Ирена Стојковска

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ОД ТЕОРИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ

Скопје, 2025

УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ ВО СКОПЈЕ

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ОД ТЕОРИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ

Ирена Стојковска

Скопје, 2025

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. „Гоце Делчев“ бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Биљана Ангелова, ректор

Уредник на публикацијата:
проф. д-р Ирена Стојковска

Рецензенти:
1. проф. д-р Зорана Лужанин, Природно-математички факултет, Нови Сад
2. проф. д-р Љупчо Настовски, Природно-математички факултет, Скопје

Техничка обработка:
проф. д-р Ирена Стојковска

Лектура:
Виолета Јовановска - Никовска

Илустратор:
проф. д-р Ирена Стојковска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски“, Скопје

519.21(075.8)(076)

СТОЈКОВСКА, Ирена
Збирка решени задачи од теорија на веројатност [Електронски извор] / Ирена Стојковска ; [илустратор Ирена Стојковска]. - Скопје : Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, 2025

Начин на пристапување (URL)
https://www.ukim.edu.mk/e-izdanija/PMF/Zbirka-resheni-zadachi-od-teorija-na-verojatnost.pdf. - Текст во PDF формат, содржи VIII, 288 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 13.02.2025. - Библиографија: стр. 287

ISBN 978-9989-43-524-9

а) Теорија на веројатност – Високошколски учебници – Вежби

COBISS.MK-ID 65263365

Оваа книга ја посветувам на моите
сопруг Ивица, син Никола и ќерка Теодора.

ПРЕДГОВОР

„*Колку повеќе законите се однесуваат на реалноста, толку повеќе тие не се сигурни, колку повеќе тие се сигурни, толку повеќе тие не се однесуваат на реалноста.*“

— Алберт Ајнштајн

Теоријата на веројатност ги влече своите корени од првите обиди на Кардано да ги анализира игрите на среќа уште во 16-тиот век, како и обидите на Ферма, Паскал и Хајгенс во 17-тиот век. Во 19-тиот век Лаплас ја комплетира класичната дефиниција на веројатност, но дури во 20-тиот век, во 1933 година, Колмогоров ги поставува темелите на модерната теорија на веројатност со воведувањето на аксиоматиката на просторот на веројатност и создава услови за понатамошно изучување и проширување на оваа област од математиката. Намерата на Теоријата на веројатност е со помош на математички јазик да се опишат случајните појави во природата и светот околу нас. Токму затоа Теоријата на веројатност може да се гледа како мост меѓу реалниот и апстрактниот математички свет, опишувајќи го првиот, но истовремено давајќи му смисла на вториот.

Книгата *Збирка решени задачи од теорија на веројатност* е наменета за студентите од трета година на студиските програми на Институтот за математика при Природно-математичкиот факултет во Скопје, како учебно помагало при совладување на содржините на предметот *Веројатност и статистика*. Збирката може да ја користат и студентите на другите факултети кои го изучуваат овој материјал или дел од него во рамки на некој од нивните математички предмети.

Збирката се состои од пет поглавја, а материјалот кој е опфатен со поглавјата е: случајни настани, веројатносни модели, условна веројатност, независност, дискретни случајни променливи, општи случајни променливи и гранични теореми. Секое поглавје е поделено на неколку лекции и на почетокот на секоја лекција се дадени теориските основи потребни за разработка на задачите. Задачите се презентирани со нивни детални решенија, а на крајот на секое поглавје има задачи за самостојна работа, чии одговори се сместени на крајот од книгата. Во прилозите на крајот од книгата се дадени некои поважни распределби на веројатност со нивните основни својства, математичко очекување, дисперзија и карактеристична функција, како и таблиците со вредности на Поасоновата и стандардната нормална распределба на веројатности.

Оваа збирка задачи е резултат на повеќегодишната работа на авторот, прво како асистент, а потоа и како професор по предметите од областа на веројатност и статистика и нивните примени. Збирката има поминато низ повеќе различни верзии и формати во функција на скрипти за наставата, за да го добие овој конечен изглед. Таа содржи повеќе од 500 задачи со кои е опфатен целиот материјал од Теорија на веројатност во рамки на предметот Веројатност и статистика. Задачите се изложени од поедноставни кон посложени, со акцент и на практичните и на теориските проблеми речиси подеднакво. Токму оваа сеопфатност и начин на изложување на задачите, се надевам дека ќе им помогне на студентите да го совладаат полесно материјалот.

Изразувам голема благодарност до сите оние кои ми помогнаа во процесот на создавање на оваа збирка задачи, проф. д-р Ристо Малчески, кој ме поттикна да почнам со пишувањето на збирката, моите асистенти м-р Марко Димовски и м-р Ерблина Зеќири, кои ми помагаа при препрочитувањето на задачите и нивните решенија, рецензентите проф. д-р Зорана Лужанин и проф. д-р Љупчо Настовски, кои со стручните забелешки и конструктивните коментари придонесоа за подобрување на ракописот, и секако, благодарност до генерациите поранешни и сегашни студенти за нивната посветеност на студиите и интересирањето за предметот, што за мене претставува основна мотивација за пишување на ваква стручна литература.

Од авторот

СОДРЖИНА

1

СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ. ВЕРОЈАТНОСНИ МОДЕЛИ

1.1 Случаен настан

Множеството од сите логички можни исходи на некој експеримент се означува со Ω и се нарекува **простор од елементарни настани**. Секој поединечен исход $\omega \in \Omega$ се нарекува **елементарен настан**. Некои подмножества $A \subseteq \Omega$ се нарекуваат **случајни настани** или само **настани**. Примери за тривијални настани се Ω - **сигурен настан** и $\emptyset$ - **невозможен настан**. Велиме дека настанот $A \subseteq \Omega$ **се реализирал**, ако се остварил некој елементарен исход $\omega \in A$.

Ги дефинираме следните **релации меѓу настани:**

- $A \subseteq B$ - настанот A **го повлекува** настанот B (секогаш кога ќе се реализира настанот A, се реализира и настанот B);
- $A = B$ - настаните A и B се **еквивалентни** (настанот A го повлекува настанот B и настанот B го повлекува настанот A).

Дефинираме **операции со настани:**

- $A \cup B$ или $A + B$ - **збир** на настаните A и B (се реализира, кога ќе се реализира барем еден од настаните A или B);

- $A \cap B$ или AB - **производ** на настаните A и B (се реализира, кога ќе се реализираат и двата настана A и B);
- $A \setminus B$ - **разлика** на настаните A и B (се реализира, кога ќе се реализира настанот A, но не се реализира настанот B);
- $\overline{A} = \Omega \setminus A$ - **спротивен настан** на настанот A (се реализира, кога не се реализира настанот A).

Ако за настаните A и B важи $AB = \emptyset$, тогаш велиме дека настаните A и B се **дисјунктни настани**.

N.B. *Својствата кои важат кај релации и операции со множества се пренесуваат на релациите и операциите со настани соодветно.*

ЗАДАЧА 1.1. Еден експеримент се состои во фрлање на коцка. Одреди го просторот од елементарни настани и опиши ги настаните:
а) A - паднаа парен број на точки,
б) B - паднаа број на точки делив со 3,
в) C - паднаа број на точки не помал од 3.

Решение. Означуваме со ω_k - на коцката паднаа k точки, $k = 1, 2, ..., 6$. Тогаш, просторот од елементарни настани е $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$. За останатите настани имаме, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_3, \omega_6\}$ и $C = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$.

ЗАДАЧА 1.2. Во една кутија има четири ливчиња нумерирани со броевите 1, 2, 3 и 4. На случаен начин од кутијата се извлекува едно по едно ливче без враќање сѐ додека не се извлече ливче со непарен број. Одреди го просторот од елементарни настани и опиши ги настаните:
а) A - извлечено е ливчето со број 2,
б) B - збирот од броевите од извлечените ливчиња е парен број.

Решение. Ако ги означиме елементарните настани со $\omega_1 = (1)$, $\omega_2 = (3)$, $\omega_3 = (2, 1)$, $\omega_4 = (2, 3)$, $\omega_5 = (4, 1)$, $\omega_6 = (4, 3)$, $\omega_7 = (2, 4, 1)$, $\omega_8 = (2, 4, 3)$, $\omega_9 = (4, 2, 1)$ и $\omega_{10} = (4, 2, 3)$, тогаш $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{10}\}$, $A = \{\omega_3, \omega_4, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$ и $B = \emptyset$.

ЗАДАЧА 1.3. Стрелец гаѓа во мета три пати, при што се забележува само погодок во целта и промашување на целта. Одреди го просторот од елементарни настани и опиши ги настаните:

а) A - постигнати се три погодоци,
б) B - целта е три пати промашена,
в) C - постигнат е барем еден погодок,
г) D - постигнато е барем едно промашување,
д) E - постигнати се не повеќе од два погодока,
ѓ) F - до третото гаѓање немало погодок.

Ако означиме со A_k - во k-тото гаѓање погодена е целта, $k = 1, 2, 3$, тогаш со помош на овие настани одговори на горните барања.

Решение. Ако означиме со 0 промашување, а со 1 погодок, тогаш елементарните настани може да ги запишеме како $\omega_1 = (0,0,0)$, $\omega_2 = (1,0,0)$, $\omega_3 = (0,1,0)$, $\omega_4 = (0,0,1)$, $\omega_5 = (1,1,0)$, $\omega_6 = (1,0,1)$, $\omega_7 = (0,1,1)$, $\omega_8 = (1,1,1)$, и тогаш $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_8\}$, $A = \{\omega_8\}$, $B = \{\omega_1\}$, $C = \{\omega_2, \omega_3, ..., \omega_8\}$, $D = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_7\}$, $E = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_7\}$, $F = \{\omega_1, \omega_4\}$.

Просторот од елементарни настани т.е. сигурниот настан опишан со настаните A_k, $k = 1, 2, 3$ е

$$\Omega = A_1A_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$$

За другите настани имаме, $A = A_1A_2A_3$, $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $D = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$, $E = D = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$, $F = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 = \overline{A}_1\overline{A}_2(A_3 + \overline{A}_3) = \overline{A}_1\overline{A}_2\Omega = \overline{A}_1\overline{A}_2$.

ЗАДАЧА 1.4. Во зградата на еден факултет се влегува низ четири врати, при што секоја од нив може да биде или заклучена или отклучена. Со помош на настаните
A - отклучена е точно една од четирите врати,
B - отклучена е барем една врата,
C - отклучени се не помалку од две врати,
D - отклучени се точно две врати,
E - отклучени се точно три врати,
F - отклучени се сите четири врати,
опиши ги настаните $A \cup B$, AB, $B \cup C$, BC, $D \cup E \cup F$ и BF. Дали се совпаѓаат настаните BF и CF? Дали се совпаѓаат настаните BC и D?

Решение. Кога е отклучена точно една врата, исполнето е да е отклучена барем една врата ($A \subseteq B$), па имаме дека $A \cup B = B$ и $AB = A$. Потоа, кога се отклучени не помалку од две врати, исполнето е да е отклучена барем една врата ($C \subseteq B$), па имаме дека $B \cup C = B$ и $BC = C$. Со слично расудување доаѓаме до $D \cup E \cup F = C$ и $BF = F$. Од $BF = F$ и $CF = F$, добиваме дека настаните BF и CF се совпаѓаат. Од $BC = C$ и $D \subset C$ (бидејќи факултетот има повеќе од две врати), имаме дека настаните BC и D не се совпаѓаат.

ЗАДАЧА 1.5. Двајца играчи A и B наизменично фрлаат коцка за играње. Со фрлањето прв почнува играчот A и фрлаат сѐ додека на некој од нив не му се паднат шест точки и тогаш велиме дека тој играч е победник. Одреди го просторот од елементарни настани и опиши ги настаните:

а) A - играчот A победил во петтото фрлање на коцката,

б) B - играчот A победил најмногу до петтото фрлање на коцката,

в) C - играчот A е победник,

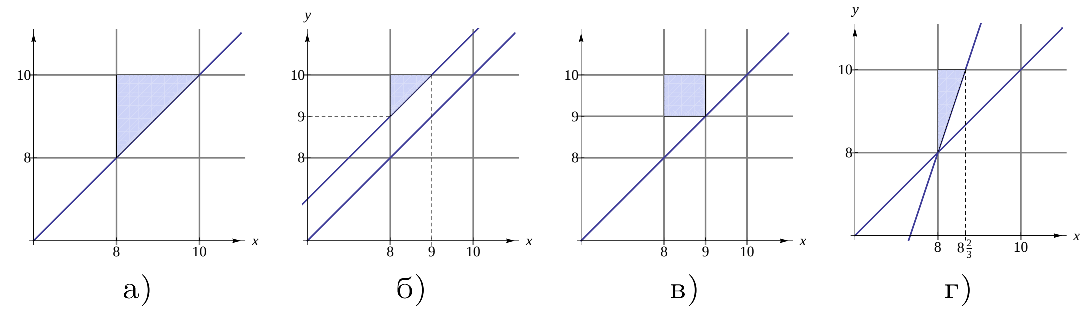
Решение. Ако означиме со 1 дека се паднале шест точки и со 0 дека не се паднале шест точки, тогаш елементарните настани на овој експеримент може да ги запишеме како $w_i = (0, 0, ..., 0, 1)$, при што 1-цата е на i-тото место. Па, просторот од елементарни настани е $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, ...\}$. И имаме, $A = \{w_5\}$, $B = \{w_1, w_3, w_5\}$, $C = \{w_1, w_3, w_5, ...\} = \{w_{2n-1} | n \in \mathbb{N}\}$.

ЗАДАЧА 1.6. Предавањето по некој предмет е од 8 до 10 часот. Еден студент пристигнува и си заминува во тој временски интервал. Одреди го просторот од елементарни настани (пристигнување и заминување на студентот) и опиши ги настаните:

а) A - студентот се задржал повеќе од 1 саат на предавањето,

б) B - во 9 часот студентот бил на предавањето,

в) C - студентот останал на предавањето повеќе од двојно зголеменото време од времето што задоцнил.



Цртеж 1.1

Решение. Го означуваме со x - временскиот момент на пристигнување на студентот, а со y - временскиот момент на заминување на студентот, тогаш просторот од елементарни настани е $\Omega = \{(x, y) | 8 \leq x < y \leq 10\}$. За настаните кои треба да ги опишеме имаме $A = \{(x, y) | 8 \leq x < y \leq 10, y - x > 1\}$, $B = \{(x, y) | 8 \leq x < 9 < y \leq 10\}$ и $C = \{(x, y) | 8 \leq x < y \leq 10, y - x > 2(x - 8)\}$.

Геометриски, просторот Ω и настаните A, B и C претставуваат делови од рамнината (види Цртеж 1.1 а), б), в), г) соодветно).

1.2 Аксиоматика на просторот на веројатност

Нека Ω е просторот од елементарни настани, $\mathcal{F}$ е σ-алгебра од подмножества од Ω и $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ е реална функција за која важат следните аксиоми:

(P1) **Ненегативност:** $P(A) \geq 0$ за сите $A \in \mathcal{F}$,

(P2) **Нормализираност:** $P(\Omega) = 1$,

(P3) **Пребороива адитивност:** за сите $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ такви што $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$, важи $P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Тогаш, подредената тројка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ се нарекува **простор на веројатност**, функцијата P се нарекува **веројатност**, а аксиомите (P1)-(P3) се нарекуваат **аксиоми на теоријата на веројатност**. Секој елемент $A \in \mathcal{F}$ се нарекува **настан**.

Важат следниве **својства:**

1) $P(\emptyset) = 0$;

2) $P(A) \leq 1$, за секој $A \in \mathcal{F}$;

3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

4) **Монотоност:** Ако $A \subseteq B$, тогаш $P(A) \leq P(B)$;

5) Ако $B \subseteq A$, тогаш $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$;

6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

7) **Конечна адитивност:** Ако настаните $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{F}$ се по парови дисјунктни, т.е. $A_iA_j = \emptyset$, тогаш $P\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$;

8) **Принцип на вклучување и исклучување:** За секој n и настани $A_1, A_2, ..., A_n$,

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_iA_j) + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} P(A_iA_jA_k) - ... \\ &+ (-1)^{n+1} P(A_1A_2...A_n); \end{aligned}$$

9) **Лема на покривање:** За настаните $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{F}$ важи

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

10) **Непрекинатост од горе:** Ако за настаните $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{F}$ важи $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ...$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big);$$

11) **Непрекинатост од долу:** Ако за настаните $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{F}$ важи $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big).$$

N.B. *Нека* $(\Omega, \mathcal{F})$ *е мерлив простор, тогаш* $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *е преброиво адитивна, т.е. важи* (P3) *ако и само ако важат следниве услови:*

(P4) *Адитивност:* $P(A + B) = P(A) + P(B)$ *за* $A, B \in \mathcal{F}$, $AB = \emptyset$;

(P5) *Непрекинатост во нула:* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ *и* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

ЗАДАЧА 1.7. Нека A и B се произволни настани. Ако $P(AB) = 0,72$ и $P(A\overline{B}) = 0,18$, најди ја веројатноста $P(A)$.

Решение. Од $A = AB + A\overline{B}$ и $(AB) \cap (A\overline{B}) = \emptyset$, и од својството за конечна адитивност имаме

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) = 0,72 + 0,18 = 0,9.$$

ЗАДАЧА 1.8. Нека A и B се произволни настани. Најди ги веројатностите $P(A\,\overline{B})$ и $P(\overline{A}\,\overline{B})$, ако се познати $P(A) = a$, $P(B) = b$ и $P(A \cup B) = c$.

Решение. Од равенството $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$ имаме дека

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = a - P(AB). \qquad (1.1)$$

Од $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ имаме

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = a + b - c. \tag{1.2}$$

Со замена на (1.2) во (1.1) се добива

$$P(A\overline{B}) = a - (a + b - c) = c - b.$$

За втората веројатност имаме

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - c.$$

ЗАДАЧА 1.9. Пресметај ја веројатноста дека се реализирал точно еден од настаните A, B и C, ако е познато дека $P(AB) = a$, $P(BC) = b$, $P(AC) = c$, $P(ABC) = d$ и $A \cup B \cup C = \Omega$.

Решение. Се бара веројатноста на настанот $D = A\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C$. Прво ја наоѓаме веројатноста $P(A\,\overline{B}\,\overline{C})$. Имаме,

$$\begin{aligned} P(A\,\overline{B}\,\overline{C}) &= P(\overline{\overline{A} \cup B \cup C}) = \\ &= 1 - P(\overline{A} \cup B \cup C) = \\ &= 1 - P(\overline{A}) - P(B) - P(C) + \\ &\quad + P(\overline{A}B) + P(\overline{A}C) + P(BC) - P(\overline{A}BC). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Од $P(B) = P(AB + \overline{A}B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$, имаме дека

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) - a. \tag{1.4}$$

На сличен начин се добива дека

$$P(\overline{A}C) = P(C) - c. \tag{1.5}$$

Исто така, имаме дека

$$P(\overline{A}BC) = P(BC \setminus ABC) = P(BC) - P(ABC) = b - d. \tag{1.6}$$

Сега, со замена на (1.4)-(1.6) во (1.3) добиваме

$$\begin{aligned} P(A\,\overline{B}\,\overline{C}) &= 1 - P(\overline{A}) - P(B) - P(C) + \\ &\quad + P(B) - a + P(C) - c + b - b + d = \\ &= P(A) - a - c + d. \end{aligned}$$

Аналогно се добива дека

$$P(\overline{A}\ B\ \overline{C}) = P(B) - b - a + d \text{ и } P(\overline{A}\ \overline{B}\ C) = P(C) - c - b + d.$$

Конечно,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A\ \overline{B}\ \overline{C}) + P(\overline{A}\ B\ \overline{C}) + P(\overline{A}\ \overline{B}\ C) = \\ &= P(A) - a - c + d + P(B) - b - a + d + P(C) - c - b + d = \\ &= P(A \cup B \cup C) + P(AB) + P(AC) + P(BC) - P(ABC) - 2(a+b+c) + 3d = \\ &= P(\Omega) + a + c + b - d - 2(a+b+c) + 3d = 1 - (a+b+c) + 2d. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 1.10. Нека A, B, C се произволни настани. Ако $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,7$, $P(C) = 0,6$ и $P(ABC) = 0$, најди ги веројатностите $P(AB)$ и $P(\overline{A}\ \overline{B})$.

Решение. Од $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,7$ и $P(A \cup B) \leq 1$, имаме дека

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq 0,7 + 0,7 - 1 = 0,4. \tag{1.7}$$

Од друга страна, од $P(ABC) = 0$ и $P(C) = 0,6$ имаме дека

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(ABC + AB\overline{C}) = P(ABC) + P(AB\overline{C}) = P(AB\overline{C}) \leq \\ &\leq P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,6 = 0,4. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Од (1.7) и(1.8) заклучуваме дека $P(AB) = 0,4$. За веројатноста на настанот $\overline{A}\ \overline{B}$ имаме

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\ \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - 0,7 - 0,7 + 0,4 = 0. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 1.11. Нека A, B и C се произволни настани и нека истовремената реализација на настаните A и B, ја повлекува реализацијата на настанот C. Докажи дека

$$P(A) + P(B) - P(C) \leq 1.$$

Решение. Од условот на задачата имаме дека $AB \subseteq C$, од каде $P(AB) \leq P(C)$. Тогаш,

$$P(A) + P(B) - P(C) \leq P(A) + P(B) - P(AB) = P(A \cup B) \leq P(\Omega) = 1,$$

што требаше да се докаже.

ЗАДАЧА 1.12. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ и B се произволни настани и нека $A_1A_2...A_n \subseteq B$. Докажи дека $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - P(B) \leq n-1$.

Решение. Од условот $A_1A_2...A_n \subseteq B$ имаме дека $P(A_1A_2...A_n) \leq P(B)$. Користејќи ја лемата на покривање имаме

$$\begin{aligned} P(B) &\geq P(A_1A_2...A_n) = P(\overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup ... \cup \overline{A_n}}) = 1 - P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup ... \cup \overline{A_n}) \geq \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = 1 - \sum_{i=1}^{n}(1 - P(A_i)) = 1 - n + \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \end{aligned}$$

од каде се добива бараното неравенство.

ЗАДАЧА 1.13. Нека $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ и $P(\{\omega_n\}) = c \cdot (\frac{4}{5})^n$, $n = 1, 2, ...$ Одреди ја вредноста на константата c.

Решение. За веројатноста на сигурниот настан имаме

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\{\omega_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot (\frac{4}{5})^n = c \cdot \frac{4}{5} \cdot (1 + \frac{4}{5} + (\frac{4}{5})^2 + ...) = \\ &= c \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1 - 4/5} = 4c. \end{aligned}$$

Аксиомата за нормираност вели дека $P(\Omega) = 1$, значи $4c = 1$, од каде $c = 1/4$.

ЗАДАЧА 1.14. Лема на Борел-Кантели. Нека $A_1, A_2, ...$ е бесконечна низа од случајни настани така што $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$. Нека $C = \{w | w \in A_k$ за бесконечно многу $k\}$. Покажи дека $P(C) = 0$.

Решение. Ги дефинираме настаните $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$, за $n = 1, 2, ...$ Тогаш, настанот $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ и $B_1 \supseteq B_2 \supseteq ...$ е опаднувачка низа настани. Со користење на непрекинатоста од долу на веројатноста, лемата на покривање и условот $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$, добиваме

$$0 \leq P(C) = P\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\big) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P\big(\bigcup_{k\geq n} A_k\big) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0,$$

од каде заклучуваме дека $P(C) = 0$.

1.3 Класична дефиниција на веројатност и пребројување

1.3.1 Пребројување (варијации)

Нека A е конечно множество од n елементи т.е. $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Со A^k го означуваме множеството од сите подредени k-торки од елементи од A т.е.

$$A^k = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}) \mid a_{i_j} \in A,\ j = 1, 2, ..., k\}.$$

- Елементите на множеството A^k се нарекуваат **варијации со повторување од n елементи класа k**. Вкупниот број на варијации со повторување од n елементи класа k се означува со $\overline{V}_n^k$ и се пресметува според формулата

$$\overline{V}_n^k = n^k,\ k \geq 1.$$

Да го означиме со B множеството од сите подредени k-торки од различни елементи од A т.е.

$$B = \{(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}) \mid a_{i_j} \in A,\ j = 1, 2, ..., k,\ a_{i_j} \neq a_{i_t},\ j \neq t\} \subseteq A^k.$$

- Елементите на множеството B се нарекуваат **варијации без повторување од n елементи класа k**. Вкупниот број на варијации без повторување од n елементи класа k се означува со V_n^k и се пресметува според формулата

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1),\ 1 \leq k \leq n.$$

- Варијациите без повторување од n елементи класа n се нарекуваат **пермутации од n елементи**, нивниот број се означува со P_n и се пресметува според формулата

$$P_n = V_n^n = n!.$$

Да го означиме со X множеството од сите подредени n-торки од k различни елементи $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}$ така што елементот a_{i_j} се среќава n_j пати (при тоа $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$) т.е.

$$X = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}\},\ a_{i_j} \text{ се среќава } n_j \text{ пати},\ j = 1, 2, ..., k\}$$

$$\subseteq \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}\}^n.$$

- Елементите на множеството X се нарекуваат **пермурации со повторување од n елементи тип** $(n_1, n_2, ..., n_k)$. Вкупниот број на пермурации со повторување од n елементи тип $(n_1, n_2, ..., n_k)$ се означува со $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ и се пресметува според формулата

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_k!},\ n_1 + n_2 + ... + n_k = n,\ 1 \leq k \leq n.$$

ЗАДАЧА 1.15. Колку четирицифрени броеви може да се формираат кај кои:
а) сите цифри се различни,
б) во декадниот запис нема нула?

Решение. а) Првата цифра на четирицифрениот број не смее да е нула, па таа може да се избере на 9 начини. Останатите три цифри треба да се сите различни меѓу себе и различни од првата цифра, па тие се избираат од 9 цифри, и бројот на сите можни трицифрени завршетоци на четирицифрениот број е $V_9^3 = 504$. Знаејќи дека првата цифра се избира на 9 начини, заклучуваме дека може да се формираат $9 \cdot V_9^3 = 4536$ четирицифрени броеви кај кои сите цифри се различни.

б) Бидејќи во декадниот запис на четирицифрениот број нема нула, значи дека неговите цифри се избираат од 9 цифри, при што не е наведено дека цифрите мора да се различни. Значи, може да се формираат $\overline{V}_9^4 = 6561$ такви броеви.

ЗАДАЧА 1.16. На колку начини од кутија со 7 бели и 3 црни топчиња може да се извлечат 2 бели и 1 црно топче, ако топчињата се извлекуваат едно по едно:
а) без враќање,
б) со враќање?

Решение. а) Бројот на распореди при извлекувањето на двете бели и едното црно топче е $P_3(2, 1) = 3$ т.е. тоа се распоредите (б, б, ц), (б, ц, б) и (ц, б, б).

Од 7 бели топчиња со влечење едно по едно топче без враќање, 2 топчиња се извлекуваат на $V_7^2 = 42$ начини. Додека од 3 црни топчиња со влечење едно по едно топче без враќање, 1 топче се извлекува на $V_3^1 = 3$ начини. Значи, бараниот број начини е $P_3(2,1) \cdot V_7^2 \cdot V_3^1 = 378$.

б) Се зема само предвид дека извлекувањето е со враќање, па бараниот број начини сега е $P_3(2,1) \cdot \overline{V}_7^2 \cdot \overline{V}_3^1 = 441$.

ЗАДАЧА 1.17. На колку начини може да се изберат неколку мачки од 3 бели, 4 жолти и 2 црни, така што меѓу избраните мачки да има и бела, и жолта, и црна?

Решение. На секоја мачка ѝ доделуваме 0 - ако не е избрана и 1 - ако е избрана. За меѓу избраните мачки да има барем по една од секоја боја, не смее да се случи сите мачки од иста боја да имаат нули. Па, постојат $\overline{V}_2^k - 1$ начини на k мачки од една иста боја да им се доделат нули и единици, така да не добијат сите нули. Значи, бараниот број начини за избор на мачки, така што во избраните мачки да има и бела и жолта и црна, е $(\overline{V}_2^3 - 1)(\overline{V}_2^4 - 1)(\overline{V}_2^2 - 1) = 7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$.

ЗАДАЧА 1.18. На колку начини може да се распоредат на полица 3 примерока од учебникот по алгебра, 2 примерока од учебникот по геометрија и 1 примерок од учебникот по математичка анализа, така што учебникот по математичка анализа да не е последен?

Решение. Вкупниот број распореди на сите учебници е $P_6(3,2,1) = 60$. Ако учебникот по математичка анализа е последен, тогаш бројот на распореди на останатите учебници е $P_5(3,2) = 10$. Па, бараниот број начини е $P_6(3,2,1) - P_5(3,2) = 50$.

ЗАДАЧА 1.19. На колку начини може да се наредат во редица 4 црвени и 3 зелени топчиња, така што различно обоените топчиња наизменично се сместени?

Решение. Јасно е дека редоследот на топчињата е (ц, з, ц, з, ц, з, ц). Црвените топчиња може да се распоредат на $P_4 = 24$ начини, додека зелените топчиња на $P_3 = 6$ начини. Па, така бараниот број начини е $P_4 \cdot P_3 = 144$.

ЗАДАЧА 1.20. Околу кружна маса се наредени n столчиња. На колку начини можат n луѓе да седнат на n столчиња околу кружната маса?

Решение. Всушност тука се бара бројот на **циклични пермутации од** n **елементи**. Знаејќи дека n луѓе може да се распоредат на $n!$ начини на n столчиња во редица и воочувајќи дека секои n циклични распореди во редица одговараат на еден ист кружен распоред, добиваме дека бараниот број на начини е $n!/n = (n-1)!$.

ЗАДАЧА 1.21. На колку начини може да седнат 3 девојчиња и 2 момчиња:

а) во редица со 5 столчиња,

б) во редица со 7 столчиња,

в) околу кружна маса со 5 столчиња,

г) околу кружна маса со 7 столчиња?

Решение. а) Вкупно 5 лица треба да седнат во редица со 5 столчиња, па бараниот број начини е $P_5 = 120$.

б) Во овој случај ќе има 2 празни столчиња, па бараниот број начини е $P_7(2,1,1,1,1,1) = 2520$.

в) Бараниот број начини е бројот на циклични пермутации со 5 елементи т.е. $(5-1)! = 24$ начини.

г) Во комбинација на размислувањата од под б) и в) т.е. бараниот број начини во овој случај е $\frac{(7-1)!}{2!1!1!1!1!1!} = 360$.

Општо, k различни елементи $a_1, a_2, ..., a_k$ така што елементот a_i се среќава n_i пати (при тоа $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$), може да се наредат во кружен распоред со n места на $\frac{(n-1)!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ начини. Овие распореди се нарекуваат **циклични пермутации од** n **елементи тип** $(n_1, n_2, ..., n_k)$.

1.3.2 Пребројување (комбинации)

Нека A е конечно множество од n елементи т.е. $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

- Секое k-елементно подмножество од елементи од множеството A се нарекува **комбинација без повторување од** n **елементи класа** k. Вкупниот број на комбинации без повторување од n елементи класа k се означува со C_n^k и се пресметува според формулата

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},\ 0 \leq k \leq n.$$

- Секое k-елементно мултиподмножество од елементи од множеството A се нарекува **комбинација со повторување од n елементи класа k**. Вкупниот број на комбинации со повторување од n елементи класа k се означува со $\overline{C}_n^k$ и се пресметува според формулата
$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k,\ k \geq 0.$$

ЗАДАЧА 1.22. Од 7 ученици и 6 ученички треба да се изберат 8 претставници од кои 5 ученици. На колку начини може да се изврши изборот?

Решение. Од 7 ученици се избираат 5 на $C_7^5 = 21$ начин, додека од 6 ученички се избираат 3 на $C_6^3 = 20$ начини. Така, бараниот број начини е $C_7^5 \cdot C_6^3 = 420$.

ЗАДАЧА 1.23. Од еден шпил со 52 карти треба да се изберат 3. На колку начини може да се изврши изборот така што:
а) сите три карти се со иста вредност,
б) сите три карти се со ист знак,
в) две карти се со иста вредност, а третата е 1-ца?

Решение. а) Во еден шпил карти има 13 различни вредности од кои една се одбира на $C_{13}^1 = 13$ начини. Од секоја вредност има по 4 карти со различен знак од кои треба да се одберат 3, па бројот на начини за тој избор е $C_4^3 = 3$. Тогаш бараниот број начини е $C_{13}^1 \cdot C_4^3 = 52$.

б) Со слично размислување заклучуваме дека три карти со ист знак може да се одберат на $C_4^1 \cdot C_{13}^3 = 1144$ начини.

в) Можно е сите три карти да се 1-ци, а такви избори има $C_4^3 = 4$. Ако една карта е 1-ца, а другите две имаат различна вредност од 1-ца, тогаш 1-цата може да се одбере на $C_4^1 = 4$ начини, додека вредноста за другите две карти може да се одбере на $C_{12}^1 = 12$ начини, а две карти со иста вредност може да се одберат на $C_4^2 = 6$ начини. Значи, бараниот вкупен број начини е $C_4^3 + C_4^1 \cdot C_{12}^1 \cdot C_4^2 = 292$.

ЗАДАЧА 1.24. На колку начини од $3n$ последователни цели броеви може да се изберат три броја, така што нивниот збир да е делив со 3?

Решение. За збирот на трите избрани броја да е делив со 3 треба да настапи некој од двата случаи: сите три броја да даваат еднаков остаток при делење со 3 (т.е. или 0, 0, 0 или 1, 1, 1 или 2, 2, 2) или сите три броја да даваат различни остатоци при делење со 3 (т.е. 0, 1, 2). Да забележиме дека во $3n$ последователни цели броеви има n броеви кои се деливи со 3, n броеви кои даваат остаток 1 и n броеви кои даваат остаток 2.

Три броја сите деливи со 3 може да се изберат на C_n^3 начини. Истото се случува и ако сите три броја даваат остаток 1 и ако сите три броја даваат остаток 2. Три броја кои даваат различни остатоци може да се изберат на $(C_n^1)^3$ начини. Па, бараниот број начини е $3C_n^3 + (C_n^1)^3 = n(3n^2 - 3n + 2)/2$.

ЗАДАЧА 1.25. Во една пекарница се продаваат 10 вида печива. Претпоставуваме дека од секој вид печиво има доволно парчиња. На колку начини може да се купат 12 печива? На колку начини може да се купат 8 печива? На колку начини може да се купат 8 различни печива?

Решение. При купувањето на печива можно е некој од видовите печива да се повтори, затоа 12 печива од 10 вида печива може да се купат на $\overline{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12} = 293930$ начини, а 8 печива од 10 вида печива може да се купат на $\overline{C}_{10}^{8} = C_{17}^{8} = 24310$ начини. Додека, 8 различни печива од 10 вида печива може да се купат на $C_{10}^8 = 45$ начини.

ЗАДАЧА 1.26. Колку триаголници постојат со должини на страни некоја од вредностите 4, 5, 6, 7?

Решение. Да забележиме најнапред дека кои било три страни a, b, c така што $a, b, c \in \{4, 5, 6, 7\}$, може да формираат триаголник. Значи, треба да ги изброиме сите триелементни мултиподмножества од множеството $\{4, 5, 6, 7\}$ кое има 4 елементи. Па, бараниот број на триаголници е $\overline{C}_4^3 = C_6^3 = 20$.

ЗАДАЧА 1.27. Во една редица се наредени n предемети. На колку начини може да се одберат три од нив, но така да не се одберат никои два соседни предмети?

Решение. Да ги нумерираме предметите со редни броеви од 1 до n. Избирањето на три броја од броевите од 1 до n така што никои два да не се соседни, е исто со избирање на три броја од броевите од 1 до $n-2$, а потоа најголемиот број да се зголеми за 2, а вториот по големина да се зголеми за 1. Значи, бараниот број начини е $C_{n-2}^3 = \binom{n-2}{3} = \frac{1}{6}(n^3 - 9n^2 + 26n - 24)$.

ЗАДАЧА 1.28. Колку различни десетцифрени броеви може да се формираат од цифрите 1, 2 и 3, така што цифрата 3 да се среќава во секој број точно два пати? Колку од тие броеви се деливи со 9?

Решение. Местата на кои ќе бидат двете 3-ки може да се изберат на C_{10}^2 начини. Останатите 8 места треба да се пополнат со цифрите 1 или 2, и тоа може да се направи на $\overline{V}_2^8$ начини. Затоа, вкупниот број на десетцифрени броеви составени од цифрите 1, 2 и 3, така што цифрата 3 се среќава точно два пати е $C_{10}^2 \cdot \overline{V}_2^8 = 45 \cdot 256 = 11520$.
Збирот на цифрите на еден таков број е меѓу $8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 14$ и $8 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 22$, а број делив со 9 меѓу овие два броја е само бројот 18. Бидејќи во бројот има точно две тројки, тоа значи дека збирот на останатите 8 цифри кои се 1-ци или 2-ки треба да биде $18 - 2 \cdot 3 = 12$, што е можно само ако 4 од нив се 1-ци и 4 се 2-ки. Па, бројот на десетцифрени броеви составени од 4 единици, 4 двојки и 2 тројки е $P_{10}(4,4,2) = \frac{10!}{4!4!2!} = 3150$.

ЗАДАЧА 1.29. Најди го бројот на n-торки во систем со основа 3 кои се со:
а) нула на прво место,
б) $m+2$ нули од кои две на краевите,
в) m единици.

Решение. а) Ако на првото место е нула, останатите $n-1$ места може да се пополнат со која било од цифрите 0, 1 или 2, затоа бројот на такви n-торки е $\overline{V}_3^{n-1} = 3^{n-1}$.

б) Бидејќи на краевите има нули, остануваат m нули кои се распоредуваат на $n-2$ места на C_{n-2}^m начини. Останатите $n = m-2$ места може да се пополнат со цифрите 1 или 2 на $\overline{V}_2^{n-m-2}$ начини. Под услов $m \leq n-2$, бараниот број на n-торки е $C_{n-2}^m \cdot \overline{V}_2^{n-m-2} = \binom{n-2}{m} \cdot 2^{n-m-2}$.

в) На n места, m единици се распоредуваат на C_n^m начини. Останатите $n-m$ места може да се пополнат со цифрите 0 или 2 на $\overline{V}_2^{n-m}$ начини. Под услов $m \leq n$, бараниот број на n-торки е $C_n^m \cdot \overline{V}_2^{n-m} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}$.

ЗАДАЧА 1.30. На колку начини може да се поделат 10 книги на 5 купчиња од по 2 книги во секое купче (при тоа не е важен редоследот на купчињата)?

Решение. Првото купче може да се избере на C_{10}^2 начини, второто на C_8^2 начини, третото на C_6^2 начини, четвртото на C_4^2 начини и петтото на C_2^2 начини. Значи, купчињата може да се одберат на $C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$ начини, каде што еден избор на 5-те купчиња се среќава во P_5 распореди. Бидејќи не е важен редоследот на купчињата, бараниот број начини е

$$\frac{C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{P_5} = \frac{10!}{5!(2!)^5}.$$

ЗАДАЧА 1.31. На колку начини може да се подели шпил од 52 карти на 13 играчи по 4 карти, така што:

а) секој играч да има по една карта од секој знак,

б) еден играч да има карти од сите 4 знака, а сите останати играчи да имаат карти од еден ист знак?

Решение. а) Фиксираме еден знак (срце, баклава, лист или детелина). Од тој знак има 13 карти. Овие 13 карти може да ги поделиме на 13-те играчи на $P_{13} = 13!$ начини. Истото го правиме и со останатите 3 знака. Па, бројот на начини на кои може да се поделат картите на 13 играчи, така што секој играч да има по една карта од секој знак е $(13!)^4$.
б) Еден играч може да избере по една карта од секој знак на $(C_{13}^1)^4 = 13^4$ начини. Остануваат по 12 карти од секој знак кои може да се поделат на по 3 групи од по 4 карти (при што важна е само содржината на групите, а не и редоследот на групите) на $(\frac{1}{P_3} \cdot C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4)^4 = \frac{(12!)^4}{(4!)^{12}(3!)^4}$ начини. Така добиените групи може да се разделат на 12 играчи на $P_{12} = 12!$ начини. Играчот кој има карти од сите 4 знака може да се избере на $C_{13}^1 = 13$ начини. Конечно, бараниот број начини на кои може да се поделат картите така што еден играч да има карти од сите 4 знака, а останатите играчи да имаат карти од еден ист знак е $C_{13}^1 \cdot (C_{13}^1)^4 \cdot (\frac{1}{P_3} \cdot C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4)^4 \cdot P_{12} = \frac{(13!)^5}{(4!)^{12}(3!)^4}$.

ЗАДАЧА 1.32. Миле треба да му испрати на својот пријател 8 различни фотографии. На колку начини тој може да ги испрати фотографиите, ако ги испраќа во 5 коверти, и при тоа не би било убаво да испрати празен коверт?

Решение. Ако на секоја фотографија ѝ доделиме број $x_i \in \{1,2,3,4,5\}$, $i = 1,2,...,8$ кој би означувал во кој коверт треба да ја ставиме, ќе значи дека 8 фотографии може да се ставаат во 5 коверти на $\overline{V}_5^8$ начини (број на елементи на множеството $\{(x_1,...,x_8) \mid x_i \in \{1,2,3,4,5\},\ i = 1,2,...,8\}$). Но, при некои од овие распореди може да се случи некои од ковертите да се празни.
Ако еден коверт со сигурност е празен, тогаш фотографиите може да се распоредат на $C_5^1 \cdot \overline{V}_4^8$ начини, но при тоа може да се случи во некој од овие распореди и повеќе од еден коверт да е празен.
Имено, ако k коверта, $k = 1,2,3,4$ со сигурност се празни, тогаш фотографиите може да се распоредат на $C_5^k \cdot \overline{V}_{5-k}^8$ начини. При тоа, за $k \leq 3$, може да се случи во некој од овие распореди и повеќе од k коверта да бидат празни (за $k = 4$ не може повеќе од 4 коверта да се празни).
Затоа, вкупниот број на начини на кои Миле може да ги распореди 8-те фотографии, така што ниеден од ковертите да не е празен е

$$\overline{V}_5^8 - C_5^1 \cdot \overline{V}_4^8 + C_5^2 \cdot \overline{V}_3^8 - C_5^3 \cdot \overline{V}_2^8 + C_5^4 \cdot \overline{V}_1^8 = 126000.$$

1.3.3 Класична дефиниција на веројатност

Едноставен пример за простор на веројатност е тројката $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, каде $\Omega = \{w_1, ..., w_N\}$ е **конечен простор од елементарни настани**, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ и веројатноста е дефинирана со $P(w_i) = 1/N$, $i = 1, 2, ..., N$ т.е. **секој елементарен настан е еднакввоверојатен**. Тогаш, за $A = \{w_{i_1}, ..., w_{i_k}\} \subseteq \Omega$ имаме

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

равенство познато како **класична дефиниција на веројатност**, каде $|\cdot|$ е број на елементи на соодветното множество.

ЗАДАЧА 1.33. Колкава е веројатноста дека при фрлање на хомогена коцка ќе се појават парен број на точки?

Решение. Ако елементарните настани на овој експеримент ги означиме со w_i - паднаа i точки, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, тогаш просторот елементарни настани е $\Omega = \{w_1, ..., w_6\}$ и притоа секој елементарен настан има еднакви шанси за појавување затоа што коцката е хомогена. Се бара веројатноста на настанот A - паднаа парен број на точки, кој изразен преку елементарните настани е $A = \{w_2, w_4, w_6\}$.

Според класичната дефиниција на веројатност за веројатноста на настанот A имаме $P(A) = |A|/|\Omega| = 3/6 = 1/2 = 0,5$.

ЗАДАЧА 1.34. Три монети, едната од 1 денар, втората од 2 денари и третата од 5 денари се фрлаат истовремено и по нивното паѓање се разгледува појавувањето на „грб“, односно „пара“. Да се пресметаат веројатностите на следните настани:

A - на монетата од 1 денар се појавил „грб“,
B - се појавиле точно два „грба“,
C - се појавиле не повеќе од два „грба“.

Решение. За овој експеримент, просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{(\text{п, п, п}), (\text{п, п, г}), (\text{п, г, п}), (\text{г, п, п}), (\text{п, г, г}), (\text{г, п, г}), (\text{г, г, п}), (\text{г, г, г})\},$$

каде на пример, елементарниот настан (г, п, г) означува дека на монетата од 1 денар се појавил „грб“, на монетата од 2 денари се појавила „пара“ и на монетата од 5 денари се појавил „грб“. При тоа, секој елементарен настан има еднакви шанси за појавување, затоа што појавувањето на „грб“, односно

„пара“ кај секоја од монетите е еднакввоверојатно и исходите кај секоја од монетите се независни од исходите кај останатите монети.

Настаните A и B изразени преку елементарните настани се

$$A = \{(\text{г, п, п}),\ (\text{г, п, г}),\ (\text{г, г, п}),\ (\text{г, г, г})\} \text{ и } B = \{(\text{п, г, г}),\ (\text{г, п, г}),\ (\text{г, г, п})\},$$

па според класичната дефиниција на веројатност имаме

$$P(A) = |A|/|\Omega| = 4/8 = 1/2 = 0,5 \text{ и } P(B) = |B|/|\Omega| = 3/8 = 0,375.$$

Веројатноста на настанот C, ќе ја одредиме разгледувајќи го спротивниот настан $\overline{C}$ - се појавиле повеќе од два „грба“. Имаме дека $\overline{C} = \{(\text{г, г, г})\}$, па според класичната дефиниција на веројатност $P(\overline{C}) = |\overline{C}|/|\Omega| = 1/8 = 0,125$. Сега, за веројатноста на настанот C имаме $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0,125 = 0,875$.

ЗАДАЧА 1.35. Дадени се пет отсечки од 2, 4, 5, 7 и 9 единици. Одреди ја веројатноста дека од случајно избрани три отсечки може да се конструира триаголник.

Решение. Множеството елементарни настани е $\Omega = \{\{a, b, c\} | a, b, c \in \{2, 4, 5, 7, 9\}\}$ т.е. се состои од сите триелементни подмножества од множеството $\{2, 4, 5, 7, 9\}$, па затоа $|\Omega| = C_5^3 = 10$. При тоа, секој избор на триелементно подмножество е еднакввоверојатен.

Настанот A - од избрани три отсечки од множеството $\{2, 4, 5, 7, 9\}$ може да се конструира триаголник, изразен преку елементарните настани е

$$A = \{\{2, 4, 5\}, \{4, 5, 7\}, \{4, 7, 9\}, \{5, 7, 9\}\},$$

па според класичната дефиниција на веројатност $P(A) = |A|/|\Omega| = 4/10 = 0,4$.

ЗАДАЧА 1.36. Се фрлаат две коцки за играње. Најди ја веројатноста дека збирот на паднатите точки е 5, а нивниот производ е 4.

Решение. Множеството елементарни настани на овој експеримент е

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \{1, ..., 6\}\},$$

каде x_i е бројот на паднати точки на i-та коцка, $i = 1, 2$, па $|\Omega| = \overline{V}_6^2 = 36$.

Настанот A - збирот на паднатите точки е 5, а нивниот производ е 4, изразен преку елементарните настани е $A = \{(1, 4), (4, 1)\}$, па според класичната дефиниција на веројатност $P(A) = |A|/|\Omega| = 2/36 = 1/18 \approx 0,055556$.

ЗАДАЧА 1.37. Случајно се избира еден двоцифрен број. Најди ја веројатноста дека двоцифрениот број:

а) е делив со барем еден од броевите 2 и 5,

б) има различни цифри,

в) има цифра на десетки за 1 поголема од цифра на единици,

г) има непарни цифри.

Решение. Множеството од елементарни настани Ω се состои од сите двоцифрени броеви, од каде $|\Omega| = 90$.

а) Ги дефинираме настаните A - бројот е делив со 2, и B - бројот е делив со 5. Тогаш, $P(A) = \frac{45}{90} = 0,5$, $P(B) = \frac{18}{90} = 0,2$. Додека за настанот AB - бројот е делив со 2 и со 5 т.е. бројот е делив со 10, имаме $P(AB) = \frac{9}{90} = 0,1$. Бараната веројатност бројот да е делив со барем еден од броевите 2 и 5 е $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6$.

б) Го дефинираме настанот C - бројот има различни цифри. Тогаш, $\overline{C} = \{11, 22, ..., 99\}$, па $P(\overline{C}) = \frac{9}{90} = 0,1$, од каде $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0,1 = 0,9$.

в) Го дефинираме настанот D - бројот има цифра на десетки за 1 поголема од цифра на единици. Тогаш, $D = \{10, 21, ..., 98\}$, па $P(D) = \frac{9}{90} = 0,1$.

г) Нека E - двоцифрениот број има непарни цифри, што значи дека е составен од цифрите $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, а такви броеви има $|E| = \overline{V}_5^2 = 5^2 = 25$. Па, бараната веројатност е $P(E) = \frac{25}{90} \approx 0,277778$.

ЗАДАЧА 1.38. Во една кутија се наоѓаат 2 бели и 3 црни топчиња. Од кутијата на случаен начин се извлекуваат две топчиња:

а) одеднаш,

б) едно по едно без враќање,

в) едно по едно со враќање.

Најди ја веројатноста дека извлечените топчиња се со различна боја.

Решение. Означуваме со настан A - извлечените топчиња се со различна боја.

а) При извлекување оддеднаш се добиваат комбинации, т.е. $|\Omega_1| = C_5^2 = 10$ и $|A| = C_2^1 \cdot C_3^1 = 6$, па затоа $P(A) = |A|/|\Omega_1| = 6/10 = 0,6$.

б) При извлекување едно по едно топче без враќање се добиваат варијации без повторување, т.е. $|\Omega_2| = V_5^2 = 20$ и $|A| = P_2(1,1) \cdot V_2^1 \cdot V_3^1 = 12$, па затоа $P(A) = |A|/|\Omega_2| = 12/20 = 0,6$.

в) При извлекување едно по едно топче со враќање се добиваат варијации со повторување, т.е. $|\Omega_3| = \overline{V}_5^2 = 25$ и $|A| = P_2(1,1) \cdot \overline{V}_2^1 \cdot \overline{V}_3^1 = 12$, па затоа $P(A) = |A|/|\Omega_3| = 12/25 = 0,48$.

ЗАДАЧА 1.39. Една фамилија има четири деца. Познато е дека веројатноста да се роди женско дете е еднаква на веројатноста да се роди машко дете. Која веројатност е поголема: фамилијата има две женски и две машки деца или фамилијата има три деца од еден пол и едно од друг пол?

Решение. Да означиме со „ж“ раѓање на женско дете, а со „м“ раѓање на машко дете. Тогаш, просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \{\text{ж, м}\}, i = 1, 2, 3, 4\},$$

и при тоа $|\Omega| = 2^4 = 16$. Да означиме со A - фамилијата има две женски деца, а со B - фамилијата има три деца од еден пол и едно од друг пол. Тогаш, $|A| = P_4(2,2) = 6$, и $|A| = P_4(3,1) + P_4(3,1) = 8$. Па, бараните веројатности се $P(A) = |A|/|\Omega| = 6/16 = 3/8$, и $P(B) = |A|/|\Omega| = 8/16 = 1/2$. Бидејќи, $P(A) < P(B)$, заклучуваме дека поверојатно е фамилијата да има три деца од еден пол и едно од друг пол, отколку да има две женски и две машки деца.

ЗАДАЧА 1.40. Во една кутија се наоѓаат n бели и 1 црно топче. Од кутијата на случаен начин се извлекуваат m $(m < n)$ топчиња. Која е веројатноста дека меѓу извлечените топчиња се наоѓа црното топче?

Решение. Секое извлекување на m топчиња претставува една комбинација, па за множеството елементарни настани имаме $|\Omega| = C_{n+1}^m$. Означуваме со A - меѓу извлечените m топчиња се наоѓа црното топче, што значи дека A се реализира кога меѓу извлечените m топчиња има $m-1$ бело топче од n-те бели топчиња во кутијата, па затоа $|A| = C_n^{m-1}$. Тогаш,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_n^{m-1}}{C_{n+1}^m} = \frac{\binom{n}{m-1}}{\binom{n+1}{m}} = \frac{\binom{n+1}{m} - \binom{n}{m}}{\binom{n+1}{m}} = 1 - \frac{\frac{n!}{m!(n-m)!}}{\frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!}} = 1 - \frac{n-m+1}{n+1} = \frac{m}{n+1}.$$

ЗАДАЧА 1.41. Од 40 светилки, точно 10 се исправни. Светилките на случаен начин се пакувани во две кутии од по 20 светилки секоја. Која е веројатноста во секоја кутија да има по 5 исправни светилки?

Решение. Вкупниот број начини да се сместат 40 светилки во две кутии со од по 20 светилки е $|\Omega| = C_{40}^{20}$. Нека A - во секоја кутија има по 5 исправни светилки. Тогаш, $|A| = C_{10}^5 \cdot C_{30}^{15}$. Па, бараната веројатност е $P(A) = \frac{C_{10}^5 \cdot C_{30}^{15}}{C_{40}^{20}}$.

ЗАДАЧА 1.42. Нека x_k, $k = 1, 2, ..., n$ се случајно избрани броеви од множеството $\{-1, 0, 1\}$. Најди ја веројатноста на настаните:

а) A - производот $\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)$ е различен од нула,

б) B - сумата $\sum_{k=1}^{n}(1 + x_k)$ е различна од нула.

Решение. Просторот од елементарни настани е $\Omega = \{(x_1, ..., x_n)|x_i \in \{-1, 0, 1\}\}$, од каде $|\Omega| = \overline{V}_3^n = 3^n$. За настаните A и B имаме

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x_1, ..., x_n)|x_i \in \{-1, 0, 1\}, \prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \neq 0\} = \{(x_1, ..., x_n)|x_i \in \{0, 1\}\}, \\
B &= \{(x_1, ..., x_n)|x_i \in \{-1, 0, 1\}, \sum_{k=1}^{n}(1 + x_k) \neq 0\} = \\
&= \{(x_1, ..., x_n)|x_i \in \{-1, 0, 1\}, (x_1, ..., x_n) \neq (-1, ..., -1)\},
\end{aligned}
$$

од каде $|A| = \overline{V}_2^n = 2^n$ и $|B| = \overline{V}_3^n - 1 = 3^n - 1$. Па, бараните веројатности се

$$
P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ и } P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3^n - 1}{3^n} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n.
$$

ЗАДАЧА 1.43. Петнаесет туристи пристигнале во град со четири хотели. Секој од хотелите има доволно слободни места за да ги смести сите 15 туристи одеднаш. Секој од туристите на случен начин избира еден од четирите хотели. Која е веројатноста дека нема да бидат избрани сите четири хотели?

Решение. Ги дефинираме настаните A_i - не е избран i-тиот хотел, $i = 1, 2, 3, 4$, и A - не се избрани сите четири хотели. Тогаш, имаме дека $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, па според принципот на вклучување и исклучување имаме

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) \\
&\quad - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_1A_4) - P(A_2A_3) - P(A_2A_4) - P(A_3A_4) \\
&\quad + P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4) + P(A_1A_3A_4) + P(A_2A_3A_4) \\
&\quad - P(A_1A_2A_3A_4) \\
&= 4 \cdot \frac{3^{15}}{4^{15}} - 6 \cdot \frac{2^{15}}{4^{15}} + 4 \cdot \frac{1^{15}}{4^{15}} - 0 \approx 0.053271,
\end{aligned}
$$

бидејќи веројатноста да не се избрани конкретни k хотели е $\frac{(4-k)^{15}}{4^{15}}$, затоа што во тој случај сите 15 туристи се сместиле во преостанатите $(4 - k)$ хотели (на пример, веројатноста да не се избрани првиот, третиот и четвртиот хотел е $P(A_1A_3A_4) = \frac{1^{15}}{4^{15}}$).

ЗАДАЧА 1.44. Парадоксот на Мере. Покажи дека е поверојатно при едно фрлање 4 коцки да се добие барем една единица, отколку при 24 фрлања 2 коцки да се добијат барем еднаш две единици.

