на елипсата е отсечката $1''2''$ која што лежи на втората трага s_2 на рамнината Σ . Нацртот на големата оска на елипсата е исто така отсечката $1''2''$. Нацртот на малата оска на елипсата е точката $3'' = 4'' = 5''$.



Цртеж 7.13

Тлоцртот на големата оска е отсечката $1'2'$ бидејќи точките 1 и 2 лежат на изводниците AV и BV , соодветно. Тлоцртот на малата

оска е отсечката $3'4'$ бидејќи точките 3 и 4 лежат на изводниците CV и DV, соодветно.

За да ја изведеме третата проекција на пресекот, којшто претставува елипса, ги наоѓаме третите проекции на точките 1, 2, 3 и 4, со што ја добиваме малата оска на третата проекција $1'''2'''$ и големата оска на третата проекција $3'''4'''$. Конструкцијата на елипсата ја изведуваме со една од познатите конструкции на елипса.



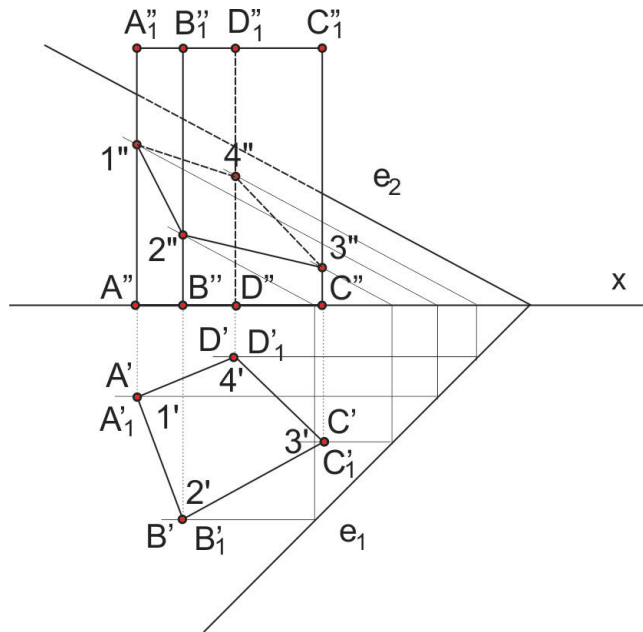
Прашања и задачи

1. Дадени се трагите s_1 и s_2 на второпроектирачка рамнина Σ и придружените проекции на правилна триаголна призма чијашто основа ABC лежи во π_1 и нејзиниот основен раб AC е нормален на π_2 . Нацртај го пресекот на призмата со рамнината Σ .
2. Дадени се трагите t_1 и t_2 на третопроектирачка рамнина Σ и придружените проекции на правилна шестаголна пирамида чијашто основа ABCDEF лежи во π_1 и два нејзини основни рабови со x-оската зафаќаат агол од 90° . Нацртај го пресекот на призмата со рамнината Σ .
3. Дадени се трагите r_1 и r_2 на првопроектирачка рамнина Σ и придружените проекции на ротационен цилиндар чијашто основа лежи во π_2 . Нацртај го пресекот на цилиндарот со рамнината Σ .
4. Дадени се трагите r_1 и r_2 на првопроектирачка рамнина Σ и придружените проекции на ротационен конус чијашто основа лежи во π_2 . Нацртај го пресекот на конусот со рамнината Σ .

7.2. ПРЕСЕК НА ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА СО ОПШТА РАМНИНА

Пресек на призма со општа рамнина

На цртеж 7.14 прикажани се проекциите на четириаголна призма чијашто основа лежи во π_1 , како и трагите e_1 и e_2 на рамнина E којашто ја сече призмата. Бидејќи бочните рабови на призмата се нормални на рамнината π_1 , тлоцртот $1'2'3'4'$ на пресекот 1-2-3-4 ќе се совпадне со тлоцртот на призмата $A'B'C'D'$. Нацртот $1''2''3''4''$ на темињата на пресекот 1'', 2'', 3'' и 4'' ќе го определиме со помош на фронталници кои лежат во рамнината E .