Решение. Првиот експеримент се состои во едно фрлање 4 коцки, па множеството елементарни настани на овој експеримент е

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \{1, ..., 6\}, i = 1, 2, 3, 4\},$$

од каде $|\Omega_1| = \overline{V}_6^4 = 6^4$. Се бара веројатноста на настанот A - добиена е барем една единица. Спротивниот настан $\overline{A}$ - не е добиена ниедна единица, го запишуваме преку елемнтарните настани, па имаме

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \{2, ..., 6\}, i = 1, 2, 3, 4\},$$

од каде $|\overline{A}| = \overline{V}_5^4 = 5^4$. Конечно, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0,517747$.

За вториот експеримент, 24 фрлања 2 коцки, множеството елементарни настани е

$$\Omega_2 = \{((x_1, y_1), ..., (x_{24}, y_{24})) \mid x_i, y_i \in \{1, ..., 6\}, i = 1, ..., 24\},$$

од каде $|\Omega_2| = (\overline{V}_6^2)^{24} = 36^{24}$. Се бара веројатноста на настанот B - добиени се барем еднаш две единици. Повторно го разгледуваме спротивниот настан $\overline{B}$ - не се добиени ниеднаш две единици, за кој имаме

$$B = \{((x_1, y_1), ..., (x_{24}, y_{24})) \mid x_i, y_i \in \{1, ..., 6\}, i = 1, ..., 24 \text{ и } (x_i, y_i) \neq (1, 1)\},$$

од каде $|\overline{B}| = (\overline{V}_6^2 - 1)^{24} = 35^{24}$. И конечно, $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0,491404$.

Навистина, $P(A) > P(B)$.

ЗАДАЧА 1.45. Роденденски парадокс. Најди ја веројатноста во група од n луѓе барем двајца да имаат ист роденден. Која е најмалата вредност на n за која таа веројатност е поголема од $1/2$? Притоа, двајца имаат ист роденден ако се родени на ист ден и месец, независно од годината.

Решение. Ќе претпоставиме дека годината има 365 дена, па последователно ќе постојат 365 различни родендени. Случајно одбираме n луѓе, па множеството од елементарни настани Ω се состои од сите подредени n-торки $(x_1, x_2, ..., x_n)$, каде x_i е роденденот на i-тиот човек од групата, значи $|\Omega| = 365^n$.

Дефинираме настан A - барем двајца од групата од n луѓе имаат роденден на ист ден. Тогаш, за спротивниот настан $\overline{A}$ - никои двајца од групата од n луѓе немаат роденден на ист ден имаме дека се состои од сите подредени

n-торки $(x_1, x_2, ..., x_n)$ од родендени, при што никои два родендена не се исти, па $|\overline{A}| = 365 \cdot 364 \cdot ... \cdot (365-n+1)$. Затоа бараната веројатност е

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot ... \cdot (365-n+1)}{365^n} = \\ &= 1 - \frac{364 \cdot 363 \cdot ... \cdot (366-n)}{365^{n-1}}. \end{aligned}$$

За да ја најдеме вредноста на n за која $P(A)$ за прв пат ќе надмине $1/2$, ќе го искористиме приближувањето

$$P(A) \approx 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2 \cdot 365}}.$$

Според оваа формула, за $n = 23$, веројатноста $P(A)$ прв пат ќе надмине $1/2$, имено имаме дека $P(A) \approx 0,500002$, што значи дека во група од само 23 луѓе, со веројатност поголема од $1/2$ може да очекуваме барем двајца да имаат ист роденден.

1.4 Геометриска веројатност

Аналогот на класичната дефиниција на веројатност во случај на непреброив простор од елементарни настани Ω е познат како **геометриска веројатност**. Под претпоставка дека положбата на честичка која случајно паѓа во областа Ω е рамномерно распределена на таа област, веројатноста на настанот $A \in \mathcal{F}$ ја наоѓаме според

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

каде $m(\cdot)$ е n-димензионалниот волумен на конкретната област.

ЗАДАЧА 1.46. На отсечката $\overline{AB} = 12$ cm случајно се фрла точка M. Најди ја веројатноста дека плоштината на квадратот со страна $\overline{AM}$ е меѓу $36\ \text{cm}^2$ и $81\ \text{cm}^2$.

Решение. Означуваме со $x = \overline{AM}$, тогаш просторот од елементарни настани е $\Omega = \{x \mid 0 \leq x \leq 12\}$. Се бара веројатноста на настанот

$$A = \{x \mid 0 \leq x \leq 12,\ 36 \leq x^2 \leq 81\} = \{x \mid 6 \leq x \leq 9\}.$$

Во овој случај n-димензионалниот волумен, за $n = 1$, е должина на интервал, па имаме

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{9-6}{12-0} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

ЗАДАЧА 1.47. На отсечката $\overline{AB} = l$ случајно се фрлаат две точки M и N. Најди ја веројатноста дека точката M е поблиску до A, отколку точката N.

Решение. Означуваме со $x = \overline{AM}$ и $y = \overline{AN}$, тогаш просторот од елементарни настани е $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq l\}$. Се бара веројатноста на настанот $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x < y \leq l\}$ (Цртеж 1.2 а)). Во овој случај n-димензионалниот волумен, за $n = 2$, е плоштина на област, па имаме

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{l^2}{2}}{l^2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

ЗАДАЧА 1.48. Отсечката $\overline{AB} = l$ случајно се дели на три дела. Најди ја веројатноста од трите добиени отсечки да може да се конструира триаголник.

Решение. Нека точките M и N се точките со кои отсечката AB е поделена на три дела. Нека $\overline{AM} = x$ и $\overline{AN} = y$. Тогаш, просторот на елементарни настани е $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq l\}$, па $m(\Omega) = l^2/2$. Се бара веројатноста на настанот B - од отсечките $\overline{AM}$, $\overline{MN}$ и $\overline{NB}$ може да се конструира триаголник. Бидејќи $\overline{AM} = x$, $\overline{MN} = y - x$ и $\overline{NB} = l - y$, настанот B се реализира тогаш кога збирот на кои било две страни е поголем од третата, односно

$$B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq l,\ x + y - x > l - y,\ x + l - y > y - x,\ y - x + l - y > x\},$$

или

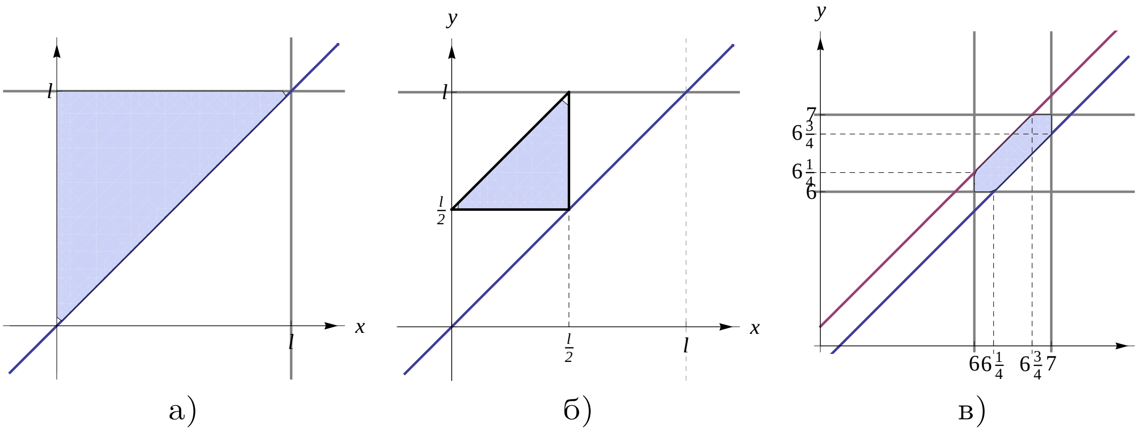
$$B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq l,\ y > l/2,\ y - x < l/2,\ x < l/2\},$$

(види Цртеж 1.2 б)). Од цртежот имаме $m(b) = (l/2)^2/2 = l^2/8$, па бараната веројатност е

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{l^2/8}{l^2/2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

ЗАДАЧА 1.49. Две лица се договориле да се сретнат на одредено место меѓу 6 и 7 часот. Секој од нив доаѓа на договореното место, чека 15 минути и ако не се сретне со другиот си заминува. Најди ја веројатноста дека лицата се сретнале.

Решение. Го означуваме со x - временскиот момент на пристигнување на првото лице, а со y - временскиот момент на пристигнување на второто лице. Тогаш, множеството од елементарни настани е $\Omega = \{(x,y) \mid 6 \leq x,y \leq 7\}$, додека настанот C - лицата се сретнале е $C = \{(x,y) \mid 6 \leq x,y \leq 7,\ |x-y| \leq 1/4\}$ (Цртеж 1.2 в)). Плоштините на Ω и B се $m(\Omega) = (7-6)^2 = 1$ и $m(C) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 0,75 = 0,4375$. Па, според дефиницијата на геометриска веројатност бараната веројатност е $P(C) = \frac{m(C)}{m(\Omega)} = 0,4375$.



Цртеж 1.2

ЗАДАЧА 1.50. Најди ги веројатностите на настаните од Задача 1.6.

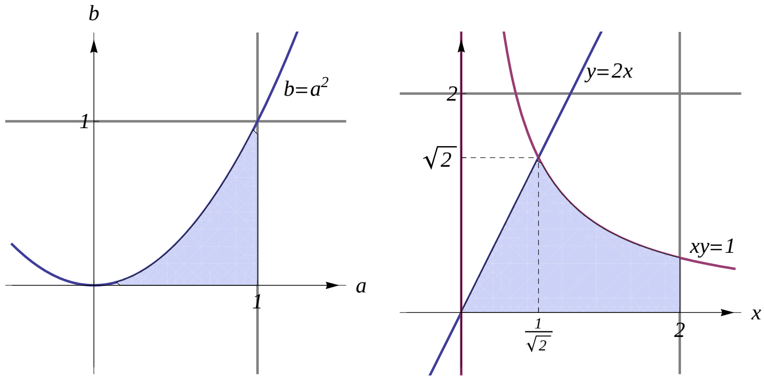
Решение. На Цртеж 1.1 а), б), в), г) се дадени настаните Ω, A, B и C од Задача 1.6 соодветно. Па, според цртежот имаме дека $m(\Omega) = 2^2/2 = 2$, $m(A) = 1^2/2 = 1/2$, $m(B) = 1^2 = 1$ и $m(C) = (2 \cdot \frac{2}{3})/2 = 2/3$. Затоа,

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0,25,\ P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{1}{2} = 0,5,\ P(C) = \frac{m(C)}{m(\Omega)} = \frac{1}{3} \approx 0,333333.$$

ЗАДАЧА 1.51. Коефициентите a и b на равенката $x^2 + 2ax + b = 0$ се случајно избрани броеви од интервалот $[0,1]$. Најди ја веројатноста дека равенката има реални корени.

Решение. Просторот елементарни настани е $\Omega = \{(a,b) \mid 0 \leq a,b \leq 1\}$. За равенката $x^2 + 2ax + b = 0$ да има реални корени треба $D = 4a^2 - 4b \geq 0$, па настанот A - равенката има реални корени е

$$A = \{(a,b) \mid 0 \leq a,b \leq 1,\ 4a^2 - 4b \geq 0\} = \{(a,b) \mid 0 \leq a,b \leq 1,\ b \leq a^2\}$$



а) б)

Цртеж 1.3

(види Цртеж 1.3 а)). За плоштините на Ω и A имаме $m(\Omega) = (1-0)^2 = 1$ и $m(A) = \int_0^1 a^2\,da = \frac{a^3}{3}\,|_0^1 = \frac{1}{3}$. Па, бараната веројатност е $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{3}$.

ЗАДАЧА 1.52. На случаен начин се бираат два позитивни реални броја x и y кои не надминуваат 2. Најди ја веројатноста на настанот A - производот xy не надминува 1, а количникот $\frac{y}{x}$ не е поголем од 2.

Решение. Просторот елементарни настани е $\Omega = \{(x,y) \mid 0 < x, y \leq 2\}$, од каде $m(\Omega) = 2 \cdot 2 = 4$. Се бара да се најде веројатноста на настанот $A = \{(x,y) \mid 0 < x, y \leq 2,\ xy \leq 1,\ \frac{y}{x} \leq 2\}$, види Цртеж 1.3 б). Плоштината на областа A е

$$m(A) = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2x\,dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^2 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln 2.$$

Па, за веројатноста на настанот A имаме

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln 2}{4} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\ln 2 \approx 0,384930.$$

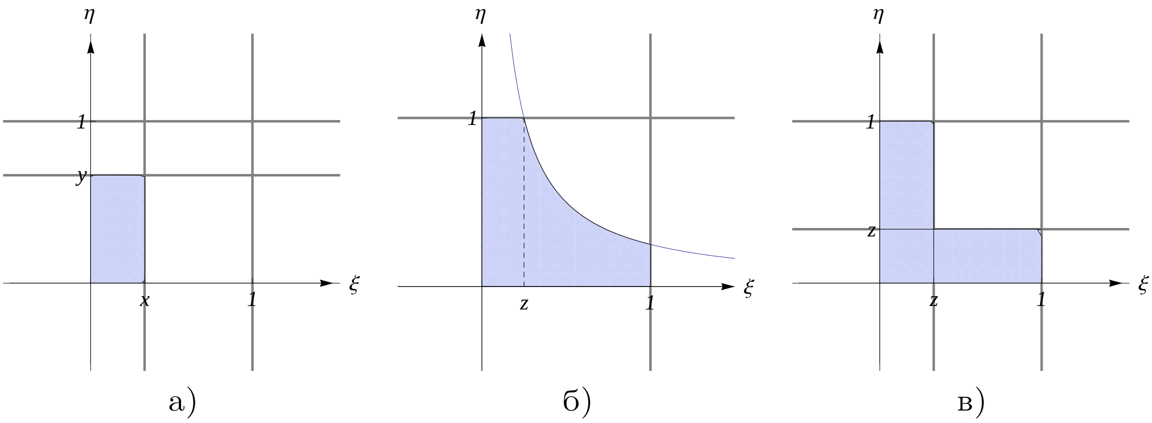
ЗАДАЧА 1.53. Во квадрат со темиња $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ случајно се фрла точка M, која по паѓањето добива координати (ξ, η). Нека се дадени $0 \leq x, y, z \leq 1$, најди ги веројатностите:

а) $P\{\xi \leq x,\ \eta \leq y\}$, б) $P\{\xi \cdot \eta \leq z\}$,

в) $P\{\min\{\xi, \eta\} \leq z\}$, г) $P\{\frac{1}{2}(\xi + \eta) \leq z\}$.

Решение. Просторот од елементарни настани е $\Omega = \{(\xi,\eta) \mid 0 \le \xi,\eta \le 1\}$, па неговата плоштина изнесува $m(\Omega) = 1$. Да ги најдеме прво веројатностите на настаните

$A = \{(\xi,\eta) \mid 0 \le \xi,\eta \le 1,\ \xi \le x,\ \eta \le y\}$, $B = \{(\xi,\eta) \mid 0 \le \xi,\eta \le 1,\ \xi\cdot\eta \le z\}$ и
$$C = \{(\xi,\eta) \mid 0 \le \xi,\eta \le 1,\ \min\{\xi,\eta\} \le z\}$$
(види Цртеж 1.4, а), б), в) соодветно).



Цртеж 1.4

Плоштината на секоја од овие области е

$$\begin{aligned}
m(A) &= xy,\\
m(B) &= \begin{cases} z\cdot 1 + \int_z^1 \frac{z}{\xi}\,d\xi & ,0 < z \le 1 \\ 0 & ,z = 0 \end{cases} = \begin{cases} z(1-\ln z) & ,0 < z \le 1 \\ 0 & ,z = 0 \end{cases},\\
m(C) &= 1-(1-z)^2 = 2z - z^2.
\end{aligned}$$

Според дефиницијата за геометриска веројатност имаме

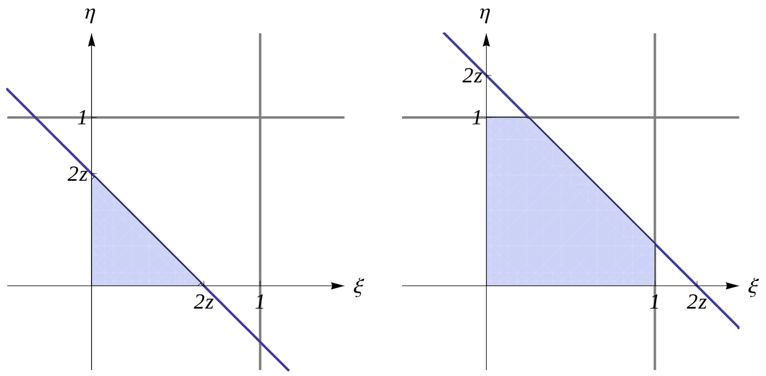
$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{m(A)}{m(\Omega)} = xy,\\
P(B) &= \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \begin{cases} z(1-\ln z) & ,0 < z \le 1 \\ 0 & ,z = 0. \end{cases},\\
P(C) &= \frac{m(C)}{m(\Omega)} = 2z - z^2.
\end{aligned}$$

Да го разгледаме сега настанот $D = \{(\xi,\eta) \mid 0 \le \xi,\eta \le 1,\ \frac{1}{2}(\xi+\eta) \le z\}$, прикажан на Цртеж 1.5 а) за $0 \le z \le \frac{1}{2}$ и на Цртеж 1.5 б) за $\frac{1}{2} < z \le 1$. Плоштината на областа D е

$$m(D) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot(2z)^2 & ,0 \le z \le \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2}\cdot(2-2z)^2 & ,\frac{1}{2} < z \le 1 \end{cases} = \begin{cases} 2z^2 & ,0 \le z \le \frac{1}{2} \\ -2z^2+4z-1 & ,\frac{1}{2} < z \le 1 \end{cases}.$$

Според геометриската дефиниција на веројатност имаме

$$P(D) = \frac{m(D)}{m(\Omega)} = \begin{cases} 2z^2 & , 0 \le z \le \frac{1}{2} \\ -2z^2 + 4z - 1 & , \frac{1}{2} < z \le 1 \end{cases}.$$



а) $0 \le 2z \le 1$ б) $1 \le 2z \le 2$

Цртеж 1.5

ЗАДАЧА 1.54. Иглата на Буфон. На рамнина, поделена со паралелни прави, кои се наоѓаат на растојание a една од друга, случајно се фрла игла со должина l $(l < a)$. Најди ја веројатноста иглата да сече која било од паралелните прави.

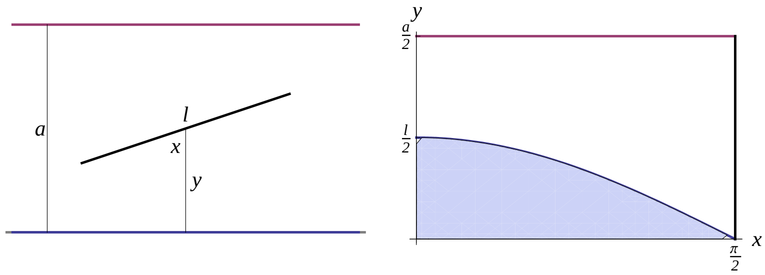
Решение. Нека x е аголот меѓу иглата и нормалата на паралелните прави, и нека y е растојанието од средината на иглата до најблиската права (Цртеж 1.6 а)). Тогаш, просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{a}{2}\}.$$

Нека, A е настанот дека иглата сече некоја од правите, тогаш

$$A = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{a}{2},\ y \le \frac{l}{2}\cos x\},$$

бидејќи кога $y \le \frac{l}{2}\cos x$, иглата ќе ја пресече најблиската права. Од Цртеж 1.6 б) имаме дека $m(\Omega) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a\pi}{4}$ и $m(A) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2}\cos x\ dx = \frac{l}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{l}{2}$, значи $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{2l}{a\pi}$.

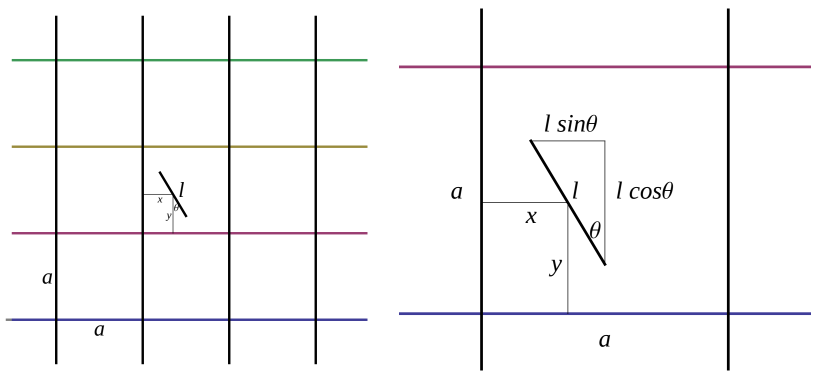


а) б)

Цртеж 1.6

ЗАДАЧА 1.55. На рамнина е поставена мрежа составена од квадрати со страна a. Најди ја веројатноста случајно фрлена игла со должина l ($l < a$) да пресекува некоја од страните на квадратите.

Решение. На Цртеж 1.7 а) е прикажана случајно фрлена игла со должина l на мрежа составена од квадрати со страна a. Положбата на иглата во квадратната мрежа е определена со координатите на нејзината средишна точка (x, y) во однос на координатниот систем на квадратот во кој се наоѓа средишната точка и аголот θ меѓу иглата и вертикалната оска.



а) б)

Цртеж 1.7

Просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{(x, y, \theta) \mid 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Нека, A е настанот иглата да се наоѓа целосно во некој квадрат од мрежата, тогаш

$$A = \{(x, y, \theta) \mid \frac{l \sin\theta}{2} \leq x \leq a - \frac{l \sin\theta}{2},\ \frac{l \cos\theta}{2} \leq y \leq a - \frac{l \cos\theta}{2},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

затоа што за фиксна вредност на аголот θ, иглата нема да пресекува страна на квадрат од мрежата само ако нејзината средишна точка е во квадратот $\frac{l\sin\theta}{2} \leq x \leq a - \frac{l\sin\theta}{2}$, $\frac{l\cos\theta}{2} \leq y \leq a - \frac{l\cos\theta}{2}$, Цртеж 1.7 б). За волуменот на областа Ω имаме дека е $m(\Omega) = \frac{a^2\pi}{2}$, додека волуменот на областа A е

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{l\sin\theta}{2}}^{a-\frac{l\sin\theta}{2}} dx \int_{\frac{l\cos\theta}{2}}^{a-\frac{l\cos\theta}{2}} dy = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a - l\sin\theta)(a - l\cos\theta)\, d\theta = \\ &= \frac{a^2\pi}{2} - 2al + \frac{l^2}{2}. \end{aligned}$$

значи веројатноста иглата да се наоѓа целосно во некој квадрат од мрежата е

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = 1 - \frac{4al - l^2}{a^2\pi}.$$

Следствено, веројатноста иглата да пресекува страна на некој квадрат од мрежата, односно веројатноста крајните точки на праволиниски пат со должина l да се во две различни полиња на карта поделена на квадрати со страна a $(a > l)$ е

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{4al - l^2}{a^2\pi}.$$

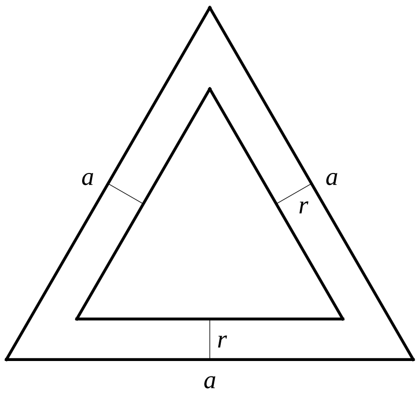
ЗАДАЧА 1.56. Во круг со радиус R, во кој е впишан рамностран триаголник, случајно е фрлена една точка. Најди ја веројатноста дека таа точка паднала во рамностраниот триаголник впишан во кругот.

Решение. Просторот елементарни настани Ω се состои од сите точки во кругот K со радиус R, па затоа $m(\Omega) = \mathbf{P}(K) = R^2\pi$, каде со $\mathbf{P}(F)$ се означува плоштината на рамнинската фигура F. Означуваме со A - точката паднала во рамностраниот триаголник T впишан во кругот K, тогаш настанот A се состои од сите точки во триаголникот T и затоа $m(A) = \mathbf{P}(T) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Затоа, бараната веројатност е

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4R^2\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,413497.$$

ЗАДАЧА 1.57. На паркет составен од правилни триаголници со страна a, случајно се фрла монета со радиус r. Најди ја веројатноста дека монетата не ја сече границата на ниеден од триаголниците.

Решение. Го означуваме со S центарот на монетата, па множеството од елементарни настани се состои од сите точки од рамностраниот триаголник T_1 со страна a, додека настанот A - монетата не ја сече границата на ниеден од триаголниците од кои е составен паркетот, се реализира кога центарот на монетата ќе падне во рамностраниот триаголник T_2 кој се наоѓа во триаголникот T_1, на растојание r од неговите страни (Цртеж 1.8).



Цртеж 1.8

Значи, настанот A се состои од сите точки од триаголникот T_2 со страна $a - 2r\sqrt{3}$. Бидејќи,

$$m(\Omega) = \mathbf{P}(T_1) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ m(A) = \mathbf{P}(T_2) = \frac{(a-2r\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4},$$

добиваме дека бараната веројатност е

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{(a-2r\sqrt{3})^2}{a^2}.$$

ЗАДАЧА 1.58. Која е веројатноста дека случајно избран реален број од интервалот $[0,1]$ е рационален?

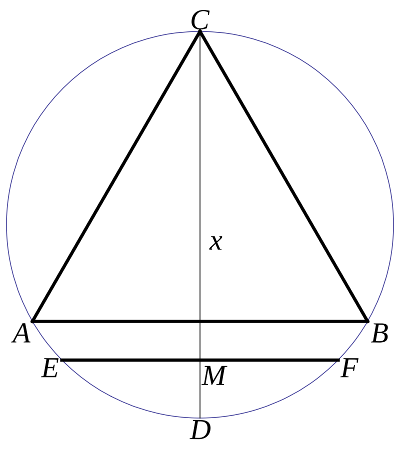
Решение. Множеството елементарни настани е $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, па $m(\Omega) = 1$. За настанот $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, имаме дека $m(A) = 0$, затоа што A е преброиво множество. И конечно, веројатноста при случајно бирање на реален број од интервалот $[0,1]$ да се избере рационален број е $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = 0$.

ЗАДАЧА 1.59. Бертрандов парадокс. Нека е дадена кружница со впишан рамностран триаголник во неа. Најди ја веројатноста должината на случајно избрана тетива од кружницата да е поголема од должината на страната на рамностраниот триаголник.

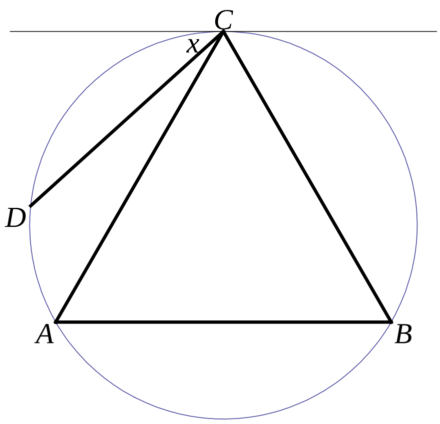
Решение. Нека е даден триаголник ABC впишан во кружница. Ќе конструираме два веројатносни модела кои одговараат на ситуацијата опишана во задачата.

Прв модел. Повлекуваме дијаметар CD на кружницата низ темето C кој е нормален на страната AB. На дијаметарот CD случајно избираме точка M и низ M повлекуваме тетива EF на кружницата нормална на CD (Цртеж 1.9 а)). Нека $\overline{CM} = x$, тогаш $\Omega = \{x \mid 0 \leq x \leq 2R\}$, каде R е радиусот на кружницата. Нека A е настанот тетивата да е поголема од страната на триаголникот ABC, тогаш $A = \{x \mid \frac{R}{2} \leq x \leq \frac{3R}{2}\}$, па $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$.

Втор модел. На случаен начин цртаме тетива CD на кружницата низ темето C на триаголникот ABC. Нека x е аголот меѓу тетивата и тангентата на кружницата низ C (Цртеж 1.9 б)). Тогаш, $\Omega = \{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$. Нека A е настанот тетивата да е поголема од страната на триаголникот ABC, тогаш $A = \{x \mid \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}\}$, па $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{1}{3}$.



а)



б)

Цртеж 1.9

1.5 Разни задачи

ЗАДАЧА 1.60. Нека $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ и $P(\{\omega_n\}) = \frac{2}{3^n}$, $n = 1, 2, ...$ Докажи дека кои било два различни настани имаат различни веројатности.

Решение. Нека $A, B \subseteq \Omega$, $A \neq B$ се два произволни различни настани. Тогаш, $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq \emptyset$. Ако означиме со $m = \min\{k \mid w_k \in A\Delta B\}$, тогаш иамаме дека w_m припаѓа само на едно од множествата $A \setminus B$ или $B \setminus A$. На пример, нека $w_m \in A \setminus B$, тогаш

$$P(A \setminus B) \geq P(\{w_m\}) = \frac{2}{3^m}.$$

Од тоа што $B \setminus A \subseteq \{w_{m+1}, w_{m+2}, ...\}$, имаме

$$P(B \setminus A) \leq \frac{2}{3^{m+1}} + \frac{2}{3^{m+2}} + ... = \frac{1}{3^m} < \frac{2}{3^m} \leq P(A \setminus B).$$

Значи, $P(A \setminus B) \neq P(B \setminus A)$. Па, тогаш имаме

$$P(A) = P(AB) + P(A \setminus B) \neq P(AB) + P(B \setminus A) = P(B),$$

што требаше да се покаже.

ЗАДАЧА 1.61. Нека е даден просторот од елементарни настани $\Omega = (0, \infty)$, настаните $A_n = (0, 1 - \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, ...$, и настанот $A = (0, 1)$. Ако $P(A_n) = \frac{2n-1}{4n}$, $n = 1, 2, ...$, најди ја веројатноста на настанот A.

Решение. Најнапред да забележиме дека низата од настани $\{A_n\}$ е неопаѓачка, односно важи $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ....$ Тогаш, од непрекинатоста од горе на веројатноста, имаме дека

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big).$$

Од друга страна $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, па затоа

$$P(A) = P\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{4n} = \frac{1}{2}.$$

ЗАДАЧА 1.62. Покажи дека за произволни настани A и B важи неравенството

$$P(A \cup B) \cdot P(AB) \leq P(A) \cdot P(B).$$

Решение. Бидејќи $AB \subseteq A$ и $AB \subseteq B$, имаме дека $P(AB) \leq P(A)$ и $P(AB) \leq P(B)$, од каде $P(AB) \leq \min\{P(A), P(B)\}$. Од друга страна $P(AB) \geq 0$, што повлекува дека $P(AB) \in [0, \min\{P(A), P(B)\}]$. Понатаму, $P(A \cup B) \cdot P(AB) = (P(A) + P(B) - P(AB)) \cdot P(AB)$, и бидејќи функцијата $f(x) = (P(A) + P(B) - x) \cdot x$ е растечка на интервалот $[0, (P(A) + P(B))/2]$, и од $\min\{P(A), P(B)\} \leq (P(A) + P(B))/2$, следува дека $f(x)$ го достигнува својот максимум на $[0, \min\{P(A), P(B)\}]$ во $x = \min\{P(A), P(B)\}$. Затоа,

$$P(A \cup B) \cdot P(AB) = (P(A) + P(B) - P(AB)) \cdot P(AB) = f(P(AB)) \leq$$

$$\leq (P(A) + P(B) - \min\{P(A), P(B)\}) \cdot \min\{P(A), P(B)\} = P(A) \cdot P(B).$$

ЗАДАЧА 1.63. Броевите $1, 2, ..., n$ на случаен начин се наредени во еден ред. Која е веројатноста дека бројот 1 е непосредно пред бројот n?

Решение. Просторот од елементарни настани се состои од сите можни распореди на n елементи, од каде $|\Omega| = P_n = n!$. За настанот A - бројот 1 е непосредно пред бројот n, имаме дека $|A| = P_{n-1} = (n-1)!$, затоа што распоредите кои одговараат на настанот може да ги сметаме како сите мозхни распореди од $n-1$ елемент т.е. ги распоредуваме броевите $2, ..., n-1$ и двојката $(1, n)$. Сега, според класичната дефиниција на веројатност имаме $P(A) = |A|/|\Omega| = (n-1)!/n! = 1/n$.

ЗАДАЧА 1.64. Марија фрла $n+1$ монети, а Јован фрла n монети. Која е веројатноста на Марија да ѝ се паднат повеќе „глави“ отколку на Јован?

Решение. За Марија постојат 2^{n+1} можни исходи, додека за Јован постојат 2^n можни исходи од фрлањето на монетите (сите можни подредени $(n+1)$-торки и n-торки соодветно од „глави“ и „пари“). Значи, постојат 2^{2n+1} еднакво веројатни можни исходи од фрлањето на монетите на Марија и Јован. Да ги означиме со x_1 и x_2 бројот на паднати „глави“ и „пари“ соодветно при фрлањето на Марија, и со y_1 и y_2 бројот на паднати „глави“ и „пари“ соодветно при фрлањето на Јован. Тогаш, $x_1 + x_2 = n+1$ и $y_1 + y_2 = n$. Да забележиме дека настаните $\{x_1 > y_1\}$ и $\{x_2 > y_2\}$ имаат еднаков број на елементарни исходи, па $P(\{x_1 > y_1\}) = P(\{x_2 > y_2\})$.

Од друга страна, $x_1 > y_1$ ако и само ако $n - x_1 < n - y_1$, односно $x_2 - 1 < y_2$ т.е. $x_2 \leq y_2$. Па, $P(\{x_1 > y_1\}) = P(\{x_2 \leq y_2\})$.

Настаните $\{x_2 > y_2\}$ и $\{x_2 \leq y_2\}$ се спротивни настани, па затоа имаме дека $P(\{x_2 > y_2\}) = 1 - P(\{x_2 \leq y_2\})$.

И конечно, имаме

$$P(\{x_1 > y_1\}) = P(\{x_2 > y_2\}) = 1 - P(\{x_2 \le y_2\}) = 1 - P(\{x_1 > y_1\}),$$

од каде за бараната веројатност добиваме дека е $P(\{x_1 > y_1\}) = \frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 1.65. Нека е дадено множеството $S = \{1, 2, ..., N\}$. Нека A_1 и A_2 се случајно избрани подмножества од S. Најди ги веројатностите на настаните B: „$A_1 \cap A_2 = \emptyset$“ и C: „$A_1 \cup A_2 = S$“.

Решение. Множеството од елементарни настани за овој случаен експеримент е $\Omega = \{(A_1, A_2) \mid A_1, A_2 \subseteq S\}$, и бидејќи $|S| = N$, имаме дека $|\Omega| = (2^N)^2 = 4^N$. Сега, за настанот B имаме

$$\begin{aligned} B &= \{(A_1, A_2) \mid A_1, A_2 \subseteq S,\ A_1 \cap A_2 = \emptyset\} \\ &= \cup_{k=0}^{N} \{(A_1, A_2) \mid A_1, A_2 \subseteq S,\ A_1 \cap A_2 = \emptyset,\ |A_1| = k\}, \end{aligned}$$

при што последната унија е унија од дисјунктни множества, па затоа

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{k=0}^{N} |\{(A_1, A_2) \mid A_1, A_2 \subseteq S,\ A_1 \cap A_2 = \emptyset,\ |A_1| = k\}| \\ &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} = (1+2)^N = 3^N. \end{aligned}$$

Затоа, $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3^N}{4^N} = (\frac{3}{4})^N$.

За настанот C имаме

$$\begin{aligned} C &= \{(A_1, A_2) \mid A_1, A_2 \subseteq S,\ A_1 \cup A_2 = S\} \\ &= \cup_{k=0}^{N} \{(A_1, A_2) \mid A_1, A_2 \subseteq S,\ A_1 \cup A_2 = S,\ |A_1| = k\}, \end{aligned}$$

при што последната унија е унија од дисјунктни множества, па затоа

$$\begin{aligned} |C| &= \sum_{k=0}^{N} |\{(A_1, A_2) \mid A_1, A_2 \subseteq S,\ A_1 \cup A_2 = S,\ |A_1| = k\}| \\ &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} 2^{k} = (1+2)^N = 3^N. \end{aligned}$$

Затоа, $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{3^N}{4^N} = (\frac{3}{4})^N$.

ЗАДАЧА 1.66. Нека M топчиња случајно се распоредени во N кутии ($N > M$). Најди ја веројатноста во N-те кутии да има n_i кутии во кои има по точно i топчиња, $i = 0, 1, ..., M$ т.е. $n_0 + n_1 + ... + n_M = N$ и $0 \cdot n_0 + 1 \cdot n_1 + ... + M \cdot n_M = M$.

Решение. Множеството од елементарни настани за овој експеримент е

$$\Omega = \{(x_1, x_2, ..., x_M) \mid x_i \in \{1, 2, ..., N\},\ i = 1, 2, ..., M\},$$

каде M-торката $(x_1, x_2, ..., x_M)$ означува дека i-тото топче е распоредено во x_i-тата кутија, $i = 1, 2, ..., M$. Тогаш, $|\Omega| = N^M$. Нека A е настанот во N-те кутии да има n_i кутии во кои има по точно i топчиња, $i = 0, 1, ..., M$, односно

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, x_2, ..., x_M) \mid x_i \in \{1, 2, ..., N\},\ i = 1, 2, ..., M, \\ &\quad n_0 + n_1 + ... + n_M = N,\ 0 \cdot n_0 + 1 \cdot n_1 + ... + M \cdot n_M = M\}, \end{aligned}$$

каде n_i е бројот на кутии во кои има точно i топчиња, $i = 0, 1, ..., M$.

Бројот на елементарни настани во A ќе го најдеме постепено. Прво, бројот на начини на избор на кутиите е

$$\frac{N!}{n_0! n_1! ... n_M!} = \frac{N!}{\prod_{i=0}^{M} n_i!}.$$

Топчињата ги делиме на M групи така што i-тата група содржи $i \cdot n_i$ топчиња, $i = 1, 2, ..., M$ (0-тата група е празна). Бројот на начини на избор на групите е

$$\frac{M!}{(1 \cdot n_1!)(2 \cdot n_2!)...(M \cdot n_M!)} = \frac{M!}{\prod_{i=1}^{M} (i \cdot n_i!)}.$$

Бројот на начини на избор на топчињата во рамките на i-тата група е

$$\frac{(i \cdot n_i)!}{\underbrace{i! i! ... i!}_{n_i-\text{пати}}} = \frac{(i \cdot n_i)!}{(i!)^{n_i}}.$$

Додека, бројот на начини за избор на сите топчиња во рамки на секоја група е

$$\prod_{i=1}^{M} \frac{(i \cdot n_i)!}{(i!)^{n_i}}.$$

Па, бројот на начини за избор на топчињата е

$$\frac{M!}{\prod_{i=1}^{M} (i \cdot n_i!)} \cdot \prod_{i=1}^{M} \frac{(i \cdot n_i)!}{(i!)^{n_i}} = \frac{M!}{\prod_{i=1}^{M} (i!)^{n_i}}.$$

Тогаш, бараниот број на елементарни настани во A е

$$|A| = \frac{N!}{\prod_{i=0}^{M} n_i!} \cdot \frac{M!}{\prod_{i=1}^{M} (i!)^{n_i}},$$

и конечно

$$P(A) = \frac{|\Omega|}{|A|} = \frac{N!\, M!}{N^M \, \prod_{i=0}^{M} n_i! \, \prod_{i=1}^{M} (i!)^{n_i}}.$$

ЗАДАЧА 1.67. Нека n различни броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ се наредени по тој редослед. На случаен начин броевите се разместуваат. Најди ја веројатноста никој од броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ да не е на своето место. Најди ја границата на таа веројатност при $n \to \infty$.

Решение. Множеството од елементарни настани за овој експеримент е

$$\Omega = \{(a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_n}) \mid n_k \in \{1, 2, ..., n\},\ k = 1, 2, ..., n,\ n_k \neq n_m,\ k \neq m\},$$

па затоа $|\Omega| = n!$.

Сега, да го означиме со A_i настанот дека бројот a_i останува на своето место, тогаш $P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$, $i = 1, 2, ..., n$. Да го означиме со A_{ij} настанот дека броевите a_i и a_j остануваат на своето место, тогаш $P(A_{ij}) = \frac{(n-2)!}{n!}$, $i, j = 1, 2, ..., n$ (да забележиме дека $A_{ij} = A_i A_j$) и.т.н. На крајот имаме $P(A_1 A_2 ... A_n) = \frac{1}{n!}$. Тогаш, бараната веројатност никој од броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ да не е на своето место е

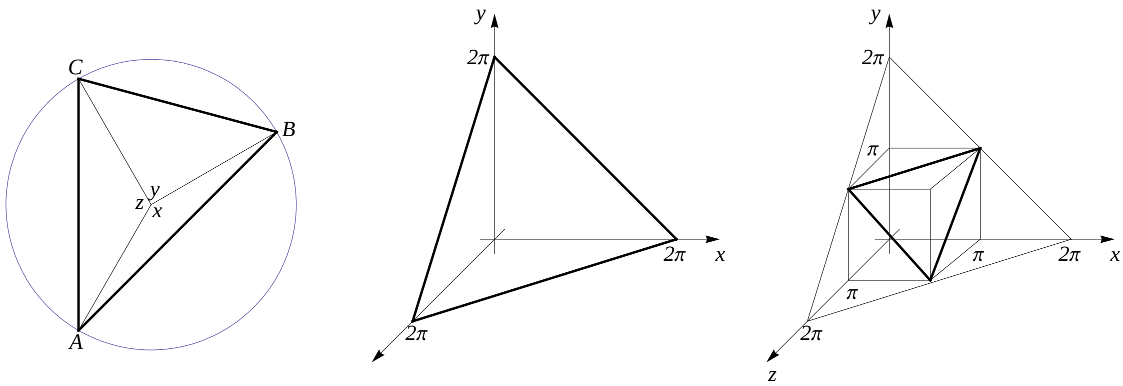
$$\begin{aligned}
p_n &= 1 - P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \Big(\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n) \\
&= 1 - (\binom{n}{1} \frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2} \frac{(n-2)!}{n!} + ... + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} \frac{1}{n!}) \\
&= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!},
\end{aligned}$$

а границата на оваа веројатност кога $n \to \infty$ е

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} (1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}) = e^{-1} \approx 0.367879.$$

ЗАДАЧА 1.68. На кружница со радиус R случајно се фрлаат три точки A, B и C. Најди ја веројатноста дека триаголникот ABC е остроаголен.

Решение. Да ги означиме централните агли што ги образуваат точките A, B, C соодветно со x, y, z (Цртеж 1.10 а)). Тогаш, просторот од елементарни настани $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 2\pi,\ x{+}y{+}z = 2\pi\}$ претставува дел од рамнина (Цртеж 1.10 б)). Дефинираме настан A - триаголникот ABC е остроаголен. Настанот A се реализира кога сите централни агли x, y, z се помали од π т.е. $A = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq \pi,\ x + y + z = 2\pi\}$, што претставува повторно дел од рамнина (Цртеж 1.10 в)).



а) б) в)

Цртеж 1.10

Сега, за плоштините на Ω и A имаме

$$m(\Omega) = \frac{(2\pi\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 2\pi^2\sqrt{3},\ m(A) = \frac{(\pi\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{2}.$$

И конечно, бараната веројатност е $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0,25$.

1.6 Задачи за самостојна работа

ЗАДАЧА 1.69. Дали со следните постапки се дефинираат простори од елементарни настани:

а) експеримент: фрлање коцка за играње, елементарни настани: w_1 - паднати се 1 или 2 точки, w_2 - паднати се 3 или 4 точки, w_3 - паднати се најмалку 4 точки,

б) експеримент: гаѓање во цел, елементарни настани: w_1 - целта е погодена, w_2 - целта е промашена,

в) експеримент: извлекување две карти од шпил со 52 карти, елементарни настани: w_1 - извлечени се две црвени карти, w_2 - извлечени се две црни карти.

ЗАДАЧА 1.70. Сметачот на случаен начин генерира еден едноцифрен број (може и нула). Одреди го просторот од елементарни настани и опиши ги настаните: A - бројот е делив со 2, B - бројот е делив со 3, C - бројот не е делив со 6.

ЗАДАЧА 1.71. Од една кутија со $2n$ бели и $2m$ црни топчиња на случаен начин играчите A и B (по тој редослед) извлекуваат по едно топче:

а) со враќање,

б) без враќање.

Нека A_i е настанот да играчот A во i-тото извлекување извлекол бело топче, $i = 2k-1$, односно B_j е настанот играчот B во j-тото извлекување да извлекол бело топче, $j = 2k$. Со помош на овие настани одреди го просторот од елементарни настани и опиши ги настаните:

C - играчот A прв извлекол бело топче,

D - извлечено е барем едно бело топче;

E - во $2n$ извлекувања едното бело топче е извлечено последно.

ЗАДАЧА 1.72. Точка случајно се фрла во правоаголник со темиња $A(-3,-2)$, $B(3,-2)$, $C(3,2)$, $D(-3,2)$. Одреди го просторот од елементарни настани (координати на фрлената точка) и опиши ги настаните:

а) A - точката паднала во вториот квадрант,

б) B - точката паднала внатре во кругот со центар во координатниот почеток и радиус 3,

в) C - точката паднала поблизу до x-оската, отколку до y-оската.

ЗАДАЧА 1.73. За настаните A, B и C важи $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,55$, $P(C) = 0,25$, $P(A\overline{B}) = 0,15$, $P(B\overline{C}) = 0,35$, $P(\overline{A}C) = 0,15$ и $P(A \cup B \cup C) = 0,7$. Најди ги веројатностите на настаните ABC, $\overline{A}BC$, $A\overline{B}C$ и $AB\overline{C}$.

ЗАДАЧА 1.74. Докажи дека за произволни настани A и B важи

$$P(A\,B \cup \overline{A}\,\overline{B}) + P(\overline{A}\,B \cup A\,\overline{B}) = 1.$$

ЗАДАЧА 1.75. Нека A, B и C се произволни настани. Докажи дека

$$P(A) \cdot P(B \setminus A) \cdot P(C \setminus (A \cup B)) \leq \frac{1}{27}.$$

ЗАДАЧА 1.76. Покажи дека за произволни настани A и B важи неравенството

$$|P(AB) - P(A) \cdot P(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

ЗАДАЧА 1.77. Нека е даден просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Настанот $A \in \mathcal{F}$ се нарекува **атом на веројатност**, ако $P(A) > 0$ и важи

$$D \subseteq A \Rightarrow (P(D) = 0 \vee P(D) = P(A)),$$

за секој $D \in \mathcal{F}$. Покажи дека ако A и B се атоми на веројатност, тогаш $P(AB) = P(A) = P(B)$ или $P(AB) = 0$.

ЗАДАЧА 1.78. На една кружница се избрани 10 точки, од кои е формиран 10-аголник.
а) Колку дијагонали може да се повлечат во 10-аголникот?
б) Колку триаголници постојат со врвови во 10-те точки?

ЗАДАЧА 1.79. Еден студент за 4 недели треба да полага 4 испита, од кои 2 математички. На колку начини студентот може да ги распореди испитите (еден испит во една недела), така што математичките испити да не се еден по друг?

ЗАДАЧА 1.80. Еден студент има 5 книги, а друг 9. Сите книги се различни. На колку начини студентите може да извршат размена на книгите, ако разменуваат:
а) една за една книга,
б) две за две книги?

ЗАДАЧА 1.81. Колку петцифрени броеви може да се формираат од цифрите на бројот 12312343 така што трите цифри тројки да не се сите една до друга?

ЗАДАЧА 1.82. За да се испрати една пратка потребно е да се платат 180 ден. поштарина. На располагање имаме поштенски марки од по 40, 60 и 100 ден. во неограничени количини. На колку различни начини може да се залепат поштенските марки една до друга на пратката?

ЗАДАЧА 1.83. На колку начини може да се распоредат 8 дами на шаховска табла така што никои две да не се напаѓаат?

ЗАДАЧА 1.84. Одреди го бројот на анаграми на зборот МАТЕМАТИКА.

ЗАДАЧА 1.85. На Аце му дошле на гости 7 пријатели. На колку начини тој може да ги послужи со јадења секој ден по тројца за време од 7 дена, но така што никои тројца од нив да не ручаат заедно два пати?

ЗАДАЧА 1.86. Низ пустината се движи караван од 9 камили (камилите одат една по друга). Патувањето трае многу денови, и на камилите им е здодевно постојано пред себе да гледаат една иста камила. На колку начини може да се подредат камилите (една по друга), така што пред секоја камила да биде друга камила која не била претходно.

ЗАДАЧА 1.87. Четирите тома од еден роман се поставени на една полица во случаен редослед. Која е веројатноста томовите да бидат поставени по ред одејќи од лево на десно, или обратно, од десно на лево?

ЗАДАЧА 1.88. Најди ја веројатноста случајно избран 4-цифрен број формиран од цифрите 0, 1, 3, 5, 7, 8, да не е делив со 18 и сите цифри да му се различни.

ЗАДАЧА 1.89. Во едно претпријатие се вработени 100 луѓе. Од нив 40 знаат руски, 30 знаат англиски, а 15 ги знаат и двата јазика. Ако случајно се избира едно лице, која е веројатноста дека избраното лице:

а) знае само руски,
б) знае барем еден јазик,
в) не знае ниеден јазик?

Ако случајно се избирааат две лица, која е веројатноста дека:

г) двајцата знаат англиски,
д) еден знае англиски и руски, а другиот не знае ниеден јазик,
ѓ) најмалку еден од нив ги знае и двата јазика?

ЗАДАЧА 1.90. Во 30 папки се сместени 10 ракописи, така што еден ракопис зафаќа 3 папки. Да се најде веројатноста дека во случајно избрани 6 папки ниеден ракопис не се наоѓа во целина.

ЗАДАЧА 1.91. Еден хор се состои од 10 хористи. Секој ден за време на еден тридневен концерт на случаен начин на сцената излегуваат по 6 хористи. Која е веројатноста секој ден да има различен состав на сцената?

ЗАДАЧА 1.92. Од шпил со 52 карти се извлекуваат 6 карти. Одреди ја веројатноста на настаните A - извлечени се карти во иста боја, B - извлечени се еднаков број на 1-ци, 2-ки и 3-ки, C - извлечен е барем еден крал.

ЗАДАЧА 1.93. Која е веројатноста случајно избран трицифрен број да е составен од непарни цифри со 1-ца на местото од десетките?

ЗАДАЧА 1.94. Во една петкатна зграда, во лифтот влегле 5 патници. Секој од патниците се еднаква веројатност се симнува на еден од петте ката. Најди ја веројатноста на настаните A - сите патници се симнуваат на петтиот кат, B - сите патници се симнуваат на ист кат, C - сите патници се симнуваат на различен кат.

ЗАДАЧА 1.95. Двајца играчи фрлаат хомогена коцка за играње. Играчот A победува ако разликата меѓу паднатите броеви е 0, 1 или 2, во спротивно победува играчот B. Најди ја веројатноста да победи играчот A.

ЗАДАЧА 1.96. Во играта Лото 7/39, се избираат на случаен начин 7 од 39 броеви 1, 2, ..., 39. Која е веројатноста да биде избран бројот 7?

ЗАДАЧА 1.97. Десет брачни пара поканети се да играат партија бриџ (која се игра во парови). Паровите за партијата бриџ се избираат на случаен начин, без водење на сметка за полот. Која е веројатноста дека никој нема да биде спарен со својот брачен партнер?

ЗАДАЧА 1.98. Од една група од 20 Балканци која се состои од 7 Македонци, 3 Црногорци и 10 Срби треба на случаен начин да се формира одбор од 5 луѓе. Која е веројатноста дека најмалку една од нациите нема да биде вклучена во одборот?

ЗАДАЧА 1.99. Најди ја веројатноста во група од n луѓе барем еден да има ист роденден како твојот. Која е најмалата вредност на n за која таа веројатност е поголема од $1/2$?

ЗАДАЧА 1.100. На една забава на која луѓето влегуваат еден по еден во просторијата, најди кој од луѓето кои пристигнуваат на забавата има најголема веројатност да биде првиот кој има ист роденден со некој кој веќе влегол претходно на забавата?

ЗАДАЧА 1.101. Најди ја веројатноста во група од n луѓе барем двајца да имаат родендени кои се разликуваат за k календарски дена. Која е најмалата вредност на n за која веројатноста барем двајца да имаат родендени кои се на растојание од недела дена ($k = 7$) е поголема од $1/2$?

ЗАДАЧА 1.102. На отсечката $\overline{AB} = l$ случајно се фрла точка M. Најди ја веројатноста дека растојанието од M до средината на отсечката AB не е поголемо од a $(2a < l)$.

ЗАДАЧА 1.103. На отсечката $\overline{AB} = l$ случајно се фрлаат две точки M и N. Најди ја веројатноста дека точката M е поблиску до N, отколку A до N.

ЗАДАЧА 1.104. Нека a, b, $(a > b)$ се должини на две страни на триаголник. Должината на третата страна се избира случајно од интервалот $(a - b, a + b)$. Која е веројатноста добиениот триаголник да е остроаголен?

ЗАДАЧА 1.105. Во квадрат со страна 1 фрлена е точка M. Најди ја веројатноста дека распојанието од M до дијагоналата на квадратот не е поголемо од a $(a > 0)$.

ЗАДАЧА 1.106. Пикадо стрелка се фрла на случаен начин на правоаголна табла со димензии 20 cm на 50 cm. Погодок се смета ако пикадо стрелката падне на растојание од 5 cm од кој било од четирите ќошиња на таблата. Која е веројатноста за погодок?

ЗАДАЧА 1.107. Рамнината е поделена со паралелни прави кои се една од друга на растојание $2a$. На рамнината случајно се фрла монета со радиус $r < a$. Најди ја веројатноста дека монетата не пресекува ниедна од правите.

ЗАДАЧА 1.108. На рамнина со мрежа составена од правоаголници со страни a и b, се фрла игла со должина l ($l < a \leq b$). Најди ја веројатноста дека иглата пресекува страна на некој правоаголник од мрежата. Покажи дека таа веројатност е најмала кога $a = b$.

2

УСЛОВНА ВЕРОЈАТНОСТ. НЕЗАВИСНОСТ

2.1 Условна веројатност

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност. Нека $A, B \in \mathcal{F}$ се произволни настани при што $P(B) > 0$.

- Дефинираме **условна веројатност на** A **при услов** B со

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

- Од дефиницијата за условна веројатност, за веројатноста на производот AB имаме

$$P(AB) = P(B)P(A|B),$$

равенство познато како **формула за множење на веројатности**.

За n произволни настани важи следната теорема:

- **Теорема за множење на веројатности.** Нека $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ се произволни настани така што $P(A_1A_2...A_{n-1}) > 0$. Тогаш,

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1}).$$

ЗАДАЧА 2.1. Докажи дека за произволни настани A и B, при што $P(A) > 0$, важи равенството
$$P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A).$$

Решение. Од дефиницијата за условна веројатност и равенството $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$ имаме
$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(A\overline{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(A)} = 1 - \frac{P(AB)}{P(A)} = 1 - P(B|A).$$

ЗАДАЧА 2.2. Покажи дека за произволни настани A и B, при што $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$ важи
$$P(A|B) > P(A) \Rightarrow P(B|A) > P(B).$$

Решение. Нека $P(A|B) > P(A)$. Од дефиницијата за условна веројатност имаме $\frac{P(AB)}{P(B)} > P(A)$. Од каде $P(AB) > P(A) \cdot P(B)$, бидејќи $P(B) > 0$. Повторно, бидејќи $P(A) > 0$, имаме дека $\frac{P(AB)}{P(A)} > P(B)$, односно $P(B|A) > P(B)$, што требаше да се докаже.

ЗАДАЧА 2.3. Нека A и B се произволни настани со $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$ и нека се дадени веројатностите $P(B) = 0,4$, $P(A|B) = 0,7$ и $P(A|\overline{B}) = 0,9$. Најди ги веројатностите $P(A)$, $P(AB)$, $P(\overline{A}\,\overline{B})$, $P(B|A)$ и $P(B|\overline{A})$.

Решение. Од формулата за множење на веројатности, имаме
$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28, \text{ и}$$
$$P(A\overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B}) = (1 - P(B)) \cdot P(A|\overline{B}) = (1 - 0,4) \cdot 0,9 = 0,54.$$

Понатаму,
$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) = 0,28 + 0,54 = 0,82, \text{ и}$$
$$\begin{aligned} P(\overline{A}\,\overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &= 1 - 0,82 - 0,4 + 0,28 = 0,06, \end{aligned}$$

од каде
$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0,28}{0,82} \approx 0,341463, \text{ и}$$
$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = \frac{0,4 - 0,28}{1 - 0,82} \approx 0,666667.$$

ЗАДАЧА 2.4. Една коцка се фрла три пати. Најди ја веројатноста дека при првото фрлање на коцката е добиен бројот 5, ако во трите фрлања на коцката е добиен збир 14.

Решение. Означуваме со настан A - при првото фрлање на коцката добиен е бројот 5, и настан B - при трите фрлања на коцката добиен е збир 14. Се бара условната веројатност $P(A|B)$. Просторот од елементарни настани за овој експеримент е $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \{1, ..., 6\}\}$, од каде $|\Omega| = \overline{V}_6^3 = 6^3 = 216$ додека настаните B и AB се $B = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \{1, ..., 6\}, x_1+x_2+x_3 = 14\}$ и $AB = \{(5, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \{1, ..., 6\}, x_2 + x_3 = 9\}$. Со наоѓање на сите тројки од B и AB, се добива дека $|B| = 15$ и $|AB| = 4$, од каде $P(B) = \frac{15}{216}$ и $P(AB) = \frac{4}{216}$. И конечно, бараната веројатност е

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{4}{15} \approx 0,266667.$$

ЗАДАЧА 2.5. Од шпил со 52 карти, на случен начин се извлекуваат 7 карти. Одреди ја веројатноста во 7-те извлечени карти да има точно 3 детелини, ако се извлечени 3 десетки, 2 шестки, 1 седмица и 1 крал.

Решение. Ако го означиме со A настанот дека од 7-те извлечени карти точно 3 се детелини, а со B настанот дека се извлечени 3 десетки, 2 шестки, 1 седмица и 1 крал, тогаш се бара условната веројатност $P(A|B)$. Просторот од елементарни настани Ω е извлечени се 7 од 52 карти, па затоа $|\Omega| = C_{52}^7$.

За бројот на начини на кој може да се извлечат 3 десетки, 2 шестки, 1 седмица и 1 крал од еден шпил со 52 карти, имаме

$$|B| = C_4^3 \cdot C_4^2 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = 384.$$

За бројот на елементарни настани во состав на настанот AB - извлечени се 3 десетки, 2 шестки, 1 седмица и 1 крал, така што точно 3 карти од 7-те се детелини, имаме

$$|AB| = 2 \cdot C_3^2 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 + C_3^2 \cdot C_3^2 + C_3^3 \cdot C_3^1 = 66,$$

имено за да се добие последниот број, се разгледуваат следните четири случаи, кога 3-те детелини се десетка, шестка, седмица или се десетка, шестка, крал или се десетка, седмица, крал или се шестка, седмица, крал.

И конечно, бараната веројатност е

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{66}{384} = 0,171875.$$

ЗАДАЧА 2.6. Во една кутија се наоѓаат 8 бели и 10 црни топчиња. Два пати едно по друго се извлекува по едно топче без враќање. Најди ја веројатноста дека двете извлечени топчиња се бели.

Решение. Означуваме со A_i - во i-тото извлекување извлечено е бело топче, $i = 1, 2$ и со B - извлечени се две бели топчиња. Тогаш, од формулата за множење на веројатности, бараната веројатност е

$$P(B) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} \approx 0,183007.$$

ЗАДАЧА 2.7. Од цифрите 1, 2, 3, 4, 5 на случаен начин се одбира една цифра, а потоа од останатите на случаен начин се одбира и втора цифра. Најди ја веројатноста дека е одбрана непарна цифра:
а) првиот пат;
б) вториот пат;
в) во двете одбирања.

Решение. Да означиме со A_i - одбрана е непарна цифра во i-тото бирање, $i = 1, 2$. Тогаш, бараните веројатности се:
а) $P(A_1) = \frac{3}{5} = 0,6$,
б) $P(A_2) = P(A_1A_2) + P(\overline{A_1}A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0,6$,
в) $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,3$.

ЗАДАЧА 2.8. Ако авион е присутен во областа на радарот, радарот го детектира и алармира со веројатност 0,99. Ако нема присуство на авион во областа, радарот може да генерира (лажен) аларм со веројатност 0,1. Познато е дека авион е присутен во областа на радарот со веројатност 0,05. Најди ја веројатноста за лажна тревога во отсуство на авион и веројатноста радарот да не детектира присутен авион.

Решение. Дефинираме настан A - авион е присутен во областа на радарот и настан B - радарот генерира аларм. Тогаш, дадени се следните веројатности

$$P(B|A) = 0,99, \ P(B|\overline{A}) = 0,1, \ P(A) = 0,05.$$

Па, веројатноста за лажна тревога во отсуство на авион е

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = (1 - P(A))P(B|\overline{A}) = (1 - 0,05) \cdot 0,1 = 0,095.$$

Додека, веројатноста радарот да не детектира присутен авион е

$$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}|A) = P(A)(1 - P(B|A)) = 0,05 \cdot (1 - 0,99) = 0,0005.$$

ЗАДАЧА 2.9. Еден студент треба да одговара на 25 прашања од кои знае 20. Тој случајно одбира 3 прашања. Која е веројатноста студентот да го положи испитот, ако испитот се смета за положен кога ќе бидат одговорени не помалку од две прашања?

Решение. Означуваме со A_i - студентот го знае i-тото одбрано прашање, $i = 1, 2, 3$ и со B - студентот го положил испитот. Тогаш, бараната веројатност е

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1A_2A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3) + P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(A_1A_2\overline{A_3}) = \\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}A_2) + \\
&\quad + P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)P(A_3|A_1\overline{A_2}) + P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A_3}|A_1A_2) = \\
&= \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23} + \frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}\cdot\frac{19}{23} + \frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{19}{23} + \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{5}{23} \approx 0,908696.
\end{aligned}$$

2.2 Тотална веројатност. Бејзови формули

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност. Нека $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ се произволни настани така што $A_i \cap A_j = \emptyset$, за $i \neq j$ и $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, односно настаните $A_1, A_2, ..., A_n$ формираат **разбивање на** Ω.

- **Теорема. (Теорема за тотална веројатност)** Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ е разбивање на Ω, при што $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогаш, за секој $B \in \mathcal{F}$, важи **формулата за тотална веројатност**

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

- **Теорема. (Бејзово правило)** Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ е разбивање на Ω, при што $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогаш, за секој $B \in \mathcal{F}$ за кој $P(B) > 0$, важат **Бејзовите формули**

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)},\ i = 1, 2, ..., n.$$

N.B. *Настаните* A_i*,* $i = 1, 2, ..., n$ *кои формираат разбивање на* Ω *се нарекуваат* **хипотези***, нивните веројатности* $P(A_i)$*,* $i = 1, 2, ..., n$ *се нарекуваат* **априорни веројатности***, а веројатностите* $P(A_i|B)$*,* $i = 1, 2, ..., n$ *се* **апостериорни веројатности***.*

ЗАДАЧА 2.10. На еден шаховски турнир учествуваат три категории на играчи, чија застапеност по категории е 2:1:1. Веројатноста за победа во игра на некој играч од првата категорија е 0,7, на играч од втората категорија е 0,5 и на играч од третата категорија е 0,3. Најди ја веројатноста за победа во игра на случајно избран играч.

Решение. Дефинираме настани B_i - избран е играч од i-тата категорија, $i = 1, 2, 3$ и A - играчот победил. Тогаш, дадени се веројатностите

$$P(B_1) = 0,5,\ P(B_2) = P(B_3) = 0,25,$$

$$P(A|B_1) = 0,7,\ P(A|B_2) = 0,5,\ P(A|B_3) = 0,3.$$

Веројатноата на настанот A ја пресметуваме според формулата за тотална веројатност

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \\ &= 0,5 \cdot 0,7 + 0,25 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,3 = 0,55. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.11. Во три кутии со ист надворешен изглед се сместени бели и црни топчиња, така што во I кутија има 5 бели и 5 црни топчиња, во II кутија има 4 бели и 8 црни топчиња и во III кутија има 9 бели и 3 црни топчиња. Што е поверојатно, од II кутија да се извлече бело топче или да се извлече бело топче од случајно избрана кутија?

Решение. Означуваме со A_i - избрана е i-тата кутија, $i = 1, 2, 3$, A - од II кутија извлечено е бело топче и B - извлечено е бело топче. За веројатноста на настанот A имаме,

$$P(A) = P(B|A_2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 0,333333.$$

За веројатноста на настанот B, се користи формулата за тотална веројатност, при што за априорните веројатности имаме дека $P(A_i) = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$, па затоа,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{12} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{12} = \frac{19}{36} \approx 0,527778. \end{aligned}$$

Значи, поверојатно е да се извлече бело топче од произволно избрана кутија, отколку да се извлече бело топче од II кутија.

ЗАДАЧА 2.12. Во секоја од n-те кутии се сместени a бели и b црни топчиња. Од првата кутија се извлекува едно топче и се става во втората кутија, потоа од втората кутија се извлекува едно топче и се става во третата кутија итн. од n-тата кутија се извлекува едно топче и се става во првата кутија. Најди ја веројатноста по сите префрлања од првата кутија да се извлече бело топче.

Решение. Означуваме со A_i - за време на префрлањата од i-тата кутија е извлечено бело топче, $i = 1, 2, ..., n$ и A - по сите префрлања од првата кутија е извлечено бело топче. Тогаш имаме,

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= \tfrac{a}{a+b} \\
P(A_2) &= P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1}) = \tfrac{a}{a+b} \cdot \tfrac{a+1}{a+b+1} + \tfrac{b}{a+b} \cdot \tfrac{a}{a+b+1} = \tfrac{a}{a+b} \\
&\vdots \\
P(A_n) &= P(A_{n-1})P(A_n|A_{n-1}) + P(\overline{A_{n-1}})P(A_n|\overline{A_{n-1}}) = \tfrac{a}{a+b} \cdot \tfrac{a+1}{a+b+1} + \tfrac{b}{a+b} \cdot \tfrac{a}{a+b+1} = \tfrac{a}{a+b}.
\end{aligned}$$

И конечно, бараната веројатност е

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1)P(A|A_1) + P(\overline{A_1})P(A|\overline{A_1}) = \\
&= P(A_1)(P(A_n)P(A|A_1A_n) + P(\overline{A_n})P(A|A_1\overline{A_n})) + \\
&\quad +P(\overline{A_1})(P(A_n)P(A|\overline{A_1}A_n) + P(\overline{A_n})P(A|\overline{A_1}\,\overline{A_n})) = \\
&= \tfrac{a}{a+b} \cdot (\tfrac{a}{a+b} \cdot \tfrac{a}{a+b} + \tfrac{b}{a+b} \cdot \tfrac{a-1}{a+b}) + \tfrac{b}{a+b} \cdot (\tfrac{a}{a+b} \cdot \tfrac{a+1}{a+b} + \tfrac{b}{a+b} \cdot \tfrac{a}{a+b}) = \tfrac{a}{a+b}.
\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.13. Еден владетел решил да го казни јасновидецот кој му предвидел неточни настани. Му дал две кутии и 4 топчиња, од кои 2 бели и 2 црни. Јасновидецот случајно избира една кутија, а потоа од кутијата избира едно топче. Ако топчето е црно, тогаш тој ќе биде казнет, а ако топчето е бело, тој ќе биде помилуван. Како треба јасновидецот да ги размести топчињата во кутиите, за да си обезбеди максимална веројатност да биде помилуван?

Решение. Нека во првата кутија јасновидецот става m бели и n црни топчиња, тогаш во втората кутија тој става $2 - m$ бели и $2 - n$ црни топчиња. Означуваме со A_i - избрана е i-тата кутија, $i = 1, 2$ и A - извлечено е бело топче. За веројатностите на настаните A_i, $i = 1, 2$ имаме $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$, па веројатноста јасновидецот да биде помилуван е

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{m}{m+n} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2-m}{(2-m)+(2-n)} = f(m, n).$$

Бидејќи $m, n \in \{0, 1, 2\}$ испитуваме поединечно.

За $m = 0$, имаме дека $f(m, n) = \frac{1}{4-n}$ и достигнува максимум за $n = 2$ кој изнесува $f(0, 2) = \frac{1}{2}$.

За $m = 1$, имаме дека $f(m, n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3-n}$ и достигнува максимум за $n = 0$ или $n = 2$ кој изнесува $f(1, 0) = f(1, 2) = \frac{2}{3}$.

За $m = 2$, имаме дека $f(m, n) = \frac{1}{2+n}$ и достигнува максимум за $n = 0$ кој изнесува $f(2, 0) = \frac{1}{2}$.

Значи, јасновидецот треба во едната кутија да стави 1 бело топче, а во другата кутија да стави 1 бело и 2 црни топчиња, за да обезбеди максимална веројатност од $P(A) = \frac{2}{3}$ да биде помилуван.

ЗАДАЧА 2.14. На студентите од еден факултет им е дозволено да повторуваат само една од I, II, III година. Веројатноста еден студент повторувач да ја повторува I, II, III година е 0,25; 0,5; 0,25 соодветно. Веројатноста дека студентот кој ја повторува I година го завршува студирањето е 0,4, за студентот кој ја повторува II година е 0,5 и за студентот кој ја повторува III година е 0,9.

а) Најди ја веројатноста дека случајно избран студент повторувач го завршува студирањето.

б) Ако е познато дека студентот повторувач го завршил студирањето, најди ја веројатноста дека тој ја повторувал III година.

в) Ако студентот повторувач го завршил студирањето, која година најверојатно тој ја повторувал?

Решение. Означуваме со A_i - студентот повторувач ја повторува i-тата година, $i = 1, 2, 3$, A - студентот повторувач го завршува студирањето. Од условот на задачата познати ни се следните веројатности $P(A_1) = 0,25$, $P(A_2) = 0,5$, $P(A_3) = 0,25$, $P(A|A_1) = 0,4$, $P(A|A_2) = 0,5$ и $P(A|A_3) = 0,9$.

а) Од формулата за тотална веројатност имаме,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(A|A_i) = 0,25 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,9 = 0,575.$$

б) Од Бејзовите формули за бараната веројатност имаме,

$$P(A_3|A) = \frac{P(A_3)P(A|A_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(A|A_i)} = \frac{0,25 \cdot 0,9}{0,575} \approx 0,391304.$$

в) Од Бејзовите формули ги допресметуваме $P(A_1|A) \approx 0,173913$ и $P(A_2|A) \approx 0,434783$. Значи, ако студентот повторувач го завршил студирањето, најверојатно тој ја повторувал II година.

ЗАДАЧА 2.15. Во една фабрика 40 % од вработените се мажи. Меѓу вработените жени 5 % се со висока стручна подготовка (в.с.п.), а меѓу вработените мажи 10 % се со в.с.п.

а) Која е веројатноста дека случајно избран вработен има в.с.п?

б) Случајно избран вработен има в.с.п. Која е веројатноста дека е жена?

Решение. Означуваме со A_1 - вработениот е жена, A_2 - вработениот е маж и A - вработениот има в.с.п. Тогаш, од условот на задачата познати ни се веројатностите $P(A_1) = 0,6$, $P(A_2) = 0,4$, $P(A|A_1) = 0,05$ и $P(A|A_2) = 0,1$.

а) Од формулата за тотална веројатност имаме,

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) = 0,6 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 0,1 = 0,07.$$

б) Од Бејзовите формули имаме

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1)P(A|A_1)}{P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2)} = \frac{0,6 \cdot 0,05}{0,07} = \frac{0,03}{0,07} \approx 0,428571.$$

ЗАДАЧА 2.16. Лажно позитивен тест. Тестот за одредена ретка болест е точен во 95 % од случаите, што значи дека, ако некој пациент ја има болеста, резултатите од тестот се позитивни со веројатност 0,95, и ако пациентот ја нема болеста, резултатите од тестот се негативни со веројатност 0,95. Случајно избран пациент ја има болеста со веројатност 0,001. Која е веројатноста за лажно позитивен тест? Ако резултатите од штотуку извршен тест се позитивни, најди ја веројатноста дека пациентот ја има болеста.

Решение. Дефинираме настани A - пациентот ја има болеста и B - резултатите од тестот се позитивни. Тогаш, дадени се веројатностите

$$P(B|A) = 0,95,\ P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,95,\ P(A) = 0,001.$$

Тогаш, веројатноста за лажно позитивен тест е

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = (1 - P(A))(1 - P(\overline{B}|\overline{A})) = (1 - 0,001) \cdot (1 - 0,95) = 0,04995.$$

Се бара и веројатноста ако резултатите од штотуку извршен тест се позитивни, пациентот да ја има болеста, односно се бара $P(A|B)$. Од Бејзовите формули имаме

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})} \\ &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + (1 - P(A))(1 - P(\overline{B}|\overline{A}))} \\ &= \frac{0,001 \cdot 0,95}{0,001 \cdot 0,95 + (1 - 0,001) \cdot (1 - 0,95)} \approx 0,018664, \end{aligned}$$

што значи дека во случај на ретки болести ($P(A) = 0,001$ е многу мала), и покрај тоа што медицинскиот тест е со голема точност (точност од 95 %), пациент кој има позитивен тест, сепак има мала веројатност (помала од 2 %) да ја има ретката болест.

2.3 Независност на настани

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност.

- Настаните $A, B \in \mathcal{F}$ се **независни**, ако $P(AB) = P(A)P(B)$.
- Настаните $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ се **независни (во целина)**, ако за секои $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$ и $2 \leq k \leq n$ важи
$$P(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_k}).$$
- Нека C е фиксен настан со $P(C) > 0$. Настаните A и B се **условно независни** во однос на настанот C, ако важи
$$P(AB|C) = P(A|C)P(B|C).$$

ЗАДАЧА 2.17. Нека A и B се независни настани. Докажи дека се независни и настаните $\overline{A}$ и B; A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Решение. Нека A и B се независни настани, значи $P(AB) = P(A)P(B)$. Тогаш,

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(\overline{A})P(B),$$

од каде следи дека $\overline{A}$ и B се независни настани. Слично, од

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}),$$

следи дека настаните A и $\overline{B}$ се независни. За последниот пар настани, имаме

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\,\overline{B}) &= 1 - P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\overline{A})P(\overline{B}), \end{aligned}$$

односно и настаните $\overline{A}$ и $\overline{B}$ се независни.

ЗАДАЧА 2.18. Нека A и B се произволни настани, за кои $0 < P(A) < 1$. Докажи дека од равенството $P(B|\overline{A}) = P(B|A)$ следува независноста на настаните A и B.

Решение. Користејќи ги дефиницијата за условна веројатност и равенството $P(B) = P(AB) + P(A\overline{B})$, добиваме

$$P(B|\overline{A}) = P(B|A) \Rightarrow \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A)P(B) - P(A)P(AB) = P(AB) - P(A)P(AB) \Rightarrow P(A)P(B) = P(AB),$$

односно настаните A и B се независни.

ЗАДАЧА 2.19. Еден работник надгледува две машини кои работат независно. Веројатноста за интервенција во текот на еден час работа, за првата машина е 0,1, а за втората машина е 0,05. Одреди ја веројатноста дека во текот на еден час работникот нема да интервенира кај ниедна од машините.

Решение. Дефинираме настани A_i - интервенирање кај i-тата машина во текот на еден час работа, $i = 1, 2$. Од условот на задачата имаме дека $P(A_1) = 0,1$ и $P(A_2) = 0,05$. Потоа, од тоа што машините работат независно, имаме дека настаните A_1 и A_2 се независни. Од Задача 2.17 имаме дека и настаните $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ се независни. Па, за бараната веројатност дека во текот на еден час работникот нема да интервенира кај ниедна од машините, имаме

$$\begin{aligned} P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) &= P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \\ &= (1 - 0,1) \cdot (1 - 0,05) = 0,9 \cdot 0,95 = 0,855. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.20. На маса се фрлаат две коцки. Дефинираме настани A - на првата коцка се појавил непарен број на точки, B - на втората коцка се појавил непарен број на точки и C - збирот на точки на двете коцки е непарен. Покажи дека настаните A, B и C се независни по парови, но не се независни во целина.

Решение. Множеството од елементарни настани е $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \{1, ..., 6\}\}$, од каде $|\Omega| = \overline{V}_6^2 = 6^2 = 36$. За настаните A, B и C имаме

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \{1, 3, 5\},\ x_2 \in \{1, ..., 6\}\}, \\ B &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \{1, ..., 6\},\ x_2 \in \{1, 3, 5\}\}, \\ C &= \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \{1, ..., 6\},\ x_1 + x_2 \text{ е непарен}\}, \end{aligned}$$

од каде $|A| = 3\cdot 6 = 18$, $|B| = 6\cdot 3 = 18$, $|C| = 2\cdot 3\cdot 3 = 18$, па нивните веројатности се

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

За настаните AB, AC, BC и ABC имаме

$$\begin{aligned} AB &= \{(x_1,x_2) \mid x_1,x_2 \in \{1,3,5\}\},\\ AC &= \{(x_1,x_2) \mid x_1 \in \{1,3,5\},\ x_2 \in \{2,4,6\}\},\\ BC &= \{(x_1,x_2) \mid x_1 \in \{2,4,6\},\ x_2 \in \{1,3,5\}\},\\ ABC &= \{(x_1,x_2) \mid x_1,x_2 \in \{1,3,5\},\ x_1+x_2 \text{ е непарен}\} = \emptyset, \end{aligned}$$

од каде $|AB| = 3\cdot 3 = 9$, $|AC| = 3\cdot 3 = 9$, $|BC| = 3\cdot 3 = 9$ и $|ABC| = 0$. Сега, може да ја покажеме независноста по парови

$$\begin{aligned} P(AB) &= \frac{|AB|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A)P(B),\\ P(AC) &= \frac{|AC|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A)P(C),\\ P(BC) &= \frac{|BC|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(B)P(C). \end{aligned}$$

Но, настаните A, B и C не се независни во целина затоа што

$$P(ABC) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A)P(B)P(C).$$

ЗАДАЧА 2.21. Нека просторот од елементарни настани се состои од следните записи од карактери:

$$\Omega = \{abc, bac, cab, bca, acb, cba, aaa, bbb, ccc\},$$

при што секој елементарен настан е еднакво веројатен. Ги дефинираме настаните A_k-карактерот a е на k-тата позиција, $k = 1,2,3$. Покажи дека настаните A_i, $i = 1,2,3$ се независни по парови, но не се независни во целина.

Решение. Лесно се воочува дека $P(A_k) = \frac{1}{3}$, $k = 1,2,3$, и дека $P(A_jA_k) = \frac{1}{9}$, за $j \neq k$, па $P(A_jA_k) = P(A_j)P(A_k)$, за $j \neq k$, што значи дека настаните A_1, A_2, A_3 се независни по парови. Но,

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{27} = P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

што значи дека настаните A_1, A_2, A_3 не се независни во целина.

ЗАДАЧА 2.22. Двајца стрелци независно еден од друг гаѓаат во иста цел. Веројатноста првиот од нив да ја погоди целта е 0,7, а веројатноста вториот од нив да ја погоди целта е 0,9. Одреди ја веројатноста дека целта е погодена барем еднаш.

Решение. Означуваме со A_i - i-тиот стрелец ја погодил целта, $i = 1,2$. Од условот на задачата имаме $P(A_1) = 0,7$ и $P(A_2) = 0,9$ и при тоа настаните A_1 и A_2 се независни. Се бара веројатноста на настанот B - целта е погодена барем еднаш. Имаме,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0,7 + 0,9 - 0,7 \cdot 0,9 = 0,97. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.23. Во две кутии се сместени бели и црни топчиња, така што во I кутија има 1 бело и 9 црни топчиња, а во II кутија има 5 бели и 1 црно топче. Од секоја кутија се извлекува по едно топче, а топчињата што останале се префрлаат во III (празна) кутија.

а) Најди ја веројатноста дека од III кутија е извлечено бело топче.

б) Ако од III кутија е извлечено бело топче, најди ја веројатноста дека од II кутија е извлечено бело топче.

Решение. Означуваме со B_i - извлечено е бело топче од i-тата кутија, $i = 1,2$ и A - од III кутија извлечено е бело топче. При тоа, настаните B_1 и B_2 се независни.

а) За барање на веројатноста на настанот A се користи формулата за тотална веројатност, при што априорните веројатности се

$$P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{60},\ P(B_1\overline{B_2}) = P(B_1)P(\overline{B_2}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{60},$$

$$P(\overline{B_1}B_2) = P(\overline{B_1})P(B_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{45}{60},\ P(\overline{B_1}\ \overline{B_2}) = P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{60},$$

додека условните веројатности се

$$P(A|B_1B_2) = \frac{4}{14}, P(A|B_1\overline{B_2}) = \frac{5}{14}, P(A|\overline{B_1}B_2) = \frac{5}{14}, P(A|\overline{B_1}\ \overline{B_2}) = \frac{6}{14}.$$

Па, бараната веројатност е

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1B_2)P(A|B_1B_2) + P(B_1\overline{B_2})P(A|B_1\overline{B_2}) + \\ &\quad + P(\overline{B_1}B_2)P(A|\overline{B_1}B_2) + P(\overline{B_1}\ \overline{B_2})P(A|\overline{B_1}\ \overline{B_2}) = \\ &= \frac{5}{60} \cdot \frac{4}{14} + \frac{1}{60} \cdot \frac{5}{14} + \frac{55}{60} \cdot \frac{5}{14} + \frac{9}{60} \cdot \frac{6}{14} = \frac{304}{840} \approx 0,361905. \end{aligned}$$

б) Се бара условната веројатност

$$\begin{aligned}
P(B_2|A) &= P((B_1B_2+\overline{B_1}B_2)|A) = P(B_1B_2|A) + P(\overline{B_1}B_2|A) = \\
&= \frac{P(B_1B_2)P(A|B_1B_2)}{P(A)} + \frac{P(\overline{B_1}B_2)P(A|\overline{B_1}B_2)}{P(A)} = \\
&= \frac{1}{P(A)}\Big(\frac{5}{60}\cdot\frac{4}{14} + \frac{45}{60}\cdot\frac{5}{14}\Big) \approx 0,805921.
\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.24. Фер монета независно се фрла два пати. Дефинираме настани A - во првото фрлање паднала „глава“, B - во второто фрлање паднала „глава“, и C - исходите од двете фрлања се различни. Покажи дека, настаните A и B се независни, но не се условно независни во однос на настанот C.

Решение. При овој експеримент, просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\},$$

каде со 0 означуваме дека паднала „пара“, а со 1 дека паднала „глава“ на монетата во фрлањето кое соодветствува на позицијата на 0, односно 1. При тоа, од тоа што монетата е фер и фрлањата се независни, секој од елементарните настани е еднакво веројатен, па за овој простор на веројатност важи класичната дефиниција на веројатност. Сега, од

$$A = \{(1,0),(1,1)\},\ B = \{(0,1),(1,1)\},\ AB = \{(1,1)\},$$

имаме дека

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ P(AB) = \frac{1}{4},$$

и затоа важи

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(AB),$$

што значи дека настаните A и B се независни. Потоа,

$$C = \{(0,1),(1,0)\},\ AC = \{(1,0)\},\ BC = \{(0,1)\},\ ABC = \emptyset,$$

па за условните веројатности имаме

$$P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, P(B|C) = \frac{P(BC)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

$$P(AB|C) = \frac{P(ABC)}{P(C)} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0,$$

од каде
$$P(A|C)P(B|C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \neq 0 = P(AB|C),$$
што значи дека настаните A и B не се условно независни во однос на настанот C.

ЗАДАЧА 2.25. Во две кутии се сместени бели и црни топчиња, така што во првата кутија има 1 бело и 3 црни топчиња, а во втората кутија има 3 бели и 1 црно топче. На случаен начин (со еднаква веројатност) се избира една од кутиите, а потоа од избраната кутија се извлекуваат две топчиња, едно по едно со враќање. Дефинираме настани A - извлечено е бело топче во првото извлекување, B - извлечено е бело топче во второто извлекување, и C - избрана е првата кутија. Покажи дека, настаните A и B се условно независни во однос на настанот C, но не се независни.

Решение. Од условите на задачата познати ни се следните условни веројатности
$$P(A|C) = \frac{1}{4},\ P(B|C) = \frac{1}{4},\ P(AB|C) = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16},$$
каде за пресметување на последната веројатност разгледуваме простор од елементрни настани составен од сите подредени парови (со повторување) од топчињата од првата кутија (има вкупно 4^2 такви пара), меѓу кои точно еден пар е составен од белото топче од првото извлекување и истото бело топче од второто извлекување. Тогаш, имаме
$$P(A|C)P(B|C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = P(AB|C),$$
односно настаните A и B се условно независни во однос на настанот C. Од друга страна, од формулата за тотална веројатност имаме
$$P(A) = P(C)P(A|C) + P(\overline{C})P(A|\overline{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$
Слично и $P(B) = \frac{1}{2}$. Додека пак,
$$P(AB) = P(C)P(AB|C) + P(\overline{C})P(AB|\overline{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$
Па, од
$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{5}{16} = P(AB),$$
имаме дека настаните A и B не се независни.

ЗАДАЧА 2.26. Брат близнак на кралот. Еден крал има точно еден близнак (брат или сестра). Под претпоставка дека раѓањето на машко или женско дете е еднакововеројатно и независно, која е веројатноста близнакот на кралот да е машко?

Решение. Да означиме со A_i - i-тиот близнак е машко, $i = 1, 2$. Од услов на задачата $P(A_i) = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$. Тогаш, можни се следните исходи A_1A_2, $A_1\overline{A}_2$, $\overline{A}_1A_2$, $\overline{A}_1\overline{A}_2$ кои се заемно исклучливи и заради независноста на настаните, $P(A_1A_2) = P(A_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1A_2) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Веројатноста која се бара, близнакот на кралот да е машко, е условната веројатност да има два машки близнака, под услов еден од нив да е машко (кралот), односно

$$P(A_1A_2 | A_1A_2 \cup A_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1A_2) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1A_2 \cup A_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1A_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

ЗАДАЧА 2.27. Најди ја веројатноста дека случајно избрана позитивна дропка $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ не може да се скрати.

Решение. Означуваме со A_k - бројот a е делив со k, $k \in \mathbb{N}$, B_k - бројот b е делив со k, $k \in \mathbb{N}$, C_k - дропката $\frac{a}{b}$ може да се скрати со k, $k \in \mathbb{N}$ и D - дропката $\frac{a}{b}$ не може да се скрати.

Во однос на деливост со $k \in \mathbb{N}$, множеството природни броеви $\mathbb{N}$ е поделено на k класи (подмножества) со ист кардинален број, па затоа веројатноста случајно избран природен број да е делив со k е иста со веројатноста тој природен број да припаѓа на класата составена од броеви кои се деливи со k и таа веројатност е $\frac{1}{k}$. Па затоа, $P(A_k) = P(B_k) = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Од независноста на настаните A_k и B_k, за фиксен $k \in \mathbb{N}$, имаме

$$P(C_k) = P(A_kB_k) = P(A_k)P(B_k) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2}.$$

Ако го означиме со q најголемиот прост број не поголем од a и b т.е. $q = \max\{p \mid p - \text{прост и } p \leq \min\{a, b\}\}$, тогаш за бараната веројатност имаме,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(\overline{C_2}\,\overline{C_3}\,\overline{C_5}\,\cdots\,\overline{C_q}) = P(\overline{C_2})P(\overline{C_3})P(\overline{C_5})\cdots P(\overline{C_q}) = \\ &= (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{5^2})\cdots(1 - \frac{1}{q^2}) = \prod_{p=2\ (p\text{-прост})}^{q} (1 - \frac{1}{p^2}). \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.28. Двајца играчи M и N наизменично фрлаат коцка (така што прв почнува играчот M) сѐ додека M не добие 3-ка или N не добие 2-ка или 6-ка. Најди ја веројатноста дека играчот M ќе биде последниот што ја фрлил коцката.

Решение. Означуваме со A_i - играчот M добил 3-ка во i-тото фрлање, $i = 2k-1$, $k = 1, 2, ...$, B_j - играчот N добил 2-ка или 6-ка во j-тото фрлање, $j = 2k$, $k = 1, 2, ...$, и C - играчот M е последниот што ја фрлил коцката. Тогаш, имаме дека $P(A_i) = \frac{1}{6}$, $P(B_j) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, каде A_i, B_j се независни во целина. За бараната веројатност имаме

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1 + \overline{A_1}\,\overline{B_2}\,A_3 + \overline{A_1}\,\overline{B_2}\,\overline{A_3}\,\overline{B_4}\,A_5 + \dots) = \\ &= P(A_1) + P(\overline{A_1}\,\overline{B_2}\,A_3) + P(\overline{A_1}\,\overline{B_2}\,\overline{A_3}\,\overline{B_4}\,A_5) + \dots \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \dots = \\ &= \frac{1}{6}\cdot\left(1 + \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3} + \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right) = \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{3}{8} = 0,375. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.29. Тројца студенти A, B, C се јавиле на еден испит. Точно двајца од нив го положиле испитот. Најди ја веројатноста дека студентите A и B го положиле испитот, ако веројатноста студентот A да го положи испитот е $p_1 = 0,3$, веројатноста B да го положи испитот е $p_2 = 0,8$, а веројатноста C да го положи испитот е $p_3 = 0,5$.

Решение. Дефинираме настани A - студентот A го положил испитот, B - студентот B го положил испитот, C - студентот C го положил испитот и D - точно двајца од студентите го положиле испитот. Тогаш, $D = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$. Од услов на задачата имаме дека $P(A) = p_1 = 0,3$, $P(B) = p_2 = 0,8$ и $P(C) = p_3 = 0,5$. Од независноста на настаните A, B и C имаме

$$P(AB\overline{C}) = p_1p_2(1-p_3) = 0,3\cdot 0,8\cdot(1-0,5) = 0,12,$$

$$P(A\overline{B}C) = p_1(1-p_2)p_3 = 0,3\cdot(1-0,8)\cdot 0,5 = 0,03,$$

$$P(\overline{A}BC) = (1-p_1)p_2p_3 = (1-0,3)\cdot 0,8\cdot 0,5 = 0,28,$$

па затоа

$$P(D) = P(AB\overline{C}) + P(A\overline{B}C) + P(\overline{A}BC) = 0,12 + 0,03 + 0,28 = 0,43.$$

Се бара условната веројатност

$$\begin{aligned} P(AB|D) &= P(ABC|D) + P(AB\overline{C}|D) = \frac{P(ABCD)}{P(D)} + \frac{P(AB\overline{C}D)}{P(D)} \\ &= \frac{0}{P(D)} + \frac{P(AB\overline{C})}{P(D)} = 0 + \frac{0,12}{0,43} \approx 0,279070. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.30. Комуникација низ канал со шум. Извор емитира порака составена од симболи низ комуникациски канал со шум. Секој симбол е 0 или 1 со веројатност p и $1-p$ соодветно, и се прима неточно со веројатност ε_0 и ε_1 соодветно (види Цртеж 2.1). Грешките при пренос на различни симболи се независни.

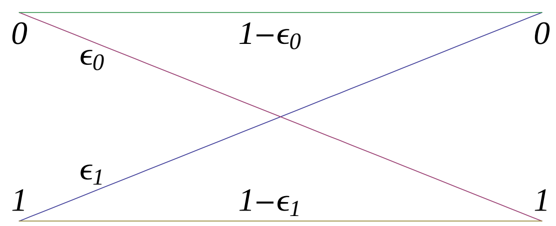
а) Која е веројатноста k-тиот симбол да се пренесе точно?

б) Која е веројатноста низата од симболи 1011 да се пренесе точно?

в) Со цел да се подобри веродостојноста на преносот на информации низ каналот секој симбол се емитира по три пати, а потоа применатa низа од симболи се декодира според мнозински прицип, на пример симболот 0 се пренесува како 000, и приемникот го декодира како 0 само ако добие низа од три симбола од кои најмалку два се нули. Која е веројатноста за точно декодирање на 0?

г) За кои вредности на ε_0 има подобрување во веројатноста за точно декодирање на 0, кога би се користела шемата опишана под в)?

д) При користење на шемата опишана под в), која е веројатноста дека се емитувал симболот 0, ако приемникот примил низа 101?



Цртеж 2.1

Решение. а) Ги дефинираме настаните A - се пренесува симболот 0 и B - симболот е точно пренесен. Од услов на задачата имаме дека $P(A)=p$, $P(B|A)=1-\varepsilon_0$ и $P(B|\overline{A})=1-\varepsilon_1$. Тогаш, веројатноста еден симбол да е точно пренесен е

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=p(1-\varepsilon_0)+(1-p)(1-\varepsilon_1).$$

б) Преносот на секој од симболите е независен од преносот на другите симболи. Па, веројатноста низата од симболи 1011 да се пренесе точно е

$$P(B|A)P(B|\overline{A})^3=(1-\varepsilon_0)(1-\varepsilon_1)^3.$$

в) Според условот, симболот 0 кој се пренесува како 000, точно ќе се декодира ако се прими како 000 или 001 или 010 или 100. Заради независноста во преносот на секој од симболите, веројатноста за точно декодирање на 0 е

$$P(B|A)^3 + 3P(\overline{B}|A)P(B|A)^2 = (1-\varepsilon_0)^3 + 3\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)^2.$$

г) Доколку не се користи шемата за пренос на симболи опишана под в), тогаш веројатноста за точно пренесување на симболот 0 ќе биде $1-\varepsilon_0$, наспрема веројатноста при користење на шемата $(1-\varepsilon_0)^3+3\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)^2$. Па, подобрување при преносот кога се користи шемата под в) би имале кога ε_0 би го задоволувало неравенството

$$(1-\varepsilon_0)^3 + 3\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)^2 > 1-\varepsilon_0,$$

што е еквивалентно на

$$\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)(1-2\varepsilon_0) > 0,$$

односно кога $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$.
д) Дефинираме настан C - приемникот примил низа 101. Со користење на Бејзовите формули, при користење на шемата под в), веројатноста да се емитувал симболот 0 (односно низата 000), ако приемникот примил низа 101, е

$$P(A|C) = \frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A) + P(\overline{A})P(C|\overline{A})} = \frac{p\varepsilon_0^2(1-\varepsilon_0)}{p\varepsilon_0^2(1-\varepsilon_0) + (1-p)\varepsilon_1(1-\varepsilon_1)^2}.$$

2.4 Независни испитувања

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност. Нека еден експеримент се изведува независно n пати, велиме дека се направени n **независни испитувања**.

- **Бернулиева шема.** Нека при секое од n-те независни испитувања се разгледува еден ист настан A чија веројатност за реализација е $p = P(A)$. Означуваме со B_k - настанот A се реализирал точно k пати при n-те независни испитувања, $k = 0, 1, ..., n$. Тогаш, веројатноста на настанот B_k е

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, ..., n.$$

- **Полиномна шема.** Нека при секое од n-те независни испитувања се разгледуваат настаните A_i, $i = 1, 2, ..., r$ кои формираат разбивање на Ω, чии веројатности за реализација се $p_i = P(A_i)$, $i = 1, 2, ..., r$ $(p_1 + ... + p_r = 1)$. Означуваме со $B_{k_1,...,k_r}$ - настанот A_i се реализирал точно k_i пати при n-те независни испитувања, $0 \le k_i \le n$, $k_1 + ... + k_r = n$. Тогаш, веројатноста на настанот $B_{k_1,...,k_r}$ е

$$P(B_{k_1,...,k_r}) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r},\ 0 \le k_i \le n,\ k_1 + ... + k_r = n.$$

Забележуваме дека, Бернулиевата шема е специјален случај на полиномната шема за $r = 2$.

- **Поасонова шема.** При секое од n-те независни испитувања се разгледува појавувањето на еден ист настан A. Нека веројатноста за реализација на настанот A во i-тото испитување е p_i, $i = 1, 2, ..., n$. Означуваме со $q_i = 1 - p_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогаш, за веројатноста на настанот B_k - настанот A се реализирал точно k пати при n-те независни испитувања, $k = 0, 1, ..., n$ имаме

$$\begin{aligned} P(B_0) &= q_1 q_2 \cdots q_n, \\ P(B_1) &= p_1 q_2 \cdots q_n + q_1 p_2 \cdots q_n + \cdots + q_1 q_2 \cdots p_n, \\ &\vdots \\ P(B_n) &= p_1 p_2 \cdots p_n. \end{aligned}$$

Се воочува дека веројатноста $P(B_k)$ е еднаква на коефициентот пред x^k во развојот на полиномот

$$R(x) = \prod_{i=1}^{n} (p_i x + q_i)$$

по степените на x. Јасно е дека Поасоновата шема за $p_i = p$, $i = 1, 2, ..., n$ преминува во Бернулиева шема.

ЗАДАЧА 2.31. Која е веројатноста дека при 8 фрлања на хомогена коцка, единица се појавила три пати?

Решение. Едно фрлање на хомогената коцка ќе го сметаме за едно независно испитување. Се добива Бернулиева шема со $n = 8$, во која се разгледува реализација на настанот A - се појавила единица, чија веројатност е $p =$

$P(A) = \frac{1}{6}$. Се бара веројатноста на настанот B_3 - при 8-те фрлања единица се појавила три пати,

$$P(B_3) = \binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,104190.$$

ЗАДАЧА 2.32. Колкава е веројатноста дека во три последователни фрлања на две коцки, барем еднаш на двете ќе се добие парен број на точки?

Решение. Едно фрлање на двете коцки се смета за едно независно испитување, па се добива Бернулиева шема со $n = 3$, во која се разгледува реализација на настанот A - на двете коцки се појавиле парен број на точки, чија веројатност е $p = P(A)$. За наоѓање на веројатноста p, ги разгледуваме настаните A_i - при едно фрлање на i-тата коцка се појавил парен број на точки, $i = 1, 2$. Од $P(A_1) = P(A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ и од независноста на A_1 и A_2 имаме

$$p = P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Понатаму, се бара веројатноста на настанот $B_{k\geq 1}$ - во три фрлања на две коцки, барем еднаш на двете се добива парен број на точки,

$$P(B_{k\geq 1}) = 1 - P(B_0) = 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0,578125.$$

ЗАДАЧА 2.33. Веројатноста да се роди женско дете е 0,5 и веројатноста да се роди машко дете е 0,5. Најди ја веројатноста во едно семејство од 10 деца да има:

а) 5 женски деца,

б) не помалку од 4 и не повеќе од 6 женски деца.

Решение. Раѓањето на едно дете се смета за едно независно испитување, па бројот на независни испитувања е $n = 10$, значи имаме Бернулиева шема со $n = 10$, каде се разгледува реализација на настанот A - родено е женско дете, чија веројатност е $p = P(A) = 0,5$.

а) Се бара веројатноста на настанот B_5 - од 10 деца во семејството, 5 се женски, односно

$$P(B_5) = \binom{10}{5}\cdot 0,5^5 \cdot (1 - 0,5)^{10-5} \approx 0,246094.$$

б) Се бара веројатноста на настанот C - од 10 деца во семејството, не помалку од 4 и не повеќе од 6 се женски деца, односно веројатноста

$$\begin{aligned} P(C) &= P(B_{4\le k\le 6}) = P(B_4)+P(B_5)+P(B_6) \\ &= \binom{10}{4}\cdot 0,5^4\cdot 0,5^6+\binom{10}{5}\cdot 0,5^5\cdot 0,5^5+\binom{10}{6}\cdot 0,5^6\cdot 0,5^4 \\ &= 0,65625. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.34. Еден комплет од лампи се смета за неисправен, ако прегорат не помалку од 5 лампи од тип I или не помалку од 2 лампи од тип II. Во еден комплет од лампи прегореле 5 лампи. Најди ја веројатноста дека комплетот е неисправен, ако веројатноста прегорената лампа да е од тип I е 0,7, и веројатноста прегорената лампа да е од тип II е 0,3 (прегорувањето на лампите е независно).

Решение. Рзгледуваме Бернулиева шема со $n=5$ и настан A - прегорената лампа е од тип I со веројатност $p=P(A)=0,7$. Тогаш, бараната веројатност комплетот во кој има прегорено 5 лампи да е неисправен е

$$\begin{aligned} P(C) &= P(B_5)+P(B_3)+P(B_2)+P(B_1)+P(B_0) = 1-P(B_4) \\ &= 1-\binom{5}{4}\cdot 0,7^4\cdot 0,3 = 0,36015. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.35. Најверојатен број на успеси. За која вредност на k се достигнува најголема веројатност на настанот B_k при Бернулиевата шема?

Решение. Веројатноста на настанот B_k ја означуваме со

$$p_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Тогаш, за разликата на овие веројатности за две последователни вредности на k имаме

$$\begin{aligned} p_n(k)-p_n(k-1) &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}-\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}-\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}\left(\frac{p}{k}-\frac{1-p}{n-k+1}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}\frac{pn+p-k}{k(n-k+1)}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k+1)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}((n+1)p-k).$$

Разгледуваме два случаја:

(i) Ако $(n+1)p$ е цел број. Тогаш, за $k < (n+1)p$ ќе важи $p_n(k) > p_n(k-1)$ и веројатностите $p_n(k)$ растат сè до $k = (n+1)p$ и за тоа k важи дека $p_n(k) = p_n(k-1)$, а потоа веројатностите опаѓаат. Значи, ако $(n+1)p$ е цел број, има две вредности за k (тоа се $k = (n+1)p$ и $k = (n+1)p - 1$) за кои веројатноста на настанот B_k е најголема.

(ii) Ако $(n+1)p$ не е цел број. Тогаш, до $k = [(n+1)p]$ веројатностите растат, па настанот B_k, за $k = [(n+1)p]$, има најголема веројатност, а потоа веројатностите опаѓаат.

ЗАДАЧА 2.36. Познато е дека 80 % од лицата со алергии, по примањето на одреден лек, манифестираат олеснување од алергијата. Ако лекот се даде на 150 нови пациенти со алергии, кој е најверојатниот број на пациенти кои ќе манифестираат ослободување од алергијата?

Решение. Се бара најверојатен број на успеси во Бернулиева шема со $n = 150$ и $p = 80\,\% = 0,8$. Бидејќи $(n+1)p = 151 \cdot 0,8 = 120,8$ не е цел број, според Задача 2.35, имаме дека најверојатниот број на пациенти кои ќе манифестираат ослободување од алергијата ќе биде $k = [(n+1)p] = [120,8] = 120$ пациенти.

ЗАДАЧА 2.37. Веројатноста еден стрелец при едно гаѓање да ја погоди целта е 0,3. Колку најмалку пати треба да гаѓа за со веројатност не помала од 0,95 да биде убеден дека ќе ја погоди целта барем еднаш?

Решение. Едно гаѓање на стрелецот се смета за едно независно испитување. Се бара бројот n на независни испитувања во Бернулиевата шема, во која се разгледува реализација на настанот A - стрелецот ја погодува целта, чија веројатност според условот на задачата е $p = P(A) = 0,3$. Дадено е дека веројатноста на настанот $B_{k\geq 1}$, не е помала од 0,95 т.е.

$$P(B_{k\geq1}) \geq 0,95 \;\Leftrightarrow\; 1 - P(B_0) \geq 0,95 \;\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0}(0,3)^0(0,7)^n \geq 0,95 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (0,7)^n \leq 0,05 \;\Leftrightarrow\; n\ln 0,7 \leq \ln 0,05 \;\Leftrightarrow\; n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,7} \approx 8,399054.$$

Значи, стрелецот треба да гаѓа најмалку 9 пати за со веројатност не помала од 0,95 да биде убеден дека ќе ја погоди целта барем еднаш.

ЗАДАЧА 2.38. На еден факултет има 40 студенти во прва година, 30 студенти во втора година, 30 студенти во трета година и 20 студенти во четврта година. На случаен начин се прави листа од 6 студента. Најди ја веројатноста листата да се состои од по 2 студента од прва и втора година и од по 1 студент од трета и четврта година.

Решение. Дефинираме настани A_i - студентот е од i-тата година, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогаш,

$$P(A_1) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3},\ P(A_2) = P(A_3) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4},\ P(A_4) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

Треба да се направи листа од 6 студенти, значи дека имаме полиномна шема со $n = 6$, во која се разгледуваат реализациите на настаните A_1, A_2, A_3, A_4. Па, за веројатноста на настанот C - во листата од 6 студенти, има по 2 студента од прва и втора година и по 1 студент од трета и четврта година, имаме

$$P(C) = P(B_{2,2,1,1}) = \frac{6!}{2!2!1!1!} \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{1}{4})^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,052083.$$

ЗАДАЧА 2.39. Во круг е впишан квадрат. Најди ја веројатноста дека од 10 случајно фрлени точки во кругот, 4 ќе паднат во квадратот, 3 во еден од сегментите и по една точка во останатите три сегмента.

Решение. Едно фрлање на една точка е едно независно испитување, значи бројот на независни испитувања е $n = 10$. Означуваме со A_0 - точката паднала во квадратот, A_i - точката паднала во i-тиот сегмент, $i = 1, 2, 3, 4$.

Се разгледува полиномна шема за $n = 10$, во која се разгледува реализација на настаните A_0, A_1, A_2, A_3 и A_4, за кои имаме дека $P(A_0) = \frac{2}{\pi}$, $P(A_i) = \frac{1}{4}(1 - \frac{2}{\pi}) = \frac{\pi-2}{4\pi}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогаш, веројатноста на настанот C - од 10 фрлени точки во кругот, 4 падналe во квадратот, 3 во еден од сегментите и по една точка во останатите три сегмента е

$$\begin{aligned} P(C) &= P(B_{4,3,1,1,1}) + P(B_{4,1,3,1,1}) + P(B_{4,1,1,3,1}) + P(B_{4,1,1,1,3}) = \\ &= 4 \cdot \frac{10!}{4!3!1!1!1!} \cdot \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^4 \Big(\frac{\pi - 2}{4\pi}\Big)^{3+1+1+1} \approx 0,009307. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.40. Човек од определена група на луѓе, со веројатност 0,2 има кафеава коса, со веројатност 0,3 има црна коса, со веројатност 0,4 има руса коса и со веројатност 0,1 има црвена коса. Од истата група на произволен начин се одбрани 6 луѓе. Најди ја веројатноста на настаните

A - во одбраните луѓе има не помалку од четворица со руса коса,

B - во одбраните луѓе има барем еден со црвена коса,

C - во одбраните луѓе има еднаков број луѓе со руса и црна коса.

Решение. Изборот на еден човек е едно независно испитување, значи бројот на независни испитувања е $n = 6$. Означуваме со A_1 - човекот има кафеава коса, A_2 - човекот има црна коса, A_3 - човекот има руса коса, A_4 - човекот има црвена коса. Тогаш, од условот на задачата имаме $P(A_1) = 0,2,\ P(A_2) = 0,3,$ $P(A_3) = 0,4,\ P(A_4) = 0,1.$

За пресметување на веројатноста на настанот A, разгледуваме Бернулиева шема за $n = 6$, во која се разгледува реализација на настанот A_3. Па, бараната веројатност е

$$P(A) = P(B_{k\geq 4}) = \binom{6}{4}(0,4)^4(0,6)^2 + \binom{6}{5}(0,4)^5(0,6)^1 + \binom{6}{6}(0,4)^6(0,6)^0 = 0,1792.$$

За пресметување на веројатноста на настанот B, разгледуваме Бернулиева шема за $n = 6$, во која се разгледува реализација на настанот A_4. Па, бараната веројатност е

$$P(B) = P(B_{k\geq 1}) = 1 - P(B_0) = 1 - \binom{6}{0}(0,1)^0(0,9)^6 = 0,468559.$$

За пресметување на веројатноста на настанот C, разгледуваме полиномна шема за $n = 6$, во која се разгледува реализација на настаните A_3, A_2 и $A_1 \cup A_4$. Тогаш, бараната веројатност е

$$\begin{aligned} P(C) &= P(B_{0,0,6}) + P(B_{1,1,4}) + P(B_{2,2,2}) + P(B_{3,3,0}) = \\ &= \frac{6!}{0!0!6!}\cdot(0,3)^0(0,4)^0(0,3)^6 + \frac{6!}{1!1!4!}\cdot(0,3)^1(0,4)^1(0,3)^4 + \\ &\quad + \frac{6!}{2!2!2!}\cdot(0,3)^2(0,4)^2(0,3)^2 + \frac{6!}{3!3!0!}\cdot(0,3)^3(0,4)^3(0,3)^0 = 0,181089. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.41. Во една градина има n рози. Секоја од нив има една од боите црвена, жолта, розова, бела со веројатност p_1, p_2, p_3, p_4 соодветно, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, при што изборот на боите е независен. Најди ја веројатноста на настаните

A - сите рози се црвени,

B - една роза е розова, а останатите се жолти,

C - барем една роза е бела,

D - две рози се жолти, една е розова, а останатите се црвени.

Решение. Дефинираме настани A_1 - розата има црвена боја, A_2 - розата има жолта боја, A_3 - розата има розова боја и A_4 - розата има бела боја. Дадено е дека $P(A_i) = p_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Значи, имаме полиномна шема со n независни испитувања, каде при секое испитување се разгледуваат реализациите на настаните A_1, A_2, A_3, A_4. Па, за веројатностите на настаните A, B и D имаме

$$P(A) = P(B_{n,0,0,0}) = p_1^n,$$

$$P(B) = P(B_{0,n-1,1,0}) = \frac{n!}{(n-1)!1!}\, p_2^{n-1}p_3 = np_2^{n-1}p_3.$$

$$P(D) = P(B_{n-3,2,1,0}) = \frac{n!}{(n-3)!2!1!}\, p_1^{n-3}p_2^2p_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}\, p_1^{n-3}p_2^2p_3.$$

За да ја најдеме веројатноста на настанот C разгледуваме Бернулиева шема со n независни испитувања, каде при секое испитување се разгледува реализација на настанот A_4. Тогаш,

$$P(C) = 1 - P(B_0) = 1 - \binom{n}{0}p_4^0(1-p_4)^n = 1 - (1-p_4)^n.$$

ЗАДАЧА 2.42. Во една кутија има 2 бели и 3 црни топчиња. Се изведуваат 5 извлекувања на по едно топче со враќање. По секое непарно извлекување во кутијата се додава по едно бело топче, а по секое парно извлекување по едно црно топче. Што е поверојатно, во третото извлекување да се извлече бело топче или бело топче да биде извлечено три пати?

Решение. При секое од 5-те извлекувања се разгледува реализација на настанот A - извлечено е бело топче, чија веројатност во првото извлекување е $p_1 = \frac{2}{5}$, во второто $p_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, во третото $p_3 = \frac{3}{7}$, во четвртото $p_4 = \frac{4}{8}$ и во петтото $p_5 = \frac{4}{9}$. Всушност се формира Поасонова шема со $n = 5$ и веројатности p_i, $i = 1, ..., 5$. Се бара да се споредат веројатностите на настаните B - во третото извлекување извлечено е бело топче и C - бело топче е извлечено три пати при 5-те извлекувања. Од погоре изнесеното, имаме дека $P(B) = p_3 = \frac{3}{7} \approx 0,428571$. Додека, според Поасоновата шема, веројатноста на настанот C е коефициентот пред x^3 во развојот по степените на x на полиномот

$$R(x) = \prod_{i=1}^{5}(p_ix + q_i) = \frac{1}{1260}(24x^5 + 146x^4 + 353x^3 + 424x^2 + 253x + 60),$$

односно $P(C) = \frac{353}{1260} \approx 0,280159$.