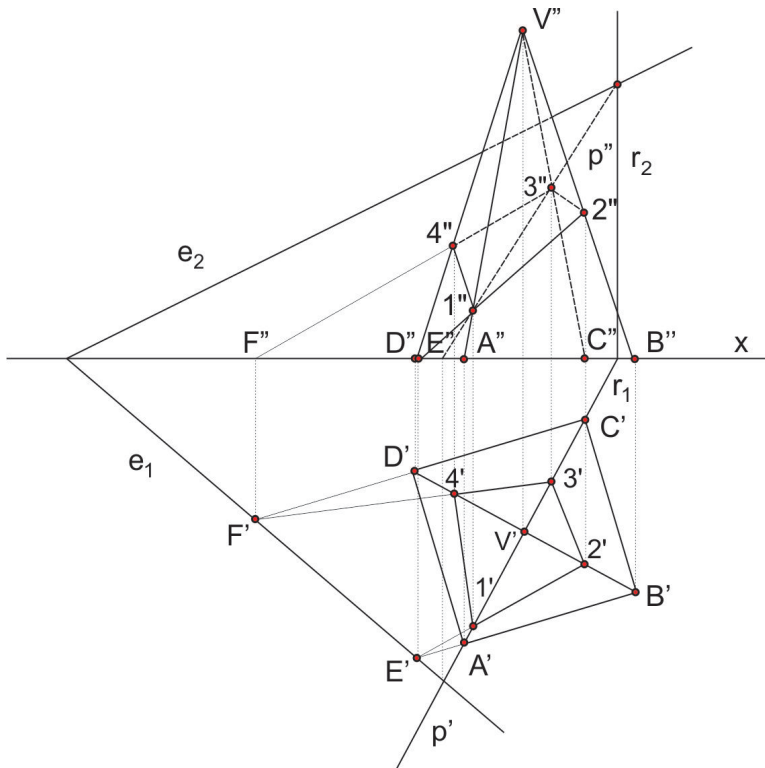


Цртеж 7.14

Пресек на пирамида со општа рамнина

На цртеж 7.15 дадени се проекциите на правилна четириагол-на пирамида чијашто основа е во π_1 , и трагите како и трагите e_1 и e_2 на рамнина E којашто ја сече призмата во четириаголникот 1234.

За да ги определиме темињата 1 и 3 во коишто бочните рабови AV и CV ја прободуваат рамнината E , ќе користиме првопроекти-рачка рамнина P којашто минува низ бочните рабови AV и CV . Пра-вата p во која се сечат рамнините E и P ги сече рабовите AV и CV во точките 1 и 3, соодветно.



Цртеж 7.15

Со аналогна постапка може да ги определиме и темињата 2 и 4. Но до овие темиња може да дојдеме на поедноставен начин, со перспективна колинеација која постои меѓу тлоцртот на основата на пирамидата и $A'B'C'D'$ и тлоцртот на бараниот пресек $1'2'3'4'$, со оска $e_1 = e_1'$ и центар V' . Ако со E' ја означиме пресечната точка на правата $A'B'$ со трагата $e_1 = e_1'$, тогаш правата $A'B'$ кореспондира на правата $E'1'$, па таа го сече работ $B'V'$ во тлоцртот $2'$ на темето 2. Со иста постапка може да се најде тлоцртот $4'$ на темето 4. Нацртите $2''$ и $4''$ на темињата 2 и 4 ќе ги определиме со помош на ординали повлечени од точките $2'$ и $4'$.

За проверка, може да ги определиме точките E и F, бидејќи точките E'' , $1''$ и $2''$, се колинеарни како и точките F'' , $4''$ и $3''$.

Во тлоцртот ги гледаме сите страни на пресекот, додека во нацртот не ги гледаме страните 23 и 34, коишто се на невидливите бочни сидови BCV и CDV.

Пресек на ротационен цилиндар со општа рамнина

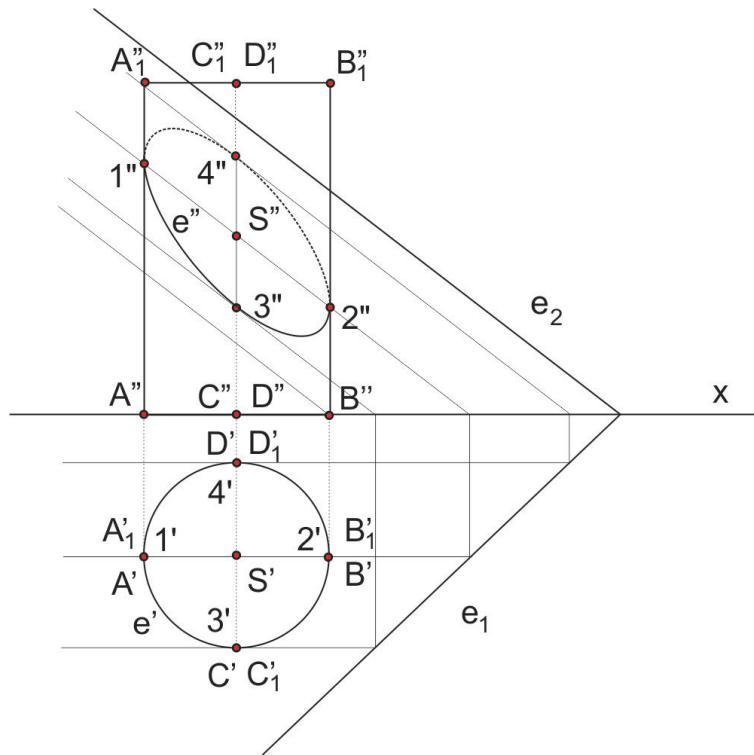
На цртеж 7.16 дадени се проекциите на ротационен цилиндар чијашто основа е во π_1 , и трагите како и трагите e_1 и e_2 на рамнина E којашто го сече цилиндарот.