Значи, поверојатно е во третото извлекување да се извлече бело топче отколку бело топче да биде извлечено три пати.

ЗАДАЧА 2.43. Една радиолокаторна станица набљудува k објекти. За време на набљудувањето i-тиот објект може да се изгуби со веројатност p_i, $i = 1, 2, ..., k$. Губењето на објектите е независно. Најди ја веројатноста на настаните
A - ниеден од објектите не е изгубен,
B - изгубен е не помалку од еден објект,
C - изгубен е не повеќе од еден објект.

Решение. Од независнота на губењето на објектите, може да разгледаме Поасонова шема за k независни испитувања, и веројатности p_i, $i = 1, 2, ..., k$. Тогаш, веројатноста на настанот A е слободниот член во развојот на полиномот

$$R(x) = \prod_{i=1}^{k}(p_i x + q_i),$$

каде $q_i = 1 - p_i$, $i = 1, 2, ..., k$, односно

$$P(A) = \prod_{i=1}^{k} q_i = \prod_{i=1}^{k}(1 - p_i).$$

Настанот B е спротивен на настанот A, па затоа

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - p_i).$$

Настанот C се реализира тогаш кога се реализира настанот A или настанот D - изгубен е точно еден објект. Веројатноста на настанот D, според Поасоновата шема е коефициентот пред x во развојот на полиномот $R(x)$. Значи,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A) + P(D) \\ &= \prod_{i=1}^{k}(1 - p_i) + \sum_{j=1}^{k} \frac{p_j}{1 - p_j} \prod_{i=1}^{k}(1 - p_i). \end{aligned}$$

2.5 Разни задачи

ЗАДАЧА 2.44. Се води двобој меѓу лицата X и Y. X има два куршума, а Y има само еден. Прв гаѓа X и со веројатност 0,2 го погодува Y. Потоа, ако не е погоден, Y гаѓа и го погодува X со веројатност 0,3. Ако Y промаши, тогаш X гаѓа со последниот куршум и го погодува Y со веројатност 0,4. Која е веројатноста во двобојот да биде погоден X, а која е веројатноста да биде погоден Y?

Решение. Ги дефинираме настаните A_1 - Y е погоден со првиот куршум од X, со A_2 - Y е погоден со вториот куршум од X и со B - X е погоден со куршумот од Y. Од условот на задачата имаме

$$P(A_1) = 0,2, \ P(B|\overline{A_1}) = 0,3, \ P(A_2|\overline{A_1}\ \overline{B}) = 0,4.$$

Тогаш, веројатноста во двобојот да биде погоден X е

$$P(\overline{A_1}B) = P(\overline{A_1})P(B|\overline{A_1}) = (1-0,2)\cdot 0,3 = 0,24,$$

додека веројатноста во двобојот да биде погоден Y е

$$\begin{aligned} P(A_1 + \overline{A_1}\ \overline{B}\ A_2) &= P(A_1) + P(\overline{A_1})P(\overline{B}|\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1}\ \overline{B}) \\ &= 0,2 + (1-0,2)\cdot(1-0,3)\cdot 0,4 = 0,424. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.45. Монти Хол проблем. Една наградна игра се состои во тоа што натпреварувачот одбира една од три врати, од кои едната крие нов автомобил, а останатите две по една коза. Откако тој ќе го направи изборот, водителот отвора една од неизбраните врати зад која со сигурност не е автомобилот и му дава можност на натпреварувачот да го смени својот претходен избор т.е. да посочи нова врата.

а) Кога шансите на натпреварувачот за добивање на автомобилот му се поголеми, кога ќе го задржи својот претходен избор или кога ќе посочи нова врата?

б) Натпреварувачот фрла монета и ако се падне „грб“, тој посочува нова врата, а ако се падне „пара“, тој го задржува својот претходен избор. Ако на крајот натпреварувачот го добил автомобилот, која е веројатноста дека тој посочил нова врата?

в) Натпреварувачот игра независно два пати, така што првиот пат не го менува изборот, а вториот пат посочува нова врата. Која е веројатноста тој да добие два автомобила?

Решение. а) Означуваме со H_i - натпреварувачот за прв пат ја одбира i-тата врата, $i = 1, 2, 3$. Имаме дека $P(H_i) = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$. Без губење на општоста, нека автомобилот се наоѓа зад првата врата. Да означиме со A - натпреварувачот го добива автомобилот без да го промени својот избор и B - натпреварувачот го добива автомобилот со менување на првобитниот избор. Тогаш,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A|H_i) = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{1}{3},$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(B|H_i) = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Значи, ако натпреварувачот посочи нова врата, поголеми се шансите да го добие автомобилот.

б) Означуваме со A_1 - на монетата се паднал „грб“, A_2 - на монетата се паднала „пара“, C - натпреварувачот го добива автомобилот. Да забележиме дека $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$, $P(C|A_1) = P(B) = \frac{2}{3}$, $P(C|A_2) = P(A) = \frac{1}{3}$, каде A и B се настаните дефинирани под а). Се бара условната веројатност

$$P(A_1|C) = \frac{P(A_1)P(C|A_1)}{P(A_1)P(C|A_1) + P(A_2)P(C|A_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

в) Означуваме со D - во две независни игри, но така што првиот пат не го менува изборот, а вториот пат посочува нова врата, натпреварувачот добива два автомобила. Тогаш, $D = AB$, каде A и B се настаните дефинирани под а), и од независноста на игрите, за бараната веројатност имаме,

$$P(D) = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

ЗАДАЧА 2.46. По завршените четвртфинални натпревари останале во игра екипите X, Y, Z и T. Во табелата дадени се шансите за победа во која било средба на кои било две од екипите, така на кој било натпревар меѓу екипите X и Y, шансите се 60:40 за екипата X, т.е. веројатноста екипата X да ја елиминира екипата Y е 0,6, а веројатноста екипата Y да ја елиминира екипата X е 0,4.

$X:Y$	$X:Z$	$X:T$	$Y:Z$	$Y:T$	$Z:T$
60:40	80:20	70:30	48:52	42:58	45:55

а) Со која веројатност екипата Z го освојува купот, ако паровите за полуфинале сѐ уште не се одредени?

б) Со која веројатност екипата Z го освојува купот, ако е познато дека во полуфиналето таа игра со екипата T?

Решение. а) Означуваме со H_1 - во полуфиналето екипата Z игра со екипата X, H_2 - во полуфиналето екипата Z игра со екипата Y и H_3 - во полуфиналето екипата Z игра со екипата T. Бидејќи паровите за полуфинале се одредуваат со ждрепка, имаме дека $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$. Означуваме со M - екипата Z го освојува купот. Тогаш,

$$P(M) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(M|H_i) = \frac{1}{3}(P(M|H_1) + P(M|H_2) + P(M|H_3)).$$

За пресметување на условните веројатности $P(M|H_i)$, $i = 1, 2, 3$, важно е во финалето со кого ќе продолжи да игра екипата Z. Означуваме со Q_1 - во полуфиналето меѓу Z и X победува Z, Q_2 - во полуфиналето меѓу Y и T победува Y. Тогаш, од независноста на Q_1 и Q_2, имаме

$$\begin{aligned} P(M|H_1) &= P(Q_1)P(Q_2)P(M|Q_1Q_2) + P(Q_1)P(\overline{Q_2})P(M|Q_1\overline{Q_2}) = \\ &= 0,2 \cdot 0,42 \cdot 0,52 + 0,2 \cdot 0,58 \cdot 0,45 = 0,09588. \end{aligned}$$

На сличен начин се добива дека $P(M|H_2) = 0,143$ и $P(M|H_3) = 0,1476$, па бараната веројатност е

$$P(M) = \frac{1}{3}(0,09588 + 0,143 + 0,1476) \approx 0,128827.$$

б) Бараната веројатност е $P(M|H_3) = 0,1476$.

Забелешка. Бидејќи од сите условни веројатности $P(M|H_i)$, $i = 1, 2, 3$, најголема е $P(M|H_3)$, значи дека екипата Z има најголеми шанси да го освои купот, ако во полуфиналето игра со екипата T, додека најголеми шанси екипата Z да заигра во финалето е ако во полуфиналето игра со екипата Y (од $Y : Z = 48 : 52$).

ЗАДАЧА 2.47. Во еден магацин во делот за батерии има n нови батерии. На случаен начин се одбираат k батерии ($k \leq \frac{n}{2}$). По нивното употребување се враќаат во магацинот. Потоа, повторно се одбираат k батерии. Најди ја веројатноста ниедна од втората група од k батерии да не е употребена претходно.

Решение. Дефинираме настани A_i - i-тата батерија од втората група батерии не е употребена претходно, $i = 1, 2, ..., k$ и настан A - ниедна батерија од втората група од k батерии не е употребена претходно. Тогаш,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2...A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)...P(A_k|A_1A_2...A_{k-1}) \\ &= \frac{n-k}{n} \cdot \frac{n-k-1}{n-1} \cdot ... \cdot \frac{n-2k+1}{n-k+1} = \frac{((n-k)!)^2}{n!(n-2k)!}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.48. Во една кутија има n бели и n црни топчиња. Се извлекуваат парови од топчиња, при што извлечените топчиња не се враќаат во кутијата. Најди ја веројатноста дека сите извлечени парови се составени од топчиња со различна боја.

Решение. Ги дефинираме настаните A_k - k-тиот пар топчиња е составен од топчиња со различна боја и настанот A - сите извлечени парови топчиња се составени од топчиња со различна боја. Тогаш,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1}) \\ &= \frac{C_n^1C_n^1}{C_{2n}^2}\cdot\frac{C_{n-1}^1C_{n-1}^1}{C_{2n-2}^2}\cdot\frac{C_{n-2}^1C_{n-2}^1}{C_{2n-4}^2}\cdot...\cdot\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}\cdot\frac{C_1^1C_1^1}{C_2^2} \\ &= \frac{n^2}{\binom{2n}{2}}\cdot\frac{(n-1)^2}{\binom{2n-2}{2}}\cdot\frac{(n-2)^2}{\binom{2n-4}{2}}\cdot...\cdot\frac{2^2}{\binom{4}{2}}\cdot\frac{1^2}{\binom{2}{2}} = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.49. Од броевите $1, 2, ..., n$ на случаен начин избираат едно по друго два броја. Најди ја веројатноста разликата меѓу избраните броеви да не е помала од m $(0 < m < n)$?

Решение. Да ги дефинираме настаните H_k - првоизбраниот број е бројот k, $k = 1, 2, ..., n$ и настан A - разликата меѓу првоизбраниот и второизбраниот број не е помала од m $(0 < m < n)$, тогаш

$$P(H_k) = \frac{1}{n},\ k = 1, 2, ..., n,$$

$$P(A|H_k) = 0,\ k = 1, 2, ..., m,\ P(A|H_k) = \frac{k-m}{n-1},\ k = m+1, m+2, ..., n.$$

Па, бараната веројатност е

$$P(A) = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{k-m}{n(n-1)} = \frac{(n-m)(n-m+1)}{2n(n-1)}.$$

ЗАДАЧА 2.50. Тениски турнир. На еден тениски турнир учествуваат 8 натпреварувачи со еднакви шанси за победа. На случаен начин се одбираат 4 пара чии победници одат во четвртфиналето, каде на случаен начин се одбираат 2 пара чии побдници одат во финале, каде победникот го освојува купот. Која е веројатноста играчите A и B да играат еден против друг? Одговори на истото прашање во случај на 2^n натпреварувачи?

Решение. Нека играчот A е во првиот пар од почетните 4 пара. Веројатноста B да игра со A уште на почетокот е $\frac{1}{7}$. Ако B не игра со A во почетните 4 игри, а игра во полуфиналето, тогаш B треба да се наоѓа во вториот почетен пар (таа веројатност е $\frac{2}{7}$) и при тоа и A и B треба да ги победат играчите со кои играат на почетокот (таа веројатност е $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, од независност на почетните игри). Ако B не игра со A во почетните 4 игри и не игра со A во полуфиналето, а игра во финалето, тогаш B треба да се наоѓа во третиот или четвртиот почетен пар (таа веројатност е $\frac{4}{7}$), и A и B треба да ги победат играчите со кои играат на почетокот (таа веројатност е $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$), а исто така и A и B треба да ги победат играчите со кои играат во полуфиналето (таа веројатност е $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$). И конечно, бараната веројатност играчите A и B да играат еден против друг е $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$.

Кога бројот на натпреварувачи е 2^n, со математичка индукција се показхува дека веројатноста играчите A и B да играат еден против друг е $\frac{1}{2^{n-1}}$. Имено, играчите A и B играат во финале, ако A игра во првата половина од почетните игри, а B во втората половина (таа веројатност е $\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$) и ако и A и B ги победат играчите со кои играат до финалето (таа веројатност е $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$). Играчите A и B играат во некој од натпреварите пред финалето, ако се наоѓаат во иста половина од почетните игри (таа веројатност е $\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$) и понатаму се смета турнир меѓу 2^{n-1} натпреварувачи, па од индуктивната претпоставка, веројатноста играчите A и B да играат еден против друг е $\frac{1}{2^{n-2}}$. Значи, веројатноста играчите A и B да играат еден против друг за време на тениски турнир со 2^n натпреварувачи е

$$\frac{2^{n-1}}{2^n-1} \cdot \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{(2^n-1)2^{n-2}} \cdot \left(\frac{1}{2} + 2^{n-1} - 1\right) = \frac{1}{2^{n-1}},$$

што требаше и да се докаже.

ЗАДАЧА 2.51. Пропаст на коцкар. Коцкар се обложува независно. При секој облог, тој добива \$1 со веројатност p, и губи \$1 со веројатност $1-p$. На почетокот коцкарот има $\$k$, и игра сѐ додека не собере $\$n$ или не остане без пари. Која е веројатноста дека ќе го заврши обложувањето со $\$n$?

Решение. Да го означиме со A настанот дека коцкарот ќе го заврши облозхувањето со $\$n$, а со B настанот дека тој го добива првиот облог. Па, од услов на задачата $P(B) = p$. Нека $p_k = P(A)$, каде индексот k означува дека коцкарот го започнува обложувањето со $\$k$. Тогаш, од теоремата за тотална веројатност имаме

$$p_k = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B}) = pP(A|B) + qP(A|\overline{B}), \quad 0 < k < n,$$

каде $q = 1 - p$. Од независноста на минатите и идните обложувања, веројатноста на настанот A под услов коцкарот да го добил првиот облог е еднаква на веројатноста на настанот A ако тој го започнал обложувањето со \$$(k+1)$ т.е. $P(A|B) = p_{k+1}$. Слично, се добива дека $P(A|\overline{B}) = p_{k-1}$. Па, имаме дека $p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}$, што може да се презапише како

$$p_{k+1} - p_k = r(p_k - p_{k-1}), \quad 0 < k < n,$$

каде $r = q/p$. Доколку k пати го замениме последното равенство, ќе добиеме

$$p_{k+1} - p_k = r^k(p_1 - p_0).$$

Сега, од $p_0 = 0$ имаме дека

$$p_{k+1} = p_k + r^k p_1 = p_{k-1} + r^{k-1}p_1 + r^k p_1 = ... = p_1 + rp_1 + ... + r^k p_1.$$

Последната сума се пресметува различно за $r = 1$ (односно $p = q$) и $r \neq 1$ (односно $p \neq q$). Имено,

$$p_k = \begin{cases} \frac{1-r^k}{1-r}p_1 & , \text{ ако } p \neq q \\ kp_1 & , \text{ ако } p = q \end{cases}.$$

Од $p_n = 1$, последната равенка може да ја решиме по p_1, односно

$$p_1 = \begin{cases} \frac{1-r}{1-r^n} & , \text{ ако } p \neq q \\ \frac{1}{n} & , \text{ ако } p = q \end{cases},$$

па затоа

$$p_k = \begin{cases} \frac{1-r^k}{1-r^n} & , \text{ ако } p \neq q \\ \frac{k}{n} & , \text{ ако } p = q \end{cases}.$$

ЗАДАЧА 2.52. Нека настаните $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ формираат разбивање на Ω и нека $B, C \in \mathcal{F}$ се произволни настани така што $P(CA_i) > 0$ за секој $i = 1, 2, ..., n$. Покажи дека важи **условната верзија на формулата за тотална веројатност** т.е.

$$P(B|C) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|C)P(B|CA_i).$$

Решение. Од дефиницијата за условна веројатност и теоремата за множење на веројатности, имаме дека

$$\begin{aligned} P(B|C) &= \frac{P(BC)}{P(C)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(A_iBC)}{P(C)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(C)P(A_i|C)P(B|CA_i)}{P(C)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i|C)P(B|CA_i), \end{aligned}$$

што требаше и да се покаже.

ЗАДАЧА 2.53. Нека A, B, C се попарно независни настани, при што невозмозхно е да се реализираат сите три истовремено. Нека секој од нив се реализира со иста веројатност p. Најди ја најголемата можна вредност за p.

Решение. Од условите на задачата имаме

$$P(A) = P(B) = P(C) = p,\ P(ABC) = 0,$$

$$P(AB) = P(A)P(B) = p^2,\ P(AC) = P(A)P(C) = p^2,\ P(BC) = P(B)P(C) = p^2.$$

Нека $P(A \cup B \cup C) = k$, тогаш

$$k = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 3p - 3p^2.$$

Со решавање на последната равенка по p добиваме $p = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}k}\right)$.

Ако $p = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{4}k}\right)$, тогаш p достигнува максимална вредност $p = \frac{1}{2}$, при $k = \frac{3}{4}$ (обиди се да најдеш пример кога се исполнети условите на задачата за $p = \frac{1}{2}$).

Ако $p = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{4}k}\right)$, тогаш $p \geq \frac{1}{2}$. Да претпоставиме дека $p > \frac{1}{2}$. Тогаш важи $1 - \frac{3}{4}k > 0$, односно $k < \frac{3}{4}$, па од $k = 3p - 3p^2$ имаме дека $p^2 - p + \frac{1}{4} > 0$, од каде се добива дека $p \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$, што не е исто со $p > \frac{1}{2}$.

Значи, најголема можна вредност за p е $p = \frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 2.54. Во една кутија се наоѓаат m бели и n црни топчиња. Играчите A и B извлекуваат по тој редослед по едно топче и го враќаат во кутијата. Победува оној кој прв ќе извлече бело топче. Најди ја веројатноста да победи играчот A.

Решение. Ги дефинираме настаните A_i - играчот A извлекува бело топче во i-тото извлекување, $i = 2k - 1,\ k = 1, 2, ...$, настаните B_j - играчот B извлекува бело топче во j-тото извлекување, $j = 2k,\ k = 1, 2, ...$ и настан C - победува играчот A. Тогаш,

$$C = A_1 + \overline{A_1}\ \overline{B_2}\ A_3 + \overline{A_1}\ \overline{B_2}\ \overline{A_3}\ \overline{B_4}\ A_5 + ...,$$

при што се сумираат попарно дисјунктни настани, па затоа

$$P(C) = P(A_1) + P(\overline{A_1}\ \overline{B_2}\ A_3) + P(\overline{A_1}\ \overline{B_2}\ \overline{A_3}\ \overline{B_4}\ A_5) + ...,$$

и од тоа што настаните A_i, B_j се независни во целина, имаме

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1) + P(\overline{A_1})P(\overline{B_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(\overline{B_2})P(\overline{A_3})P(\overline{B_4})P(A_5) + ... \\ &= \frac{m}{m+n} + \left(\frac{n}{m+n}\right)^2 \frac{m}{m+n} + \left(\frac{n}{m+n}\right)^4 \frac{m}{m+n} + ... = \frac{m}{m+n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n}{m+n}\right)^{2k} \\ &= \frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{n}{m+n})^2} = \frac{m+n}{m+2n}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.55. Еден стрелец ја погодува целта со веројатност $\frac{1}{4}$. Ги дефинираме настаните A - во првите 5 гаѓања стрелецот има точно 2 погодока, и B - во првите 15 гаѓања стрелецот има точно 6 погодока. Дали настаните A и B се независни? Најди ги условните веројатности $P(A|B)$ и $P(B|A)$.

Решение. За да ја најдеме веројатноста на настанот A разгледуваме Бернулиева шема со $n = 5$ независни испитувања (гаѓања во метата), при што ја разгледуваме реализацијата на настанот A_1 - стрелецот ја погодува метата, во едно гаѓање, чија веројатност е дадена т.е. $P(A_1) = \frac{1}{4}$, па

$$P(A) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3.$$

Слично, за наоѓање на веројатноста на настанот B, разгледуваме Бернулиева шема со $n = 15$ во која исто така се разгледува реализација на настанот A_1, па затоа

$$P(B) = \binom{15}{6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9.$$

За да ја најдеме веројатноста на настанот AB - во првите 5 гаѓања стрелецот има точно 2 погодока и во првите 15 гаѓања стрелецот има точно 6 погодоци, дефинираме настан C - во последните 10 гаѓања стрелецот има точно 4 погодоци. Тогаш, $AB = AC$ и настаните A и C се независни. За пресметување на веројатноста на настанот C разгледуваме Бернулиева шема со $n = 10$ во која исто така се разгледува реализација на настанот A_1, па имаме

$$P(C) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 \neq P(B).$$

Тогаш,

$$P(AB) = P(AC) = P(A)P(C) \neq P(A)P(B),$$

од каде следи дека настаните A и B не се независни.

За условните веројатности имаме,

$$\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AC)}{P(B)} = \frac{P(A)P(C)}{P(B)} \\
&= \frac{\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6}{\binom{15}{6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9} = \frac{60}{143} \approx 0,419580, \\
P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{P(A)P(C)}{P(A)} \\
&= P(C) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 0,145998.
\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2.56. Еден стрелец при секое гаѓање со еднаква веројатност ја погодува целта. Ако веројатноста да ја погоди целта барем еднаш во три гаѓања е 0,875 најди ја веројатноста за погодок на целта во едно гаѓање.

Решение. Ако едно гаѓање во целта го сметаме за едно независно испитување, тогаш имаме Бернулиева шема со $n = 3$, каде се разгледува реализација на настанот A - стрелецот ја погодува целта во едно гаѓање, чија веројатност $P(A) = p$ се бара да се најде. Дадена е веројатноста $P(B_{k\geq 1}) = 0,875$, од каде

$$1 - P(B_0) = 0,875 \Leftrightarrow 1 - \binom{3}{0} p^0 (1-p)^3 = 0,875 \Leftrightarrow (1-p)^3 = 0,125 \Leftrightarrow p = 0,5.$$

2.6 Задачи за самостојна работа

ЗАДАЧА 2.57. Покажи дека за произволни настани A и B, при што $P(B) > 0$ важи неравенството

$$P(A|B) \geq \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)}.$$

ЗАДАЧА 2.58. На случаен начин се бираат два реални броја од интервалот $[-1, 1]$. Најди ја веројатноста нивниот збир за е позитивен, ако се знае дека нивниот производ е негативен.

ЗАДАЧА 2.59. Телефонскиот број на еден претплатник има шест цифри. Одреди ја веројатноста сите цифри да се различни.

ЗАДАЧА 2.60. Во една скриптарница имало 6 примерока од учебник по веројатност, од кои половината се со обични корици, а половината со тврди корици. Два студента купуваат по еден примерок од учебникот. Ако продавачот случајно избира кој од примероците ќе го продаде, најди ја веројатноста дека студентите купиле учебници со различен тип на корици.

ЗАДАЧА 2.61. На еден студент шансите му се 50 % да го положи испитот. Истражувањата покажале дека 40 % од положените биле редовни на часови и 10 % од неположените биле редовни на часови. Која е веројатноста студентот да го положи испитот, ако бил редовен на часови?

ЗАДАЧА 2.62. Три шпила од карти K_1, K_2, K_3 се состојат од по 52 карти плус i џокери, $i = 1, 2, 3$ соодветно. Со веројатност 0,2; 0,5; 0,3 случајно избрана карта може да припаѓа на шпилот K_1, K_2, K_3 соодветно. Најди ја веројатноста случајно избрана карта:
а) да има вредност не поголема од 5,
б) да не е од шпилот K_3, ако се знае дека има вредност не поголема од 5.

ЗАДАЧА 2.63. Еден патник за да стигне до следното населено место има да бира со еднаква веројатност шест различни патишта. Веројатноста да стигне до местото за еден час, ако тргне по секој од патиштата, е 0,6; 0,3; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1 соодветно. Која е веројатноста патникот да тргнал по вториот пат, ако се знае дека до местото стигнал за еден час?

ЗАДАЧА 2.64. Во еден автобус има n патници. На станицата што доаѓа, секој од патниците со веројатност p се симнува од автобусот, со веројатност p_0 не влегува ниеден патник, и со веројатност $1 - p_0$ влегува еден нов патник. Најди ја веројатноста дека по тргнувањето од станицата, повторно во автобусот ќе има n патници.

ЗАДАЧА 2.65. Во секоја од $k+1$ кутија има по k топчиња, така што во i-тата кутија има i бели и $k - i$ црни топчиња, $i = 1, 2, ..., k$, додека во $(k + 1)$-вата кутија има k црни топчиња. Случајно се бира една кутија, и од неа p пати се извлекува по едно топче, така што при секое извлекување топчето се враќа во кутијата. Најди ја веројатноста дека при секое извлекување е извлечено бело топче.

ЗАДАЧА 2.66. Во три кутии се сместени бели и црни топчиња, така што во првата кутија има a бели и b црни топчиња, во втората кутија има c бели и d црни топчиња, а во третата кутија има k бели топчиња. На случаен начин се избира една кутија и од неа се избира едно топче. Одбрано е бело топче. Најди ја веројатноста дека топчето е од првата, втората, третата кутија соодветно.

ЗАДАЧА 2.67. Од двајца близнаци првото се родило машко. Најди ја веројатноста дека и второто ќе се роди машко, ако веројатноста да се родат две машки е p, веројатноста да се родат две женски е q, а за различнополни близнаци веројатноста да се роди прво за двата пола е еднаква.

ЗАДАЧА 2.68. Настаните A, B, C се независни во целина и $P(C) > 0$. Покажи дека настаните A и B се условно независни во однос на настанот C.

ЗАДАЧА 2.69. Настаните A_1, A_2, A_3, A_4 се независни, при што $P(A_3 \cup A_4) > 0$. Покажи дека

$$P(A_1 \cup A_2 \mid A_3 \cup A_4) = P(A_1 \cup A_2).$$

ЗАДАЧА 2.70. Фер монета се фрла три пати. Најди ја веројатноста дека „грб“ се паднал точно два пати.

ЗАДАЧА 2.71. Една отсечка е поделена на три еднакви дела. На случаен начин на отсечката се фрлаат 3 точки. Најди ја веројатноста дека во секој од трите делови паѓа по една точка.

ЗАДАЧА 2.72. Два стрелци независно еден од друг стрелаат во иста цел. Веројатноста целта да биде погодена од првиот стрелец е 0,8, а да биде погодена од вториот стрелец е 0,4. Стрелците истовремено стрелаат по еднаш во целта, при што целта е погодена само еднаш. Која е веројатноста целта да ја погодил првиот стрелец?

ЗАДАЧА 2.73. Тројца играчи последователно фрлаат монета. Победник е тој кај кој прв ќе се падне „грб“. Одреди ја веројатноста за победа на секој од играчите.

ЗАДАЧА 2.74. Четворица играчи A, B, C, D, играат игра „Не лути се човече“. За да може да извадат фигура по прв пат, потребно им е да им се паднат 6 точки на коцката. Коцката ја фрлаат наизменично, така што прв почнува играчот A. Најди ја веројатноста играчот A да извади прв фигура, ако сите ја фрлаат коцката по еднаш сè додека не се паднат 6 точки. Која е веројатноста играчот A да извади прв фигура, ако сите ја фрлаат коцката по 3 пати сè додека не се паднат 6 точки?

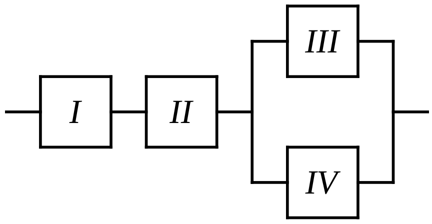
ЗАДАЧА 2.75. Нека настаните $H_1, H_2, ..., H_n$ се еднаквовозможни и $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. Нека $P(A|H_i) = \frac{i}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$. Ако во две независни испитувања се разгледува појавување на настанот A, најди ги $P(H_i|A_1A_2)$, $i = 1, 2, ..., n$, каде A_1 е „успех“ при првото испитување, а A_2 е „успех“ при второто испитување.

ЗАДАЧА 2.76. Една група е составена од n стрелци. При едно гаѓање во метата, i-тиот стрелец ја погодува метата со веројатност p_i, $i = 1, 2, ..., n$. На случаен начин е избран еден стрелец. Тој гаѓа во метата и ја погодува. Најди ја веројатноста при следните две гаѓања на метата истиот тој стрелец еднаш ќе ја погоди, а еднаш ќе ја промаши метата.

ЗАДАЧА 2.77. Еден прибор се состои од четири дела, при што два од нив (I и II) се неопходни за приборот да може да се користи, а два од нив (III и IV) се меѓусебно заменливи, но ако ниеден од нив не работи, нема да работи ни целиот прибор (Цртеж 2.2). При k-тото вклучување на приборот i-тиот дел се расипува (независно од останатите делови) со веројатност $p_i^{(k)}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Најди ја веројатноста дека приборот ќе издржи најмалку n вклучувања.

ЗАДАЧА 2.78. Еден прибор се состои од два дела и при тоа секој дел е неопходен за приборот да може да се користи. Веројатноста за непречено работење за време t на првиот дел е p_1, а на вториот дел е p_2. По време t приборот откажал. Најди ја веројатноста да откажал само првиот дел.

ЗАДАЧА 2.79. Најди ја веројатноста дека во 4 последователни фрлања на две коцки, барем еднаш збирот на паднатите точки ќе биде 4.



Цртеж 2.2

ЗАДАЧА 2.80. Отсечката AB со должина 15 cm разделена е во точката C во однос 2 : 1. На таа отсечка случајно се фрлаат 4 точки. Најди ја веројатноста дека две точки ќе паднат во делот AC, а две ќе паднат во делот CB.

ЗАДАЧА 2.81. Во круг е впишан квадрат. Најди ја веројатноста дека од 4 случајно фрлени точки во кругот, точно една ќе падне внатре во квадратот.

ЗАДАЧА 2.82. Околу правоаголник со страни a и $2a$ е опишан круг. Околу кругот е опишан рамностран триаголник. Најди ја веројатноста од 5 случајно фрлени точки во триаголникот, барем една да паднала во кругот, но не и во правоаголникот.

ЗАДАЧА 2.83. Еден контролен тест се состои од 5 прашања и на секое од нив понудени се по 4 одговори од кои само еден е точен. Најди ја веројатноста, не знаејќи ниеден од одговорите (и заокружувајќи ги на случаен начин одговорите), дека е:

а) одговорено точно само на 3 прашања,

б) одговорено точно на не помалку од 3 прашања.

ЗАДАЧА 2.84. Стрелецот X ја погодува метата со веројатност $\frac{1}{4}$, а стрелецот Y со веројатност $\frac{1}{3}$. При еден натпревар, секој од нив гаѓа во метата по 5 пати и на крајот од натпреварот резултатот бил дека X имал еден погодок повеќе од Y. Најди ја веројатноста дека X имал 3 погодоци.

ЗАДАЧА 2.85. Колку најмалку коцки за играње треба да се фрлат oддеднаш, за со веројатност помала од 0,3 на ниедна од коцките да не се појават 6 точки?

ЗАДАЧА 2.86. Во една кутија со 20 бели и 2 црни топчиња n пати се извлекува по едно топче и при тоа секој пат извлеченото топче се враќа во кутијата. Одреди ја најмалата вредност за n, при која веројатноста барем еднаш да е извлечено црно топче е поголема од 0,5.

ЗАДАЧА 2.87. Еден средношколски клас има историја на ниска посетеност. Имено, секој ученик, доаѓа на час со веројатност p_1, ако времето е добро, и со веројатност p_2, ако времето е лошо. Веројатноста времето да е добро е p. Професорот одлучил да го одржи часот само ако дојдат најмалку k од n ученици. Која е веројатноста професорот да го одржи часот?

ЗАДАЧА 2.88. Една мета се состои од три попарно дисјунктни зони. При погодување на метата, веројатноста стрелецот да ја погоди првата зона е 0,5, да ја погоди втората зона е 0,3 и да ја погоди третата зона е 0,2. Стрелецот ја погодил 6 пати метата. Најди ја веројатноста, дека 3 пати ја погодил првата зона, 2 пати втората зона и еднаш третата зона.

ЗАДАЧА 2.89. Во една кутија има три топчиња, 1 црно, 1 црвено и 1 бело. Од кутијата се извлекува по едно топче 5 пати, така што по секое извлекување топчето се враќа во кутијата. Најди ја веројатноста дека црното и белото топче се извлечени не помалку од по 2 пати секое.

ЗАДАЧА 2.90. Во еден град на Аљаска просечниот број на денови со јасна видливост (од 0 до 3/10 покриеност на небото со облаци) за секој месец од годината е 7, 7, 8, 6, 4, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6 соодветно. На случен начин се избира по еден ден од секој месец. Најди ја веројатноста да има барем 2 дена со јасна видливост во избраните 12 дена. (Во просек еден месец има 30 дена.)

3

ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

3.1 Случајна променлива. Закон на распределба

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност. Функцијата $X : \Omega \to \mathbb{R}$ се нарекува **случајна променлива**, ако е мерлива во однос на σ-алгебрите $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$, односно ако за секое Борелово множество $B \in \mathcal{B}$ важи

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F},$$

каде $\mathcal{B}$ е Бореловата σ-алгебра, односно ако за секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$\{X \in (-\infty, x]\} = \{w : X(w) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}.$$

- Нека $A \in \mathcal{F}$ е настан, функцијата $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$ дефинирана со

  $$I_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$$

  е случајна променлива која се нарекува **индикатор на настанот** A или **Бернулиева случајна променлива**.

- **Теорема.** Нека X е случајна променлива и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е Борелова функција (т.е. за секое Борелово множество $B \in \mathcal{B}$ важи $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$, каде $\mathcal{B}$ е Бореловата σ-алгебра). Тогаш, секоја функција $Y = f(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ е исто така случајна променлива.

Случајната променлива $X : \Omega \to \mathbb{R}$ велиме дека е **дискретна случајна променлива**, ако множеството вредности $X(\Omega)$ е конечно или најмногу пребroиво. Нека X е дискретна случајна променлива која ги прима вредностите $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, со веројатности $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ соодветно, при што $p_1 + p_2 + ... + p_n + ... = 1$. Тогаш,

$$P\{X = x_i\} = p_i,\ i = 1, 2, ..., n, ...,$$

е **закон на распределба** на случајната променлива X. Некои поважни дискретни распределби се:

- **Бернулиева распределба,** $0 < p < 1$

$$P\{X = 1\} = p,\ P\{X = 0\} = 1 - p.$$

- **Дискретна рамномерна распределба**

$$P\{X = x_i\} = \frac{1}{N},\ i = 1, 2, ..., N.$$

- **Биномна распределба,** $X \sim \mathcal{B}(n, p)$**,** $n \in \mathbb{N}$**,** $0 < p < 1$

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},\ k = 0, 1, ..., n.$$

- **Геометриска распределба,** $0 < p < 1$

$$P\{X = k\} = p(1 - p)^k,\ k = 0, 1, 2, ...$$

- **Поасонова распределба,** $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$**,** $\lambda > 0$

$$P\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, ...$$

ЗАДАЧА 3.1. Нека е даден просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, каде просторот од елементарни настани е $\Omega = \{(a, b) \mid a, b \in \{1, 2\}\}$, фамилијата од настани е $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ и веројатноста е дефинирана со $P(w) = \frac{1}{4}$, за секој $w \in \Omega$. Покажи дека пресликувањето $X : \Omega \to \mathbb{R}$ дефинирано со $X(a, b) = a + b$ е случајна променлива. Определи ја минималната σ-алгебра $\mathcal{F}_{\min}$ во однос на која X е случајна променлива. Најди го законот на распределба на X.

Решение. Множеството од елементарни настани е $\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$, додека множеството вредности на X е $X(\Omega) = \{2,3,4\}$. Тогаш,

$$\begin{aligned}
&\text{за } x < 2,\ \{X \le x\} = \emptyset \in \mathcal{F},\\
&\text{за } 2 \le x < 3,\ \{X \le x\} = \{(1,1)\} \in \mathcal{F},\\
&\text{за } 3 \le x < 4,\ \{X \le x\} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\} \in \mathcal{F},\\
&\text{за } x \ge 4,\ \{X \le x\} = \Omega \in \mathcal{F},
\end{aligned}$$

па следи дека X е случајна променлива. Минималната σ-алгебра во однос на која X е случајна променлива е

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\min} &= \{\emptyset, \Omega, \{(1,1)\}, \{(1,1),(1,2),(2,1)\}, \{(1,2),(2,1),(2,2)\},\\
&\quad \{(1,2),(2,1)\}, \{(1,1),(2,2)\}\}.
\end{aligned}$$

Законот на распределба на X е

$$\begin{aligned}
P\{X=2\} &= P\{(1,1)\} = \frac{1}{4},\\
P\{X=3\} &= P\{(1,2),(2,1)\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},\\
P\{X=4\} &= P\{(2,2)\} = \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

или со табела

x	2	3	4
$P\{X=x\}$	1/4	1/2	1/4

ЗАДАЧА 3.2. Фер монета се фрла три пати и секој пат се забележува 1 за паднат „грб“ или 0 за падната „пара“. Тогаш, просторот од елементарни настани е $\Omega = \{(x_1,x_2,x_3) | x_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,3\}$. Дефинираме пресликување $X : \Omega \to \mathbb{R}$ со $X((x_1,x_2,x_3)) = x_1+x_2+x_3$, за $(x_1,x_2,x_3) \in \Omega$, кое го означува „бројот на паднати грбови“. Определи ја минималната σ-алгебра $\mathcal{F}_{\min}$ во однос на која X е случајна променлива. Најди го законот на распределба на случајната променлива X.

Решение. Множеството вредности на X е $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$. Тогаш,

$$\begin{aligned}
&\text{за } x < 0,\ \{X \le x\} = \emptyset,\\
&\text{за } 0 \le x < 1,\ \{X \le x\} = \{(0,0,0)\},\\
&\text{за } 1 \le x < 2,\ \{X \le x\} = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},\\
&\text{за } 2 \le x < 3,\ \{X \le x\} =\\
&= \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\},\\
&\text{за } x \ge 3,\ \{X \le x\} = \Omega,
\end{aligned}$$

Па, минималната σ-алгебра во однос на која X е случајна променлива е

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\min} \;=\; & \{\emptyset, \Omega, \{(0,0,0)\}, \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},\\ & \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\},\\ & \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\},\\ & \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}, \{(1,1,1)\},\\ & \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\},\\ & \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\},\\ & \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\},\\ & \{(0,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}, \{(0,0,0),(1,1,1)\}\}.\end{aligned}$$

Бидејќи секој елементарен настан е еднакверојатен *) т.е. $P\{(x_1, x_2, x_3)\} = \frac{1}{8}$, за законот на распределба на X имаме дека е

$$\begin{aligned} P\{X=0\} &= P\{(0,0,0)\} = \frac{1}{8},\\ P\{X=1\} &= P\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8},\\ P\{X=2\} &= P\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8},\\ P\{X=3\} &= P\{(1,1,1)\} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

*) Ако означиме со A_i - при i-тото фрлање на монетата се паднал „грб“, $i = 1,2,3$, имаме дека настаните A_i, $i = 1,2,3$ се независни и $P(A_i) = \frac{1}{2}$, $i = 1,2,3$, односно $P(\overline{A}_i) = 1 - P(A_i) = \frac{1}{2}$, $i = 1,2,3$. Тогаш,

$$\begin{aligned} P\{(0,0,0)\} &= P(\overline{A_1}\;\overline{A_2}\;\overline{A_3}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8},\\ P\{(1,0,0)\} &= P(A_1\;\overline{A_2}\;\overline{A_3}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8},\\ P\{(0,1,0)\} &= P(\overline{A_1}\;A_2\;\overline{A_3}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \text{ итн.}\end{aligned}$$

односно $P\{(x_1, x_2, x_3)\} = \frac{1}{8}$, за $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$.

ЗАДАЧА 3.3. Дадена е случајната променлива X со нејзиниот закон на распределба

x	1	2	3	5	7
$P\{X = x\}$	$a/2$	$a/3$	$a/3$	$a/2$	$a/3$

а) Определи ја вредноста на $a \in \mathbb{R}$.
б) Најди ги веројатностите $P\{X \in \{3,5\}\}$, $P\{X < 5\}$ и $P\{-3 < X \leq 8\}$.

Решение. а) Од $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}=1$ добиваме дека $a=\frac{1}{2}$, па законот на распределба на X ќе биде

x	1	2	3	5	7
$P\{X=x\}$	1/4	1/6	1/6	1/4	1/6

б) $P\{X\in\{3,5\}\}=P\{X=3\}+P\{X=5\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$,
$P\{X<5\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$ и
$P\{-3<X\leq 8\}=P\{X\in\{1,2,3,5,7\}\}=1$.

ЗАДАЧА 3.4. Коцка за играње се фрла два пати. Нека случајната променлива X е разликата меѓу бројот на точки на коцката паднати при првото фрлање и бројот на точки на коцката паднати при второто фрлање. Најди го законот на распределба на X и веројатноста на настанот $2\leq X\leq 4$.

Решение. Множеството елементарни настани е $\Omega=\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\in\{1,...,6\}\}$, каде x_i е број на точки кои се паднале на коцката при i-тото фрлање, $i=1,2$. Тогаш, $|\Omega|=6^2=36$, и при тоа секој елементарен настан е еднакововеројатен.*) Случајната променлива X прима вредности $X\in\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ со веројатности

$$\begin{aligned}P\{X=-5\} &= P\{(1,6)\}=\frac{1}{36},\\ P\{X=-4\} &= P\{(1,5),(2,6)\}=\frac{2}{36},\\ P\{X=-3\} &= P\{(1,4),(2,5),(3,6)\}=\frac{3}{36},\ \text{итн.}\end{aligned}$$

или во табела

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P\{X=x\}$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

од каде бараната веројатност е

$$P\{2\leq X\leq 4\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}+P\{X=4\}=\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}.$$

*) Ако означиме со A_i - првиот пат на коцката се паднале i точки, B_i - вториот пат на коцката се паднале i точки, $i=1,...,6$, тогаш A_i и B_i се независни и $P(A_i)=P(B_i)=\frac{1}{6}$, $i=1,...,6$. Па, за елементарните настани имаме

$$P\{(x_1,x_2)\}=P(A_{x_1}B_{x_2})=P(A_{x_1})P(B_{x_2})=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

за секој $(x_1,x_2)\in\Omega$.

ЗАДАЧА 3.5. Во една кутија има пет ливчиња на кои се наоѓаат броевите -2, -1, 0, 1 и 2 соодветно. Од кутијата се извлекува едно по едно ливче без враќање сè додека не се извлече негативен број или нула. Најди ги распределбите на случајните променливи X - број на извлекувања и Y - збир на извлечените броеви.

Решение. Множеството елементарни настани е

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(-2),(-1),(0),(1,-2),(1,-1),(1,0),(2,-2),(2,-1),(2,0),\\ &\quad (1,2,-2),(1,2,-1),(1,2,0),(2,1,-2),(2,1,-1),(2,1,0)\}\end{aligned}$$

при што не се сите елементарни настани еднакувоверојатни. Бидејќи имаме најмалку едно, а најмногу три извлекувања, затоа случајната променлива X прима вредности $X \in \{1,2,3\}$, а нејзиниот закон на распределба е

$$\begin{aligned}P\{X=1\} &= P\{(-2),(-1),(0)\} = 3\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{5},\\ P\{X=2\} &= P\{(1,-2),(1,-1),(1,0),(2,-2),(2,-1),(2,0)\} = 6\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{10},\\ P\{X=3\} &= P\{(1,2,-2),(1,2,-1),(1,2,0),(2,1,-2),(2,1,-1),(2,1,0)\} =\\ &= 6\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

За збирот на извлечените броеви имаме дека може да е најмалку -2, а најмногу 3, затоа случајната променлива Y прима вредности $Y \in \{-2,-1,0,1,2,3\}$ со веројатности

$$\begin{aligned}P\{Y=-2\} &= P\{(-2)\} = \frac{1}{5},\ P\{Y=-1\} = P\{(-1),(1,-2)\} = \frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4},\\ P\{Y=0\} &= P\{(0),(1,-1),(2,-2)\} = \frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{10},\\ P\{Y=1\} &= P\{(1,0),(2,-1),(1,2,-2),(2,1,-2)\} = 2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{15},\\ P\{Y=2\} &= P\{(2,0),(1,2,-1),(2,1,-1)\} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12},\\ P\{Y=3\} &= P\{(1,2,0),(2,1,0)\} = 2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3.6. Во една кутија има 3 бели и 3 црни топчиња. Играчите A и B извлекуваат по тој редослед по едно топче без враќање. Извлекуваат сè додека не се извлече бело топче. Победник во играта е тој што ќе извлече бело топче. Најди ги распределбите на случајните променливи:

а) $X = I_C$, каде C - победник е играчот A,

б) Y - број на изведени извлекувања.

Решение. Означуваме со A_i - играчот A во i-тото извлекување извлекува бело топче, $i = 1, 3$, а со B_j - играчот B во j-тото извлекување извлекува бело топче, $j = 2, 4$.

а) За настанот C имаме дека $C = A_1 + \overline{A_1}\ \overline{B_2}\ A_3$, од каде, за неговата веројатност имаме,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1) + P(\overline{A_1}\ \overline{B_2}\ A_3) = P(A_1) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{B_2})P_{\overline{A_1}\ \overline{B_2}}(A_3) = \\ &= \frac{3}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{13}{20} = 0,65. \end{aligned}$$

Случајната променлива $X = I_C$ прима две вредности $X \in \{0, 1\}$, и нејзината распределба е

$$P\{X = 0\} = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,65 = 0,35,\ P\{X = 1\} = P(C) = 0,65.$$

б) Случајната променлива Y прима вредности $Y \in \{1, 2, 3, 4\}$, и нејзината распределба е

$$\begin{aligned} P\{Y = 1\} &= P(A_1) = \frac{3}{6} = 0,5, \\ P\{Y = 2\} &= P(\overline{A_1}\ B_2) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(B_2) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = 0,3, \\ P\{Y = 3\} &= P(\overline{A_1}\ \overline{B_2}\ A_3) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{B_2})P_{\overline{A_1}\ \overline{B_2}}(A_3) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = 0,15, \\ P\{Y = 4\} &= P(\overline{A_1}\ \overline{B_2}\ \overline{A_3}\ B_4) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{B_2})P_{\overline{A_1}\ \overline{B_2}}(\overline{A_3})P_{\overline{A_1}\ \overline{B_2}\ \overline{A_3}}(B_4) = \\ &= \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3} = 0,05. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3.7. Два бомбардера A и B имаат секој по 2 бомби и наизменично (прв почнува бомбардерот A) гаѓаат во целта сѐ додека некој не ја погоди целта или не ги потрошат бомбите. Веројатноста бомбардерот A да ја погоди целта е 0,7, а за бомбардерот B е 0,8. Најди ја распределбата на случајната променлива X - број на гаѓања на целта.

Решение. Дефинираме настани A_i - бомбардерот A во i-тото гаѓање ја погодува целта, $i = 1, 3$ и B_i - бомбардерот B во i-тото гаѓање ја погодува целта, $i = 2, 4$. Тогаш, $P(A_1) = P(A_3) = 0,7$ и $P(B_2) = P(B_4) = 0,8$ и при тоа настаните A_1, A_3, B_2, B_4 се независни (во целина). Случајната променлива X прима вредности $X \in \{1, 2, 3, 4\}$ со веројатности

$$\begin{aligned} P\{X = 1\} &= P(A_1) = 0,7, \\ P\{X = 2\} &= P(\overline{A_1}\ B_2) = P(\overline{A_1})P(B_2) = 0,3\cdot 0,8 = 0,24, \\ P\{X = 3\} &= P(\overline{A_1}\ \overline{B_2}\ A_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{B_2})P(A_3) = 0,3\cdot 0,2\cdot 0,7 = 0,042, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X=4\} &= P(\overline{A_1}\,\overline{B_2}\,\overline{A_3}\,B_4+\overline{A_1}\,\overline{B_2}\,\overline{A_3}\,\overline{B_4}) = P(\overline{A_1}\,\overline{B_2}\,\overline{A_3}) = \\ &= P(\overline{A_1})P(\overline{B_2})P(\overline{A_3}) = 0,3\cdot 0,2\cdot 0,3 = 0,018. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3.8. Еден човек има 8 клучеви еднакви по големина и облик. Од сите нив само еден ја отвора вратата од неговиот стан. Тој се обидува да ја отвори вратата, така што испробува еден по еден клуч и по секој обид клучот со кој се обидел да ја отвори вратата го трга на страна, т.е. го издвојува од купчето клучеви. Најди ја распределбата на случајната променлива X - број на обиди додека човекот не ја отвори вратата од својот стан.

Решение. Означуваме со A_i - во i-тиот обид човекот го избрал вистинскиот клуч, т.е. ја отворил вратата од својот стан, $i=1,2,...,8$. Случајната променлива X прима вредности $X\in\{1,2,...,8\}$, а нејзината распределба е

$$\begin{aligned} P\{X=1\} &= P(A_1)=\frac{1}{8}=0,125, \\ P\{X=2\} &= P(\overline{A_1}\,A_2)=P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(A_2)=\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{8}=0,125, \\ P\{X=3\} &= P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3)=P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})P_{\overline{A_1}\,\overline{A_2}}(A_3)=\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{8}=0,125, \end{aligned}$$

на сличен начин,

$$P\{X=4\}=P\{X=5\}=P\{X=6\}=P\{X=7\}=P\{X=8\}=0,125.$$

ЗАДАЧА 3.9. Веројатноста дека на една река во текот на една година ќе ѝ се покачи нивото над критичното е $p=0,05$. На реката се планираат хидротехнички работи во траење од 5 години. Најди ја веројатноста дека во тој период:

а) во ниедна од годините нема да се покачи нивото над критичното,

б) барем во една година ќе се покачи нивото над критичното,

в) во повеќе од две години ќе се покачи нивото над критичното?

Се претпоставува дека надојдувањето на реката е независно во текот на годините.

Решение. Означуваме со A - во текот на една година на реката ѝ се покачило нивото над критичното. Тогаш, $P(A)=p=0,05$, а случајната променлива X - број на години, во текот на $n=5$ години планирани за хидротехнички работи, во кои нивото на реката е покачено над критичното, има $\mathcal{B}(n,p)$ распределба. Тогаш, бараните веројатности се:

а) $P\{X=0\} = \binom{5}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^5 \approx 0,773781$,
б) $P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X=0\} \approx 0,226219$,
в) $P\{X > 2\} = P\{X=3\} + P\{X=4\} + P\{X=5\} =$
$= \binom{5}{3} \cdot 0,05^3 \cdot 0,95^2 + \binom{5}{4} \cdot 0,05^4 \cdot 0,95^1 + \binom{5}{5} \cdot 0,05^5 \cdot 0,95^0 \approx 0.001158$.

ЗАДАЧА 3.10. Од множеството $\{1,2,...,n\}$, $n \geq 2$ случајно се бираат истовремено два броја x и y. Нека $X = \max\{x,y\}$.

а) Најди го законот на распределба на случајната променлива X.

б) Најди ги веројатностите $P\{0,5 < X \leq 3,56\}$ и $P\{X > 2,6\}$.

Решение. Множеството од елементарни настани е $\Omega = \{\{x,y\} \mid x,y \in \{1,2,...,n\}\}$, од каде $|\Omega| = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

а) Случјната променлива X прима вредности $X \in \{2,3,...,n\}$, а нејзиниот закон на распределба е

$$P\{X=k\} = \{\{x,k\} | x \in \{1,2,...,k-1\}\} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)},\ k = 2,3,...,n.$$

б) $P\{0,5 < X \leq 3,56\} = P\{X=2\} + P\{X=3\} = \frac{2\cdot(2-1)}{n(n-1)} + \frac{2\cdot(3-1)}{n(n-1)} = \frac{8}{n(n-1)}$, $P\{X > 2,6\} = 1 - P\{X \leq 2,6\} = 1 - P\{X=2\} = 1 - \frac{2\cdot(2-1)}{n(n-1)} = \frac{n^2-n-2}{n(n-1)}$.

ЗАДАЧА 3.11. Веројатноста да се појави настанот B при некое испитување е p, $0 < p < 1$. Испитувањата се вршат независно едно од друго сѐ додека не се појави комбинацијата $B\overline{B}$. Нека Y е број на испитувања потребни да комбинацијата $B\overline{B}$ да се појави по прв пат. Определи го законот на распределба на Y.

Решение. Случајната променлива Y ги прима вредностите $Y \in \{2,3,...\}$ со веројатности

$$\begin{aligned} P\{Y=k\} &= P(\underbrace{BB...B}_{k-1}\overline{B} + \overline{B}\,\underbrace{BB...B}_{k-2}\overline{B} + ... + \underbrace{\overline{B}\,\overline{B}...\overline{B}}_{k-2}B\overline{B}) = \\ &= p^{k-1}q + p^{k-2}q^2 + ... + pq^{k-1} = q^k\frac{p}{q}\Big(1 + \frac{p}{q} + \Big(\frac{p}{q}\Big)^2 + ... + \Big(\frac{p}{q}\Big)^{k-2}\Big), \end{aligned}$$

каде $q = 1-p$, $k = 2,3,...$. Разгледуваме два случаја $p \neq \frac{1}{2}$ и $p = \frac{1}{2}$.

Ако $p \neq \frac{1}{2}$, тогаш

$$P\{Y=k\} = q^k\frac{p}{q} \cdot \frac{1-(\frac{p}{q})^{k-1}}{1-\frac{p}{q}} = pq\,\frac{q^{k-1}-p^{k-1}}{q-p},\ k = 2,3,....$$

Ако $p = \frac{1}{2}$, тогаш

$$P\{Y=k\} = (k-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k,\ k=2,3,...$$

ЗАДАЧА 3.12. Еден студент дава точен одговор на случајно избрано дополнително прашање со веројатност 0,9. Тој одговара сè додека не се случи да не го знае поставеното прашање. Најди го законот на распределба на бројот на дополнителни прашања на кои одговара студентот.

Решение. Дефинираме настани A_k - студентот дава точен одговор на k-тото избрано дополнително прашање. Тогаш, $P(A_k) = 0,9,\ k = 1,2,3,...$ Нека X е број на дополнителни прашања на кои одговара студентот. Тогаш, X прима вредности $X \in \{1,2,3,...\}$ со веројатности

$$P\{X=k\} = P(A_1...A_{k-1}\ \overline{A_k}) = 0,9^{k-1}\cdot 0,1,\ k=1,2,...$$

ЗАДАЧА 3.13. Случајната променлива X има биномна распределба $\mathcal{B}(3,\frac{1}{4})$. Најди ја распределбата на случајната променлива $Y = 2X+1$.

Решение. Прво, X е случајна променлива, $f(x) = 2x+1$ е Борелова функција, па $Y = f(X) = 2X+1$ е случајна променлива. Сега, случајната променлива X прима вредности $X \in \{0,1,2,3\}$, од каде случајната променлива $Y = 2X+1$ прима вредности $Y \in \{1,3,5,7\}$ со веројатности

$$\begin{aligned}
P\{Y=1\} &= P\{2X+1=1\} = P\{X=0\} = \binom{3}{0}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64},\\
P\{Y=3\} &= P\{2X+1=3\} = P\{X=1\} = \binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64},\\
P\{Y=5\} &= P\{2X+1=5\} = P\{X=2\} = \binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{9}{64},\\
P\{Y=7\} &= P\{2X+1=7\} = P\{X=3\} = \binom{3}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{64}.
\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3.14. Најди ја распределбата на случајната променлива $Y = X^2-1$, ако распределбата на случајната променлива X е дадена со табелата

x	-1	1	2
$P\{X = x\}$	1/4	1/4	1/2

Решение. Бидејќи, X е случајна променлива, $f(x) = x^2 - 1$ е Борелова функција, следи дека $Y = f(X) = X^2 - 1$ е случајна променлива. Потоа, случајната променлива $Y = X^2 - 1$ прима вредности $Y \in \{x^2 - 1 \mid x \in \{-1, 1, 2\}\} = \{0, 3\}$, со веројатности

$$\begin{aligned} P\{Y = 0\} &= P\{X^2 - 1 = 0\} = P\{X \in \{-1, 1\}\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ P\{Y = 3\} &= P\{X^2 - 1 = 3\} = P\{X = 2\} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

односно Y има дискретна рамномерна распределба на множеството $\{0, 3\}$.

ЗАДАЧА 3.15. Случајната променлива X има закон на распределба даден со табелата

x	0	1	2	3
$P\{X = x\}$	0,1	0,3	0,4	0,2

Најди ја распределбата на случајната променлива $Y = \sin(\frac{\pi}{2}X) + 1$.

Решение. Од тоа што X е случајна променлива, $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)+1$ е Борелова функција, следи дека $Y = f(X) = \sin(\frac{\pi}{2}X) + 1$ е случајна променлива. Случајната променлива $Y = \sin(\frac{\pi}{2}X) + 1$ прима вредности $Y \in \{\sin(\frac{\pi}{2}x) + 1 \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} = \{0, 1, 2\}$ со веројатности

$$\begin{aligned} P\{Y = 0\} &= P\{\sin(\frac{\pi}{2}X) + 1 = 0\} = P\{X = 3\} = 0,2, \\ P\{Y = 1\} &= P\{\sin(\frac{\pi}{2}X) + 1 = 1\} = P\{X \in \{0, 2\}\} = 0,1 + 0,4 = 0,5, \\ P\{Y = 2\} &= P\{\sin(\frac{\pi}{2}X) + 1 = 2\} = P\{X = 1\} = 0,3, \end{aligned}$$

односно

y	0	1	2
$P\{Y = y\}$	0,2	0,5	0,3

3.2 Математичко очекување

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност. Математичкото очекување на произволна дискретна случајна променлива $X : \Omega \to \mathbb{R}$ се дефинира во два чекора:

(i) Нека $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е **ненегативна дискретна случајна променлива** која прима вредности $x_k \geq 0,\ k = 1, 2, ...$ со закон на распределба на веројатности $P\{X = x_k\} = p_k,\ k = 1, 2, ...$ и $x_k \geq 0$. Тогаш, **математичко очекување** на случајната променлива X е

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

Ако сумата од десната страна на равенството конвергира, тогаш математичкото очекување е конечно, ако дивергира, тогаш земаме дека $EX = +\infty$.

(ii) Нека $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е **произволна дискретна случајна променлива**. Ако барем едно од математичките очекувања $E(X^+)$ и $E(X^-)$ е конечно, каде

$$X^+ = \max\{X, 0\},\ X^- = \max\{-X, 0\},$$

тогаш дефинираме **математичко очекување** на случајната променлива X со

$$EX = E(X^+) - E(X^-).$$

Ако $E(X^+) = E(X^-) = +\infty$, тогаш велиме дека математичкото очекување на случајната променлива X не постои.

- **Теорема.** Нека $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е **дискретна случајна променлива** со закон на распределба на веројатности $P\{X = x_k\} = p_k,\ k = 1, 2, ...$ и нека $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е Борелова функција. Тогаш, математичкото очекување на $g(X)$, ако постои, е еднакво на

$$E(g(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) P\{X = x_k\}.$$

Специјално, за $g(x) = x$, добиваме дека математичкото очекување на X, ако постои, е еднакво на

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P\{X = x_k\}.$$

Други бројни карактеристики на една случајна променлива се:

- За $n \in \mathbb{N}$, математичкото очекување на X^n, односно $E(X^n)$, ако постои, се нарекува **n-ти момент** на X.
- За $n \in \mathbb{N}$, математичкото очекување на $(X - EX)^n$, односно $E((X - EX)^n)$, ако постои, се нарекува **n-ти централен момент** на X. Вториот централен момент на X се нарекува **дисперзија** или **варијанса** на случајната променлива X, и се означува со $DX = E((X - EX)^2)$ или σ_X^2 или $Var(X)$. Квадратниот корен од дисперзијата се нарекува **стандардна девијација**, и се означува со $\sigma_X = \sqrt{DX}$.
- Нека X е случајна променлива од дискретен тип. **Мода** на X е вредноста moX која X ја прима со најголема веројатност, а **медијана** на X е онаа вредност meX за која се исполнети неравенствата $P\{X \leq meX\} \geq 0,5$ и $P\{X \geq meX\} \geq 0,5$.
- **Својства.** Нека X и Y се дискретни случајни променливи и нека c е реален број. Тогаш,
  (а) $E(c) = c$,
  (б) $E(cX) = cEX$,
  (в) ако $X(w) \leq Y(w)$ за секој $w \in \Omega$, тогаш $EX \leq EY$,
  (г) $E(X + Y) = EX + EY$,
  (д) $DX \geq 0$ и $DX = 0$ ако и само ако $\exists a = const.$, $P\{X = a\} = 1$,
  (ѓ) $D(cX) = c^2 DX$ и $D(c + X) = DX$,
  (е) $DX = E(X^2) - (EX)^2$.

ЗАДАЧА 3.16. Случајната променлива X прима три вредности: $x_1 = 4$ со веројатност $p_1 = 0,5$, $x_2 = 6$ со веројатност $p_2 = 0,3$, и x_3 со веројатност p_3. Најди ги x_3 и p_3, ако математичкото очекување на X е $EX = 8$.

Решение. Од $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, имаме дека $p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0,5 - 0,3 = 0,2$. Потоа, од $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$, имаме дека

$$x_3 = \frac{EX - x_1 p_1 - x_2 p_2}{p_3} = \frac{8 - 4 \cdot 0,5 - 6 \cdot 0,3}{0,2} = 21.$$

ЗАДАЧА 3.17. Дадени се математичките очекувања на случајните променливи X и Y, односно $EX = 2$ и $EY = 1,5$. Најди го математичкото очекување на случајната променлива $U = 3X - Y + 2,5$.

Решение. $EU = E(3X - Y + 2,5) = 3EX - EY + 2,5 = 3 \cdot 2 - 1,5 + 2,5 = 7$.

ЗАДАЧА 3.18. За случајните променливи X и Y, важи $Y = 2 - 3X$. Нека $EX = 2$ и $DX = 4$. Најди ги EY и DY.

Решение. $EY = E(2 - 3X) = 2 - 3EX = 2 - 3 \cdot 2 = -4$,
$DY = D(2 - 3X) = D(-3X) = (-3)^2 DX = 9 \cdot 4 = 36$.

ЗАДАЧА 3.19. Монета се фрла 7 пати. Нека X е број на појавувања на „грб“ на монетата. Најди ги EX и DX.

Решение. Да означиме со A - на монетата се појавил „грб“ и со B_k - настанот A се реализирал точно k пати т.е. „грб“ се појавил k пати. Тогаш случајната променлива X има биномна распределба $\mathcal{B}(7, \frac{1}{2})$ со распределба

$$P\{X = k\} = P(B_k) = \binom{7}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{7-k} = \binom{7}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^7,\ k = 0, 1, ..., 7.$$

Тогаш, за математичкото очекување имаме

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{7} kP\{X = k\} = \sum_{k=0}^{7} k\binom{7}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \sum_{k=1}^{7} k\binom{7}{k} = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^7 \sum_{k=1}^{7} 7 \cdot \binom{6}{k-1} = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot 2^6 = 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Дисперзијата ќе ја најдеме откако прво ќе го најдеме вториот момент

$$\begin{aligned} EX^2 &= \sum_{k=0}^{7} k^2 P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{7} k^2\binom{7}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \sum_{k=2}^{7} k(k-1)\binom{7}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \sum_{k=0}^{7} k\binom{7}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^7 \sum_{k=2}^{7} k(k-1)\binom{7}{k} + EX = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \sum_{k=2}^{7} 7 \cdot 6 \cdot \binom{5}{k-2} + \frac{7}{2} = \\ &= 7 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot 2^5 + \frac{7}{2} = 7 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} = 14, \end{aligned}$$

од каде за дисперзијата имаме

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 14 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}.$$

На сличен начин се покажува дека, во општ случај, случајна променлива X со биномна распределба $\mathcal{B}(n,p)$ има $EX=np$ и $DX=npq$, каде $q=1-p$.

ЗАДАЧА 3.20. Најди ја дисперзијата на дискретната случајна променлива од конечен тип X - број на појавувања на настанот A во две независни испитувања, ако веројатноста за појавување на настанот A во секое од двете испитувања е еднаква и очекуваниот број на појавувања на настанот A во двете испитувања е 1,2.

Решение. Случајната променлива X има $\mathcal{B}(2,p)$ распределба, каде $p=P(A)$ е веројатноста за појавување на настанот A при едно испитување. Затоа, $EX = 2p$, и од услов на задачата $EX=1,2$, од каде $p=0,6$. Тогаш, дисперзијата на X е $DX=2p(1-p)=2\cdot 0,6\cdot 0,4=0,48$.

ЗАДАЧА 3.21. Се изведуваат низа независни испитувања, при што при секое испитување настанот A се реализира со веројатност p, $0<p<1$. Испитувањата се изведуваат сѐ додека не се појави настанот A. Нека X е број на изведени испитувања сѐ до појавувањето на настанот A по прв пат. Определи ги EX и DX.

Решение. Случајната променлива X има геометриска распределба со патраметар p т.е. нејзиниот закон на распределба е

$$P\{X=k\}=pq^k,\ k=0,1,2,...,$$

каде $q=1-p$. За математичкото очекување имаме

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} kP\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = pq\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = pq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial q}(q^k) = pq\frac{\partial}{\partial q}(\sum_{k=1}^{\infty} q^k) = \\ &= pq\frac{\partial}{\partial q}(\frac{q}{1-q}) = pq\ \frac{1}{(1-q)^2} = pq\ \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p}. \end{aligned}$$

Слично, за вториот момент имаме

$$\begin{aligned} EX^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2pq^k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)pq^k + \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = \\ &= pq^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + EX = pq^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial q^2}(q^k) + \frac{1-p}{p} = \\ &= pq^2\frac{\partial^2}{\partial q^2}(\sum_{k=2}^{\infty} q^k) + \frac{1-p}{p} = pq^2\frac{\partial^2}{\partial q^2}(\frac{q^2}{1-q}) + \frac{1-p}{p} = \\ &= pq^2\ \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1-p}{p} = pq^2\ \frac{2}{p^3} + \frac{1-p}{p} = \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p}, \end{aligned}$$

од каде за дисперзијата имаме дека е

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - (\frac{1-p}{p})^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

ЗАДАЧА 3.22. Случајната променлива X има Поасонова распределба $\mathcal{P}(a)$, $a > 0$. Определи ги EX и DX.

Решение. Законот на распределба на $X \sim \mathcal{P}(a)$, $a > 0$ е

$$P\{X = k\} = \frac{a^k}{k!}e^{-a},\ k = 0, 1, 2, ...$$

Тогаш, математичкото очекување е

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} kP\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{a^k}{k!}e^{-a} = a\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}e^{-a} = a\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}e^{-a} = a \cdot 1 = a,$$

затоа што $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}e^{-a} = P\{X \geq 0\} = P(\Omega) = 1$. Понатаму, вториот момент е

$$\begin{aligned} EX^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{a^k}{k!}e^{-a} = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{a^k}{(k-1)!}e^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\frac{a^{k+1}}{k!}e^{-a} = \\ &= a\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{a^k}{k!}e^{-a} + a\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}e^{-a} = a \cdot EX + a \cdot 1 = a^2 + a, \end{aligned}$$

од каде за дисперзијата имаме

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = a^2 + a - a^2 = a.$$

ЗАДАЧА 3.23. Просечниот број на телефонски повици за една канцеларија меѓу 9 и 10 часот е 30. Ако бројот на телефонски повици има Поасонова распределба, најди ја веројатноста дека во еден просечен ден меѓу 9:45 и 10:00 часот нема телефонски повици.

Решение. Нека X е број на телефонски повици меѓу 9 и 10 часот. Дадено е дека $EX = 30$, па распределбата на X е $X \sim \mathcal{P}(30)$. Нека Y е број на телефонски повици меѓу 9:45 и 10:00 часот, тогаш и Y има Поасонова распределба, со параметар $EY = E(X/4) = E((1/4)X) = (1/4)EX = 30/4$, односно, $Y \sim \mathcal{P}(30/4)$.

Тогаш, бараната веројатност е

$$P\{Y = 0\} = \frac{(30/4)^0}{0!}e^{-30/4} = e^{-30/4} \approx 0,000553.$$

ЗАДАЧА 3.24. Стрелец ја погодува целта со веројатност p $(0 < p < 1)$ при секое независно гаѓање. Тој има n куршуми и гаѓа во целта сè додека не ја погоди или не ги потроши сите куршуми. Најди го очекуваниот број на гаѓања.

Решение. Дефинираме случајна променлива X - број на гаѓања во целта, која прима вредности $X \in \{1, 2, ..., n\}$. Нека $q = 1-p$, тогаш законот на распределба на X е

$$P\{X = k\} = q^{k-1}p,\ k = 1, 2, ..., n-1,\ P\{X = n\} = q^{n-1}p + q^n = q^{n-1}.$$

Па, очекуваниот број на гаѓања е

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{n} kP\{X = k\} = \\ &= 1 \cdot p + 2 \cdot qp + 3 \cdot q^2 p + ... + (n-1) \cdot q^{n-2} p + n \cdot q^{n-1} = \\ &= 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-(1-p)^n}{p}. \end{aligned}$$

Забелешка. Точноста на равенството

$$1 \cdot p + 2 \cdot qp + 3 \cdot q^2 p + ... + (n-1) \cdot q^{n-2} p + n \cdot q^{n-1} = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}$$

се покажува со индукција по n.

ЗАДАЧА 3.25. Од кутија во која има 5 бели и 7 црни топчиња, на случаен начин се извлекуваат 6 топчиња одеднаш. Најди ги EX и DX на случајната променлива X - број на извлечени бели топчиња.

Решение. Ако од кутија со n топчиња од кои m се бели, се извлекуваат одеднаш k топчиња, тогаш случајната променлива X - број на извлечени бели топчиња има **хипергеометриска распределба** со параметри n, m, k т.е. нејзиниот закон на распределба е

$$P\{X = i\} = \frac{C_m^i C_{n-m}^{k-i}}{C_n^k},\ \max\{0, m+k-n\} \le i \le \min\{m, k\},$$

од каде математичкото очекување и дисперзијата на X се

$$EX = \frac{km}{n} \quad \text{и} \quad DX = \frac{km(n-m)(n-k)}{n^2(n-1)},$$

(покажи!). Така, за $n = 12$, $m = 5$ и $k = 6$ имаме

$$\begin{aligned} EX &= \frac{km}{n} = \frac{6 \cdot 5}{12} = \frac{5}{2} = 2,5, \\ DX &= \frac{km(n-m)(n-k)}{n^2(n-1)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot (12-5)(12-6)}{12^2 \cdot (12-1)} = \frac{35}{44} \approx 0,795455. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3.26. Дефинирај дискретна случајна променлива за која не постои математичкото очекување.

Решение. Според дефиницијата на математичко очекување на дискретна случајна променлива, треба $E(X^-) = E(X^+) = +\infty$, за да кажеме дека не постои математичкото очекување на X. Нека $r > 0$ и $0 < q < 1$ се такви да $rq^2 \geq 1$ и нека X прима вредности $x_{2k-1} = -r^k < 0$, $x_{2k} = r^k > 0$, $k = 1, 2, ...$ со веројатности $P\{X = x_k\} = (1-q)q^{k-1}$, $k = 1, 2, ...$ Тогаш,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{X = x_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} (1-q)q^{k-1} = (1-q) \cdot \frac{1}{1-q} = 1$$

За математичкото очекување на $X^+ = \max\{X, 0\}$ имаме дека е еднакво на

$$\begin{aligned} E(X^+) &= \sum_{k=1}^{\infty} \max\{x_k, 0\}\ P\{X = x_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k}\ P\{X = x_{2k}\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} r^k (1-q) q^{2k-1} = \frac{1-q}{q} \sum_{k=1}^{\infty} (rq^2)^k = +\infty. \end{aligned}$$

Додека, за математичкото очекување на $X^- = \max\{-X, 0\}$ имаме дека е

$$\begin{aligned} E(X^-) &= \sum_{k=1}^{\infty} \max\{-x_k, 0\}\ P\{X = x_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} (-x_{2k-1})\ P\{X = x_{2k-1}\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} r^k (1-q) q^{2k-2} = \frac{1-q}{q^2} \sum_{k=1}^{\infty} (rq^2)^k = +\infty, \end{aligned}$$

од каде за математичкото очекување на X по дефиниција имаме дека не постои.

ЗАДАЧА 3.27. На лотарија се продадени 100 лоза од по 30 ден. секој. Само четири од лозовите се добитни со по 1000, 300, 200 и 100 ден. Колкава е очекуваната добивка за човек кој купил 2 лоза?

Решение. Дефинираме случајна променлива X - големина на добивката од 2 лоза. Тогаш, $X \in \{0, 100, 200, 300, 400, 500, 1000, 1100, 1200, 1300\}$, и нејзината распределба е

$$P\{X=0\} = \frac{C_{96}^2}{C_{100}^2},\ P\{X=x\} = \frac{C_{96}^1}{C_{100}^2},\ x \in \{100, 200, 1000\},$$

$$P\{X=x\} = \frac{1}{C_{100}^2},\ x \in \{400, 500, 1100, 1200, 1300\},\ P\{X=300\} = \frac{C_{96}^1+1}{C_{100}^2}.$$

Тогаш, очекуваната големина на добивката од 2 лоза е

$$\begin{aligned} EX &= 0 \cdot \frac{C_{96}^2}{C_{100}^2} + (100+200+1000) \cdot \frac{C_{96}^1}{C_{100}^2} + \\ &\quad +(400+500+1100+1200+1300) \cdot \frac{1}{C_{100}^2} + 300 \cdot \frac{C_{96}^1+1}{C_{100}^2} = 32 \text{ ден.} \end{aligned}$$

Но, човек кој купил 2 лоза, за нив платил 60 ден., што значи дека оваа лотарија не е поволна за него, затоа што нуди очекувана загуба од $60-32=28$ ден.

ЗАДАЧА 3.28. Се проверува една пратка од 100 наизглед исти батерии, така што случајно се избира примерок од 5 батерии. Нека во пратката има 10 дефектни батерии.

а) Која е веројатноста во примерокот да се најдат 2 дефектни батерии?

б) Која е веројатноста во примерокот да нема дефектни батерии?

в) Која е веројатноста во примерокот да се најдат помалку од 3 дефектни батерии?

г) Кој е очекуваниот број на дефектни батерии во примерокот?

Решение. Дефинираме случајна променлива X - број на дефектни батерии во примерокот од 5 батерии, тогаш X прима вредности $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ со веројатности

$$P\{X=k\} = \frac{C_{10}^k \cdot C_{90}^{5-k}}{C_{100}^5},\ k=0,1,2,3,4,5.$$

Бараните веројатности а) - в) и очекуваниот број на дефектни батерии г) се:

а) $P\{X=2\} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{90}^3}{C_{100}^5} \approx 0,070219$, б) $P\{X=0\} = \frac{C_{10}^0 \cdot C_{90}^5}{C_{100}^5} \approx 0,583752$,

в) $P\{X<3\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\} =$
$= \frac{C_{10}^0 \cdot C_{90}^5}{C_{100}^5} + \frac{C_{10}^1 \cdot C_{90}^4}{C_{100}^5} + \frac{C_{10}^2 \cdot C_{90}^3}{C_{100}^5} \approx 0,993362$,

г) $EX = \sum_{k=0}^5 k \cdot P\{X=k\} = \sum_{k=0}^5 k \cdot \frac{C_{10}^k \cdot C_{90}^{5-k}}{C_{100}^5} = 0,5$.

3.3 Случајни вектори од дискретен тип

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност. За $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, функцијата $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ се нарекува **n-димензионална случајна променлива** или **(n-димензионален) случаен вектор** ако за секое Борелово множество $B \in \mathcal{B}^n$ важи

$$X^{-1}(B) = \{w : X(w) \in B\} \in \mathcal{F},$$

каде $\mathcal{B}^n$ е n-димензионалната Борелова σ-алгебра.

- **Теорема.** Функцијата $X = (X_1, X_2, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ е n-димензионален случаен вектор ако и само ако неговите компоненти $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ се случајни променливи.

- **Теорема.** Нека $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ е случаен вектор и $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ е Борелова функција (т.е. за секое Борелово множество $B \in \mathcal{B}^m$ важи $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n$). Тогаш, секоја векторско вредносна функција

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

  е исто така случаен вектор.

Случајните променливи $\{X_j | j \in \mathcal{J}\}$ велиме дека се **независни (во целост)** ако за секој $k \geq 2$, секоја k-торка индекси $(j_1, j_2, ..., j_k)$ од $\mathcal{J}$ и секоја k-торка $(B_1, B_2, ..., B_k)$ од Борелови множества над $\mathbb{R}$ важи

$$P\big(\bigcap_{i=1}^{k} \{X_{j_i} \in B_i\}\big) = \prod_{i=1}^{k} P\{X_{j_i} \in B_i\}.$$

Случајниот вектор X е од **дискретен тип**, ако множеството вредности $X(\Omega)$ е конечно или преброиво. Во понатамошните излагања на теоријата ќе се задржиме на **дводимензионалните случајни вектори од дискретен тип**, случајот кога $n = 2$.

Нека (X, Y) е дводимензионален случен вектор од дискретен тип. Нека случајната променлива X ги прима вредностите $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, а случајната променлива Y ги прима вредностите $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ Тогаш,

- **законот на распределба на веројатности** на (X, Y) е даден со

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij},\ i = 1, 2, ...,\ j = 1, 2, ...,$$

  при што $\sum_i^\infty \sum_j^\infty p_{ij} = 1$;

- **маргиналните закони на распределба на веројатности** на X и Y соодветно се

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j}^{\infty} p_{ij} = \hat{p}_i,\ i = 1, 2, ...,$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i}^{\infty} p_{ij} = \tilde{p}_j,\ j = 1, 2, ...;$$

- **условните закони на распределба на веројатности** на X при услов $Y = y_k$ и на Y при услов $X = x_s$ соодветно се

$$P\{X = x_i \mid Y = y_k\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_k\}}{P\{Y = y_k\}},\ i = 1, 2, ...,$$

$$P\{Y = y_j \mid X = x_s\} = \frac{P\{X = x_s, Y = y_j\}}{P\{X = x_s\}},\ j = 1, 2, ...$$

- **Теорема.** Нека (X, Y) е дискретен случаен вектор со закон на распределба на веројатности $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij},\ i = 1, 2, ..., j = 1, 2, ...$ и нека $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е Борелова функција. Тогаш,

$$E(g(X, Y)) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}.$$

- **Теорема.** Ако X и Y се случајни променливи од дискретен тип, тогаш X и Y се независни, ако и само ако за секој пар (x_i, y_j) од множеството вредности на случајниот вектор (X, Y) важи

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\},\ i = 1, 2, ...,\ j = 1, 2, ...$$

- **Теорема.** Ако X и Y се независни случајни променливи од дискретен тип, тогаш
  (а) $E(XY) = EX \cdot EY$,
  (б) $D(X + Y) = DX + DY$.

Нека X и Y се дискретни случајни променливи со $0 < DX < +\infty$ и $0 < DY < +\infty$. Ги дефинираме следните бројни карактеристики:

- **Коваријанса** на X и Y е бројот дефиниран со

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY)) = E(XY) - EX \cdot EY.$$

- **Коефициент на корелација** на X и Y е бројот дефиниран со

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}} = \frac{E(XY) - EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}.$$

- **Теорема.** За случајните променливи од дискретен тип X и Y важи

$$D(X\pm Y) = DX + DY \pm 2\mathrm{cov}(X,Y).$$

- **Теорема.** Ако X и Y се независни случајни променливи од дискретен тип, тогаш $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ и $\rho(X,Y) = 0$.

- **Теорема.** За коефициентот на корелација на случајните променливи од дискретен тип X и Y важи $|\rho(X,Y)| \le 1$.

ЗАДАЧА 3.29. Даден е законот на распределба на случајниот вектор (X,Y) со следната табела

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$a/3$	$a/3$	$1/36$
1	$2/9$	$2/9$	$a/6$
2	$1/9$	$a/3$	$a/12$

а) Определи ја вредноста на $a\in\mathbb{R}$.

б) Најди ги маргиналните закони на распределба на X и Y.

в) Најди ја условната распределба на X при услов $Y=0$ и условната распределба на Y при услов $X=1$.

г) Најди ги веројатностите $P\{X=1, Y<1\}$, $P\{X<2, Y>1\}$ и $P\{X<0, Y>0\}$.

д) Испитај ја независноста на случајните променливи X и Y.

ѓ) Најди го коефициентот на корелаццијa $\rho(X,Y)$.

Решение. а) Ако означиме со $p_{ij} = P\{X=x_i, Y=y_j\}$, $x_i\in\{0,1,2\}$, $y_j = \{0,1,2\}$, тогаш од $\sum_i\sum_j p_{ij} = 1$ имаме

$$\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{1}{36}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{a}{6}+\frac{1}{9}+\frac{a}{3}+\frac{a}{12} = 1,$$

од каде се добива дека $a=\frac{1}{3}$, па табелата со законот на распределба на случајниот вектор (X,Y) е

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/9	1/9	1/36
1	2/9	2/9	1/18
2	1/9	1/9	1/36

б) Маргиналниот закон на распределба на X е (се собираат веројатностите по редици)

$$\begin{aligned} P\{X=0\} &= P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=0,Y=2\}= \\ &= \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}=\frac{1}{4}, \\ P\{X=1\} &= P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}= \\ &= \frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{2}, \\ P\{X=2\} &= P\{X=2,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}+P\{X=2,Y=2\}= \\ &= \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}=\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Маргиналниот закон на распределба на Y е (се собираат веројатностите по колони)

$$\begin{aligned} P\{Y=0\} &= P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}+P\{X=2,Y=0\}= \\ &= \frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}, \\ P\{Y=1\} &= P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=1\}= \\ &= \frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}, \\ P\{Y=2\} &= P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=2\}= \\ &= \frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{1}{9}. \end{aligned}$$

в) Условната распределба на X при услов $Y=0$ е

$$\begin{aligned} P\{X=0|Y=0\} &= \frac{P\{X=0,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{4}, \\ P\{X=1|Y=0\} &= \frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \\ P\{X=2|Y=0\} &= \frac{P\{X=2,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Додека, условната распределба на Y при услов $X = 1$ е

$$\begin{aligned}
P\{Y = 0|X = 1\} &= \frac{P\{X = 1, Y = 0\}}{P\{X = 1\}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}, \\
P\{Y = 1|X = 1\} &= \frac{P\{X = 1, Y = 1\}}{P\{X = 1\}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}, \\
P\{Y = 2|X = 1\} &= \frac{P\{X = 1, Y = 2\}}{P\{X = 1\}} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

г) За бараните веројатности имаме

$$\begin{aligned}
P\{X = 1, Y < 1\} &= P\{X = 1, Y = 0\} = 2/9, \\
P\{X < 2, Y > 1\} &= P\{X \in \{0, 1\}, Y = 2\} = P\{X = 0, Y = 2\} + P\{X = 1, Y = 2\} = \\
&= \frac{1}{36} + \frac{1}{18} = \frac{1}{12}, \\
P\{X < 0, Y > 0\} &= 0.
\end{aligned}$$

д) Случајните променливи X и Y се независни ако

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\},\ x_i \in \{0, 1, 2\},\ y_j = \{0, 1, 2\}.$$

Со директна проверка, се покажува дека секое од 9-те равенства е точно (на пример, $P\{X = 1, Y = 2\} = 1/18 = (1/2) \cdot (1/9) = P\{X = 1\}P\{Y = 2\}$ е едно од 9-те равенства), односно X и Y се независни случајни променливи.

ѓ) Од д) имаме дека X и Y се независни случајни променливи, па затоа $\rho(X, Y) = 0$.

ЗАДАЧА 3.30. Во една кутија има 3 бели и 3 црни топчиња. На случаен начин се извлекуваат топчиња едно по едно без враќање сѐ додека не се извлече бело топче. Нека X е број на извлечени топчиња. Понатаму извлекувањето продолжува сѐ додека не се извлече црно топче. Нека Y е број на извлечени топчиња во втората серија. Најди ја распределбата на случајниот вектор (X, Y).

Решение. Дефинираме настани A_i - извлечено е бело топче во i-тото извлекување, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, тогаш настанот $\overline{A_i}$ - извлечено е црно топче во i-тото извлекување, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Потребни се најмалку едно, а најмногу четири извлекувања за да се извлече бело топче по прв пат, па затоа случајната променлива X прима вредности $X \in \{1, 2, 3, 4\}$. Исто така, потребни се уште најмалку едно, а најмногу три извлекувања, за да се извлече црно топче по прв пат во втората серија извлекувања, па затоа случајната променлива

Y прима вредности $Y \in \{1,2,3\}$. Тогаш, распределбата на случајниот вектор (X,Y) е

$$\begin{aligned} P\{X=1,Y=1\} &= P(A_1\,\overline{A_2}) = P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{10},\\ P\{X=1,Y=2\} &= P(A_1\,A_2\,\overline{A_3}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A_3}|A_1\,A_2) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{20}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X=1,Y=3\} &= P(A_1\,A_2\,A_3\,\overline{A_4}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\,A_2)P(\overline{A_4}|A_1\,A_2\,A_3) =\\ &= \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3} = \frac{1}{20},\\ P\{X=2,Y=1\} &= P(\overline{A_1}\,A_2\,\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\,A_2) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{20},\\ P\{X=2,Y=2\} &= P(\overline{A_1}\,A_2\,A_3\,\overline{A_4}) = P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\,A_2)P(\overline{A_4}|\overline{A_1}\,A_2\,A_3) =\\ &= \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{10},\ \text{итн.} \end{aligned}$$

односно распределбата дадена во табела е

X \ Y	1	2	3
1	3/10	3/20	1/20
2	3/20	1/10	1/20
3	1/20	1/20	1/20
4	1/20	0	0

ЗАДАЧА 3.31. Двајца стрелци независно еден од друг стрелаат по еднаш во иста мета. Ги дефинираме настаните A_i - i-тиот стрелец ја погодува метата, $i = 1,2$, при што $P(A_i) = p_i$, $i = 1,2$. Нека $X = I_{A_1}$ и $Y = I_{A_2}$. Најди ја распределбата на случајниот вектор (X,Y).

Решение. Случајните променливи X и Y се Бернулиеви случајни променливи и примаат вредности $X \in \{0,1\}$ и $Y \in \{0,1\}$ соодветно. Од независноста на гаѓањата, имаме дека настаните A_1 и A_2 се независни, па распределбата на случајниот вектор (X,Y) е

$$\begin{aligned} P\{X=0,Y=0\} &= P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = q_1q_2,\\ P\{X=0,Y=1\} &= P(\overline{A_1}\,A_2) = P(\overline{A_1})P(A_2) = q_1p_2,\\ P\{X=1,Y=0\} &= P(A_1\,\overline{A_2}) = P(A_1)P(\overline{A_2}) = p_1q_2,\\ P\{X=1,Y=1\} &= P(A_1\,A_2) = P(A_1)P(A_2) = p_1p_2, \end{aligned}$$

каде $q_i = 1 - p_i$, $i = 1,2$.

ЗАДАЧА 3.32. Една фер монета се фрла 3 пати. Доколку при секое од трите фрлања падне иста страна, се фрла уште еднаш. Нека X е број на паднати „грбови“, а Y е број на фрлања. Најди го коефициентот на корелација $\rho(X, Y)$. Дали X и Y се независни случајни променливи?

Решение. Просторот од елементарни настани е $\Omega = \{$(п, п, п, п), (п, п, п, г), (п, п, г), (п, г, п), (г, п, п), (п, г, г), (г, п, г), (г, г, п), (г, г, г, п), (г, г, г, г)$\}$, при што не се сите елементарни настани еднаквоверојатни. Знаејќи дека веројатноста за појавување на „пара“, односно „грб“ при едно фрлање на фер монета е $\frac{1}{2}$ и заради независноста на фрлањата имаме дека $P\{$(п, п, г)$\} = P\{$(п, г, п)$\} = P\{$(г, п, п)$\} = P\{$(п, г, г)$\} = P\{$(г, п, г)$\} = P\{$(г, г, п)$\} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ и $P\{$(п, п, п, п)$\} = P\{$(п, п, п, г)$\} = P\{$(г, г, г, п)$\} = P\{$(г, г, г, г)$\} = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$.

Случајните променливи X и Y примаат вредности $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и $Y = \{3, 4\}$ соодветно, па распределбата на случајниот вектор (X, Y) е

$$\begin{aligned}
P\{X=0, Y=3\} &= 0,\\
P\{X=0, Y=4\} &= P\{(\text{п, п, п, п})\} = \frac{1}{16},\\
P\{X=1, Y=3\} &= P\{(\text{п, п, г}), (\text{п, г, п}), (\text{г, п, п})\} = 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{6}{16},\\
P\{X=1, Y=4\} &= P\{(\text{п, п, п, г})\} = \frac{1}{16},\\
P\{X=2, Y=3\} &= P\{(\text{п, г, г}), (\text{г, п, г}), (\text{г, г, п})\} = 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{6}{16}, \text{ итн.}
\end{aligned}$$

односно

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4
3	0	6/16	6/16	0	0
4	1/16	1/16	0	1/16	1/16

Од тука, маргиналните закони на распределба на X и Y се (сумирањето е по колони, односно редици):

x	0	1	2	3	4
$P\{X=x\}$	1/16	7/16	6/16	1/16	1/16

y	3	4
$P\{Y=y\}$	12/16	4/16

Тогаш,

$$EX = 0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{7}{16} + 2\cdot\frac{6}{16} + 3\cdot\frac{1}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{26}{16},$$

$$E(X^2) = 0^2\cdot\frac{1}{16} + 1^2\cdot\frac{7}{16} + 2^2\cdot\frac{6}{16} + 3^2\cdot\frac{1}{16} + 4^2\cdot\frac{1}{16} = \frac{56}{16},$$

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{56}{16} - (\frac{26}{16})^2 = \frac{55}{64},$$

$$EY = 3\cdot\frac{12}{16}+4\cdot\frac{4}{16}=\frac{52}{16},\ E(Y^2)=3^2\cdot\frac{12}{16}+4^2\cdot\frac{4}{16}=\frac{172}{16},$$

$$DY = E(Y^2)-(EY)^2=\frac{172}{16}-(\frac{52}{16})^2=\frac{3}{16},$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_i\sum_j x_iy_jP\{X=x_i,Y=y_j\} = \\ &= 0\cdot 3\cdot 0+0\cdot 4\cdot\frac{1}{16}+1\cdot 3\cdot\frac{6}{16}+1\cdot 4\cdot\frac{1}{16}+2\cdot 3\cdot\frac{6}{16}+ \\ &\quad +2\cdot 4\cdot 0+3\cdot 3\cdot 0+3\cdot 4\cdot\frac{1}{16}+4\cdot 3\cdot 0+4\cdot 4\cdot\frac{1}{16}=\frac{86}{16}. \end{aligned}$$

Па, коефициентот на корелација е

$$\rho(X,Y)=\frac{E(XY)-EXEY}{\sqrt{DXDY}}=\frac{\frac{86}{16}-\frac{26}{16}\cdot\frac{52}{16}}{\sqrt{\frac{55}{64}\cdot\frac{3}{16}}}=\frac{13\sqrt{165}}{660}\approx 0,253012.$$

Случајните променливи X и Y не се независни, бидејќи коефициентот на корелација не е нула. Потврда дека не се независни е и следната неедначкост,

$$P\{X=0,Y=3\}=0\neq\frac{1}{16}\cdot\frac{12}{16}=P\{X=0\}P\{Y=3\}.$$

ЗАДАЧА 3.33. Три топчиња на случаен начин се разместуваат во три кутии A, B и C. Ако X е бројот на топчиња во кутијата A, а Y е бројот на празни кутии, најди го коефициентот на корелација $\rho(X,Y)$. Дали X и Y се независни случајни променливи?

Решение. Со (a,b,c) го означуваме елементарниот настан - во кутијата A има a топчиња, во кутијта B има b топчиња и во кутијата C има c топчиња. Тогаш, просторот од елементарни настани е $\Omega=\{(3,0,0),(0,3,0),(0,0,3),(2,1,0),(2,0,1),(0,2,1),(1,2,0),(1,0,2),(0,1,2),(1,1,1)\}$, при што не се сите елементарни настани еднакво веројатни. Разместувањето на топчињата во кутиите може да се разгледува како доделување на кутија на секое од топчињата. Доделувањето е случајно, еднакловеројатно може да се додели секоја од кутиите A, B, C (со веројатност $1/3$) и независно. Затоа, $P\{(3,0,0)\}=P\{(0,3,0)\}=P\{(0,0,3)\}=(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$, $P\{(2,1,0)\}=P\{(2,0,1)\}=P\{(0,2,1)\}=P\{(1,2,0)\}=P\{(1,0,2)\}=P\{(0,1,2)\}=\frac{3!}{2!1!}\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{27}$, $P\{(1,1,1)\}=\frac{3!}{1!1!1!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{27}$.

Множествата вредности на случајните променливи X и Y соодветно се $X \in \{0,1,2,3\}$ и $Y = \{0,1,2\}$. За распределбата на случајниот вектор (X,Y) имаме

$$\begin{aligned}
P\{X=0,Y=0\} &= 0,\\
P\{X=0,Y=1\} &= P\{(0,2,1),(0,1,2)\} = 2\cdot\frac{3}{27} = \frac{6}{27},\\
P\{X=0,Y=2\} &= P\{(0,3,0),(0,0,3)\} = 2\cdot\frac{1}{27} = \frac{2}{27},\\
P\{X=1,Y=0\} &= P\{(1,1,1)\} = \frac{6}{27},\\
P\{X=1,Y=1\} &= P\{(1,2,0),(1,0,2)\} = 2\cdot\frac{3}{27} = \frac{6}{27},\\
P\{X=1,Y=2\} &= 0, \text{ и.т.н.}
\end{aligned}$$

односно

X \ Y	0	1	2
0	0	6/27	2/27
1	6/27	6/27	0
2	0	6/27	0
3	0	0	1/27

Од тука, маргиналните закони на распределба на X и Y се (сумирањето е по редици, односно колони):

x	0	1	2	3
$P\{X=x\}$	8/27	12/27	6/27	1/27

y	0	1	2
$P\{Y=y\}$	6/27	18/27	3/27

Тогаш,

$$EX = 0\cdot\frac{8}{27} + 1\cdot\frac{12}{27} + 2\cdot\frac{6}{27} + 3\cdot\frac{1}{27} = 1,\ EY = 0\cdot\frac{6}{27} + 1\cdot\frac{18}{27} + 2\cdot\frac{3}{27} = \frac{24}{27},$$

$$\begin{aligned}
E(XY) &= 0\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot\frac{6}{27} + 0\cdot 2\cdot\frac{2}{27} + 1\cdot 0\cdot\frac{6}{27} + 1\cdot 1\cdot\frac{6}{27} + 1\cdot 2\cdot 0 +\\
&\quad + 2\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot\frac{6}{27} + 2\cdot 2\cdot 0 + 3\cdot 0\cdot 0 + 3\cdot 1\cdot 0 + 3\cdot 2\cdot\frac{1}{27} = \frac{24}{27},
\end{aligned}$$

па коваријансата на X и Y е

$$cov(X,Y) = E(XY) - EX\ EY = \frac{24}{27} - 1\cdot\frac{24}{27} = 0,$$

од каде заклучуваме дека и коефициентот на корелација е $\rho(X,Y) = 0$. Но, случајните променливи X и Y не се независни (иако $\rho(X,Y) = 0$). Имено,

$$P\{X=0,Y=0\} = 0 \neq \frac{8}{27}\cdot\frac{6}{27} = P\{X=0\}P\{Y=0\}.$$

ЗАДАЧА 3.34. Нека X има распределба

x	-1	0	1
$P\{X=x\}$	1/4	1/2	1/4

и нека $Y = X^2$. Покажи дека $\rho(X,Y) = 0$, но X и Y не се независни случајни променливи.

Решение. Од распределбата на случајната променлива X имаме

$$EX = (-1)\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} = 0,$$

$$EY = E(X^2) = (-1)^2\cdot\frac{1}{4} + 0^2\cdot\frac{1}{2} + 1^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$E(XY) = E(X^3) = (-1)^3\cdot\frac{1}{4} + 0^3\cdot\frac{1}{2} + 1^3\cdot\frac{1}{4} = 0,$$

од каде за коваријансата на X и Y имаме дека е

$$cov(X,Y) = E(XY) - EX\cdot EY = 0 - 0\cdot\frac{1}{2} = 0,$$

па и коефициентот на корелација на X и Y е $\rho(X,Y) = 0$. Но, случајните променливи X и Y не се независни затоа што

$$P\{X=-1, Y=0\} = P\{X=-1, X^2=0\} = 0,$$

додека пак

$$P\{X=-1\}P\{Y=0\} = P\{X=-1\}P\{X^2=0\} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} \neq 0.$$

ЗАДАЧА 3.35. Нека X и Y се независни случајни променливи со закони на распределба дадени со табелите

x	0	1	2	3
$P\{X=x\}$	0,2	0,3	0,4	0,1

y	1	3	4
$P\{Y=y\}$	0,7	0,2	0,1

Најди ги распределбите на случајните променливи $U = \min\{X,Y\}$ и $V = X+Y$.

Решение. Од независноста на X и Y имаме дека

$$P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},\ x_i\in\{0,1,2,3\},\ y_j=\{1,3,4\},$$

од каде распределбата на случајниот вектор (X, Y) е

$X \backslash Y$	1	3	4
0	0,14	0,04	0,02
1	0,21	0,06	0,03
2	0,28	0,08	0,04
3	0,07	0,02	0,01

Случајните променливи $U = \min\{X, Y\}$ и $V = X + Y$ примаат вредности $U \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ соодветно. Распределбата на U е

$$\begin{aligned}
P\{U = 0\} &= P\{\min\{X, Y\} = 0\} = P\{(X, Y) \in \{(0, 1), (0, 3), (0, 4)\}\} = \\
&= 0,14 + 0,04 + 0,02 = 0,20, \\
P\{U = 1\} &= P\{\min\{X, Y\} = 1\} = P\{(X, Y) \in \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 1)\}\} = \\
&= 0,21 + 0,06 + 0,03 + 0,28 + 0,07 = 0,65, \\
P\{U = 2\} &= P\{\min\{X, Y\} = 2\} = P\{(X, Y) \in \{(2, 3), (2, 4)\}\} = 0,08 + 0,04 = 0,12, \\
P\{U = 3\} &= P\{\min\{X, Y\} = 3\} = P\{(X, Y) \in \{(3, 3), (3, 4)\}\} = 0,02 + 0,01 = 0,03.
\end{aligned}$$

Слично, се добива дека распределбата на V е

v	1	2	3	4	5	6	7
$P\{V = v\}$	0,14	0,21	0,32	0,15	0,11	0,06	0,01

ЗАДАЧА 3.36. Нека X и Y се независни случајни променливи дадени со своите закони на распределба

x	-1	1	1	2
$P\{X = x\}$	0,20	0,15	0,40	0,25

y	0	2	4
$P\{Y = y\}$	0,3	0,2	0,5

Најди ги $E(X + Y)$, $E(XY)$ и $E(X + 2Y)$.

Решение. Од дадените закони на распределба, имаме дека

$$EX = (-1) \cdot 0,20 + 0 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,40 + 2 \cdot 0,25 = 0,7,$$

$$EY = 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,5 = 2,4,$$

па од својствата на математичкото очекување и независноста на случајните променливи X и Y имаме дека

$$\begin{aligned}
E(X + Y) &= EX + EY = 0,7 + 2,4 = 3,1, \\
E(XY) &= EX \cdot EY = 0,7 \cdot 2,4 = 1,68, \\
E(X + 2Y) &= EX + 2EY = 0,7 + 2 \cdot 2,4 = 5,5.
\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3.37. Се фрлаат две хомогени коцки. Нека X е бројот на точки на првата коцка, а Y е максимум од паднатите броеви.

а) Најди ја распределбата на случајниот вектор (X, Y).

б) Најди ја условната распределба на Y при услов $X = 2$.

в) Најди ја веројатноста дека најголемиот број на точки кои паднале на двете коцки е 5, ако на првата коцка паднале 2 точки.

Решение. Просторот од елементарни настани е $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ и при тоа секој елементарен настан е еднакловеројатен со $P\{(x_1, x_2)\} = \frac{1}{36}$, види објаснување во Задача 3.4.

а) Случајните променливи X и Y примаат вредности $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ соодветно, при што законот на распределба на случајниот вектор (X, Y) е даден со табелата

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36
4	0	0	0	4/36	1/36	1/36
5	0	0	0	0	5/36	1/36
6	0	0	0	0	0	6/36

Еве пример како се добиваат некои од веројатностите во табелата

$$\begin{aligned} P\{X = 1, Y = 4\} &= P\{(1, 4)\} = \frac{1}{36}, \\ P\{X = 2, Y = 5\} &= P\{(2, 5)\} = \frac{1}{36}, \\ P\{X = 3, Y = 3\} &= P\{(3, 1), (3, 2), (3, 3)\} = \frac{3}{36}, \text{ итн.} \end{aligned}$$

б) Условната распределба на Y при услов $X = 2$ е

$$P\{Y = 1 | X = 2\} = \frac{P\{X = 2, Y = 1\}}{P\{X = 2\}} = \frac{0}{\frac{1}{6}} = 0,$$

$$\begin{aligned} P\{Y = 2 | X = 2\} &= \frac{P\{X = 2, Y = 2\}}{P\{X = 2\}} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}, \\ P\{Y = k | X = 2\} &= \frac{P\{X = 2, Y = k\}}{P\{X = 2\}} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}, \ k = 3, 4, 5, 6. \end{aligned}$$

в) Бараната веројатност е $P\{Y = 5|X = 2\} = \frac{1}{6}$.

ЗАДАЧА 3.38. Во една кутија се наоѓаат 6 бели топчиња кои имаат маса секое по 3 грама и 4 црни топчиња кои имаат маса секое по 5 грама. На случаен начин од кутијата се извлекуваат две топчиња одеднаш. Нека X е број на извлечени бели топчиња, а Y е вкупната маса на извлечените топчиња.

а) Најди ја распределбата на случајниот вектор (X, Y).

б) Најди ја условната распределба на X при услов $Y \in (0,5; 8,25)$.

Решение. а) Случајните променливи X и Y примаат вредности $X \in \{0, 1, 2\}$ и $Y \in \{6, 8, 10\}$ соодветно. И бидејќи се возможни само три различни состави на извлечените топчиња: A - извлечени се две бели, B - извлечени се едно бело и едно црно топче, C - извлечени се две црни топчиња, ќе имаме само три ненулти веројатности во распределбата на случајниот вектор (X, Y). Имено,

$$\begin{aligned} P\{X = 2, Y = 6\} &= P(A) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{5}{15}, \\ P\{X = 1, Y = 8\} &= P(B) = \frac{C_6^1 \cdot C_5^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}, \\ P\{X = 0, Y = 10\} &= P(C) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Останатите веројатности во распределбата на (X, Y) се нули, односно распределбата на (X, Y) дадена со табела е

$X \backslash Y$	6	8	10
0	0	0	2/15
1	0	8/15	0
2	5/15	0	0

б) Условната распределба на X при услов $Y \in (0,5; 8,25)$ е

$$P\{X = 0|Y \in (0,5; 8,25)\} = P\{X = 0|Y \in \{6, 8\}\} =$$
$$= \frac{P\{X = 0, Y \in \{6, 8\}\}}{Y \in \{6, 8\}} = \frac{P\{X = 0, Y = 6\} + P\{X = 0, Y = 8\}}{Y \in \{6, 8\}} = \frac{0 + 0}{\frac{5}{15} + \frac{8}{15}} = 0,$$

$$P\{X = 1|Y \in (0,5; 8,25)\} = P\{X = 1|Y \in \{6, 8\}\} =$$
$$= \frac{P\{X = 1, Y \in \{6, 8\}\}}{Y \in \{6, 8\}} = \frac{P\{X = 1, Y = 6\} + P\{X = 1, Y = 8\}}{Y \in \{6, 8\}} = \frac{0 + \frac{8}{15}}{\frac{5}{15} + \frac{8}{15}} = \frac{8}{13},$$

$$P\{X = 2|Y \in (0,5; 8,25)\} = P\{X = 2|Y \in \{6, 8\}\} =$$
$$= \frac{P\{X = 2, Y \in \{6, 8\}\}}{Y \in \{6, 8\}} = \frac{P\{X = 2, Y = 6\} + P\{X = 2, Y = 8\}}{Y \in \{6, 8\}} = \frac{\frac{5}{15} + 0}{\frac{5}{15} + \frac{8}{15}} = \frac{5}{13}.$$

ЗАДАЧА 3.39. Од две монети едната е исправна, а другата има на двете страни „грб". На случаен начин се избира една монета и се фрла два пати. Нека $X = I_A$, каде A - избрана е исправната монета, а Y е број на паднати „грбови" при фрлање на избраната монета. Најди ја распределбата на случајниот вектор (X, Y).

Решение. Случајните променливи X и Y ги примаат вредностите $X \in \{0, 1\}$ и $Y = \{0, 1, 2\}$ соодветно. Распределбата на случајниот вектор (X, Y) ќе ја бараме со помош на условни веројатности, затоа што исходот од фрлањето на монетата („пара" или „грб") зависи од изборот на монетата (исправна т.е. $X = 1$ или неисправна т.е. $X = 0$). При тоа, ако сме ја избрале неисправната монета, сигурно ќе се паднат два „грба" т.е. $P\{Y = 2|X = 0\} = 1$, односно ако сме ја избрале неисправната монета невозможно е да не се паднат „грбови" или да се падне еден „грб" т.е. $P\{Y = 0|X = 0\} = P\{Y = 1|X = 0\} = 0$. Ако сме ја избрале исправната монета, тогаш условната распределба на Y при услов $X = 1$ се поистоветува со распределбата одредена во Задача 3.68. Прво, распределбата на $X = I_A$ е

$$P\{X = 1\} = P\{I_A = 1\} = P(A) = \frac{1}{2},\ P\{X = 0\} = P\{I_A = 0\} = 1 - P(A) = \frac{1}{2}.$$

Сега, распределбата на (X, Y) е

$$\begin{aligned}
P\{X = 0, Y = 0\} &= P\{X = 0\}P\{Y = 0|X = 0\} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0,\\
P\{X = 0, Y = 1\} &= P\{X = 0\}P\{Y = 1|X = 0\} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0,\\
P\{X = 0, Y = 2\} &= P\{X = 0\}P\{Y = 2|X = 0\} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2},\\
P\{X = 1, Y = 0\} &= P\{X = 1\}P\{Y = 0|X = 1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8},\\
P\{X = 1, Y = 1\} &= P\{X = 1\}P\{Y = 1|X = 1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},\\
P\{X = 1, Y = 2\} &= P\{X = 1\}P\{Y = 2|X = 1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

или со табела

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	0	1/2
1	1/8	1/4	1/8

ЗАДАЧА 3.40. Случајната променлива X има Поасонова распределба $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Најди ја распределбата на случајната променлива X при услов $X > 0$.

Решение. Ако $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, тогаш распределбата на X е

$$P\{X = x\} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\ x = 0, 1, 2, ...$$

Бараната условна распределба на X при услов $X > 0$ е

$$\begin{aligned}
P\{X = x|X > 0\} &= \frac{P\{X = x, X > 0\}}{P\{X > 0\}} = \frac{P\{X = x\}}{1 - P\{X = 0\}} = \\
&= \frac{\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}}{1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}} = \frac{\lambda^x}{x!\,(e^\lambda - 1)},\ x = 1, 2, ... \\
P\{X = 0|X > 0\} &= \frac{P\{X = 0, X > 0\}}{P\{X > 0\}} = \frac{P(\emptyset)}{P\{X > 0\}} = 0.
\end{aligned}$$

3.4 Разни задачи

ЗАДАЧА 3.41. На случаен начин се избира природен број не поголем од 20. Нека X е бројот на делители на избраниот број. Најди го законот на распределба на случајната променлива X и веројатноста на настанот C - случајно избраниот број не е сложен.

Решение. Дефинираме настани A_i - избран е бројот i, $i = 1, 2, ..., 20$, и при тоа $P(A_i) = \frac{1}{20}$, $i = 1, 2, ..., 20$ и настаните се попарно дисјунктни. Тогаш, случајната променлива X ги прима вредностите $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ со веројатности

$$\begin{aligned}
P\{X = 1\} &= P(A_1) = \frac{1}{20} = 0,05, \\
P\{X = 2\} &= P(A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7 \cup A_{11} \cup A_{13} \cup A_{17} \cup A_{19}) = \frac{8}{20} = 0,40, \\
P\{X = 3\} &= P(A_4 \cup A_9) = \frac{2}{20} = 0,10, \\
P\{X = 4\} &= P(A_6 \cup A_8 \cup A_{10} \cup A_{14} \cup A_{15}) = \frac{5}{20} = 0,25, \\
P\{X = 5\} &= P(A_{16}) = \frac{1}{20} = 0,05, \\
P\{X = 6\} &= P(A_{12} \cup A_{18} \cup A_{20}) = \frac{3}{20} = 0,15.
\end{aligned}$$

За веројатноста на настанот C имаме

$$P(C) = P\{X \leq 2\} = P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 0,05 + 0,40 = 0,45.$$

ЗАДАЧА 3.42. Во една кутија има n производи од кои еден е дефектен. Од кутијата на случаен начин се извлекува еден по еден производ, без извлечениот да се враќа назад во кутијата, сѐ додека не се извлече дефектниот. Нека X е број на изведени извлекувања. Најди ја распределбата на случајната променлива X.

Решение. Дефинираме настани A_i - во i-тото извлекување е извлечен дефектниот производ, $i = 1, 2, ..., n$. Тогаш, случајната променлива X прима вредности $X \in \{1, 2, ..., n\}$ со веројатности

$$\begin{aligned}
P\{X = 1\} &= P(A_1) = \frac{1}{n}, \\
P\{X = 2\} &= P(\overline{A_1}\ A_2) = P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1}) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}, \\
P\{X = 3\} &= P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ A_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\ \overline{A_2}) = \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}, \text{ итн.}
\end{aligned}$$

односно за $k = 1, 2, ..., n$ имаме

$$\begin{aligned}
P\{X = k\} &= P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \dots\ A_k) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1}) \dots P(A_k|\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \dots\ \overline{A_{k-1}}) = \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

или X има рамномерна распределба на множеството $\{1, 2, ..., n\}$.

ЗАДАЧА 3.43. Се изведуваат низа независни испитувања, така што во секое од нив настанот A се реализира со веројатност $P(A) = p$. Целта е настанот A да се реализира точно k пати. Максималниот број на испитувања кои може да се направат се n $(n \geq 2k)$. Испитувањата завршуват тогаш кога настанот се појавува k-тиот пат или тогаш кога е невозможно настанот A да се појави k пати за време на n-те независни испитувања т.е. кога спротивниот настан $\overline{A}$ се појавил $(n - k + 1)$-виот пат. Нека X е број на изведени испитувања. Најди го законот на распределба на случајната променлива X.

Решение. Случајната променлива X прима вредости $X \in \{k, k+1, ..., n\}$. Означуваме со $p_m = P\{X = m\}$, $m = k, k+1, ..., n$.