Бидејќи изводниците на цилиндарот се нормални на π_1 , тлоцртот на пресечната елипса е се совпаѓа со тлоцртот k' на основата k на цилиндарот. Нацртот e'' на елипсата е може да се определи ако се определи барем еден пар конјугирани дијаметри.

Отсечките 12 и 34 се заемно нормални и претставуваат голема оска и мала оска, соодветно. Со помош на нивните нацрти $1''2''$ и $3''4''$, коишто претставуваат заемно конјугирани дијаметри, може да нацрта нацртот e'' на елипсата. За определување на нацртите $1''2''$

и $3''4''$, користиме фронталници коишто лежат во дадената рамнина и ги содржат отсечките 1, 2, 3 и 4, соодветно.

Во нацртот не го гледаме лакот $1''4''2''$ од елипсата e'' па тој е нацртан со испрекината линија.

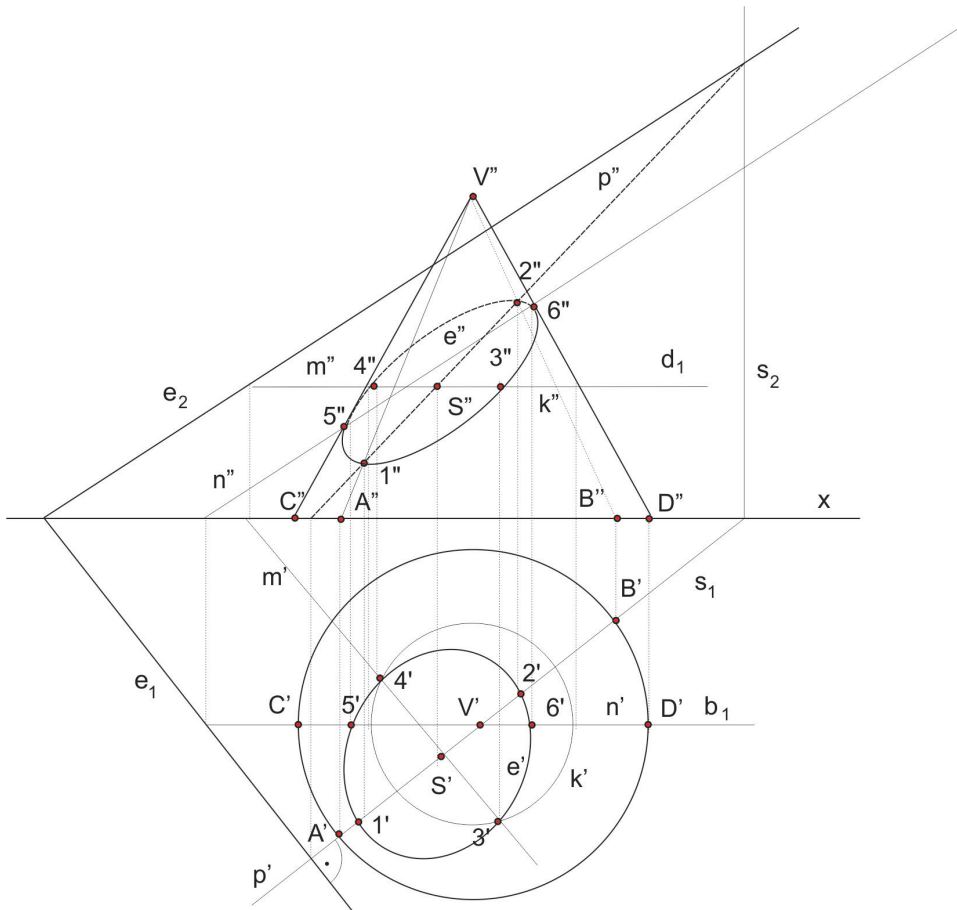


Цртеж 7.16

Пресек на ротационен конус со општа рамнина

На цртеж 7.17 дадени се проекциите на ротационен конус чија-што основа е во π_1 , и трагите како и трагите e_1 и e_2 на рамнина Σ којашто го сече конусот.

Бидејќи рамнината Е ги сече сите изводници на ротациониот конус пресекот ќе биде елипса е.



Цртеж 7.17

За да ги определиме темињата 1 и 2 ќе користиме првоек-тирчка рамнина Р којашто е нормална рамнината Е и минува низ оската на ротациониот конус. Таа рамнина го сече ротациониот конус во изводниците AV и CV, и рамнината Е во правата p. Изводниците AV и CV се сечат со правата p во точките 1 и 2, коишто се точки

од елипсата е. Отсечката 12 е големата оска за елипсата е, па затоа нејзиниот тлоцрт $1'2'$ е дијаметар на тлоцртот e' , додека нејзиниот нацрт $1''2''$ е дијаметар на нацртот e'' на пресечната елипса е.

За да ја определиме другата оска 34 на елипсата е и нејзините проекции низ средината S на отсечката 12 поставуваме хоризонтална рамнина Δ чијашто втора трага d_2 е паралелна со x-оската и минува низ S'' . Рамнината Δ ја сече рамнината E во хоризонталница m и конусот во кружница k. Хоризонталницата m и кружницата k се сечат во крајните точки 3 и 4 на другата оска на елипсата. Тлоцртот $3'4'$ е дијаметар на елипсата e' , додека нејзиниот нацрт $3''4''$ е дијаметар на елипсата e'' .

Отсечките 12 и 34 се оски на пресечната елипса е, па проекциите се пар конјугирани дијаметри на проекциите на таа елипса.

За да ги определиме точките 5'' и 6'' во коишто нацртот e'' на елипсата е ја допира контурата на нацртот на конусот, поставуваме рамнина B низ контурните изводници CV и DV на нацртот на конусот. Нејзината прва трага b_1 минува низ точката V' паралелно со x-оската. Таа рамнина се сече со рамнината E во фронталница n која што ги сече изводниците CV и DV во точките 5 и 6, соодветно.

Во тлоцртот ја гледаме целата елипса e' , додека во нацртот не го гледаме лакот $5''4''2''6''$ од елипсата e'' па тој е нацртан со непрекината линија.



Прашања и задачи

1. Нацртај го нормалниот пресек на правилна шестаголна призма чијашто основа ABCDEF лежи во π_1 , ако дијагоналата на основата е

$$AD=[A(1; 2,5; 0), D(5; 3,5; 0)]$$

и висина $H = 6\text{cm}$. Потоа нацртај го нејзиниот пресек со рамнината $E(11; 9; 7)$.

2. Нацртај ги проекциите на шестаголна пирамида чијашто основа $ABCDEF$ лежи во π_1 , ако дијагоналата на основата е

$$AD=[A(6; 2,5; 0), D(10; 3,5; 0)]$$

и висина $H = 6\text{cm}$. Потоа нацртај го нејзиниот пресек со рамнината $E(16; 14; 11)$.

3. Нацртај ги проекциите на пресекот на ротационен цилиндар чијашто основа лежи во π_1 , центарот на основата е во $S(3; 3; 0)$, радиусот $R = 2,5\text{cm}$ и висината е $H = 7\text{cm}$, со рамнината $E(16; 14; 11)$.

4. Нацртај ги проекциите на пресекот на ротационен конус чијашто основа лежи во π_2 , центарот на основата е во $S(4; 0; 4)$, радиусот $R = 3\text{cm}$ и висината е $H = 7\text{cm}$, со рамнината $P(-6; 6; 4)$.

Користена литература



1. J. Justinijanović, *Nacrtna geometrija*, Školska knjiga, 1967, Zagreb
2. Д. Ванов, Д. Душков, *Техничко цртање со нацртна геометрија*, Просветно дело, 1996, Скопје
3. К. Тренчевски, Б. Крстеска, Л. Кондинска, Ј. Бабовиќ, Г. Тренчевски, *Елементарна алгебра и геометрија*, Просветно дело, 2002, Скопје
4. Д. Василева, К. Мангароски, С. Матески, А. Олуиќ, Б. Трпковски, *Нацртна геометрија*, Просветно дело, 1982, Скопје
5. V. Niče, *Deskriptivna geometrija*, Školska knjiga, 1971, Zagreb
6. З. Шнајдер, *Нацртна геометрија*, Научна књига, 1991, Београд
7. В. Ѓуровиќ, *Нацртна геометрија*, Научна књига, 1993, Београд

Ниту еден дел од оваа публикација не смее да биде репродуциран на било кој начин без претходна писмена согласност на авторот

Е-издание:

<https://www.ukim.edu.mk/e-izdanija/PMF/Nacrtna-geometrija.pdf>