Нека $k \leq m \leq n-k$. Тогаш, испитувањата може да се сопрат по m-тото испитување, само тогаш кога k пати се појавил настанот A, односно во првите $m-1$ испитувања $k-1$ пати се појавил настанот A и во m-тото испитување се појавил настанот A, значи

$$p_m = C_{m-1}^{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{m-k} \cdot p = C_{m-1}^{k-1} \cdot p^k \cdot q^{m-k}.$$

Нека $n-k < m \leq n$. Тогаш, испитувањата може да се сопрат по m-тото испитување, тогаш и само тогаш кога или настанот A се појавил k-тиот пат или настанот $\overline{A}$ се појавил $(n-k+1)$-виот пат. Веројатноста за настанот A да се појави по k-ти пат во m-тото испитување е пресметана погоре и изнесува

$$C_{m-1}^{k-1} \cdot p^k \cdot q^{m-k}.$$

Додека, веројатноста настанот $\overline{A}$ да се појави по $(n-k+1)$-ви пат во m-тото испитување е

$$C_{m-1}^{n-k} \cdot p^{m-1-n+k} \cdot q^{n-k} \cdot q = C_{m-1}^{n-k} \cdot p^{m-1-n+k} \cdot q^{n-k+1},$$

затоа што во првите $m-1$ испитувања $n-k$ пати се појавил настанот $\overline{A}$ и во m-тото испитување се појавил настанот $\overline{A}$. Па, веројатноста испитувањата да сопрат по m-тото испитување, за $n-k < m \leq n$ е

$$p_m = C_{m-1}^{k-1} \cdot p^k \cdot q^{m-k} + C_{m-1}^{n-k} \cdot p^{m-1-n+k} \cdot q^{n-k+1}.$$

ЗАДАЧА 3.44. Случајно талкање. Нека во почетниот временски момент точката A се наоѓа во координатниот почеток на бројната оска и нека за секоја единица време со веројатност $\frac{1}{2}$ се поместува за единица должина на десно и со веројатност $\frac{1}{2}$ се поместува за единица должина на лево. Нека f_{2n} е веројатноста точката A по прв пат да се врати во координатниот почеток во временскиот момент $2n$ и нека u_{2n} е веројатноста точката A да се врати во координатниот почеток во временскиот момент $2n$.

а) Докажи дека $f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}$.

б) Докажи дека $f_{2n} = \frac{1}{2n}\, u_{2n-2}$.

в) Најди ја веројатноста точката A да се врати во координатниот почеток.

Решение. Го означуваме со „успех“ секое померување на точката A за единица должина на десно во единица време и со „неуспех“ секое померување на точката A за единица должина на лево во единица време. Тогаш, од условот на задачата, веројатноста за „успех“ е $p = \frac{1}{2}$, а веројатноста за „неуспех“ е $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Нека точката A се померила $2n$ пати. Разгледуваме случајна променлива X - растојание на точката A од координатниот почеток во временскиот момент $2n$. Распределбата на случајната променлива X е

$$P\{X = 2m\} = C_{2n}^{n+m} p^{n+m} q^{n-m} = \binom{2n}{n+m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \ m = 0, 1, 2, ..., n,$$

$$P\{X = 2m - 1\} = 0, \ m = 0, 1, 2, ..., n.$$

Па, затоа $u_{2n} = P\{X = 0\} = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$, од каде се гледа дека бројот на сите можни патишта за враќање на точката A во координатниот почеток по $2n$ време е $\binom{2n}{n}$, и тој всушност претставува збир од бројот на сите можни патишта за враќање на точката A по k-ти пат, $k = 1, 2, ..., 2n-1$ (за $k = 2n$ нема движење) во координатниот почеток по $2n$ време т.е.

$$\binom{2n}{n} = c_1 + c_2 + ... + c_{2n-1},$$

каде c_k е бројот на сите можни патишта за враќање на точката A по k-ти пат во координатниот почеток по $2n$ време. Од еднаквоста на собироците во последниот збир, имаме дека бројот на сите можни патишта за враќање на точката A по прв пат во координатниот почеток по $2n$ време т.е. c_1 е еднаков на $\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}$. Тогаш, $f_{2n} = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$. Па, може да ги покажеме дадените равенства,

а) $u_{2n-2} - u_{2n} = \binom{2n-2}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} - \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} - \frac{(2n)!}{n!\,n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} =$
$= \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \left(\frac{n^2}{(2n-1)\cdot 2n} \cdot 2^2 - 1\right) = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = f_{2n}.$

б) $\frac{1}{2n}\, u_{2n-2} = \frac{1}{2n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} =$
$= \frac{1}{2n} \cdot \frac{n^2}{(2n-1)\cdot 2n} \cdot 2^2 \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = f_{2n}.$

в) Бараната веројатност е (покажи!)

$$f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n} + ... = 1.$$

ЗАДАЧА 3.45. Во една кутија има n топчиња нумерирани со броевите $1, 2, ..., n$. Од кутијата на случаен начин се извлекува едно по едно топче без враќање. Нека X_i е бројот со кој е нумерирано i-тото извлечено топче, $i = 1, 2, ..., n$. Нека

$$Y = j \ \Leftrightarrow \ X_1 > X_2 > ... > X_j \text{ и } X_j < X_{j+1} \text{ за } j = 1, 2, ..., n-1$$

$$Y = n \ \Leftrightarrow \ X_1 > X_2 > ... > X_n.$$

Најди ја распределбата на случајната променлива Y.

Решение. За да ја најдеме распределбата на случајната променлива Y, најнапред ќе ја најдеме веројатноста $P\{Y \geq j\} = P\{X_1 > X_2 > ... > X_j\}$. Имено, од множеството со n елементи $\{1, 2, ..., n\}$, j-елементното подмножество $\{X_1, X_2, ..., X_j\}$ се извлекува со веројатност $\frac{1}{C_n^j}$. Веројатноста во извлечената j-торка $(X_1, X_2, ..., X_j)$ елементите да се наредени во опаѓачки редослед е $\frac{1}{j!}$. Бидејќи тоа важи за секоја j-торка, а нив ги има C_n^j, бараната веројатност е

$$P\{Y \geq j\} = P\{X_1 > X_2 > ... > X_j\} = \frac{C_n^j \cdot \frac{1}{j!}}{C_n^j} = \frac{1}{j!}.$$

Значи, распределбата на Y е

$$P\{Y = j\} = P\{Y \geq j\} - P\{Y \geq j+1\} = \frac{1}{j!} - \frac{1}{(j+1)!} = \frac{j}{(j+1)!}, \quad j = 1, 2, ..., n-1,$$

$$P\{Y = n\} = P\{X_1 > X_2 > ... > X_n\} = \frac{1}{n!}.$$

ЗАДАЧА 3.46. Случајната променлива X има **Паскалова распределба**

$$P\{X = k\} = \frac{a^k}{(a+1)^{k+1}},\ k = 0, 1, 2, ...,$$

каде $a > 0$. Најди ги математичкото очекување, дисперзијата и средното квадратно отстапување на X.

Решение. За математичкото очекување на X имаме

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} k\, P\{X = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \frac{a^k}{(a+1)^{k+1}} = \frac{a}{(a+1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} k\, \left(\frac{a}{a+1}\right)^{k-1} = \\ &= \frac{a}{(a+1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial(\frac{a}{a+1})} \left(\frac{a}{a+1}\right)^k = \frac{a}{(a+1)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial(\frac{a}{a+1})} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^k\right) = \\ &= \frac{a}{(a+1)^2} \cdot \frac{\partial a}{\partial(\frac{a}{a+1})}. \end{aligned}$$

Ставаме смена $b = \frac{a}{a+1}$, од каде $a = \frac{b}{1-b}$, па тогаш

$$EX = \frac{a}{(a+1)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{b}{1-b}\right) = \frac{a}{(a+1)^2} \cdot \frac{1}{(1-b)^2} = \frac{a}{(a+1)^2} \cdot (a+1)^2 = a.$$

За вториот момент на X имаме

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, P\{X=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\, \frac{a^k}{(a+1)^{k+1}} = \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, \frac{a^k}{(a+1)^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} k\, \frac{a^k}{(a+1)^{k+1}} = \\
&= \frac{a^2}{(a+1)^3} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, \left(\frac{a}{a+1}\right)^{k-2} + EX = \\
&= \frac{a^2}{(a+1)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial(\frac{a}{a+1})^2}\, \left(\frac{a}{a+1}\right)^{k} + a = \\
&= \frac{a^2}{(a+1)^3} \cdot \frac{\partial^2}{\partial(\frac{a}{a+1})^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{k}\right) + a = \\
&= \frac{a^2}{(a+1)^3} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial(\frac{a}{a+1})^2} + a = \frac{a^2}{(a+1)^3} \cdot \frac{\partial^2}{\partial(b^2} \left(\frac{b}{1-b}\right) + a = \\
&= \frac{a^2}{(a+1)^3} \cdot \frac{2}{(1-b)^3} + a = \frac{a^2}{(a+1)^3} \cdot 2(a+1)^3 + a = 2a^2 + a.
\end{aligned}$$

Па, дисперзијата на X е

$$DX = E(X)^2 - (EX)^2 = 2a^2 + a - a^2 = a^2 + a = a(a+1),$$

од каде за средно квадратното отстапување имаме $\sigma = \sqrt{DX} = \sqrt{a(a+1)}$.

ЗАДАЧА 3.47. Нека X е правилна десетична дропка со три знака по запирката, при што секој знак независно еден од друг, со еднаква веројатност може да прима една од вредностите $0, 1, ..., 9$. Најди го законот на распределба на случајната променлива X и најди го нејзиното математичко очекување.

Решение. Случајната променлива X ги прима вредностите $X \in \{0,000; 0,001; 0,002; ...; 0,999\}$, при што секоја вредност ја прима со веројатност $(\frac{1}{10})^3 = 0,001$, значи X има рамномерна распределба на множеството вредности $\{0,000; 0,001; 0,002; ...; 0,999\}$, односно распределбата е

$$P\{X = x\} = 0,001,\ x \in \{0,000; 0,001; 0,002; ...; 0,999\}.$$

Тогаш, математичкото очекување е

$$\begin{aligned}
EX &= 0,001 \cdot (0,000 + 0,001 + 0,002 + ... + 0,999) = \\
&= 0,001 \cdot \frac{0,000 + 0,999}{2} \cdot 1000 = 0,4995 \approx 0,500.
\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3.48. Нека Y е случајна правилна бинарна дропка со n знака по запирката, при што секој знак независно еден од друг, со веројатност $\frac{1}{2}$ прима вредност 0 или 1. Најди го законот на распределба на случајната променлива Y и најди го нејзиното математичко очекување.

Решение. Случајната променлива Y ги прима следниве вредности

$$Y \in \{0,00...000; 0,00...001; 0,00...010; ...; 0,11...111\},$$

при што секоја вредност ја прима со веројатност $p = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, што значи дека Y има рамномерна распределба на множеството

$$\{0,00...000; 0,00...001; 0,00...010; ...; 0,11...111\},$$

односно распределбата е

$$P\{X = x\} = \frac{1}{2^n},\ x \in \{0,00...000; 0,00...001; 0,00...010; ...; 0,11...111\}.$$

Тогаш, математичкото очекување (во десетичен запис) е

$$\begin{aligned} EY &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{0 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + ... + 1\cdot 2^{-n}}{2} \cdot 2^n = \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{2} \cdot 2^n = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 0,5 - \frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3.49. Најди ја очекуваната вредност на производот $\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)$, каде x_k, $k = 1, 2, ..., n$ се случајно избрани броеви од множеството $\{-1, 0, 1\}$, при што секој избор на број е еднакворојатен.

Решение. *Прв начин.* Множеството елементарни настани е

$$\Omega = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_k \in \{-1, 0, 1\}\}.$$

Дефинираме случајна променлива X - вредност на производот $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)$, каде $x_k \in \{-1, 0, 1\}$, $k = 1, 2, ..., n$. Тогаш, X прима вредности $X \in \{0, 1, 2, 4, 8, ..., 2^n\}$ со веројатности

$$P\{X = 0\} = 1 - P\{X \neq 0\} = 1 - P\{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_k \in \{0, 1\}\} = 1 - \frac{2^n}{3^n},$$

$$P\{X = 2^k\} = P\{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_k \in \{0, 1\} \text{ и точно } k \text{ од нив се } 1\} = \frac{\binom{n}{k}}{3^n},$$

за $k=0,1,2,...,n$. Тогаш, очекуваната вредност на X е

$$EX = 0\cdot(1-\frac{2^n}{3^n}) + \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot \frac{\binom{n}{k}}{3^n} = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot \binom{n}{k} = \frac{1}{3^n}\cdot(1+2)^n = \frac{1}{3^n}\cdot 3^n = 1.$$

Втор начин. Дефинираме случајни променливи X_k - вредност на k-тиот број x_k од множеството $\{-1,0,1\}$, $k=1,2,...,n$. Тогаш, X_k се независни и еднакво распределени случајни променливи со дискретна рамномерна распределба на $\{-1,0,1\}$, т.е.

$$P\{X_k=-1\} = P\{X_k=0\} = P\{X_k=1\} = \frac{1}{3},\ k=1,2,...,n,$$

од каде

$$E(X_k) = (-1)\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = 0,\ k=1,2,...,n.$$

Па, бараната очекувана вредност на производот $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)$ е

$$E(\prod_{k=1}^{n}(1+X_k)) = \prod_{k=1}^{n}E(1+X_k) = \prod_{k=1}^{n}(1+E(X_k)) = \prod_{k=1}^{n}1 = 1.$$

ЗАДАЧА 3.50. Во еден ред се наредени 52-те карти од еден шпил. На случаен начин под секоја од картите се става по една карта од друг шпил. Најди го очекуваниот број на совпаѓања на долната со горната карта.

Решение. Дефинираме настан A - долната карта се совпаѓа со горната, тогаш $p = P(A) = \frac{1}{52}$. Нека X е број на совпаѓања на долната со горната карта, тогаш X има $\mathcal{B}(52, \frac{1}{52})$ распределба. Па, очекуваниот број на совпаѓања на долната со горната карта е $EX = 52\cdot\frac{1}{52} = 1$.

ЗАДАЧА 3.51. n коцки за играње се фрлаат N пати. Нека X е број на фрлања во кои се паднале точно m шестки ($m \leq n$). Најди го математичкото очекување EX.

Решение. При едно фрлање на n-те коцки, множеството од елементарни настани е $\Omega = \{(x_1,...,x_n) \mid x_i \in \{1,...,6\}, i=1,...,n\}$, при што секој настан е еднакво веројатен. Тогаш, веројатноста на настанот A - се паднале m шестки при едно фрлање на n коцки е

$$p = P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_n^m\cdot 5^{n-m}}{6^n}.$$

Па, случајната променлива X има $\mathcal{B}(N,p)$ распределба, од каде нејзиното математичко очекување е

$$EX = N \cdot p = N \cdot C_n^m \cdot \frac{5^{n-m}}{6^n}.$$

ЗАДАЧА 3.52. Една група од четири радиолокаторни станици набљудуваат три објекта S_1, S_2 и S_3. Набљудувањето се изведува за некое време τ. За тоа време секоја од станиците независно една од друга го губат објектот S_i со веројатност p_i, $i = 1,2,3$ и ги предаваат неговите координати на управувачкиот центар. Најди го математичкото очекување на случајната променлива X - број на објекти чии координати се регистрирани во управувачкиот центар.

Решение. Означуваме со $X_i = I_{A_i}$, каде настанот A_i е дека е изгубен објектот S_i, $i = 1,2,3$. Тогаш, $EX_i = P(A_i) = 1 - P(\overline{A_i}) = 1 - (1-p_i)^4$, $i = 1,2,3$, бидејќи да не се изгуби објектот S_i значи дека никоја од четирите радиолокаторни станици не го изгубила, па затоа $P(\overline{A_i}) = (1-p_i)^4$. Потоа, за да бидат регистрирани координатите на еден објект во управувачкиот центар, тој треба да биде изгубен, па затоа бројот на објекти чии координати се регистрирани е $X = X_1 + X_2 + X_3$, од каде имаме дека

$$EX = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 - \sum_{i=1}^{3} (1-p_i)^4.$$

ЗАДАЧА 3.53. Случајните променливи X и Y се независни и имаат Поасонови распределби $\mathcal{P}(a)$, $a > 0$. Определи ги математичкото очекување и дисперзијата на:

а) нивниот збир,

б) нивниот производ.

Решение. Од Задача 3.22 имаме дека $EX = EY = a$ и $DX = DY = a$. Имајќи ја предвид независноста на X и Y имаме

а) $E(X+Y) = EX + EY = a + a = 2a$, $D(X+Y) = DX + DY = a + a = 2a$.

б) $E(XY) = EX \cdot EY = a \cdot a = a^2$,

$D(XY) = E(XY)^2 - (E(XY))^2 = E(X^2Y^2) - (a^2)^2 = E(X^2)E(Y^2) - a^4 =$
$= (DX + (EX)^2)(DY + (EY)^2) - a^4 = (a+a^2)(a+a^2) - a^4 = a^2 + 2a^3.$

ЗАДАЧА 3.54. Дадена е случајната променлива X со својот закон на распределба

x	10	11	12	13	14
$P\{X = x\}$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Нека $Y_c = |X - c|$, $c \in \mathbb{R}$. Докажи дека $\forall c \in \mathbb{R}$, $EY_c \geq EY_{12}$.

Решение. Нека $c \in \mathbb{R}$ е произволен реален број. Тогаш,

$$EY_c = \sum_{k=10}^{14} |k - c| \cdot P\{X = k\} = 0,2 \cdot \sum_{k=10}^{14} |k - c|.$$

Во зависност од вредноста на c имаме различни вредности на математичкото очекување EY_c. Така,

1) ако $c \leq 10$, тогаш $EY_c = 0,2 \cdot (60 - 5c)$ и достигнува минимум (на $c \leq 10$) за $c = 10$, т.е. $EY_c \geq EY_{10} = 2$,

2) ако $10 \leq c \leq 11$, тогаш $EY_c = 0,2 \cdot (40 - 3c)$ и достигнува минимум (на $10 \leq c \leq 11$) за $c = 11$, т.е. $EY_c \geq EY_{11} = 1,4$,

3) ако $11 \leq c \leq 12$, тогаш $EY_c = 0,2 \cdot (18 - c)$ и достигнува минимум (на $11 \leq c \leq 12$) за $c = 12$, т.е. $EY_c \geq EY_{12} = 1,2$,

4) ако $12 \leq c \leq 13$, тогаш $EY_c = 0,2 \cdot (c - 6)$ и достигнува минимум (на $12 \leq c \leq 13$) за $c = 12$, т.е. $EY_c \geq EY_{12} = 1,2$,

5) ако $13 \leq c \leq 14$, тогаш $EY_c = 0,2 \cdot (3c - 32)$ и достигнува минимум (на $13 \leq c \leq 14$) за $c = 13$, т.е. $EY_c \geq EY_{13} = 1,4$,

6) ако $c \geq 14$, тогаш $EY_c = 0,2 \cdot (5c - 60)$ и достигнува минимум (на $c \geq 14$) за $c = 14$, т.е. $EY_c \geq EY_{14} = 2$.

Значи, EY_c достигнува најмала вредност во $c = 12$, односно $EY_c \geq EY_{12}$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

ЗАДАЧА 3.55. Нека X е дискретна случајна променлива од конечен тип која прима само позитивни вредности. Докажи дека

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(X^{n+1})}{E(X^n)} = \max\{X(w) \mid w \in \Omega\}.$$

Решение. Нека множеството вредности на случајната променлива X е $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, каде $0 < x_1 < x_2 < ... < x_k$ и нека $P\{X = x_i\} = p_i$, $i = 1, 2, ..., k$. Тогаш,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{E(X^{n+1})}{E(X^n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_1^{n+1}p_1 + x_2^{n+1}p_2 + ... + x_k^{n+1}p_k}{x_1^n p_1 + x_2^n p_2 + ... + x_k^n p_k} = \\
= \ & \lim_{n\to\infty} \frac{x_k^{n+1}p_k((\frac{x_1}{x_k})^{n+1}\frac{p_1}{p_k} + (\frac{x_2}{x_k})^{n+1}\frac{p_2}{p_k} + ... + (\frac{x_{k-1}}{x_k})^{n+1}\frac{p_{k-1}}{p_k} + 1)}{x_k^n p_k((\frac{x_1}{x_k})^n\frac{p_1}{p_k} + (\frac{x_2}{x_k})^n\frac{p_2}{p_k} + ... + (\frac{x_{k-1}}{x_k})^n\frac{p_{k-1}}{p_k} + 1)} = \\
= \ & x_k = \max\{X(w) \mid w \in \Omega\},
\end{aligned}$$

затоа што $0 < \frac{x_i}{x_k} < 1$, $i = 1, 2, ..., k-1$, па $\lim_{n\to\infty}(\frac{x_i}{x_k})^n = 0$, $i = 1, 2, ..., k-1$.

ЗАДАЧА 3.56. Се изведуваат n независни испитувања во различни услови. Веројатноста за појавување на настанот A во i-тото испитување е p_i, $i = 1, 2, ..., n$. Нека X е број на појавувања на настанот A при n-те независни испитувања. За да се упростат пресметките, веројатностите p_i, $i = 1, 2, ..., n$ се заменуваат со $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i$. Дали и при замената точно ќе се пресметаат EX и DX?

Решение. Математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива X (пред замената на p_i со $\overline{p}$) се (покажи!)

$$EX = \sum_{i=1}^n p_i,\ DX = \sum_{i=1}^n p_i q_i,\ q_i = 1 - p_i,\ i = 1, 2, ..., n.$$

По замената на p_i со $\overline{p}$ се добива нова случајна променлива $\overline{X}$ - број на појавувања на настанот A при n-те независни испитувања, каде во секое од n-те испитувања веројатноста за појавување на настанот A е $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i$. Значи, $\overline{X}$ има Биномна распределба т.е. $\overline{X} \sim \mathcal{B}(n, \overline{p})$, па математичкото очекување и дисперзијата на $\overline{X}$ се

$$E\overline{X} = n\,\overline{p} = n \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n p_i = EX,$$

$$D\overline{X} = n\,\overline{p}\,\overline{q},\ \text{каде}\ \overline{q} = 1 - \overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (1 - p_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n q_i.$$

Значи, по замената математичкото очекување е непроменето, додека за разликата во дисперзиите имаме

$$\begin{aligned} DX - D\overline{X} &= \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - n\,\overline{p}\,\overline{q} = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - n\,\overline{p}\,\overline{q} - n\,\overline{p}\,\overline{q} + n\,\overline{p}\,\overline{q} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \overline{q} - \sum_{i=1}^{n} \overline{p} q_i + n\,\overline{p}\,\overline{q} = \sum_{i=1}^{n} (p_i - \overline{p})(q_i - \overline{q}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (p_i - \overline{p})(1 - p_i - 1 + \overline{p}) = -\sum_{i=1}^{n} (p_i - \overline{p})^2 \leq 0, \end{aligned}$$

од каде $DX \leq D\overline{X}$, значи по замената на p_i со $\overline{p}$ дисперзијата се зголемува. Имено, таа останува непроменета само ако $p_1 = p_2 = ... = p_n = \overline{p}$.

ЗАДАЧА 3.57. Во две кутии се сместени црни и бели топчиња, така што во I кутија има 99 бели и 1 црно топче, а во II кутија има 1 бело и 99 црни топчиња. Се извлекуваат по 5 топчиња одеднаш од двете кутии. Нека X е бројот на бели топчиња во 10-те извлечени топчиња. Најди ги EX, DX, moX и meX.

Решение. Нека X_i е број на извлечени бели топчиња од i-тата кутија, $i = 1, 2$. Тогаш, $X = X_1 + X_2$. Прво, ги бараме распределбите на X_1 и X_2. Случајната променлива X_1 прима вредности $X_1 \in \{4, 5\}$ со веројатности

$$P\{X_1 = 4\} = \frac{C_{99}^4}{C_{100}^5} = \frac{1}{20},\ \{X_1 = 5\} = \frac{C_{99}^5}{C_{100}^5} = \frac{19}{20}.$$

Случајната променлива X_2 прима вредности $X_1 \in \{0, 1\}$ со веројатности

$$P\{X_2 = 0\} = \frac{C_{99}^5}{C_{100}^5} = \frac{19}{20},\ \{X_2 = 1\} = \frac{C_{99}^4}{C_{100}^5} = \frac{1}{20}.$$

За математичките очекувања на X_1 и X_2 имаме

$$EX_1 = 4 \cdot \frac{1}{20} + 5 \cdot \frac{19}{20} = \frac{99}{20},\ EX_2 = 0 \cdot \frac{19}{20} + 1 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{20}.$$

Тогаш,

$$EX = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{99}{20} + \frac{1}{20} = \frac{100}{20} = 5.$$

За дисперзиите на X_1 и X_2 имаме

$$DX_1 = E(X_1^2) - (EX_1)^2 = \left(4^2 \cdot \frac{1}{20} + 5^2 \cdot \frac{19}{20}\right) - \left(\frac{99}{20}\right)^2 = \frac{491}{20} - \left(\frac{99}{20}\right)^2,$$

$$DX_2 = E(X_2^2) - (EX_2)^2 = \Big(0^2 \cdot \frac{19}{20} + 1^2 \cdot \frac{1}{20}\Big) - \Big(\frac{1}{20}\Big)^2 = \frac{1}{20} - \Big(\frac{1}{20}\Big)^2.$$

Случајните променливи X_1 и X_2 се независни, и затоа

$$\begin{aligned} DX &= D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2) = \Big(\frac{491}{20} - \Big(\frac{99}{20}\Big)^2\Big) + \Big(\frac{1}{20} - \Big(\frac{1}{20}\Big)^2\Big) = \\ &= \frac{492}{20} - \frac{99^2 + 1}{20^2} = \frac{9840 - 9802}{400} = 0,095. \end{aligned}$$

За да ги најдеме moX и meX, ни треба распределбата на X. Случајната променлива X прима вредности $X \in \{4, 5, 6\}$. Земаме предвид дека X_1 и X_2 се независни случајни променливи, па распределбата на X е

$$\begin{aligned} P\{X = 4\} &= P\{X_1 + X_2 = 4\} = P\{X_1 = 4, X_2 = 0\} = P\{X_1 = 4\}P\{X_2 = 0\} = \\ &= \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{400}, \\ P\{X = 5\} &= P\{X_1 + X_2 = 5\} = P\{X_1 = 5, X_2 = 0\} + P\{X_1 = 4, X_2 = 1\} = \\ &= P\{X_1 = 5\}P\{X_2 = 0\} + P\{X_1 = 4\}P\{X_2 = 1\} = \\ &= \frac{19}{20} \cdot \frac{19}{20} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{362}{400}, \\ P\{X = 6\} &= P\{X_1 + X_2 = 6\} = P\{X_1 = 5, X_2 = 1\} = P\{X_1 = 5\}P\{X_2 = 1\} = \\ &= \frac{19}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{19}{400}. \end{aligned}$$

Значи, $moX = 5$. Од друга страна, $meX = 5$, затоа што важи

$$P\{X \leq 5\} = \frac{19}{400} + \frac{362}{400} \geq \frac{1}{2} \text{ и } P\{X \geq 5\} = \frac{362}{400} + \frac{19}{400} \geq \frac{1}{2}.$$

ЗАДАЧА 3.58. Една мета се состои од круг бр.1 и два концентрични прстени бр.2 и бр.3. Погодувањето на кругот бр.1 донесува 10 поени, на прстенот бр.2 - 5 поени, на прстенот бр.3 - 1 поен. Веројатноста да стрелецот кој ја погодил метата го погодува кругот бр.1 и прстените бр.2 и бр.3 е 0,5; 0,3; 0,2 соодветно. Нека X е вкупниот број на поени, добиени при 3 погодувања на метата. Најди ги EX, DX, moX, meX.

Решение. *Прв начин.* Дефинираме настани A_i - стрелецот го погодил i-тиот дел, $i = 1, 2, 3$. Стрелецот гаѓа 3 пати, па разгледуваме Полиномна шема со $n = 3$ и веројатности $p_1 = P(A_1) = 0,5$, $p_2 = P(A_2) = 0,3$ и $p_3 = P(A_3) = 0,2$. Нека B_{k_1,k_2,k_3} - настанот A_i се реализирал точно k_i пати, $i = 1, 2, 3$, при што

$k_1 + k_2 + k_3 = n = 3$. Тогаш, случајната променлива X ги прима вредностите $X \in \{10k_1 + 5k_2 + k_3 \mid k_1, k_2, k_3 \in \{0, 1, 2, 3\},\ k_1 + k_2 + k_3 = 3\}$ со веројатности

$$P\{X = 10k_1 + 5k_2 + k_3\} = P(B_{k_1,k_2,k_3}) = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} = \frac{3!}{k_1!k_2!k_3!} 0,5^{k_1} 0,3^{k_2} 0,2^{k_3},$$

за $k_1, k_2, k_3 \in \{0, 1, 2, 3\},\ k_1 + k_2 + k_3 = 3$, односно законот на распределба даден со табела е

x	3	7	11	12	15	16	20	21	25	30
$P\{X = x\}$	0,008	0,036	0,054	0,060	0,027	0,180	0,135	0,150	0,225	0,125

Од табелата се пресметува дека $EX = 20,1$, $DX = 38,43$, $moX = 25$ и $meX =$ 20 и 21, затоа што важи

$$P\{X \leq 20\} = 0,5 \geq 0,5 \text{ и } P\{X \geq 20\} = 0,635 \geq 0,5,$$

$$P\{X \leq 21\} = 0,65 \geq 0,5 \text{ и } P\{X \geq 22\} = 0,5 \geq 0,5.$$

Втор начин. Ги дефинираме случајните променливи X_i - поени добиени при i-тото погодување на метата, $i = 1, 2, 3$. Тогаш, X_1, X_2, X_3 се независни еднакво распределени случајни променливи со распределби

x	1	5	10
$P\{X_i = x\}$	0,2	0,3	0,5

од каде $EX_i = 6,7$ и $DX_i = 12,81$, $i = 1, 2, 3$. Тогаш, за математичкото очекување на $X = X_1 + X_2 + X_3$ имаме

$$EX = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 20,1,$$

а од независноста на X_1, X_2, X_3 за дисперзијата на X имаме

$$DX = D(X_1 + X_2 + X_3) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) = 38,43.$$

За наоѓање на moX и meX пожелно е да ја имаме распределбата на X. Случајната променлива X прима $\overline{C}_3^3 = C_5^2 = 10$ различни вредности (тоа е бројот на различни збирови од три собироци при што секој собирок прима некоја од вредностите 1, 5 или 10). Заради независноста на X_1, X_2, X_3, за распределбата на X имаме

$$\begin{aligned}
P\{X = 3\} &= P\{X_1 + X_2 + X_3 = 3\} = P\{(X_1, X_2, X_3) = (1, 1, 1)\} = 0,2^3 = 0,008,\\
P\{X = 7\} &= P\{X_1 + X_2 + X_3 = 7\} =\\
&= P\{(X_1, X_2, X_3) \in \{(5, 1, 1), (1, 5, 1), (1, 1, 5)\}\} = 3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,3 = 0,036,\\
P\{X = 11\} &= P\{X_1 + X_2 + X_3 = 11\} =\\
&= P\{(X_1, X_2, X_3) \in \{(1, 5, 5), (5, 1, 5), (5, 5, 1)\}\} = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,3^2 = 0,054 \text{ итн.}
\end{aligned}$$

Се добива истата распределба како и при првиот начин на решавањето на задачата, па одредувањето на moX и meX е на истиот начин како претходно.

ЗАДАЧА 3.59. Нека X и Y се независни и еднакво распределени случајни променливи, при што $P\{X=1\}=P\{Y=1\}=p$ и $P\{X=0\}=P\{Y=0\}=1-p$, $0<p<1$. За случајната променлива U важи дека $U=0$ кога $X+Y$ е парен број и $U=1$ кога $X+Y$ е непарен број. При која вредност на p, случајните променливи X и U се независни?

Решение. Од независносна на X и Y, распределбата на U е

$$P\{U=0\}=P\{X+Y \text{ е парен број}\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}= \\ =P\{X=0\}P\{Y=0\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}=(1-p)^2+p^2,$$

$$P\{U=1\}=P\{X+Y \text{ е непарен број}\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}= \\ =P\{X=0\}P\{Y=0\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}=2p(1-p).$$

За X и U да се независни, потребно и доволно е да важат следните четири равенства

$$P\{X=i,U=j\}=P\{X=i\}P\{U=j\},\ i=0,1,\ j=0,1.$$

За $i=0$ и $j=1$ имаме дека $P\{X=0,U=1\}=P\{X=0\}P\{U=1\}$. Левата страна на равенството е

$$\begin{aligned} P\{X=0,U=1\} &= P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}= \\ &= P\{X=0\}P\{Y=1\}=(1-p)\cdot p. \end{aligned}$$

Десната страна на равенството е

$$P\{X=0\}P\{U=1\}=(1-p)\cdot 2p(1-p)=2p(1-p)^2.$$

Значи, $(1-p)p=2p(1-p)^2$, од каде $p(1-p)(1-2(1-p))=0$ т.е. $p(1-p)(2p-1)=0$, односно $p=0$ или $p=1$ или $p=\frac{1}{2}$. Бидејќи од услов $0<p<1$, следи дека $p=\frac{1}{2}$.

Се проверува дека за $p=\frac{1}{2}$ и останатите три равенства се исполнети т.е. за $p=\frac{1}{2}$ случајните променливи X и U се независни.

ЗАДАЧА 3.60. Во една кутија има $n+1$ картичка при што n картички се означени со броевите $1,2,...,n$ соодветно, а на $(n+1)$-вата картичка ги има сите броеви од 1 до n. Се извлекуваат две картички една по една со враќање. Ги дефинираме настаните A - извлечена е барем една 1-ца и B - извлечено е барем едно n. Нека $X=I_A$ и $Y=I_B$. Најди ја коваријансата $cov(X,Y)$.

Решение. Дефинираме настани A_i - во i-тото извлекување извлечен е бројот 1, B_i - во i-тото извлекување е извлечен бројот n, $i = 1, 2$. За овие настани имаме дека $P(A_i\, B_i) = P(\overline{A_i}\, B_i) = P(A_i\, \overline{B_i}) = \frac{1}{n+1}$ и $P(\overline{A_1}\, \overline{B_1}) = \frac{n-2}{n+1}$, $i = 1, 2$. При тоа, настаните се независни за $i = 1, 2$, бидејќи извлекувањето е со враќање. Тогаш, распределбата на случајниот вектор (X, Y) е

$$\begin{aligned}
P\{X=0, Y=0\} &= P(\overline{A_1}\,\overline{B_1})P(\overline{A_2}\,\overline{B_2}) = \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^2,\\
P\{X=0, Y=1\} &= P(\overline{A_1}\,\overline{B_1})P(\overline{A_2}\,B_2) + P(\overline{A_1}\,B_1)P(\overline{A_2}\,\overline{B_2}) + P(\overline{A_1}\,B_1)P(\overline{A_2}\,B_2) =\\
&= 2\cdot\frac{n-2}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{2n-3}{(n+1)^2},\\
P\{X=1, Y=0\} &= P(A_1\,\overline{B_1})P(\overline{A_2}\,\overline{B_2}) + P(\overline{A_1}\,\overline{B_1})P(A_2\,\overline{B_2}) + P(A_1\,\overline{B_1})P(A_2\,\overline{B_2}) =\\
&= 2\cdot\frac{n-2}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{2n-3}{(n+1)^2},\\
P\{X=1, Y=1\} &= P(A_1\,B_1)P(\overline{A_2}\,\overline{B_2}) + P(\overline{A_1}\,\overline{B_1})P(A_2\,B_2) + P(A_1\,\overline{B_1})P(\overline{A_2}\,B_2) +\\
&\quad + P(\overline{A_1}\,B_1)P(A_2\,\overline{B_2}) + P(A_1\,B_1)P(A_2\,\overline{B_2}) + P(A_1\,\overline{B_1})P(A_2\,B_2) +\\
&\quad + P(A_1\,B_1)P(\overline{A_2}\,B_2) + P(\overline{A_1}\,B_1)P(A_2\,B_2) + P(A_1\,B_1)P(A_2\,B_2) =\\
&= 2\cdot\frac{n-2}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1} + 7\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{2n+3}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Од тука, маргиналните закони на распределба на X и Y се

$$\begin{aligned}
P\{X=0\} &= \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^2 + \frac{2n-3}{(n+1)^2} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = P\{Y=0\},\\
P\{X=1\} &= \frac{2n-3}{(n+1)^2} + \frac{2n+3}{(n+1)^2} = \frac{4n}{(n+1)^2} = P\{Y=1\},
\end{aligned}$$

од каде за математичките очекувања имаме

$$EX = EY = \frac{4n}{(n+1)^2}, \quad E(XY) = P\{XY=1\} = P\{X=1, Y=1\} = \frac{2n+3}{(n+1)^2}.$$

Па, бараната коваријанса е

$$cov(X,Y) = E(XY) - EX\cdot EY = \frac{2n+3}{(n+1)^2} - \left(\frac{4n}{(n+1)^2}\right)^2.$$

ЗАДАЧА 3.61. Еден експеримент се состои од 2 фрлања на коцка. Го означуваме со w_{ij} елементарниот настан дека при првото фрлање се паднале i точки, а при второто фрлање се паднале j точки. Случајните променливи X и Y се дефинирани со

$$X(w_{ij}) = i + j \quad \text{и} \quad Y(w_{ij}) = \left[\frac{i}{6}\right] + \left[\frac{j}{6}\right],$$

каде $[\cdot]$ е цел дел.

а) Најди ги законите на распределба на X и Y, а потоа и законот на распределба на $U = X - 6Y$.

б) Најди ги веројатностите $P\{X \leq 3\}$, $P\{\frac{1}{2} \leq Y \leq 7\}$ и $P\{U = 6|Y \leq 1\}$.

Решение. За елементарните настани w_{ij} имаме дека $P\{w_{ij}\} = 1/36$, $i = 1, 2, ..., 6$, $j = 1, 2, ..., 6$.

а) Случајната променлива X е збирот на паднатите точки на двете коцки и таа прима вредности $X \in \{2, 3, ..., 12\}$ со веројатности

$$\begin{aligned} P\{X = 2\} &= P\{w_{11}\} = 1/36, \\ P\{X = 3\} &= P\{w_{12}, w_{21}\} = 2/36, \\ P\{X = 4\} &= P\{w_{13}, w_{22}, w_{31}\} = 3/36 \text{ и.т.н.} \end{aligned}$$

или со табела

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P\{X = x\}$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Случајната променлива Y е вкупен број на паднати 6-ки на двете коцки и таа прима вредности $Y = \{0, 1, 2\}$ со веројатности

$$\begin{aligned} P\{Y = 0\} &= P\{w_{ij} \mid i, j \in \{1, ..., 5\}\} = 25/36, \\ P\{Y = 1\} &= P(\{w_{6j} \mid j \in \{1, ..., 5\}\} \cup \{w_{i6} \mid i \in \{1, ..., 5\}\}) = 10/36, \\ P\{Y = 2\} &= P\{w_{66}\} = 1/36. \end{aligned}$$

Распределбата на случајниот вектор (X, Y) е

$$\begin{aligned} P\{X = 2, Y = 0\} &= P\{w_{11}\} = 1/36, \\ P\{X = 2, Y = 1\} &= P(\emptyset) = 0, \\ P\{X = 2, Y = 2\} &= P(\emptyset) = 0, \\ &\vdots \\ P\{X = 7, Y = 0\} &= P\{w_{25}, w_{34}, w_{43}, w_{52}\} = 4/36, \\ P\{X = 7, Y = 1\} &= P\{w_{16}, w_{61}\} = 2/36, \\ P\{X = 7, Y = 2\} &= P(\emptyset) = 0, \\ &\vdots \\ P\{X = 12, Y = 0\} &= P(\emptyset) = 0, \\ P\{X = 12, Y = 1\} &= P(\emptyset) = 0, \\ P\{X = 12, Y = 2\} &= P\{w_{66}\} = 1/36, \end{aligned}$$

или со табела

X \ Y	0	1	2
2	1/36	0	0
3	2/36	0	0
4	3/36	0	0
5	4/36	0	0
6	5/36	0	0
7	4/36	2/36	0
8	3/36	2/36	0
9	2/36	2/36	0
10	1/36	2/36	0
11	0	2/36	0
12	0	0	1/36

Сега, според вредностите кои ги примаат X и Y, случајната променлива $U = X - 6Y$ треба да ги прима вредностите $U \in \{-10, -9, ..., 12\}$, но со оглед на распределбата на случајниот вектор (X, Y) и нултите веројатности во соодветната табела имаме дека $P\{U = u\} = 0$, $u \in \{-10, -9, ..., -1\} \cup \{11, 12\}$. Имено, случајната променлива U е збирот на паднатите точки на двете коцки не сметајќи ги паднатите 6-ки. Распределбата на U е

$$\begin{aligned}
P\{U=0\} &= P\{X-6Y=0\} = P\{X=6Y\} = \\
&= P\{(X,Y)=(12,2)\} = 1/36, \\
P\{U=1\} &= P\{X-6Y=1\} = P\{X=6Y+1\} \\
&= P\{(X,Y)=(7,1)\} = 2/36, \\
P\{U=2\} &= P\{X-6Y=2\} = P\{X=6Y+2\} \\
&= P\{(X,Y)\in\{(2,0),(8,1)\}\} = 1/36+2/36 = 3/36, \text{ итн.}
\end{aligned}$$

или со табела

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P\{U=u\}$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

б) $P\{X \leq 3\} = P\{X \in \{2,3\}\} = 1/36 + 2/36 = 3/36$,
$P\{\frac{1}{2} \leq Y \leq 7\} = P\{Y \in \{1,2\}\} = 10/36 + 1/36 = 11/36$,
$P\{U = 6 | Y \leq 1\} = P\{X - 6Y = 6 | Y \in \{0,1\}\} = \frac{P\{X-6Y=6,\ Y\in\{0,1\}\}}{P\{Y\in\{0,1\}\}} =$
$= \frac{P\{(X,Y)\in\{(6,0),(12,1)\}\}}{P\{Y\in\{0,1\}\}} = \frac{5/36+0}{25/36+10/36} = \frac{1}{7}$.

ЗАДАЧА 3.62. Еден стрелец има 4 куршуми и гаѓа во целта сѐ додека не ја погоди два пати едно по друго или не ги потроши сите куршуми. Веројатноста за погодок во секое независно гаѓање е p $(0 < p < 1)$. Најди ја распределбата на случајниот вектор (X, Y), каде X е број на погодоци, а Y е број на гаѓања. Најди ја веројатноста $P\{(X, Y) \in (1, 3]^2\}$.

Решение. Дефинираме настани A_i - стрелецот ја погодил целта во i-тото гаѓање, $i = 1, 2, 3, 4$, кои се независни, заради независноста на гаѓањата. Од друга страна, случајните променливи X и Y примаат вредности $X \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $Y \in \{2, 3, 4\}$ соодветно. Тогаш, распределбата на случајниот вектор (X, Y) е

$$\begin{aligned}
P\{X=0, Y=2\} &= P\{X=0, Y=3\} = 0, \\
P\{X=0, Y=4\} &= P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}) = q^4, \\
P\{X=1, Y=2\} &= P\{X=1, Y=3\} = 0, \\
P\{X=1, Y=4\} &= P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,A_4) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3\,\overline{A_4}) + \\
&\quad + P(\overline{A_1}\,A_2\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}) + P(A_1\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}) = 4pq^3, \\
P\{X=2, Y=2\} &= P(A_1\,A_2) = p^2 \\
P\{X=2, Y=3\} &= P(\overline{A_1}\,A_2\,A_3) = p^2 q \\
P\{X=2, Y=4\} &= P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3\,A_4) + P(\overline{A_1}\,A_2\,\overline{A_3}\,A_4) + \\
&\quad + P(A_1\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,A_4) + P(A_1\,\overline{A_2}\,A_3\,\overline{A_4}) = 4p^2q^2 \\
P\{X=3, Y=2\} &= P\{X=3, Y=3\} = 0, \\
P\{X=3, Y=4\} &= P(A_1\,\overline{A_2}\,A_3\,A_4) = p^3 q,
\end{aligned}$$

каде $q = 1 - p$. Па, бараната веројатност е

$$\begin{aligned}
& P\{(X, Y) \in (1, 3]^2\} = P\{1 < X, Y \leq 3\} = P\{X, Y \in \{2, 3\}\} = \\
= \ & P\{X=2, Y=2\} + P\{X=2, Y=3\} + P\{X=3, Y=2\} + P\{X=3, Y=3\} = \\
= \ & p^2 + p^2 q + 0 + 0 = p^2(1+q).
\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3.63. Една коцка се фрла два пати, при што со (X, Y) означуваме дека првиот пат на коцката се паднале X точки, а вториот пат Y точки. Најди го условниот закон на распределба на случајниот вектор (X, Y) при услов $X > Y$ и условниот закон на распределба на X при услов $X > Y$.

Решение. Случајните променливи X и Y се рамномерно распределени на множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и независни. Значи $P\{X = i\} = P\{Y = i\} = \frac{1}{6}$, $i = 1, ..., 6$, и $P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j\} = \frac{1}{36}$, $i, j = 1, ..., 6$. Па затоа,

$$\begin{aligned}
P\{X > Y\} &= P\{X=2, Y=1\} + P\{X=3, Y=1\} + P\{X=3, Y=2\} + \\
&\quad + ... + P\{X=6, Y=5\} = (1+2+3+4+5) \cdot \frac{1}{36} = \frac{15}{36}.
\end{aligned}$$

Тогаш, условниот закон на распределба на (X, Y) при услов $X > Y$ е

$$\begin{aligned}
P\{(X,Y)=(i,j)\mid X>Y\} &= \frac{P\{(X,Y)=(i,j), X>Y\}}{P\{X>Y\}} = \frac{P\{(X,Y)=(i,j)\}}{P\{X>Y\}} = \\
&= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{1}{15}, \text{ за } 6 \geq i > j \geq 1, \\
P\{(X,Y)=(i,j)\mid X>Y\} &= \frac{P\{(X,Y)=(i,j), X>Y\}}{P\{X>Y\}} = 0, \text{ за } 1 \leq i \leq j \leq 6,
\end{aligned}$$

додека условниот закон на распределба на X при услов $X > Y$ е

$$\begin{aligned}
P\{X=i\mid X>Y\} &= \frac{P\{X=i, X>Y\}}{P\{X>Y\}} = \frac{P\{(X,Y)\in\{(i,j)|i>j\}\}}{P\{X>Y\}} = \\
&= \frac{(i-1)\cdot\frac{1}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{i-1}{15}, \text{ за } 2 \leq i \leq 6, \\
P\{X=1\mid X>Y\} &= \frac{P\{X=1, X>Y\}}{P\{X>Y\}} = 0.
\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3.64. Од множеството $\{1, 2, .., n\}$, $(n \geq 2)$ на случаен начин еден по еден без враќање се бираат два броја X_1 и X_2. Ако $Y = X_1 + X_2$, најди го условниот закон на распределба на X_1 при услов $Y = y$.

Решение. Случајната променлива X_1 е рамномерно распределена на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ т.е. $P\{X_1 = x\} = \frac{1}{n}$, $x \in \{1, 2, ..., n\}$. Случајната променлива $Y = X_1 + X_2$ прима вредности $Y \in \{3, 4, ..., 2n-1\}$ со веројатности

$$\begin{aligned}
P\{Y=y\} &= \sum_{x=1}^{n} P\{X_1=x\}P\{Y=y|X_1=x\} = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} P\{X_1+X_2=y|X_1=x\} = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} P\{X_2=y-x|X_1=x\} = \begin{cases} \frac{1}{n}\cdot\frac{y-1}{n-1} & , y \text{ - непарен} \\ \frac{1}{n}\cdot\frac{y-2}{n-1} & , y \text{ - парен} \end{cases}
\end{aligned}$$

Тогаш, условниот закон на распределба на X_1 при услов $Y = y$ е

$$\begin{aligned}
P\{X_1=x|Y=y\} &= \frac{P\{X_1=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}} = \frac{P\{X_1=x, X_1+X_2=y\}}{P\{Y=y\}} = \\
&= \frac{P\{X_1=x, X_2=y-x\}}{P\{Y=y\}} = \frac{P\{X_1=x\}P\{X_2=y-x|X_1=x\}}{P\{Y=y\}} = \\
&= \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}}{P\{Y=y\}} = \begin{cases} \frac{1}{y-1} & , y \text{ - непарен} \\ \frac{1}{y-2} & , y \text{ - парен} \end{cases},
\end{aligned}$$

за $x \in \{1, 2, ..., y-1\} \setminus \{\frac{y}{2}\}$, додека за останатите x веројатноста е нула.

3.5 Задачи за самостојна работа

ЗАДАЧА 3.65. Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е веројатносен простор, каде $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ и $P(w_1) = P(w_3) = \frac{1}{3}$, $P(w_2) = P(w_4) = \frac{1}{6}$.

а) Покажи дека пресликувањето $X : \Omega \to \mathbb{R}$ дадено со $X(w_1) = X(w_2) = 1$, $X(w_3) = X(w_4) = 2$ е случајна променлива.

б) Доколку наместо σ-алгебрата $\mathcal{F}$ се земе σ-алгебрата

1) $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{w_1, w_2\}, \{w_3, w_4\}\}$,

2) $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{w_1, w_3\}, \{w_2, w_4\}\}$,

дали повторно пресликувањето X ќе биде случајна променлива?

ЗАДАЧА 3.66. Нека A и B се настани над ист простор на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, а I_A и I_B се индикатори на настаните A и B соодветно. Докажи ги следните равенства:

а) $I_{\overline{A}} = 1 - I_A$,

б) $I_{AB} = I_A \cdot I_B$,

в) $I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{AB}$,

г) $I_{A \Delta B} = (I_A - I_B)^2$.

ЗАДАЧА 3.67. Нека $A_1, A_2, ...$ се настани над ист простор на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, а I_{A_i} е индикатор на настанот A_i, $i = 1, 2, ...$. Докажи го равенството

$$I_{\cup_{i=1}^{+\infty} A_i} = I_{A_1} + (1 - I_{A_1}) I_{A_1} + (1 - I_{A_1})(1 - I_{A_2}) I_{A_3} + ...$$

ЗАДАЧА 3.68. Најди го законот на распределба на случајната променлива X - број на појавувања на „грб“ при две независни фрлања на монета.

ЗАДАЧА 3.69. Во една кутија од 10 дискети, 8 се исправни. На случаен начин се избираат 2 дискети. Најди го законот на распределба на случајната променлива X - број на исправни дискети меѓу избраните.

ЗАДАЧА 3.70. Еден работник надгледува 4 справи кои работат независно една од друга. Веројатноста дека во текот на еден час на справата не ѝ е потребно внимание е, 0,7 за првата справа, 0,75 за втората справа, 0,8 за третата справа и 0,9 за четвртата справа. Најди ја распределбата на случајната променлива X - број на справи на кои не им е потребно внимание од страна на работникот.

ЗАДАЧА 3.71. Во една кутија има 7 топчиња од кои 4 бели и 3 црни. Од кутијата на случаен начин одеднаш се извлекуваат 3 топчиња. Нека X е број на извлечени бели топчиња.

а) Најди го законот на распределба на случајната променлива X.

б) Најди ја веројатноста на настанот C - бројот на извлечени бели топчиња е еднаков на бројот на црни топчиња останати во кутијата.

ЗАДАЧА 3.72. Веројатноста дека стрелец ќе ја погоди метата при едно стрелање е 0,8. Стрелецот гаѓа сè додека не ја промаши метата. Нека X е број на гаѓања на стрелецот. Најди ја распределбата на случајната прменлива X.

ЗАДАЧА 3.73. Случајната променлива X има Поасонова распределба $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Најди ја распределбата на случајната променлива $Y = 2X + 6$.

ЗАДАЧА 3.74. На случаен начин три пати се избира еден број од броевите 1, 2 и 3. Нека X_i е i-тиот избран број, $i = 1, 2, 3$. Нека $X = (X_1 + X_2 + X_3)/3$.

а) Најди ја распределбата на случајната променлива X.

б) Најди ја веројатноста да бројот 1 бил избран точно два пати.

ЗАДАЧА 3.75. Случајната променлива X од конечен тип ги прима вредностите $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$. Ако е дадено дека $EX = 0,1$ и $E(X^2) = 0,9$, најди ги веројатностите p_1, p_2, p_3 со кои X ги прима вредностите x_1, x_2, x_3, соодветно.

ЗАДАЧА 3.76. Случајната променлива X од конечен тип прима две вредности x_1 и x_2, $(x_1 < x_2)$. Веројатноста X да ја прими вредноста x_1 е 0,6. Најди го законот на распределба на X, ако $EX = 1,4$ и $DX = 0,24$.

ЗАДАЧА 3.77. Случајната променлива X прима произволни цели позитивни вредности со веројатности кои опаѓаат по геометриска прогресија. Најди ги првиот член и количникот на таа геометриска прогресија, ако $EX = 10$, а потоа пресметај ја веројатноста $P\{X \leq 10\}$.

ЗАДАЧА 3.78. Купувачите влегуваат во продавница според Поасонова распределба со параметар 40 (за единица време од еден час). Ако во текот на првиот час пристигнале 30 купувачи, најди ја веројатноста дека во првиот час и половина пристигнале 60 купувачи.

ЗАДАЧА 3.79. Случајната променлива X ги прима вредностите 80, 90, 100, 110, 120, секоја со иста веројатност од 0,2. Најди го законот на распределба на случајната променлива $Y = |X - EX|$.

ЗАДАЧА 3.80. Нека X е дискретна случајна променлива која прима вредности $x_1, x_2, ..., x_n$ соодветно со веројатности $p_1, p_2, ..., p_n$, $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

а) Нека сите $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$ и $EX = 0$. Докажи дека $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ или со други зборови, $P\{X = 0\} = 1$.

б) Нека $DX = 0$. Докажи дека $P\{X = EX\} = 1$.

ЗАДАЧА 3.81. Нека X е дискретна случајна променлива од конечен тип. Докажи дека:

а) $DX \leq E((X - \frac{x_k - x_m}{2})^2)$, каде x_k и x_m се произволни вредности на X.

б) $DX \leq (\frac{b-a}{2})^2$, каде a и b се соодветно најмалата и најголемата вредност на X.
Кога важи равенство во горните неравенства? Најди пример кога важи равенство.

ЗАДАЧА 3.82. Во една кутија има 6 црвени и 4 црни топчиња. Од кутијата се извлекуваат 3 топчиња, едно по едно:
а) со враќање,
б) без враќање.
Најди го очекуваниот број на извлечени црвени топчиња.

ЗАДАЧА 3.83. Се фрлаат n коцки за играње. Најди ги математичкото очекување и дисперзијата на збирот на паднатите точки на секоја од коцките.

ЗАДАЧА 3.84. Нека секој од n луѓе ја стави својата капа во една кутија, а потоа секој од нив на случаен начин од кутијата одбира по една капа. Кој е очекуваниот број на луѓе кои ќе си ја одберат својата капа?

ЗАДАЧА 3.85. Најди ја очекуваната вредност на сумата $\sum_{k=1}^{n}(1+x_k)$, каде x_k, $k = 1, 2, ..., n$ се случајно избрани броеви од множеството $\{-1, 0, 1\}$, при што секој избор на број е еднаквоверојатен.

ЗАДАЧА 3.86. На патот кон работа еден човек поминува четири семафори кои независно еден од друг со веројатност 0,4 дозволуваат, а со веројатност 0,6 стопираат понатамошно движење. Најди го очекуваниот број семафори покрај кои човекот ќе помине до првото стопирање.

ЗАДАЧА 3.87. На рамнина со мрежа составена од квадрати со страна a, се фрла игла со должина l ($l \geq a\sqrt{2}$). Најди го очекуваниот број на пресечени страни на квадрати од страна на иглата.

ЗАДАЧА 3.88. Една машина е дадена на технички преглед. Бројот на дефекти на машината за време на техничкиот преглед има Поасонова распределба со параметар a ($a > 0$). Ако за време на техничкиот преглед не е забележан дефект, машината продолжува да работи уште 2 часа. Ако се забележани еден или два дефекта, тогаш по отстранувањето на секој од нив, на машината ѝ се продолжува времето на работа за уште по половина час за секој отстранет дефект. Ако се забележани повеќе од два дефекта, тогаш машината се носи на ремонт, и по ремонтот ѝ се продолжува времето на работа за уште 4 часа. Одреди го законот на распределба на времето T на работа на машината и неговото математичко очекување ET.

ЗАДАЧА 3.89. Парадоксот Санкт Петербург. Се изведуваат последователни фрлања на фер монета сè до појавувањето на „грб“ по прв пат. Ако при првото фрлање се падне „пара“, играчот добива 2 долара, ако при второто фрлање се падне „пара“, тој добива уште 4 долари итн., ако при k-тото фрлање се падне „пара“, играчот добива 2^k долари. Најди ја очекуваната добивка?

ЗАДАЧА 3.90. Две монети се фрлаат истовремено сѐ додека на едната не се појави „глава“, а на другата „пара“. На првата монета паѓа „глава“ со веројатност p_1, а на втората монета паѓа „глава“ со веројатност p_2. Фрлањата на монетите се независни. Нека X е број на фрлања на монетите.

а) Најди ја распределбата на случајната променлива X и најди ги математичкото очекување EX и дисперзијата DX.

б) Која е веројатноста да во последното фрлање на првата монета се паднало „глава“?

ЗАДАЧА 3.91. Нека X и Y се независни случајни променливи со $EX = 2$, $EY = -3$, $DX = 1$ и $DY = 2$. Најди го математичкото очекување EU на случајната променлива $U = 3X^2Y + 2Y^2 + 1$.

ЗАДАЧА 3.92. Еден стрелец изведува две независни гаѓања во метата. Веројатноста за погодок на метата при секое гаѓање е p. Нека X е разлика меѓу бројот на погодоци и бројот на промашувања на метата и Y е збирот на бројот на погодоци и бројот на промашувања на метата.

а) Најди ги распределбите на случајните променливи X и Y.

б) Најди ги EX, DX, EY и DY.

ЗАДАЧА 3.93. Двајца стрелци, независно еден од друг гаѓаат по еднаш во мета, при што првиот стрелец ја погодува метата со веројатност p_1, а вториот ја погодува со веројатност p_2. Нека X_1 е број на погодоци на метата на првиот стрелец, а X_2 е број на погодоци на метата на вториот стрелец и нека $Y = X_1 - X_2$. Најди ја распределбата на случајната променлива Y и најди ги EY и DY.

ЗАДАЧА 3.94. Нека случајната променлива X има биномна распределба $\mathcal{B}(n,p)$. Најди ги $E(|X - np|)$ и $D(|X - np|)$.

ЗАДАЧА 3.95. Распределбата на случајниот вектор (X, Y) е дадена со следната табела.

X \ Y	0	1	2	$P\{X = a\}$
-1	...	...	...	1/2
1	...	1/2	...	1/2
$P\{Y = b\}$	1/6	2/3	1/6	

а) Одреди ги вредностите кои недостасуваат.

б) Дали X и Y се независни случајни променливи?

ЗАДАЧА 3.96. Распределбата на случајниот вектор (X, Y) е дадена со следната табела.

$X \backslash Y$	1	2	5
-2	0,14	0,11	0,05
0	0,15	0,10	0
1	0,10	0,10	0,25

Најди ги веројатностите $P\{X = Y\}$ и $P\{X < Y\}$.

ЗАДАЧА 3.97. Фер монета се фрла еднаш. Ако падне „грб", се фрла уште еднаш. Нека X е број на паднати „грба" и Y е број на фрлања.

а) Најди ја распределбата на случајниот вектор (X, Y).

б) Најди ги маргиналните и условните распределби.

в) Дали X и Y се независни случајни променливи?

г) Најди ја веројатноста дека се паднал најмалку еден „грб".

д) Најди го коефициентот на корелација на X и Y.

ѓ) Најди ги распределбите на случајните променливи $U = \min\{X, Y\}$, $V = \max\{X, Y\}$, $S = X + Y$ и $T = XY$. Најди ги нивните математички очекувања.

ЗАДАЧА 3.98. Двајца стрелци гаѓаат независно еден од друг по 2 истрела во една иста мета и при тоа првиот стрелец со веројатност 0,8 ја погодува метата, а вториот стрелец со веројатност 0,6 ја погодува метата. Нека X е бројот на погодоци на првиот стрелец, а Y е вкупниот број на погодоци на метата.

а) Најди ја распределбата на случајниот вектор (X, Y).

б) Најди го очекуваниот број на погодоци на метата.

в) Најди ја веројатноста да двајцата стрелци еднаков број пати ја погодиле метата.

ЗАДАЧА 3.99. При едно социолошко истражување утврдено е дека веројатноста за бројот на деца кај фамилиите со 0, 1 или 2 деца е 0,3; 0,4 и 0,3 за 0, 1 и 2 деца соодветно. При тоа, веројатноста едно избрано дете да е машко е еднаква со веројатноста да е женско и изнесува 0,5. На случаен начин е избрана една фамилија од набљудуваните фамилии. Нека X е бројот на деца во фамилијата, а Y е бројот на машки деца меѓу децата во фамилијата. Најди ја распределбата на случајниот вектор (X, Y).

ЗАДАЧА 3.100. Во две кутии се наоѓаат по 3 ливчиња со броевите 0, 1, 2 во I кутија и 0,-1, -2 во II кутија. На случаен начин од секоја од кутиите се извлекува по едно ливче. Нека X е производ на броевите од извлечените ливчиња, а Y е збир на броевите од извлечените ливчиња.

а) Најди ја распределбата на случајниот вектор (X, Y).

б) Најди ги маргналните закони на распределба на X и Y.

ЗАДАЧА 3.101. Случајните променливи X и Y се независни и еднакво распределени со Бернулиеви распределби со параметар $p = \frac{1}{2}$. Нека $U = X + Y$ и $V = |X - Y|$.

а) Одреди ја распределбата на случајниот вектор (U, V) и маргиналните распределби на случајните променливи U и V соодветно.

б) Дали случајните променливи U и V се независни?

ЗАДАЧА 3.102. Нека случајните променливи X и Y се независни и еднакво распределени со геометриски распределби со параметар p $(0 < p < 1)$. Покажи дека

$$P\{X = i \mid X + Y = n\} = \frac{1}{n-1}, \quad i = 1, 2, ..., n-1.$$

ЗАДАЧА 3.103. Нека случајните променливи X и Y се независни и имаат биномни распределби $\mathcal{B}(n_1, p)$ и $\mathcal{B}(n_2, p)$ соодветно. Најди ја условната распределба на случајниот вектор (X, Y) при услов $X + Y = k$, за $0 \leq k \leq n_1 + n_2$.

4

ОПШТИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

4.1 Функција на распределба. Непрекината случајна променлива

Во делот 3.1 ја дадовме дефиницијата за **случајна променлива**, и дефиниравме **дискретна случајна променлива**. За да дефинираме случајна променлива од непрекинат тип, потребен ни е поимот за функција на распределба на случајна променлива. Нека X е случајна променлива дефинирана на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- Функцијата $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинирана со

  $$F_X(x) = P\{w : X(w) \leq x\} = P(X \leq x)$$

  се нарекува **функција на распределба** на случајната променлива X.

- **Теорема.** Нека $F_X(x)$ е функција на распредлба на случајната променлива X, тогаш важат следните својства:

(F1) $F_X(x)$ е неопаѓачка функција,

(F2) $F_X(x)$ е непрекината од десно т.е. $F_X(x+) = F_X(x)$,

(F3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

- **Својство.** Нека $F_X(x)$ е функција на распределба на случајната променлива X, тогаш, за секои реални броеви $x_1 < x_2$ важи:

  1) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
  2) $P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1-)$
  3) $P\{x_1 \leq X < x_2\} = F_X(x_2-) - F_X(x_1-)$
  4) $P\{x_1 < X < x_2\} = F_X(x_2-) - F_X(x_1)$
  5) $P\{X = x_1\} = F_X(x_1) - F_X(x_1-)$ и ако $F_X(x)$ е непрекината во $x = x_1$, тогаш $P\{X = x_1\} = 0$.

- **Теорема.** Ако $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функција која ги задоволува својствата $(F1) - (F3)$, тогаш постои случајна променлива X така што $F_X(x)$ е функција на распредлба на случајната променлива X.

Ако функција на распределба $F_X(x)$ е апсолутно непрекината функција т.е. ако постои ненегативна функција $p_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така што

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du,$$

за сите $x \in \mathbb{R}$, тогаш се вели дека X е **апсолутно непрекината случајна променлива**, а функцијата $p_X(x)$ се нарекува **густина на распределба** на случајната променлива X.

Ако функцијата на распределба $F(x)$ е непрекината функција и изводот $F'(x)$ постои и е еднаков на нула скоро секаде (освен на множество со мера нула), тогаш функцијата $F(x)$ се нарекува **сингуларна функција на распределба**.

- **Својства.** Нека X е случајна променлива од апсолутно непрекинат тип со функција на распределба $F_X(x)$ и густина на распределба $p_X(x)$. Тогаш, важат следниве својства:

  1) $p_X(x) \geq 0$,
  2) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du$, за секој $x \in \mathbb{R}$,
  3) $F'_X(x) = p_X(x)$, во точките на непрекинатост на $p_X(x)$,
  4) $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\,dx = 1$,
  5) $P\{X \in B\} = \int_B p_X(x)dx$, за $B \in \mathcal{B}$. Специјално, $P\{a < X < b\} = \int_a^b p_X(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a)$, за секои $a < b$.

Поважни распределби од апсолутно непрекинат тип:

- **Непрекината рамномерна распределба**, $X \sim \mathcal{U}(a,b)$, $a < b$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in (a,b) \\ 0 & , x \notin (a,b) \end{cases}.$$

- **Нормална (Гаусова) распределба**, $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ако $m = 0$ и $\sigma^2 = 1$, тогаш $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ има **стандардна нормална распределба** со густина на распределба $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

- **Експоненцијална распределба**, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}.$$

- **Хи-квадрат распределба**, $X \sim \chi^2_n$, $n \in \mathbb{N}$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\, e^{-x/2} & , x > 0 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}.$$

- **Гама распределба**, $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $\alpha, \lambda > 0$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases},$$

каде $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, $\alpha > 0$ е Гама функција за која важи:

1) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, за секој $\alpha > 0$,
2) $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$, за секој $0 < \alpha < 1$,
3) $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

- **Кошиева распределба**, $\alpha > 0$

$$p_X(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ЗАДАЧА 4.1. Најди ја функцијата на распределба $F_X(x)$ на случајната променлива X од Задача 3.1.

Решение. Законот на распределба на случајната променлива X е

x	2	3	4
$P\{X=x\}$	1/4	1/2	1/4

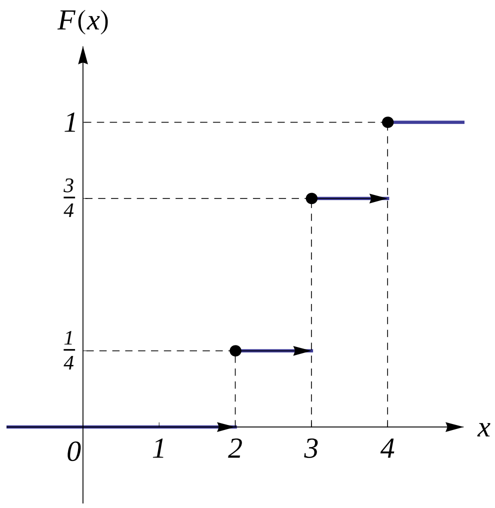
Па, функцијата на распределба $F_X(x)$ на X е

$$\begin{aligned}
&\text{за } x<2,\ F_X(x)=P\{X\le x\}=0,\\
&\text{за } 2\le x<3,\ F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X=2\}=\frac{1}{4},\\
&\text{за } 3\le x<4,\ F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\in\{2,3\}\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4},\\
&\text{за } x\ge 4,\ F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\in\{2,3,4\}\}=1,
\end{aligned}$$

односно

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & ,x<2\\ 1/4 & ,2\le x<3\\ 3/4 & ,3\le x<4\\ 1 & ,x\ge 4\end{cases}$$

Да забележиме дека функцијата $F_X(x)$ ги задоволува својствата (F1)-(F3), и бидејќи X е дискретна случајна променлива, функцијата на распределба е скалеста функција, види Цртеж 4.1.



Цртеж 4.1

ЗАДАЧА 4.2. Најди ја функцијата на распределба $F_X(x)$ на случајната променлива X - број на паднати точки при едно фрлање на коцка за играње. Потоа, најди ја веројатноста дека се падналe не помалку од 5 точки.

Решение. Случајната променлива X е рамномерно распределена на множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$, односно нејзиниот закон на распределба е

$$P\{X=k\}=\frac{1}{6},\quad k=1,2,3,4,5,6.$$

Па, за функцијата на распределба имаме

$$\begin{aligned}
&\text{за } x<1,\ F_X(x)=P\{X\le x\}=0,\\
&\text{за } 1\le x<2,\ F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X=1\}=\frac{1}{6},\\
&\text{за } 2\le x<3,\ F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\in\{1,2\}\}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\\
&\text{за } 3\le x<4,\ F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\in\{1,2,3\}\}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\\
&\text{за } 4\le x<5,\ F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\in\{1,2,3,4\}\}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\\
&\text{за } 5\le x<6,\ F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\in\{1,2,3,4,5\}\}=\frac{5}{6},\\
&\text{за } x\ge 6,\ F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\in\{1,2,3,4,5,6\}\}=1,
\end{aligned}$$

односно

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & ,x<1\\ 1/6 & ,1\le x<2\\ 1/3 & ,2\le x<3\\ 1/2 & ,3\le x<4\\ 2/3 & ,4\le x<5\\ 5/6 & ,5\le x<6\\ 1 & ,x\ge 6\end{cases}$$

Додека, бараната веројатност да се паднат не помалку од 5 точки е

$$\begin{aligned}
P\{X\ge 5\} &= P\{X=5\}+P\{X>5\}=P\{X=5\}+(1-P\{X\le 5\})=\\
&= (F_X(5)-F_X(5-))+(1-F_X(5))=(\frac{5}{6}-\frac{2}{3})+(1-\frac{5}{6})=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4.3. Случајната променлива X е дадена со нејзината функција на распределба $F_X(x)$, односно

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & ,x<2\\ 0,5x-1 & ,2\le x<4\\ 1 & ,x\ge 4\end{cases}.$$

Најди ја веројатноста X да прима вредности:
а) не поголеми од 0,2,
б) не поголеми од 3,
в) поголеми од 3,
г) поголеми од 5.

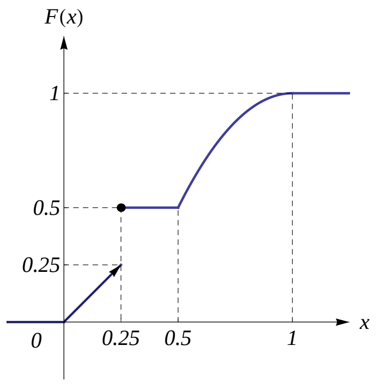
Решение. Бараните веројатности се:
а) $P\{X \leq 0,2\} = F_X(0,2) = 0$,
б) $P\{X \leq 3\} = F_X(3) = 0,5 \cdot 3 - 1 = 0,5$,
в) $P\{X > 3\} = 1 - P\{X \leq 3\} = 1 - 0,5 = 0,5$,
г) $P\{X > 5\} = 1 - P\{X \leq 5\} = 1 - F_X(3) = 1 - 1 = 0$.

ЗАДАЧА 4.4. Нека е дадена функцијата на распределба на случајната променлива X со

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x & , 0 \leq x < 0,25 \\ 0,5 & , 0,25 \leq x < 0,5 \\ -2(x-1)^2 + 1 & , 0,5 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases} .$$

Пресметај ги веројатностите $P\{X \in (0,25; 0,5]\}$, $P\{X \in (0,8; 1]\}$, $P\{X = 0,25\}$ и $P\{X = 0,75\}$.

Решение. Да забележиме дека функцијата $F_X(x)$ ги задоволува својствата (F1)-(F3), види Цртеж 4.2.



Цртеж 4.2

За бараните веројатности имаме:

$$\begin{aligned} P\{X \in (0,25; 0,5]\} &= F_X(0,5) - F_X(0,25) = (-2 \cdot (0,5-1)^2 + 1) - 0,5 = 0, \\ P\{X \in (0,8; 1]\} &= F(1) - F(0,8) = 1 - (-2 \cdot (0,8-1)^2 + 1) = 1 - 0,92 = 0,08, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X=0,25\} &= F_X(0,25)-F_X(0,25-)=0,5-0,25=0,25,\\ P\{X=0,75\} &= F_X(0,75)-F_X(0,75-)=F_X(0,75)-F_X(0,75)=0. \end{aligned}$$

Впрочем, за случајната променлива X дадена со оваа функција на распределба $F_X(x)$, важи $P\{X=x_0\}=0$ за секој $x_0\neq 0,25$, затоа што $F_X(x)$ е непрекината во секоја точка $x=x_0\neq 0,25$. Да забележиме дека случајната променлива која одговара на оваа функција на распределба не е ниту од дискретен, ниту од непрекинат тип.

ЗАДАЧА 4.5. Дадена е функцијата $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ со

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ,x<0\\ \frac{x}{1+x} & ,x\geq 0 \end{cases}.$$

Дали $F(x)$ е функција на распределба на некоја случајна променлива? Образложи.

Решение. Да испитаме дали важат својствата (F1)-(F3). Од $F'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}\geq 0$ имаме дека $F(x)$ е неопаѓачка функција, па важи (F1). Потоа, $F(x)$ е непрекината фукција, па важи (F2). И конечно,

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1,$$

што значи дека важи и (F3). Па, според тоа, $F(x)$ е функција на распределба на некоја случајна променлива.

ЗАДАЧА 4.6. Нека е дадена функцијата на распределба $F_X(x)$ на случајната променлива X со

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & ,x<-2\\ 0,2 & ,-2\leq x<1\\ 0,5 & ,1\leq x<3\\ 0,7 & ,3\leq x<4\\ 1 & ,x\geq 4 \end{cases}.$$

Определи ја распределбата на X.

Решение. Функцијата $F_X(x)$ е скалеста функција, па X е дискретна случајна променлива која прима вредности точките на прекин на $F_X(x)$ т.е. $X\in\{-2,1,3,4\}$. Па, законот на распределба X е

$$\begin{aligned} P\{X=-2\} &= F_X(-2)-F(-2-)=0,2-0=0,2,\\ P\{X=1\} &= F_X(1)-F(1-)=0,5-0,2=0,3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X=3\} &= F_X(3)-F(3-)=0,7-0,5=0,2, \\ P\{X=4\} &= F_X(4)-F(4-)=1-0,7=0,3, \end{aligned}$$

или со табела

x	-2	1	3	4
$P\{X=x\}$	0,2	0,3	0,2	0,3

ЗАДАЧА 4.7. Функцијата на распределба на случајната променлива X од апсолутно непрекинат тип е дадена со

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & ,x<1 \\ k(x-1)^2 & ,1\le x<3 \\ 1 & ,x\ge 3 \end{cases}.$$

а) Одреди ја вредноста на $k\in\mathbb{R}$ и густината на распределеба $p_X(x)$ на X.
б) Најди ја веројатноста дека X прима вредности од интервалот $(1,2)$.

Решение. а) Од непрекинатоста на $F_X(x)$ имаме дека

$$F_X(3-)=F_X(3)\ \Rightarrow\ k\cdot(3-1)^2=1\ \Rightarrow\ k=\frac{1}{4},$$

па функцијата на распределба на X е

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & ,x<1 \\ \frac{1}{4}(x-1)^2 & ,1\le x<3 \\ 1 & ,x\ge 3 \end{cases},$$

од каде густината на распределба е

$$p_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & ,1\le x<3 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}.$$

б) $P\{X\in(1,2)\}=P\{1<X<2\}=F_X(2)-F_X(1)=\frac{1}{4}\cdot(2-1)^2-\frac{1}{4}\cdot(1-1)^2=\frac{1}{4}$.

ЗАДАЧА 4.8. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x)=\begin{cases} \frac{a}{2}\,x & ,0<x<1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}.$$

а) Одреди ја вредноста на $a\in\mathbb{R}$ и функцијата на распределба $F_X(x)$ на X.
б) Најди ја веројатноста дека X прима вредности од интервалот $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Решение. а) Од својството $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1$ имаме

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = \int_0^1 \frac{a}{2}xdx = \frac{a}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{a}{4},$$

од каде имаме дека $a = 4$, па густината на распределба е

$$p_X(x) = \begin{cases} 2x & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}.$$

Функцијата на распределба изразена преку густината на распределба е $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du$, од каде

$$\text{за } x < 0,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = 0,$$
$$\text{за } 0 \le x < 1,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = \int_0^x 2u\ du = 2\frac{u^2}{2}\Big|_0^x = x^2,$$
$$\text{за } x \ge 1,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = \int_0^1 2u\ du = 1,$$

односно

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ x^2 & ,0 \le x < 1 \\ 1 & ,x \ge 1 \end{cases}.$$

(Функцијата $F_X(x)$ е (апсолутно) непрекината, па при нејзиното дефиинирање не е важно дали стои знакот $<$ или $\le$, односно дали стои знакот $>$ или $\ge$.)

б) За бараната веројатност имаме

$$P\{X \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} = P\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\} = \int_{-1/2}^{1/2} p_X(x)dx =$$
$$= \int_{-1/2}^{0} p_X(x)dx + \int_0^{1/2} p_X(x)dx = 0 + \int_0^{1/2} 2x\ dx = \frac{1}{4}.$$

ЗАДАЧА 4.9. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} 2x & ,0 \le x < \frac{1}{2} \\ 3ax + x^2 & ,\frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}.$$

а) Одреди ја вредноста на $a \in \mathbb{R}$ и функцијата на распределба $F_X(x)$ на X.

б) Најди ја веројатноста дека X прима вредности од интервалот $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

Решение. а) Од $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1$ имаме

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = \int_0^{1/2} 2xdx + \int_{1/2}^{1} (3ax + x^2)dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/2} + (3a \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})\Big|_{1/2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4} + (\frac{3a}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3a}{8} - \frac{1}{24}) = \frac{27a + 13}{24},$$

од каде имаме дека $a = \frac{11}{27}$, па густината на распределба е

$$p_X(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{11}{9}x + x^2 & , \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}.$$

Функцијата на распределба изразена преку густината на распределба е $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du$, од каде

$$\text{за } x < 0,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = 0,$$

$$\text{за } 0 \le x < \frac{1}{2},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = \int_0^x 2u\ du = 2\frac{u^2}{2}\Big|_0^x = x^2,$$

$$\text{за } \frac{1}{2} \le x < 1,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = \int_0^{1/2} 2u\ du + \int_{1/2}^{x} (\frac{11}{9}u + u^2)\ du =$$

$$= 2\frac{u^2}{2}\Big|_0^{1/2} + (\frac{11}{9} \cdot \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3})\Big|_{1/2}^{x} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{18}x^2 + \frac{1}{18},$$

$$\text{за } x \ge 1,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = \int_0^{1/2} 2u\ du + \int_{1/2}^{1} (\frac{11}{9}u + u^2)\ du = 1,$$

односно

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x^2 & , 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{18}x^2 + \frac{1}{18} & , \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases}.$$

б) За бараната веројатност имаме

$$P\{X \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})\} = P\{\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\} = \int_{1/4}^{3/4} p_X(x)dx =$$

$$= \int_{1/4}^{1/2} p_X(x)dx + \int_{1/2}^{3/4} p_X(x)dx = \int_{1/4}^{1/2} 2x\ dx + \int_{1/2}^{3/4} (\frac{11}{9}x + x^2)\ dx =$$

$$= 2\frac{x^2}{2}\Big|_{1/4}^{1/2} + (\frac{11}{9} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})\Big|_{1/2}^{3/4} = \frac{135}{576} = 0,234375.$$

ЗАДАЧА 4.10. Случајаната променлива X е дадена со нејзината функција на распределба $F_X(x)$, односно

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

а) Најди ја веројатноста X да прима вредности од интервалот $(0,1)$.

б) Најди за која вредност на x_1, со веројатност 0,25, случајната променлива X прима вредности помали од x_1.

Решение. а) Функцијата на распределба $F_X(x)$ е непрекината функција и затоа

$$\begin{aligned} P\{X \in (0,1)\} &= P\{0 < X < 1\} = F_X(1) - F_X(0) = \\ &= (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} 1) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

б) Се бара x_1 за кое $P\{X \geq x_1\} = 0,25$. Од непрекинатоста на $F_X(x)$ имаме

$$0,25 = P\{X \geq x_1\} = P\{X = x_1\} + P\{X > x_1\} = P\{X > x_1\} = 1 - P\{X \leq x_1\},$$

од каде $P\{X \leq x_1\} = 0,75$, односно $F_X(x_1) = 0,75$ или

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x_1 = 0,75.$$

Со решавање на последната равенка се добива $x_1 = 1$.

ЗАДАЧА 4.11. Густината на распределба на случајната променлива X од апсолутно непрекинат тип е $p_X(x) = C \cdot arctg\ x, \quad 0 < x < 1$, каде $C > 0$ е константа. Најди ја веројатноста X да прима вредности од интервалот $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Решение. Прво ја одредуваме вредноста на константата C од

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\, dx = C \int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = C \cdot \left(x \operatorname{arctg} x|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx \right) = \\ &= C \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 \right) = C \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right), \end{aligned}$$

од каде $C = \frac{4}{\pi - 2\ln 2}$, па бараната веројатност е

$$\begin{aligned} P\{X \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} p_X(x)\, dx = \frac{4}{\pi - 2\ln 2} \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} x\, dx = \\ &= \frac{2}{\pi - 2\ln 2} (\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \ln \frac{5}{4}) \approx 0,274032. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4.12. Избираме случаен број X од интервалот $[2,10]$ со густина на распределба од облик $p(x) = Cx$, каде $C > 0$ е константа.

а) Најди ја вредноста на константата C.

б) Најди ги веројатностите $P\{X > 5\}$ и $P\{X^2 - 12X + 35 > 0\}$.

Решение. а) Бидејќи $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$, имаме

$$1 = \int_2^{10} Cx\, dx = C\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^{10} = C(\frac{100}{2} - \frac{4}{2}) = 48C,$$

од каде $C = 1/48$, значи густината на распределба е $p(x) = x/48$, $x \in [2,10]$.

б) За бараните веројатности имаме

$$P\{X > 5\} = \int_5^{+\infty} p(x)dx = \int_5^{10} \frac{x}{48}dx = \frac{1}{48}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_5^{10} = \frac{1}{48}\cdot(\frac{100}{2} - \frac{25}{2}) = 0,78125,$$

односно

$$\begin{aligned} & P\{X^2 - 12X + 35 > 0\} = P\{(X-5)(X-7) > 0\} = P\{X \in (-\infty,5)\cup(7,+\infty)\} = \\ = \ & 1 - P\{X \in [5,7]\} = 1 - \int_5^7 p(x)dx = 1 - \int_5^7 \frac{x}{48}dx = 1 - \frac{1}{48}\cdot\left.\left(\frac{x^2}{2}\right)\right|_5^7 = \\ = \ & 1 - \frac{1}{48}\cdot(\frac{49}{2} - \frac{25}{2}) = 1 - 0,25 = 0,75. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4.13. Еден амперметар мери со точност до 0,1 ампери. При тоа, при мерење на јачината на струјата тој ја дава вредоста заокружена на една децимала. Најди ја веројатноста дека при мерење на јачината на струјата ќе се направи грешка поголема од 0,02 ампери.

Решение. Нека X е грешка при мерењето на јачината на струјата со амперметарот, тогаш X е рамномерно распределена меѓу најмалата и најголемата грешка, т.е. $X \sim \mathcal{U}(0;0,5)$, од каде густината на распределба на X е

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{0,05} & ,x \in (0;0,05) \\ 0 & ,x \notin (0;0,05) \end{cases} = \begin{cases} 20 & ,x \in (0;0,05) \\ 0 & ,x \notin (0;0,05) \end{cases}.$$

Па, бараната веројатност е

$$P\{X > 0,02\} = \int_{0,02}^{\infty} p_X(x)\, dx = \int_{0,02}^{0,05} 20\, dx = 0,6.$$

ЗАДАЧА 4.14. Една автобуска линија строго се придржува по распоредот на возење така што автобусите од таа автобуска линија поминуваат на интервали од по 5 минути. Најди ја веројатноста дека, еден патник, кој чека на една од автобуските станици, ќе го чека следниот автобус од таа автобуска линија помалку од 3 минути.

Решение. Нека X е временскиот момент на пристигнување на патникот на автобуската станица, тогаш случајната променлива X е рамномерно распределена меѓу две соседни временски моменти на поминувања на автобус од горе споменатата автобуска линија, т.е. X има $\mathcal{U}(a, a+5)$ распределба, каде a е еден временски момент на поминување на еден од автобусите од автобуската линија. Тогаш, густината на распределба на X е

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a+5-a} & , a < x < a+5 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases} = \begin{cases} 0,2 & , a < x < a+5 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases} .$$

Бараната веројатност е

$$P\{a+2 < X < a+5\} = \int_{a+2}^{a+5} p_X(x)\, dx = \int_{a+2}^{a+5} 0,2\, dx = 0,6.$$

ЗАДАЧА 4.15. Докажи дека функцијата $F(x) = 0,5 + \Phi_0(x)$, каде $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$ е функцијата на Лаплас, е функција на распределба на некоја случајна променлива X. Потоа најди ги веројатностите $P\{-1 \le X \le 1\}$ и $P\{X = x_0\}$, каде x_0 е произволен реален број.

Решение. Бидејќи $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0,5$ (покажи!), имаме

$$F(x) = 0,5 + \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

од каде следи дека $F(x)$ е функција на распределба на случајна променлива X која има густина на распределба $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, односно $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Вредностите на функцијата $\Phi_0(x)$ се читаат од Таблица 4 (Прилог В), а функцијата $\Phi_0(x)$ е непарна функција т.е. $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$.
Така, бараните веројатности се

$$\begin{aligned} P\{-1 \le X \le 1\} &= F(1) - F(-1) = 0,5 + \Phi_0(1) - 0,5 - \Phi_0(-1) = 2\Phi_0(1) = \\ &= 2 \cdot 0,34134 = 0,68268, \\ P\{X = x_0\} &= F(x_0) - F(x_0-) = F(x_0) - F(x_0) = 0. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4.16. Случајната променлива X има стандардна нормална распределба $\mathcal{N}(0,1)$. Најди ги веројатностите:

а) $P\{-\frac{1}{n} < X < \frac{1}{n}\}$, за $n = 2,3,4$,

б) $P\{n < X < n+1\}$, за $n = 0,1,2,3$,

в) $P\{-1 < X < a\}$, за $n = -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$.

Решение. Ако $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, тогаш $P\{x_1 < X < x_2\} = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$, каде вредностите на $\Phi_0(x)$ се читаат од Таблица 4 (Прилог В). Така,

а) $P\{-\frac{1}{n} < X < \frac{1}{n}\} = \Phi_0(\frac{1}{n}) - \Phi_0(-\frac{1}{n}) = 2\Phi_0(\frac{1}{n})$, односно

n	$P\{-\frac{1}{n} < X < \frac{1}{n}\}$
2	0,38292
3	0,25860
4	0,19742

б) $P\{n < X < n+1\} = \Phi_0(n+1) - \Phi_0(n)$, односно

n	$P\{n < X < n+1\}$
0	0,34134
1	0,13591
2	0,02140
3	0,00132

в) $P\{-1 < X < a\} = \Phi_0(a) - \Phi_0(-1) = \Phi_0(1) - \Phi_0(-a)$, односно

a	$P\{-1 < X < a\}$
$-\frac{3}{4}$	0,06797
$-\frac{1}{2}$	0,14988
$-\frac{1}{4}$	0,24263

ЗАДАЧА 4.17. Најди ја густината на распределба на случајната променлива Y ако:

а) $Y = aX + b$, $a > 0$, каде $X \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta)$,

б) $Y = -\ln X$, каде $X \sim \mathcal{U}(0,1)$,

в) $Y = aX + b$, $a > 0$, каде $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$,

г) $Y = \frac{1}{X}$, каде $X \sim \mathcal{N}(0,1)$,

Решение. а) Од $X \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta)$ имаме дека $p_X(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}$, за $x \in (\alpha, \beta)$. За функцијата на распределба на Y имаме

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{aX + b < y\} = P\{X < \frac{y-b}{a}\} = F_X(\frac{y-b}{a}),$$

од каде за густината на распределба на Y имаме

$$p_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{a} = p_X(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot \frac{1}{a}, \text{ за } \alpha < \frac{y-b}{a} < \beta,$$

односно

$$p_Y(y) = \frac{1}{(a\beta+b)-(a\alpha+b)}, \text{ за } a\alpha+b < y < a\beta+b,$$

па Y има повторно рамномерна распределба $Y \sim \mathcal{U}(a\alpha+b, a\beta+b)$.

б) Од $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ имаме дека $p_X(x) = 1$, за $x \in (0,1)$. За функцијата на распределба на Y имаме

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y<y\} = P\{-\ln X < y\} = P\{\ln X > -y\} = P\{X > e^{-y}\} = \\ &= 1 - P\{X \le e^{-y}\} = 1 - F_X(e^{-y}), \end{aligned}$$

од каде за густината на распределба на Y имаме

$$p_Y(y) = F_Y'(y) = -F_X'(e^{-y})\cdot(-e^{-y}) = p_X(e^{-y})\cdot e^{-y} = e^{-y}, \text{ за } 0 < e^{-y} < 1,$$

односно

$$p_Y(y) = e^{-y}, \text{ за } y > 0,$$

па Y има експоненцијална распределба $Y \sim \mathcal{E}(1)$.

в) Од $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ имаме дека $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, за $x \in \mathbb{R}$. Од а) за функцијата на распределба и густината на распределба на $Y = aX+b$ имаме

$$F_Y(y) = F_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big) \quad \text{и} \quad p_Y(y) = p_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big)\cdot\frac{1}{a},$$

од каде

$$p_Y(y) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a\sigma}\, e^{-\frac{(y-(am+b))^2}{2a^2\sigma^2}}, \text{ за } x \in \mathbb{R}$$

па Y има повторно нормална распределба $Y \sim \mathcal{N}(am+b, a^2\sigma^2)$.

Да забележиме дека ако $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, тогаш $Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

г) Од $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ имаме дека $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, за $x \in \mathbb{R}$. За функцијата на распределба на Y имаме

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y<y\} = P\{\frac{1}{X}<y\} = \\
&= P\{\frac{1}{X}<y, X<0\} + P\{\frac{1}{X}<y, X>0\} = \\
&= P\{1>yX, X<0\} + P\{1<yX, X>0\} = \\
&= \begin{cases} P\{\frac{1}{y}<X, X<0\} + P\{\frac{1}{y}>X, X>0\} & ,y<0 \\ P\{\frac{1}{y}>X, X<0\} + P\{\frac{1}{y}<X, X>0\} & ,y>0 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} P\{\frac{1}{y}<X<0\} + P(\emptyset) & ,y<0 \\ P\{X<0\} + P\{X>\frac{1}{y}\} & ,y>0 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} F_X(0) - F_X(\frac{1}{y}) + 0 & ,y<0 \\ F_X(0) + 1 - F_X(\frac{1}{y}) & ,y>0 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 0,5 - F_X(\frac{1}{y}) & ,y<0 \\ 1,5 - F_X(\frac{1}{y}) & ,y>0 \end{cases},
\end{aligned}$$

при што искористивме дека $F_X(0) = 0,5$ (види Задача 4.15). Тогаш, за густината на распределба на Y имаме

$$p_Y(y) = F'_Y(y) = -F'_X(\frac{1}{y})\cdot(-\frac{1}{y^2}) = p_X(\frac{1}{y})\cdot\frac{1}{y^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,y^2}\,e^{-\frac{1}{2y^2}}, \text{ за } y\neq 0.$$

ЗАДАЧА 4.18. Случајната променлива X има $\mathcal{N}(2, 0.5^2)$ распределба. Најди ги веројатностите $P\{X^2-5X+6>0\}$ и $P\{X\leq 1 \text{ или } X^2>4\}$.

Решение. Според Задача 4.17 в), ако $X\sim\mathcal{N}(2, 0.5^2)$, тогаш $\frac{X-2}{0,5}\sim\mathcal{N}(0,1)$. Затоа,

$$\begin{aligned}
& P\{X^2-5X+6>0\} = \\
= \ & P\{(X-2)(X-3)>0\} = P\{X\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)\} = \\
= \ & 1-P\{2\leq X\leq 3\} = 1-P\{\frac{2-2}{0,5}\leq\frac{X-2}{0,5}\leq\frac{3-2}{0,5}\} = \\
= \ & 1-P\{0\leq\frac{X-5}{0,1}\leq 2\} = 1-\Phi_0(2)+\Phi_0(0) = 1-0,47725+0 = 0,52275.
\end{aligned}$$

За другата веројатност имаме,

$$\begin{aligned}
& P\{X\leq 1 \text{ или } X^2>4\} = \\
= \ & P\{X\leq 1\} + P\{X^2>4\} - P\{X\leq 1 \text{ и } X^2>4\} = \\
= \ & P\{X\in(-\infty,1]\} + P\{X\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\} - P\{X\in(-\infty,-2)\} = \\
= \ & P\{X\in(-\infty,1]\} + P\{X\in(-\infty,-2)\} + P\{X\in(2,+\infty)\} - P\{X\in(-\infty,-2)\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= P\{X \in (-\infty, 1]\} + P\{X \in (2, +\infty)\} = 1 - P\{X \in (1, 2]\} = 1 - P\{1 < X \leq 2\} = \\ &= 1 - P\{\frac{1-2}{0,5} < \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{2-2}{0,5}\} = 1 - P\{-2 < \frac{X-2}{0,5} \leq 0\} = \\ &= 1 - \Phi_0(0) + \Phi_0(-2) = 1 - \Phi_0(0) - \Phi_0(2) = 1 - 0 - 0,47725 = 0,52275. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4.19. Случајната променлива X има $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ распределба. Определи ја вредноста на λ за која:

а) $P\{m - \lambda\sigma < X < m + \lambda\sigma\} = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, 3,$

б) $P\{m - \lambda\sigma < X < m + \lambda\sigma\} = \frac{1}{3^k}, \quad k = 1, 2, 3,$

в) $P\{m - \lambda\sigma < X < m + \lambda\sigma\} = \frac{k}{10}, \quad k = 1, 2, ..., 9.$

Решение. Ако X има $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ распределба, тогаш $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ има $\mathcal{N}(0, 1)$ распределба, види Задача 4.17 в). При тоа, $F_Y(x) = 0,5 + \Phi_0(x)$, каде вредностите на $\Phi_0(x)$ се читаат од Таблица 4 (Прилог В).

а) За бараните веројатности имаме

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k} &= P\{m - \lambda\sigma < X < m + \lambda\sigma\} = P\{-\lambda < \frac{X-m}{\sigma} < \lambda\} = P\{-\lambda < Y < \lambda\} = \\ &= F_Y(\lambda) - F_Y(-\lambda) = \Phi_0(\lambda) - \Phi_0(-\lambda) = 2\Phi_0(\lambda), \end{aligned}$$

што значи дека

$$\Phi_0(\lambda) = \frac{1}{2^{k+1}},$$

па за различни вредности на k ја наоѓаме вредноста на $\Phi_0(\lambda)$, а потоа и на λ:

k	$\Phi_0(\lambda)$	λ
1	0,25	0,675
2	0,125	0,32
3	0,0625	0,155

б) Слично, за бараните веројатности имаме

$$\frac{1}{3^k} = P\{m - \lambda\sigma < X < m + \lambda\sigma\} = 2\Phi_0(\lambda),$$

што значи дека

$$\Phi_0(\lambda) = \frac{1}{2 \cdot 3^k},$$

па за различни вредности на k ја наоѓаме вредноста на $\Phi_0(\lambda)$, а потоа и на λ:

k	$\Phi_0(\lambda)$	λ
1	0,16667	0,435
2	0,05556	0,14
3	0,01852	0,045

в) И тука, од

$$\frac{k}{10} = P\{m - \lambda\sigma < X < m + \lambda\sigma\} = 2\Phi_0(\lambda),$$

имаме дека

$$\Phi_0(\lambda) = \frac{k}{20},$$

па за различни вредности на k ја наоѓаме вредноста на $\Phi_0(\lambda)$, а потоа и на λ:

k	$\Phi_0(\lambda)$	λ
1	0,05	0,125
2	0,1	0,255
3	0,15	0,385
4	0,2	0,525
5	0,25	0,675
6	0,3	0,845
7	0,35	1,04
8	0,4	1,285
9	0,45	1,645

ЗАДАЧА 4.20. Случајната променлива X е рамномерно распределна на интервалот $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ т.е. $X \sim \mathcal{U}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Најди ја густината на распределба $p_Y(x)$ на случајната променлива $Y = \sin X$.

Решение. Густината на распределба на $X \sim \mathcal{U}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ е

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & , -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases} .$$

Тогаш, за функцијата на распределба на Y имаме,

$$F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{\sin X \leq x\} = P\{X \leq \arcsin x\} = F_X(\arcsin x),$$

од каде густината на распределба на Y е

$$\begin{aligned} p_Y(x) &= F_Y'(x) = F_X'(\arcsin x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot p_X(\arcsin x) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\pi} & , -\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\pi} & , -1 < x < 1 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases} . \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4.21. Случајната променлива X има нормална распределба $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ со параметри $m = 0$ и $\sigma = 1$. Најди ја густината на распределба на случајната променлива $Y = |X|$.

Решение. Од $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ имаме дека $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, за $x \in \mathbb{R}$. За функцијата на распределба на Y, за $y \geq 0$, имаме

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{|X| \leq y\} = P\{-y \leq X \leq y\} = F_X(y) - F_X(-y),$$

од каде за густината на распределба на Y, за $y \geq 0$, имаме

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= F_Y'(y) = F_X'(y) - F_X'(-y) \cdot (-1) = F_X'(y) + F_X'(-y) = \\ &= p_X(y) + p_X(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(-y)^2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}, \text{ за } y \geq 0. \end{aligned}$$

Да забележиме дека за $y < 0$, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{|X| \leq y\} = P(\emptyset) = 0$, па и $p_Y(y) = 0$ за $y < 0$.

ЗАДАЧА 4.22. Случајната променлива X има стандардна нормална распределба т.е. $\mathcal{N}(0,1)$. Најди ја распределбата на случајната променлива $Y = X^2$.

Решение. Густината на распределба на $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ е

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогаш, за функцијата на распределба на $Y = X^2$, за $x \geq 0$, имаме

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\{Y \leq x\} = P\{X^2 \leq x\} = P\{|X| \leq \sqrt{x}\} = \\ &= P\{-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\} = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}), \end{aligned}$$

од каде густината на распределба на Y, за $x > 0$, е

$$\begin{aligned} p_Y(x) &= F_Y'(x) = F_X'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - F_X'(-\sqrt{x}) \cdot \Big(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \Big) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \big(p_X(\sqrt{x}) + p_X(-\sqrt{x}) \big) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x}{2}} \Big) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, e^{-\frac{x}{2}}, \end{aligned}$$

односно

$$p_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, e^{-\frac{x}{2}} & , x > 0 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases},$$

па Y има хи-квадрат распределба со 1 степен на слобода т.е. $Y \sim \chi_1^2$.

ЗАДАЧА 4.23. Случајната променлива X има Кошиева распределба со параметар $\alpha = 1$, односно нејзината густина на распределба е

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Најди ја густината на распределба $p_Y(x)$ на случајната променлива $Y = X^3+2$.

Решение. Функцијата на распределнба на $Y = X^3 + 2$ е

$$F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{X^3 + 2 \leq x\} = P\{X \leq \sqrt[3]{x-2}\} = F_X(\sqrt[3]{x-2}),$$

од каде за густината на распределба на Y, за $x \neq 2$, имаме

$$\begin{aligned} p_Y(x) &= F'_Y(x) = F'_X(\sqrt[3]{x-2}) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} \cdot p_X(\sqrt[3]{x-2}) = \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} \cdot \frac{1}{\pi(1+\sqrt[3]{(x-2)^2})} = \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^4}}\,, \end{aligned}$$

додека за $x = 2$ имаме дека

$$F_Y(2) = F_X(\sqrt[3]{2-2}) = F_X(0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{2},$$

па можеме $p_Y(x)$ да ја додефинираме во $x = 2$ така што ќе ставиме $p_Y(2) = 0$, односно имаме

$$p_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^4}} & , x \neq 2 \\ 0 & , x = 2 \end{cases}.$$

ЗАДАЧА 4.24. Ако радиусот на еден круг има $\mathcal{N}(1000; 0,5^2)$ распределба, најди ја распределбата на должината на кружницата и распределбата на плоштината на кругот.

Решение. Нека X е должината на радиусот на кругот, тогаш $X \sim \mathcal{N}(1000; 0,5^2)$. Нека Y е должината на кружницата, а U е плоштината на кругот. Тогаш, $Y = 2X\pi$, а $U = X^2\pi$. Од Задача 4.17 а), имаме дека Y има исто така нормална распределба т.е. $Y \sim \mathcal{N}(2\pi \cdot 1000; 4\pi^2 \cdot 0,5^2) \equiv \mathcal{N}(2000\pi; \pi^2)$, односно густината на распределба на Y е

$$p_Y(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-2000\pi)^2}{2\pi^2}}.$$

За функцијата на распределба на $U = X^2\pi$, за $x \geq 0$, имаме

$$\begin{aligned} F_U(x) &= P\{U \leq x\} = P\{X^2\pi \leq x\} = P\left\{|X| \leq \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right\} = \\ &= P\left\{-\sqrt{\frac{x}{\pi}} \leq X \leq \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right\} = F_X\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right), \end{aligned}$$

од каде густината на распределба, за $x > 0$, е

$$\begin{aligned} p_U(x) &= F'_U(x) = F'_X\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} - F'_X\left(-\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} = \\ &= p_X\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} + p_X\left(-\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,5}\, e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}-1000\right)^2}{2\cdot 0,5^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,5}\, e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}+1000\right)^2}{2\cdot 0,5^2}}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{x}} \cdot \left(e^{-2\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}-1000\right)^2} + e^{-2\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}+1000\right)^2}\right). \end{aligned}$$

За $x = 0$, имаме дека $F_U(0) = 2F_X(0) = const.$, па ја додефинираме $p_U(x) = 0$, за $x = 0$. Додека пак за $x < 0$, имаме $F_U(x) = P\{U \leq x\} = P\{X^2\pi \leq x\} = 0$, па ја додефинираме $p_U(x) = 0$, за $x < 0$.

ЗАДАЧА 4.25. Нека точката A се наоѓа на оската Oy на растојание 1 од координатниот почеток. Низ A се повлекува произволна права a која зафаќа агол α со оската Oy и при тоа распределбата на вредности на аголот α е рамномерна од $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Најди ја густината на распределба на апцисата на точката B добиена како пресек на правата a со Ox оската.

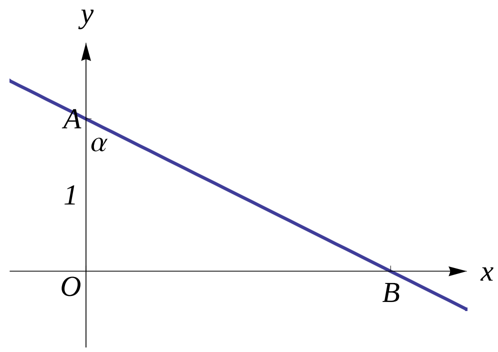
Решение. Означуваме со X - вредност на аголот α, тогаш $X \sim \mathcal{U}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, од каде $p_X(x) = \frac{1}{\pi}$, за $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Од услов на задачата, $\overline{OA} = 1$, $\alpha = \widehat{OAB}$, па бидејќи $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$, имаме дека $\overline{OB} = \mathrm{tg}\alpha$ (види Цртеж 4.3).

Нека Y е вредност на апцисата на точката B, тогаш $Y = \mathrm{tg}X$. Па за функцијата на распределба на Y имаме

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\mathrm{tg}X < y\} = P\{X < \mathrm{arctg}\, y\} = F_X(\mathrm{arctg}\, y),$$

од каде за густината на распределба на Y имаме

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= F'_Y(y) = F'_X(\mathrm{arctg}\, y) \cdot \frac{1}{1+y^2} = p_X(\mathrm{arctg}\, y) \cdot \frac{1}{1+y^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2},\ \text{за}\ -\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}\, y < \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$



Цртеж 4.3

односно

$$p_Y(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}, \text{ за } -\infty < y < +\infty,$$

што значи дека вредноста на апцисата на точката B има Кошиева распределба со параметар $\alpha = 1$.

4.2 Случајни вектори од апсолутно непрекинат тип

Претходно, во делот 3.3, дефинирафме **случаен вектор** и **случаен вектор од дискретен тип**. За да дефинираме случаен вектор од апсолутно непрекинат тип, ни треба поимот за функција на распределба на случаен вектор. Нека $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ е случаен вектор дефиниран над просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Функцијата $F_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дефинирана со

$$F_X(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_n \leq x_n)$$

се нарекува **функција на распределба** на случајниот вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

- **Својство.** Нека F_X е функција на распределба на случајниот вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$. Тогаш,

(FV1) F_X е неопаѓачка функција по секој аргумент,

(FV2) F_X е непрекината од десно по секој аргумент,

(FV3) $\lim_{x_k \to -\infty} F_X(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, за секој $k = 1, 2, ..., n$, и
$\lim_{x_1 \to +\infty, ..., x_n \to +\infty} F_X(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$.

Ако функцијата на распределба $F_X(x)$ е апсолутно непрекината функција т.е. ако постои ненегативна функција $p_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ така што

$$F_X(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_n} p_X(u_1, ..., u_n) du_1 ... du_n \tag{4.1}$$

за сите $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, тогаш X е случаен вектор од **апсолутно непрекинат тип**, а функцијата p_X се нарекува **густина на распределба** на случајниот вектор X.

- **Својство.** Нека $F_X(x)$ и $p_X(x)$ се функција на распределба и густина на распределба соодветно на случајниот вектор X од апсолутно непрекинат тип. Тогаш,

  1) $p_X(x) \geq 0$, за секој $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,
  2) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_n} p_X(u_1, u_2, ..., u_n) \, du_1 du_2 ... du_n$, за секој $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,
  3) $\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = p_X(x)$, во точките на непрекинатост на $p_X(x)$,
  4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x_1, x_2, ..., x_n) \, dx_1 dx_2 ... dx_n = 1$,
  5) $P\{X \in B\} = \int_B p_X(x) dx$, за секое $B \in \mathcal{B}^n$.

За да го поедноставиме понатамошното излагање, го разгледуваме **дводимензионалниот случаен вектор** (X, Y) **од апсолутно непрекинат тип** со густина на распределба $p(x, y)$. Тогаш,

- **маргиналните густини на распределба** на X и Y соодветно се

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) \, dy \quad \text{и} \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) \, dx;$$

- **условните густини на распределба** на X при услов $Y = y$ и на Y при услов $X = x$ соодветно се

$$p_X(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}, \quad \text{и} \quad p_Y(y|x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}.$$

- **Теорема.** Нека X и Y се случајни променливи од апсолутно непрекинат тип со густини на распределба $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ соодветно, и нека $p(x,y)$ е густина на распределба на случајниот вектор (X,Y). Тогаш, X и Y се независни ако и само ако за секој $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ скоро сигурно важи

$$p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y), \text{ за сите } x, y \in \mathbb{R}.$$

- **Теорема.** Ако X и Y се независни случајни променливи од апсолутно непрекинат тип со густини на распределба $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ соодветно, тогаш $X+Y$ е случајна променлива од апсолутно непрекинат тип со густина на распределба

$$p_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) \cdot p_Y(u-x)\, dx.$$

Последната формула е позната како **формула на конволуционен производ**.

Некои дводимензионални распределби од апсолутно непрекинат тип:

- **Дводимензионална рамномерна распределба**, $(X,Y) \sim \mathcal{U}(B)$

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m(B)} & ,(x,y) \in B \\ 0 & ,(x,y) \notin B \end{cases}, \quad B \in \mathcal{B}^2;$$

- **Дводимензионална нормална распределба**,
$(X,Y) \sim \mathcal{N}(m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho),\ m_1, m_2 \in \mathbb{R},\ \sigma_1, \sigma_2 > 0, -1 \le \rho \le 1$

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ &\times \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-m_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho \cdot \frac{x-m_1}{\sigma_1} \cdot \frac{y-m_2}{\sigma_2} + (\frac{y-m_2}{\sigma_2})^2]\}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4.26. Густината на распределба на случајниот вектор (X,Y) е

$$p(x,y) = \begin{cases} c(r - \sqrt{x^2+y^2}) & ,x^2+y^2 \le r^2 \\ 0 & ,x^2+y^2 > r^2 \end{cases},$$

каде $r \ge 0$ и c се константи. Определи ја вредноста на c, а потоа и веројатноста дека точката (X,Y) да падне во кругот $x^2+y^2 \le a,\ a \ge 0$.

Решение. Од $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx\,dy = 1$, имаме $\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} c(r-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy = 1$, од каде со премин во поларини координати $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$,со Јакобијан на трансформација еднаков на $J=\rho$, добиваме

$$\begin{aligned}1 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r c(r-\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi})\rho\,d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r c(r-\rho)\rho\,d\rho = \frac{cr^3}{6}\cdot 2\pi,\end{aligned}$$

од каде $c=\frac{3}{r^3\pi}$, односно густината на распределба на случајниот вектор (X,Y) е $p(x,y)=\frac{3}{r^3\pi}(r-\sqrt{x^2+y^2})$, $x^2+y^2\le r^2$. Бараната веројатност е

$$\begin{aligned}P\{X^2+Y^2\le a\} &= \iint\limits_{x^2+y^2\le a} p(x,y)\,dx\,dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{a}} \frac{3}{r^3\pi}(r-\rho)\rho\,d\rho = \frac{a}{r^3}(3r-2\sqrt{a}),\ \text{за}\ a<r^2\end{aligned}$$

и $P\{X^2+Y^2\le a\}=1$ за $a\ge r^2$.

ЗАДАЧА 4.27. Даден е случајниот вектор (X,Y) со својата густина на распределба

$$p(x,y)=\frac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ a\in\mathbb{R},\ a=const.$$

а) Определи ја вредноста на $a\in\mathbb{R}$.

б) Најди ги маргиналните густини на распределба на X и Y соодветно. Дали X и Y се независни случајни променливи?

в) Пресметај ја веројатноста точката (X,Y) да припаѓа на правоаголникот $\{(x,y)\mid 0<x<1,\ -1<y<1\}$.

Решение. а) Имаме,

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2}\,dx\,dy = \\ &= a\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dx\,dy = a\cdot\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\Big)^2 = a\cdot\pi^2,\end{aligned}$$

од каде $a=\frac{1}{\pi^2}$.

б) Маргиналните густини на распределба на X и Y се

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\pi(1+x^2)},\ x \in \mathbb{R},$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx = \frac{1}{\pi^2(1+y^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)},\ y \in \mathbb{R},$$

и бидејќи

$$p_X(x) \cdot p_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\pi(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2+x^2y^2)} = p(x,y),$$

за секој $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, следува дека X и Y се независни случајни променливи.

в) Бараната веројатност е

$$P\{0 < X < 1,\ -1 < Y < 1\} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2+x^2y^2)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \Big(\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\Big)^2 = \frac{1}{16} = 0,0625.$$

ЗАДАЧА 4.28. Случајниот вектор (X,Y) е рамномерно распределен на правоаголникот $\Pi = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2\}$. Најди ги густината на распределба $p(x,y)$ и функцијата на распределба $F(x,y)$ на (X,Y), а потоа најди ги веројатностите $P\{X \leq -\frac{1}{2},\ Y \leq \frac{5}{2}\}$ и $P\{Y \leq |X - \frac{1}{2}|\}$. Најди ги маргиналните распределби на X и Y соодветно. Дали X и Y се независни случајни променливи?

Решение. Случајниот вектор (X,Y) има рамномерна распределба на правоаголникот $\Pi = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2\}$, што значи дека густината на распределба на (X,Y) е

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m(\Pi)} & ,(x,y) \in \Pi \\ 0 & ,(x,y) \notin \Pi \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,-1 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases},$$

каде $m(\Pi)$ е плоштината на правоаголникот Π, види Цртеж 4.4 а).

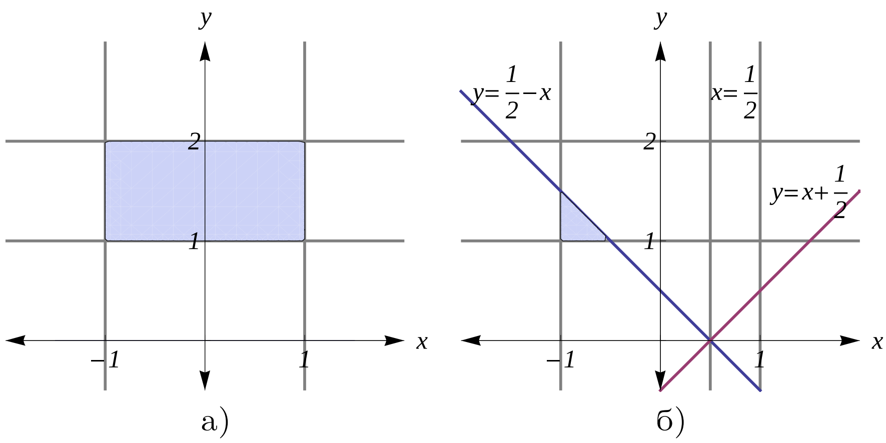
За функцијата на распределба имаме $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,du\,dv$, односно
за $x < -1$ или $y < 1$, $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0\,du\,dv = 0$,
за $-1 \leq x < 1$, $1 \leq y < 2$, $F(x,y) = \int_{-1}^{x}\int_{1}^{y} \frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}(x+1)(y-1)$,
за $x \geq 1$, $1 \leq y < 2$, $F(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_{1}^{y} \frac{1}{2}\,du\,dv = y - 1$,
за $-1 \leq x < 1$, $y \geq 2$, $F(x,y) = \int_{-1}^{x}\int_{1}^{2} \frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}(x+1)$,

за $x \geq 1,\ y \geq 2,\ F(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} \frac{1}{2}\, du\, dv = 1,$
или

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \text{ или } y < 1 \\ \frac{1}{2}(x+1)(y-1) & , -1 \leq x < 1,\ 1 \leq y < 2 \\ y-1 & , x \geq 1,\ 1 \leq y < 2 \\ \frac{1}{2}(x+1) & , -1 \leq x < 1,\ y \geq 2 \\ 1 & , x \geq 1,\ y \geq 2 \end{cases}.$$

Бараните веројатности се (види Цртеж 4.4 б))

$$\begin{aligned} P\{X \leq -\frac{1}{2},\ Y \leq \frac{5}{2}\} &= F(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{4}, \\ P\{Y \leq |X - \frac{1}{2}|\} &= P\{X \geq \frac{1}{2}, Y \leq X - \frac{1}{2}\} + P\{X < \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2} - X\} = \\ &= 0 + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} dx \int_{1}^{\frac{1}{2}-x} \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$



Цртеж 4.4

Маргиналните распределби на X и Y соодветно се

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\, dy = \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{2}\cdot y\Big|_1^2 = \frac{1}{2},\ -1 < x < 1,$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}\cdot x\Big|_{-1}^1 = 1,\ 1 < y < 2,$$

од каде заклучуваме дека $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$ и $Y \sim \mathcal{U}(1,2)$. И бидејќи $p(x,y) = p_X(x)\cdot p_Y(y)$ за секои $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, следи дека X и Y се независни случајни променливи.

ЗАДАЧА 4.29. Случајниот вектор (X, Y) е рамномерно распределен во триаголникот ограничен со правите $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = a$, $a > 0$. Најди ги:

а) густината на распределба $p(x, y)$ на (X, Y),

б) функцијата на распределба $F(x, y)$ на (X, Y),

в) маргиналните густини на распределба $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ на X и Y соодветно,

г) функциите на распределба $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ на X и Y соодветно,

д) веројатноста на настанот $X^2 + Y^2 \leq \frac{a^2}{4}$.

Дали X и Y се независни случајни променливи?

Решение. а) Од $(X, Y) \sim \mathcal{U}(T)$, каде T е триаголникот ограничен со правите $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = a$, $a > 0$, Цртеж 4.5 а), со плоштина $m(T) = \frac{a^2}{2}$, за густината на распределба на (X, Y) имаме

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m(T)} & ,(x,y) \in T \\ 0 & ,(x,y) \notin T \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{a^2} & ,x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq a \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} .$$

б) За функцијата на распределба на (X, Y) имаме $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(u, v)\, du\, dv$, односно

за $x < 0$ или $y < 0$, $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} 0\, du\, dv = 0$,

за $0 \leq x < a$, $0 \leq y < a - x$, $F(x, y) = \int_{0}^{x} \int_{0}^{y} \frac{2}{a^2}\, du\, dv = \frac{2}{a^2} xy$,

за $0 \leq x < a$, $a - x \leq y < a$,

$F(x, y) = \int_{0}^{a-y} du \int_{0}^{y} \frac{2}{a^2}\, dv + \int_{a-y}^{x} du \int_{0}^{a-u} \frac{2}{a^2}\, dv = 1 - (1 - \frac{x}{a})^2 - (1 - \frac{y}{a})^2$,

за $0 \leq x < a$, $y \geq a$, $F(x, y) = \int_{0}^{x} du \int_{0}^{a-u} \frac{2}{a^2}\, dv = 1 - (1 - \frac{x}{a})^2$,

за $x \geq a$, $0 \leq y < a$, $F(x, y) = \int_{0}^{y} dv \int_{0}^{a-v} \frac{2}{a^2}\, du = 1 - (1 - \frac{y}{a})^2$,

за $x \geq a$, $y \geq a$, $F(x, y) = \int_{0}^{a} du \int_{0}^{a-u} \frac{2}{a^2}\, dv = 1$,

или

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \text{ или } y < 0 \\ \frac{2}{a^2} xy & ,0 \leq x < a,\ 0 \leq y < a - x \\ 1 - (1 - \frac{x}{a})^2 - (1 - \frac{y}{a})^2 & ,0 \leq x < a,\ a - x \leq y < a \\ 1 - (1 - \frac{x}{a})^2 & ,0 \leq x < a,\ y \geq a \\ 1 - (1 - \frac{y}{a})^2 & ,x \geq a,\ 0 \leq y < a \\ 1 & ,x \geq a,\ y \geq a \end{cases} .$$

в) Маргиналните густини на распределба на X и Y соодветно се

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\, dy = \int_{0}^{a-x} \frac{2}{a^2}\, dy = \frac{2}{a^2} \cdot (a - x),\ 0 \leq x \leq a,$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\, dx = \int_{0}^{a-y} \frac{2}{a^2}\, dy = \frac{2}{a^2} \cdot (a - y),\ 0 \leq y \leq a.$$

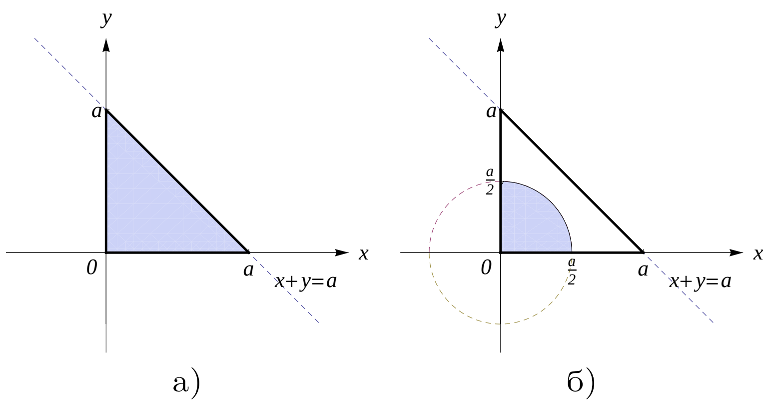
г) Маргиналните функции на распределба на X и Y соодветно се

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\, du & ,x < 0 \\ \int_0^x \frac{2}{a^2}(a-u)\, du & ,0 \le x < a \\ \int_0^a \frac{2}{a^2}(a-u)\, du & ,x \ge a \end{cases} = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ 1-(1-\frac{x}{a})^2 & ,0 \le x < a \\ 1 & ,x \ge a \end{cases},$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} p_Y(v)dv = \begin{cases} \int_{-\infty}^{y} 0\, dv & ,y < 0 \\ \int_0^y \frac{2}{a^2}(a-v)\, dv & ,0 \le y < a \\ \int_0^a \frac{2}{a^2}(a-v)\, dv & ,y \ge a \end{cases} = \begin{cases} 0 & ,y < 0 \\ 1-(1-\frac{y}{a})^2 & ,0 \le y < a \\ 1 & ,y \ge a \end{cases}.$$

д) Бараната веројатност е, види Цртеж 4.5 б),

$$P\{X^2+Y^2 \le \frac{a^2}{4}\} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a/2} \frac{2}{a^2}\rho\, d\rho = \frac{\pi}{8} \approx 0,392699.$$



Цртеж 4.5

За X и Y да се независни случајни променливи, треба за секој $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ да важи $p_X(x) \cdot p_Y(y) = p(x,y)$. Но, за $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) \in \mathbb{R}^2$ имаме

$$p_X(\frac{a}{2}) \cdot p_Y(\frac{a}{2}) = \frac{2}{a^2}(a-\frac{a}{2}) \cdot \frac{2}{a^2}(a-\frac{a}{2}) = \frac{1}{a^2} \ne \frac{2}{a^2} = p(x,y),$$

па затоа X и Y не се независни случајни променливи.

ЗАДАЧА 4.30. Случајниот вектор (X,Y,Z) има густина на распределба

$$p(x,y,z) = \frac{3}{4\pi}, \text{ за } x^2+y^2+z^2 \le 1.$$

Најди ги веројатностите:

а) $P\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\}$,

б) $P\{-\frac{1}{\sqrt{3}} < X < \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}} < Y < \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}} < Z < \frac{1}{\sqrt{3}}\}$,

в) $P\{X^2+Y^2+Z^2 \le \frac{1}{2}\}$.

Решение. Проверуваме дали вака зададената густина на распределба на случајниот вектор (X, Y, Z) е добро дефинирана. Со премин во сферни координати $x = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta$, при што Јакобијанот на оваа трансформација е $J = \rho^2 \sin\theta$, го пресметуваме интегралот

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} p(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \frac{3}{4\pi}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} dx\,dy\,dz = \\ &= \frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin\theta\,d\rho = 1,\end{aligned}$$

и заклучуваме дека густината на распределба е добро дефинирана.

а) Маргиналната густина на распределба на X е

$$\begin{aligned}p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y,z)\,dy\,dz = \iint\limits_{y^2+z^2\le 1-x^2} \frac{3}{4\pi}\,dy\,dz = \\ &= \frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \rho\,d\rho = \frac{3}{4}(1-x^2),\ -1\le x\le 1,\end{aligned}$$

од каде за веројатноста имаме

$$P\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} p_X(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \frac{33}{48} = 0,6875.$$

б) Бараната веројатност е

$$\begin{aligned}&P\{-\frac{1}{\sqrt{3}} < X < \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} < Y < \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} < Z < \frac{1}{\sqrt{3}}\} = \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} p(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{3}{4\pi}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dy \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dz = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \approx 0,367553.\end{aligned}$$

в) И конечно

$$\begin{aligned}P\{X^2+Y^2+Z^2 \le \frac{1}{2}\} &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\frac{1}{2}} p(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \\ &= \frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\rho \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-\rho^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-\rho^2}} \rho\,dz = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,353553,\end{aligned}$$

при што тројниот интеграл е пресметан со премин во цилиндрични координати $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$, со Јакобијан на трансформација еднаков на $J = \rho$.

ЗАДАЧА 4.31. Случајните променливи X и Y се независни со стандардни нормални распределби. Најди ги распределбите на случајните променливи:
а) $U_1 = X + Y$,
б) $U_2 = X^2 + Y^2$,
в) $U_3 = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Решение. Дадено е дека $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ и $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, па нивните густини на распределба се $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$ и $p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}$, $y \in \mathbb{R}$ соодветно.

а) Од X и Y независни случајни променливи, според формулата за конволуционен производ, за густината на распределба на U_1 имаме

$$\begin{aligned} p_{U_1}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) p_Y(u-x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(u-x)^2}{2}}\, dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{u^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2x-u)^2}{4}}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{4}},\ u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

при што е ставена смена $t = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x-u)$ и искористено е дека $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1$. Од распределбата на U_1 се гледа дека $U_1 \sim \mathcal{N}(0,2)$.

б) Ако $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, тогаш случајната променлива X^2 има χ_1^2 распределба (види Задача 4.22), со густина на распределба

$$p_{X^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, e^{-\frac{x}{2}},\ x > 0.$$

На сличен начин се добива $p_{Y^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\, e^{-\frac{y}{2}}$, $y > 0$. Од X и Y независни случајни променливи, следува дека X^2 и Y^2 се независни случајни променливи, па густината на распределба на U_2 може да ја добиеме според формулата за конволуционен производ,

$$\begin{aligned} p_{U_2}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{X^2}(x) p_{Y^2}(u-x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^u \frac{1}{\sqrt{x(u-x)}}\, e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{u-x}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u}{2}} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{x(u-x)}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u}{2}} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{u}{2}},\ u > 0, \end{aligned}$$

при што е ставена смена $t = \frac{2x-u}{u}$, односно U_2 има χ_2^2 распределба.

в) Имаме дека $U_3 = \sqrt{U_2}$, при што U_2 има ненулта распределба на $(0, +\infty)$ и нула на остатокот. Според Задача 4.118, нејзината густина на распределба е

$$p_{U_3}(u) = 2u \cdot p_{U_2}(u^2) = 2u \cdot \frac{1}{2}\, e^{-\frac{u^2}{2}} = u \cdot e^{-\frac{u^2}{2}},\ u > 0.$$

ЗАДАЧА 4.32. Случајните променливи X и Y се независни и нормално распределени со параметри $m_1 = -1, \sigma_1 = 2$ и $m_2 = 0, \sigma_2 = 3$ соодветно. Најди ја веројатноста дека точката (X, Y) припаѓа во правоаголникот со центар во координатниот почеток, а страни паралелни со координатните оски и еднакви на 4 и 6.

Решение. Дадено е дека $X \sim \mathcal{N}(-1, 2^2)$ и $Y \sim \mathcal{N}(0, 3^2)$, од каде следи дека $\frac{X+1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$ и $\frac{Y}{3} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (види Задача 4.17). Сега, од независноста на X и Y имаме

$$\begin{aligned}
&P\{-2 \leq X \leq 2,\ -3 \leq Y \leq 3\} = P\{-2 \leq X \leq 2\} \cdot P\{-3 \leq Y \leq 3\} = \\
&= P\{\frac{-2+1}{2} \leq \frac{X+1}{2} \leq \frac{2+1}{2}\} \cdot P\{\frac{-3}{3} \leq \frac{Y}{3} \leq \frac{3}{3}\} = \\
&= P\{-\frac{1}{2} \leq \frac{X+1}{2} \leq \frac{3}{2}\} \cdot P\{-1 \leq \frac{Y}{3} \leq 1\} = \\
&= (\Phi_0(\frac{3}{2}) - \Phi_0(-\frac{1}{2})) \cdot (\Phi_0(1) - \Phi_0(-1)) = \\
&= (\Phi_0(\frac{3}{2}) + \Phi_0(\frac{1}{2})) \cdot 2\Phi_0(1) = \\
&= (0,43319 + 0,19146) \cdot 2 \cdot 0,34134 \approx 0,42644.
\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4.33. Независно се избираат два броја X и Y од интервалот $[0,1]$ со рамномерна густина на распределба. Најди ги веројатностите $P\{X + Y < \frac{1}{2}\}$, $P\{|X - Y| < \frac{1}{2}\}$, $P\{\max\{X, Y\} < \frac{1}{2}\}$ и $P\{\min\{X, Y\} < \frac{1}{2}\}$.

Решение. Дадено е дека $X \sim \mathcal{U}[0,1]$ и $Y \sim \mathcal{U}[0,1]$, и при тоа тие се независни случајни променливи, што значи дека густината на распределба на случајниот вектор (X, Y) е $p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) = 1,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$, од каде $(X,Y) \sim \mathcal{U}(\Pi)$, каде $\Pi = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Тогаш, од Цртеж 4.6 а),

$$P\{X + Y < \frac{1}{2}\} = \iint\limits_{x+y<\frac{1}{2}} p(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}-x} dy = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Од Цртеж 4.6 б), каде штрафираниот дел одговара на спротивниот настан, за втората веројатност имаме

$$\begin{aligned}
P\{|X - Y| < \frac{1}{2}\} &= 1 - P\{|X - Y| \geq \frac{1}{2}\} = \\
&= 1 - P\{X \geq Y,\ X - Y \geq \frac{1}{2}\} - P\{X < Y,\ Y - X \geq \frac{1}{2}\} = \\
&= 1 - \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{x+\frac{1}{2}}^{1} dy - \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_0^{x-\frac{1}{2}} dy = \frac{3}{4} = 0,75.
\end{aligned}$$

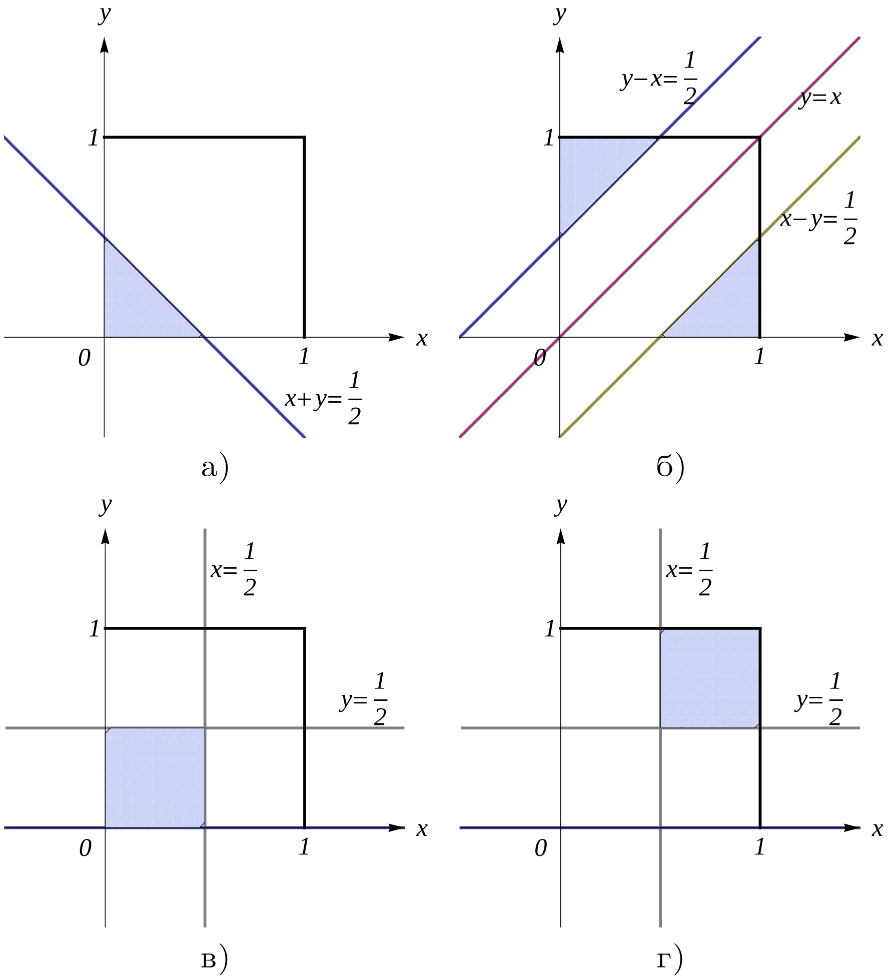
Од Цртеж 4.6 в) за третата веројатност имаме

$$P\{\max\{X,Y\} < \frac{1}{2}\} = P\{X < \frac{1}{2},\ Y < \frac{1}{2}\} = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{4} = 0,25.$$

И конечно, за четвртата веројатност имаме

$$\begin{aligned} P\{\min\{X,Y\} < \frac{1}{2}\} &= 1 - P\{\min\{X,Y\} \geq \frac{1}{2}\} = 1 - P\{X \geq \frac{1}{2},\ Y \geq \frac{1}{2}\} = \\ &= 1 - \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75, \end{aligned}$$

каде на Цртеж 4.6 г) штрафираниот дел одговара на спротивниот настан.



Цртеж 4.6

ЗАДАЧА 4.34. Случајниот вектор (X, Y) е рамномерно распределен во внатрешноста на квадратот $ABCD/A(1,0), B(2,1), C(1,2), D(0,1)/$. Најди ги густината на распределба $p(x,y)$ на (X,Y), маргиналните густини на распределба $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ на X и Y соодветно, и веројатноста $P\{X > 1 \mid Y < \frac{1}{2}\}$.

Решение. Од $(X,Y) \sim \mathcal{U}(K)$, каде K е квадртатот $ABCD$ со плоштина $m(K) = (\sqrt{2})^2 = 2$, Цртеж 4.7 а), за густината на распределба на (X,Y) имаме

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m(K)} & ,(x,y) \in K \\ 0 & ,(x,y) \notin K \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,(x,y) \in K \\ 0 & ,(x,y) \notin K \end{cases}.$$

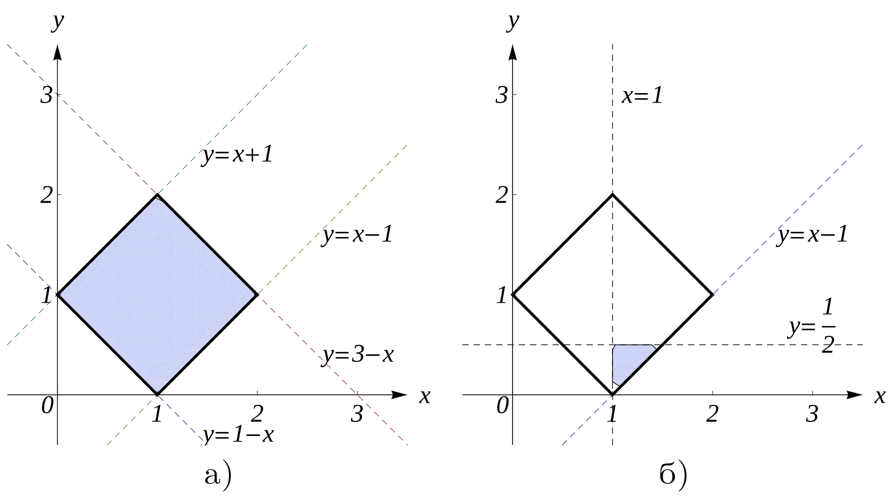
Маргиналните густини на распределба на X и Y соодветно се

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy = \begin{cases} \int_{1-x}^{x+1} \frac{1}{2}dy & ,0 \le x < 1 \\ \int_{x-1}^{3-x} \frac{1}{2}dy & ,1 \le x < 2 \end{cases} = \begin{cases} x & ,0 \le x < 1 \\ 2-x & ,1 \le x < 2 \end{cases},$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx = \begin{cases} \int_{1-y}^{y+1} \frac{1}{2}dy & ,0 \le y < 1 \\ \int_{y-1}^{3-y} \frac{1}{2}dy & ,1 \le y < 2 \end{cases} = \begin{cases} y & ,0 \le y < 1 \\ 2-y & ,1 \le y < 2 \end{cases}.$$

За бараната веројатност, од Цртеж 4.7 б), имаме

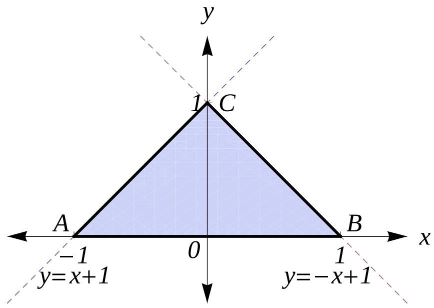
$$P\{X > 1 \mid Y < \frac{1}{2}\} = \frac{P\{X > 1,\ Y < \frac{1}{2}\}}{P\{Y < \frac{1}{2}\}} = \frac{\int_1^{\frac{3}{2}} dx \int_{x-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}dy}{\int_0^{\frac{1}{2}} ydy} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} = 0,5.$$



Цртеж 4.7

ЗАДАЧА 4.35. Случајниот вектор (X, Y) има рамномерна распределба на триаголникот со темиња $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ и $C(0, 1)$. Најди ги распределбите на случајните променливи $U = \min\{X, Y\}$ и $V = \max\{X, Y\}$.

Решение. Го означуваме со T триаголникот со темиња $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ и $C(0, 1)$. Неговата плоштина е $m(T) = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 1$, па затоа густината на распределба на случајниот вектор (X, Y) кој е рамномерно распределен на триаголникот T е $p(x, y) = 1$, $(x, y) \in T$ (Цртеж 4.8).



Цртеж 4.8

Функцијата на распределба на $U = \min\{X, Y\}$ е следната

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P\{U \leq u\} = P\{\min\{X, Y\} \leq u\} = \\ &= 1 - P\{\min\{X, Y\} > u\} = 1 - P\{X > u,\ Y > u\} = \\ &= \begin{cases} 1 - 1 & ,u < -1 \\ \int_{-1}^{u} dx \int_{0}^{x+1} dy & ,-1 \leq u < 0 \\ 1 - \int_{u}^{1-u} dx \int_{u}^{-x+1} dy & ,0 \leq u < \frac{1}{2} \\ 1 - 0 & ,u \geq \frac{1}{2} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0 & ,u < -1 \\ \frac{u^2}{2} + u + \frac{1}{2} & ,-1 \leq u < 0 \\ -2u^2 + 2u + \frac{1}{2} & ,0 \leq u < \frac{1}{2} \\ 1 & ,u \geq \frac{1}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

При тоа, за $-1 \leq u < 0$, користејќи дека $\iint\limits_{(x,y)\in T} p(x, y)\, dx\, dy = 1$, имаме

$$1 - P\{X > u,\ Y > u\} = \iint\limits_{(x,y)\in T} dx\, dy - \iint\limits_{(x,y)\in T,\ x>u,\ y>u} dx\, dy = \iint\limits_{(x,y)\in T,\ x\leq u} dx\, dy.$$

Тогаш, густината на распределба на $U = \min\{X, Y\}$ е

$$p_U(u) = F'_U(u) = \begin{cases} u + 1 & ,-1 \leq u < 0 \\ -4u + 2 & ,0 \leq u < \frac{1}{2} \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}.$$

Слично, функцијата на распределба на $V=\max\{X,Y\}$ е

$$\begin{aligned}
F_V(v) &= P\{V\le v\}=P\{\max\{X,Y\}\le v\}=P\{X\le v,\ Y\le v\}= \\
&= \begin{cases} 0 & ,v<0 \\ \int_0^v dy\int_{y-1}^v dx & ,0\le v<\frac{1}{2} \\ 1-\int_v^1 dx\int_0^{-x+1} dy-\int_v^1 dy\int_{y-1}^{-y+1} dx & ,\frac{1}{2}\le v<1 \\ 1 & ,v\ge 1\end{cases} = \\
&= \begin{cases} 0 & ,v<0 \\ \frac{v^2}{2}+v & ,0\le v<\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2}v^2+3v-\frac{1}{2} & ,\frac{1}{2}\le v<1 \\ 1 & ,v\ge 1\end{cases} .
\end{aligned}$$

При тоа, за $\frac{1}{2}\le u<1$, имаме

$$P\{X\le v,\ Y\le v\}=\iint\limits_{(x,y)\in T,\ x\le v,\ y\le v} dx\,dy=\iint\limits_{(x,y)\in T} dx\,dy-\iint\limits_{(x,y)\in T,\ x>v} dx\,dy-\iint\limits_{(x,y)\in T,\ y>v} dx\,dy$$

и од $\iint\limits_{(x,y)\in T} p(x,y)\,dx\,dy=1$ се добива изразот според кој се пресметува функцијата на распределба во тој случај. Тогаш, густината на распределба на $V=\max\{X,Y\}$ е

$$p_V(v)=F_V'(v)=\begin{cases} v+1 & ,0\le v<\frac{1}{2} \\ -3v+3 & ,\frac{1}{2}\le v<1 \\ 0 & ,\text{инаку}\end{cases} .$$

ЗАДАЧА 4.36. Случајниот вектор (X,Y) има $\mathcal{N}(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$ распределба. Нека $U=\sqrt{X^2+Y^2}$ и $V=\frac{X}{Y}$. Најди ја густината на распределба на случајниот вектор (U,V). Дали U и V се независни случајни променливи?

Решение. Густината на распределба на (X,Y) е

$$p_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Со решавање на системот $u=\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\frac{x}{y}$ по x и y, добиваме $x=\pm\frac{uv}{\sqrt{1+v^2}}$, $y=\pm\frac{u}{\sqrt{1+v^2}}$, па за Јакобијанот на трансформацијата се добива

$$J(u,v)=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix} \pm\frac{v}{\sqrt{1+v^2}} & \pm\frac{u}{(\sqrt{1+v^2})^3} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{1+v^2}} & \mp\frac{uv}{(\sqrt{1+v^2})^3}\end{vmatrix}=-\frac{u}{1+v^2}.$$

Тогаш, густината на распределба на (U,V) е

$$\begin{aligned}
p_{UV}(u,v) &= p_{XY}(x(u,v),y(u,v))\cdot|J(u,v)|=p_{XY}\Big(\pm\frac{uv}{\sqrt{1+v^2}},\pm\frac{u}{\sqrt{1+v^2}}\Big)\cdot\Big|-\frac{u}{1+v^2}\Big|= \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\frac{u^2v^2}{1+v^2}+\frac{u^2}{1+v^2})}\cdot\frac{|u|}{1+v^2}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\,e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{|u|}{1+v^2},\ (u,v)\in\mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Маргиналните густини на распределба на U и V соодветно се

$$p_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{UV}(u,v)\,dv = \frac{|u|}{2\pi\sigma^2}\, e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,dv = \frac{|u|}{2\sigma^2}\, e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}},\ u \in \mathbb{R},$$

$$p_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{UV}(u,v)\,du = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot\frac{1}{1+v^2} \int_{-\infty}^{\infty} |u|\, e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du = \frac{1}{\pi(1+v^2)},\ v \in \mathbb{R}.$$

Бидејḱи

$$p_U(u)p_V(v) = \frac{|u|}{2\sigma^2}\, e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\pi(1+v^2)} = p_{UV}(u,v),\ \text{за сите } (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

следи дека U и V се независни случајни променливи.

ЗАДАЧА 4.37. Случајниот вектор (X,Y) е рамномерно распределен во квадратот со темиња $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$. Најди ја распределбата на плоштината на правоаголникот со страни X и Y.

Решение. Ако $(X,Y) \sim \mathcal{U}(K)$, каде K е квадртатот со темиња $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$, односно $K = \{(x,y) \mid 0 \le x,y \le 1\}$, тогаш $m(K)=1$, па густината на распределба на (X,Y) е

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m(K)} & ,(x,y) \in K \\ 0 & ,(x,y) \notin K \end{cases} = \begin{cases} 1 & ,(x,y) \in K \\ 0 & ,(x,y) \notin K \end{cases}.$$

Нека U е плоштината на правоаголникот со страни X и Y, тогаш $U = X \cdot Y$. Воведуваме уште една случајна променлива $V = X$. Тогаш, $X = V$ и $Y = \frac{U}{V}$, па Јакобијанот на трансформацијата е

$$J(u,v) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{v}.$$

Затоа, густината на распределба на (U,V) е

$$\begin{aligned} p_{UV}(u,v) &= p_{XY}(x(u,v),y(u,v)) \cdot |J(u,v)| = p_{XY}(v,\frac{u}{v}) \cdot |-\frac{1}{v}| = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{v} & ,0 \le v \le 1,\ 0 \le \frac{u}{v} \le 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{v} & ,0 \le v \le 1,\ 0 \le u \le v \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}. \end{aligned}$$

Тогаш, маргиналната густина на распределна на U, односно распределбата на плоштината на правоаголникот со страни X и Y е

$$p_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{UV}(u,v)\,dv = \int_u^1 \frac{1}{v}\,dv = -\ln u,\ \text{за } 0 < u \le 1.$$

ЗАДАЧА 4.38. Густината на распределба на случајниот вектор (X,Y) е дадена со

$$p(x,y) = \begin{cases} axye^{-(x^2+y^2)} & ,x>0,\ y>0 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}.$$

Определи ја вредноста на a, маргиналните распределби на X и Y, соодветно и условните густини на распределба на X и Y при услов $Y = y$ $(y > 0)$ и $X = x$ $(x > 0)$ соодветно. Дали X и Y се независни случајни променливи?

Решение. Од $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx\,dy = 1$ имаме

$$1 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} axye^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = a\left(\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx\right)^2 = a\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

од каде добиваме дека $a = 4$, што значи дека густината на распределба на (X,Y) е

$$p(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)} & ,x>0,\ y>0 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}.$$

Маргиналните густини на распределба на X и Y соодветно се

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} 4xye^{-(x^2+y^2)}\,dy = 4xe^{-x^2}\int_0^{\infty} ye^{-y^2}\,dy = \\ &= 4xe^{-x^2}\cdot\frac{1}{2} = 2xe^{-x^2},\ x>0, \end{aligned}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx = 2ye^{-y^2},\ y>0.$$

И бидејќи,

$$p_X(x)\cdot p_Y(y) = 2xe^{-x^2}\cdot 2ye^{-y^2} = 4xye^{-(x^2+y^2)} = p(x,y),\ x>0,\ y>0,$$

додека пак за $x \le 0$ или $y \le 0$, имаме дека $p_X(x)\cdot p_Y(y) = 0 = p(x,y)$, што значи дека $p_X(x)\cdot p_Y(y) = p(x,y)$, за сите $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Следи дека X и Y се независни случајни променливи.

Условниот закон на распределба на X при услов $Y = y$ $(y > 0)$ е

$$p_X(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{4xye^{-(x^2+y^2)}}{2ye^{-y^2}} = 2xe^{-x^2},\ x>0,$$

додека пак условниот закон на распределба на Y при услов $X = x$ $(x > 0)$ е

$$p_Y(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{4xye^{-(x^2+y^2)}}{2xe^{-x^2}} = 2ye^{-y^2},\ y>0.$$

ЗАДАЧА 4.39. Нека $p(x,y,z) = \frac{1}{8}\, e^{-|x|-|y|-|z|}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ е густина на распределба на случајниот вектор (X,Y,Z). Определи ја условната густина на распределба на (X,Y) при услов $Z = z$ и условната густина на распределба на X при услов $(Y,Z) = (y,z)$. Дали X, Y и Z се независни (во целина) случајни променливи?

Решение. Маргиналната густина на распределба на Z е

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y,z)\,dx\,dy = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|-|y|-|z|}\,dy = \\ &= \frac{1}{8}\, e^{-|z|}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx\right)^2 = \frac{1}{8}\, e^{-|z|}\cdot 2^2 = \frac{1}{2}\, e^{-|z|},\ z \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

и тогаш условната густина на распределба на (X,Y) при услов $Z = z$ е

$$p(x,y|z) = \frac{p(x,y,z)}{p_Z(z)} = \frac{\frac{1}{8}\, e^{-|x|-|y|-|z|}}{\frac{1}{2}\, e^{-|z|}} = \frac{1}{4}\, e^{-|x|-|y|},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Потоа, маргиналната густина на распределба на (Y,Z) е

$$\begin{aligned} p_{YZ}(y,z) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y,z)\,dx = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|-|y|-|z|}\,dx = \frac{1}{8}\, e^{-|y|-|z|}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx \\ &= \frac{1}{8}\, e^{-|y|-|z|}\cdot 2 = \frac{1}{4}\, e^{-|y|-|z|},\ (y,z) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

па условната густина на распределба на X при услов $(Y,Z) = (y,z)$ е

$$p(x|y,z) = \frac{p(x,y,z)}{p_{YZ}(y,z)} = \frac{\frac{1}{8}\, e^{-|x|-|y|-|z|}}{\frac{1}{4}\, e^{-|y|-|z|}} = \frac{1}{2}\, e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

Слично како маргиналната густина на распределба на Z, се добиваат и маргиналните густини на распределба на X и Y соодветно т.е.

$$p_X(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R} \ \text{ и } \ p_Y(y) = \frac{1}{2}\, e^{-|y|},\ y \in \mathbb{R}.$$

Тогаш од

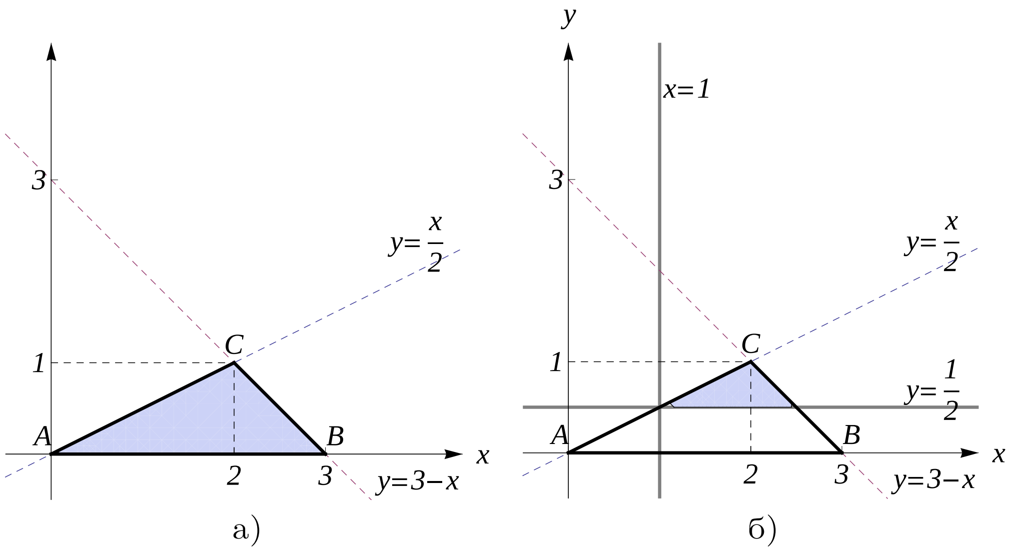
$$p_X(x)\cdot p_Y(y)\cdot p_Z(z) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}\cdot\frac{1}{2}\, e^{-|y|}\cdot\frac{1}{2}\, e^{-|z|} = \frac{1}{8}\, e^{-|x|-|y|-|z|} = p(x,y,z),$$

за секој $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, следи дека X, Y и Z се независни случајни променливи.

ЗАДАЧА 4.40. Случајниот вектор (X, Y) има рамномерна распределба во внатрешноста на триаголникот T со темиња $A(0,0)$, $B(3,0)$ и $C(2,1)$. Најди ја условната распределба на Y при услов $X \in (1,2)$ и условната распределба на Y при услов $X \in (2,3)$. Најди ја веројатноста $P\{X \geq 1, Y \geq \frac{1}{2}\}$.

Решение. Плоштината на триаголникот T е $m(T) = \frac{3\cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$, види Цртеж 4.9 а), па густината на распределба на (X, Y) е

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m(T)} & ,(x,y) \in T \\ 0 & ,(x,y) \notin T \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{3} & ,(x,y) \in T \\ 0 & ,(x,y) \notin T \end{cases}.$$



Цртеж 4.9

Маргиналната густина на распределба на X е

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{2}{3}\,dy & ,0 \leq x < 2 \\ \int_0^{3-x} \frac{2}{3}\,dy & ,2 \leq x < 3 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{3} & ,0 \leq x < 2 \\ \frac{2}{3}(3-x) & ,2 \leq x < 3 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}.$$

Тогаш, условната густина на распределба на Y при услов $X \in (1,2)$ е

$$p_Y(y|X \in (1,2)) = \frac{\int\limits_{(x,y)\in T,\, x\in(1,2)} p(x,y)\,dx}{\int\limits_{x\in(1,2)} p_X(x)\,dx} = \begin{cases} \frac{\int_1^2 \frac{2}{3}\,dx}{\int_1^2 \frac{x}{3}\,dx} & ,0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \frac{\int_{2y}^2 \frac{2}{3}\,dx}{\int_1^2 \frac{x}{3}\,dx} & ,\frac{1}{2} \leq y < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{3} & ,0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \frac{8}{3}(1-y) & ,\frac{1}{2} \leq y < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}.$$

Аналогно, условната густина на распределба на Y при услов $X \in (2,3)$ е

$$p_Y(y|X \in (2,3)) = \frac{\int\limits_{(x,y)\in T,\, x\in(2,3)} p(x,y)\, dx}{\int\limits_{x\in(2,3)} p_X(x)\, dx} = \begin{cases} \frac{\int_2^{3-y} \frac{2}{3}\, dx}{\int_2^3 \frac{2}{3}(3-x)\, dx} & ,0 \le y < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2(1-y) & ,0 \le y < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}.$$

Потоа, види Цртеж 4.9 б),

$$P\{X \ge 1, Y \ge \frac{1}{2}\} = \iint\limits_{(x,y)\in T,\, x\ge 1,\, y \ge \frac{1}{2}} p(x,y)\, dx\, dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{2y}^{3-y} \frac{2}{3}\, dx = \frac{1}{4}.$$

ЗАДАЧА 4.41. Нека X и Y се независни случајни променливи со $\mathcal{U}(0,1)$ распределби. Покажи дека и X при услов $X+Y=z$, за $z \in (0,2)$, $z = const.$, има исто така рамномерна распределба.

Решение. Густините на распределба на $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ и $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$ се

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} \quad \text{и} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 1 & ,0 < y < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases},$$

соодветно. Потоа, од X и Y независни случајни променливи, густината на распределба на случајниот вектор (X,Y) е

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) = \begin{cases} 1 & ,0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}$$

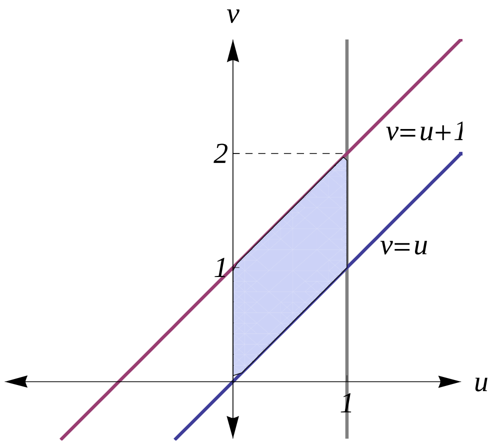
или $(X,Y) \sim \mathcal{U}(\{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\})$.

Дефинираме нови случајни променливи $U = X$ и $V = X+Y$. За да ја најдеме густината на распределба на случајниот вектор (U,V), потребен ни е Јакобијанот на трансформацијата $x = u$, $y = v-u$, односно

$$J(u,v) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тогаш, густината на распределба на (U,V) е (Цртеж 4.10)

$$\begin{aligned} p_{UV}(u,v) &= p_{XY}(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)| = p_{XY}(u, v-u) \cdot 1 = \\ &= \begin{cases} 1 & ,0 < u < 1,\ 0 < v-u < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} = \begin{cases} 1 & ,0 < u < 1,\ u < v < u+1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}. \end{aligned}$$



Цртеж 4.10

Добивме дека векторот (U, V) е рамномерно распределен на штрафираната област на Цртеж 4.10. Тогаш, густината на распределба на $V = X + Y$ ја бараме како маргинална густина на распределба т.е.

$$\begin{aligned} p_{X+Y}(v) &= p_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{UV}(u,v)\,du = \\ &= \begin{cases} \int_0^v du & ,0 < v < 1 \\ \int_{v-1}^1 du & ,1 \le v < 2 \end{cases} = \int_{\max\{0,v-1\}}^{\min\{v,1\}} du,\ 0 < v < 2 = \\ &= \min\{v,1\} - \max\{0, v-1\},\ 0 < v < 2. \end{aligned}$$

Па, за условната густина на распределба на X при услов $X + Y = z$, $z \in (0, 2)$ имаме

$$p_X(x|X+Y=z) = p_U(x|V=z) = \frac{p_{UV}(x,z)}{p_V(z)} = \frac{1}{\min\{z,1\} - \max\{0, z-1\}},$$

за $0 < x < 1$, $0 < z - x < 1$ т.е. за $0 < x < 1$, $z - 1 < x < z$, односно за $\max\{0, z-1\} < x < \min\{z, 1\}$. Значи, $X|X+Y=z \sim \mathcal{U}(\max\{0,z-1\}, \min\{z,1\})$.

4.3 Математичко очекување. Условно математичко очекување

Претходно, во делот 3.2 ги дадовме дефиницијата и својствата на математичкото очекување на дискретна случајна променлива. Математичкото очекување на произволна случајна променлива $X : \Omega \to \mathbb{R}$ дефинирана над просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ се дефинира во три чекори:

(i) Нека $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е **ненегативна дискретна случајна променлива** која прима вредности $x_k \geq 0,\ k = 1, 2, ...$ со закон на распределба на веројатности $P\{X = x_k\} = p_k,\ k = 1, 2, ...$ и $x_k \geq 0$. Тогаш, **математичко очекување** на случајната променлива X е

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

Ако сумата од десната страна на равенството конвергира, тогаш математичкото очекување е конечно, ако дивергира, тогаш земаме дека $EX = +\infty$.

(ii) Нека $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е **произволна ненегативна случајна променлива** и нека (X_n) е низа од ненегативни дискретни случајни променливи, така што $X_n(w) \to X(w)$, кога $n \to +\infty$ и при тоа конвергенцијата е рамномерна на Ω. Тогаш, **математичкото очекување** на случајната променлива X се дефинира со

$$EX = \lim_{n \to +\infty} E(X_n).$$

(iii) Нека $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е **произволна случајна променлива**. Тогаш,

$$X^+ = \max\{X, 0\}, \text{ и } X^- = \max\{-X, 0\},$$

се ненегативни случајни променливи. Ако барем едно од математичките очекувања $E(X^+)$ и $E(X^-)$ е конечно, дефинираме **математичко очекување** на случајната променлива X со

$$EX = E(X^+) - E(X^-).$$

Ако $E(X^+) = E(X^-) = +\infty$, тогаш велиме дека математичкото очекување на случајната променлива X не постои.

- **Теорема.** Нека $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е **случајна променлива од апсолутно непрекинат тип** со функција на распределба $F(x)$ и густина на распределба $p(x)$ и нека $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е Борелова функција. Тогаш, постои конечно математичко очекување на случајната променлива $g(X)$ ако и само ако $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|p(x)dx < +\infty$, и при тоа важи

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx.$$

  Специјално, за $g(x) = x$, добиваме дека математичкото очекување на X, ако постои, е еднакво на

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx.$$

Како и кај дискретните случајни променливи во делот 3.2, така и тука се дефинираат бројни карактеристики на произволна случајна променлива за кои важат истите својства. Заради комплетност ги изложуваме и тука во целост.

- За $n \in \mathbb{N}$, математичкото очекување на X^n, односно $E(X^n)$, ако постои, се нарекува **n-ти момент** на X.

- За $n \in \mathbb{N}$, математичкото очекување на $(X - EX)^n$, односно $E((X - EX)^n)$, ако постои, се нарекува **n-ти централен момент** на X. Вториот централен момент на X се нарекува **дисперзија** или **варијанса** на случајната променлива X, и се означува со $DX = E((X - EX)^2)$ или σ_X^2 или $Var(X)$. Квадратниот корен од дисперзијата се нарекува **стандардна девијација**, и се означува со $\sigma_X = \sqrt{DX}$.

- Нека X е случајна променлива од апсолутно непрекинат тип со функција на распределба $F(x)$ и густина на распределба $p(x)$. **Мода** на X е вредноста moX во која $p(x)$ достигнува максимум, а **медијана** на X е онаа вредност meX за која $F(meX) = 0,5$.

- **Својства.** Нека X и Y се произволни случајни променливи за кои постојат математичките очекувања и нека c е реален број. Тогаш,

  (а) $E(c) = c$,

  (б) $E(cX) = cEX$,

  (в) $|EX| \leq E|X|$,

(г) $E(X+Y) = EX + EY$,

(д) $DX \geq 0$ и $DX = 0$ ако и само ако $\exists a = const.$, $P\{X = a\} = 1$,

(ѓ) $D(cX) = c^2 DX$ и $D(c+X) = DX$,

(е) $DX = E(X^2) - (EX)^2$,

(ж) ако X и Y се независни, тогаш $E(XY) = EX \cdot EY$,

(з) ако X и Y се независни, тогаш $D(X+Y) = DX + DY$,

(ѕ) ако X и Y се независни, тогаш $D(XY) \geq DX \cdot DY$,

(и) ако $X = Y$ скоро сигурно, тогаш $EX = EY$,

(ј) ако $X \leq Y$ скоро сигурно, тогаш $EX \leq EY$.

- **Теорема. (Неравенство на Марков)** Нека X е случајна променлива која прима само ненегативни вредности. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ важи неравенството
$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{EX}{\varepsilon}.$$

- **Теорема. (Неравенство на Чебишев)** Нека X е произволна случајна променлива со конечно математичко очекување. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ важи неравенството
$$P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Нека X и Y се произволни случајни променливи со $0 < DX < +\infty$ и $0 < DY < +\infty$. Како во делот 3.3, така и тука, ги дефинираме следните бројни карактеристики:

- **Коваријанса** на X и Y е бројот дефиниран со
$$\mathrm{cov}(X,Y) = E((X - EX)(Y - EY)) = E(XY) - EX \cdot EY.$$

- **Коефициент на корелација** на X и Y е бројот дефиниран со
$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = \frac{E(XY) - EX \cdot EY}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}.$$

- **Теорема.** За произволните случајни променливи X и Y важи
$$D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2\mathrm{cov}(X,Y).$$

- **Теорема.** Ако X и Y се независни произволни случајни променливи, тогаш $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ и $\rho(X,Y)=0$.
- **Теорема.** За коефициентот на корелација на произволните случајни променливи X и Y важи $|\rho(X,Y)| \leq 1$.

Нека $(\Omega,\mathcal{F},P)$ е простор на веројатност и нека $X:\Omega\to\mathbb{R}$ е произволна случајна променлива за која постои математичкото очекување EX.

- Нека $A\in\mathcal{F}$ е произволен настан со $P(A)>0$. **Условно математичко очекување на X во однос на настанот** A се дефинира со

$$E(X|A)=\frac{E(XI_A)}{P(A)},$$

  каде I_A е случајната променлива индикатор на настанот A.

- Нека $Y:\Omega\to\mathbb{R}$ е дискретна случајна променлива која прима вредности $y_1,y_2,...$ со веројатности $P\{Y=y_k\}$, $k=1,2,...$ соодветно. **Условно математичко очекување на X во однос на дискретната случајна променлива** Y е случајната променлива $E(X|Y)$ која прима вредности $E(X|\{Y=y_k\})$ со веројатности $P\{Y=y_k\}$, $k=1,2,...$ соодветно.
- Нека $Y:\Omega\to\mathbb{R}$ е произволна случајна променлива и нека $\sigma(Y)$ е σ-алгебрата генерирана од Y. **Условно математичко очекување на X во однос на случајната променлива** Y е случајната променлива $E(X|Y)$ која е $\sigma(Y)$-мерлива и за која важи

$$E(XI_A)=E(E(X|Y)I_A),\text{ за секој настан } A\in\sigma(Y).$$

- Нека е дефинирано условното математичко очекување $E(X|Y)$. **Условна дисперзија на X во однос на** Y е случајната променлива

$$D(X|Y)=E((X-E(X|Y))^2|Y).$$

- **Својства.** Нека X,X_1,X_2,Y,Z се случајни променливи, при што EX, EX_1 и EX_2 постојат и се конечни, и нека $a,b,c\in\mathbb{R}$. Тогаш,
  (а) ако $X=c$ скоро сигурно, тогаш $E(X|Y)=c$ скоро сигурно,
  (б) ако $X_1\leq X_2$ скоро сигурно, тогаш $E(X_1|Y)\leq E(X_2|Y)$ скоро сигурно,

(в) $|E(X|Y)| \leq E(|X||Y)$ скоро сигурно,

(г) $E(aX_1 + bX_2|Y) = aE(X_1|Y) + bE(X_2|Y)$ скоро сигурно,

(д) ако Z е функција од Y, тогаш

$$E(E(X|Y)|Z) = E(E(X|Z)|Y) = E(X|Z) \text{ скоро сигурно,}$$

(ѓ) $E(E(X|Y)) = EX$,

(е) ако X и Y се независни, тогаш $E(X|Y) = EX$ скоро сигурно.

(ж) ако X_1 е функција од Y, тогаш

$$E(X_1X_2|Y) = X_1E(X_2|Y) \text{ скоро сигурно,}$$

(з) $D(X|Y) = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2$.

ЗАДАЧА 4.42. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6 & , x \in (2,4) \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}.$$

Најди ги EX, DX, moX и meX.

Решение. Математичкото очекување е

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = \int_2^4 x(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6)\,dx = 3.$$

Вториот момент е

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)\,dx = \int_2^4 x^2(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6)\,dx = \frac{46}{5},$$

па дисперзијата е

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{46}{5} - 3^2 = \frac{1}{5}.$$

Од $p'(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = 0$, добиваме $x = 3$, и бидејќи $p''(3) = -\frac{3}{2} < 0$, следи дека $p(x)$ достигнува максимум во $x = 3$ на интервалот $(2,4)$, значи $moX = 3$. Медијанта на X се наоѓа со решавање на равенката $F(x) = 0,5$, односно

$$\begin{aligned} 0,5 &= F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,du = \int_2^x (-\frac{3}{4}u^2 + \frac{9}{2}u - 6)\,du = \\ &= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + 5, \text{ за } 2 \leq x < 4, \end{aligned}$$

од каде се добива

$$(x-3)(x-3+\sqrt{3})(x-3-\sqrt{3})=0,$$

па $x=3$ е единственото решение од интервалот $(2,4)$, што значи дека $meX=3$.

ЗАДАЧА 4.43. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x & ,x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ 0 & \text{инаку}\end{cases}.$$

Најди ги математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива $Y=|\sin X|$.

Решение. Математичкото очекување на Y е

$$\begin{aligned}EY &= E|\sin X|=\int_{-\infty}^{\infty}|\sin x|p(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\cos x\,dx=\\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin x\cos x\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin x\,d(\sin x)+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,d(\sin x)=\\ &= -\frac{1}{2}\left.\frac{\sin^2 x}{2}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\frac{1}{2}\left.\frac{\sin^2 x}{2}\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Вториот момент на Y е

$$\begin{aligned}EY^2 &= E|\sin X|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\sin x|^2p(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx=\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,d(\sin x)=\frac{1}{2}\left.\frac{\sin^3 x}{3}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Тогаш, дисперзијата на Y е

$$DY=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{3}-(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{12}.$$

ЗАДАЧА 4.44. Нека случајната променлива X има $\mathcal{U}(a,b)$, $a<b$ распределба. Најди ги EX и DX.

Решение. Густината на распределба на X е $p(x) = \frac{1}{b-a}$, $a < x < b$, па математичкото очекување е

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Вториот момент е

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)\,dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

па за дисперзијата имаме

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

ЗАДАЧА 4.45. Најди ги математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива X со функција на распределба

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < -2 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & , -2 \leq x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}.$$

Решение. За функцијата $F(x)$ имаме дека $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ и $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, а од $F'(x) = \frac{1}{4} \geq 0$, $-2 \leq x < 2$, $\lim_{x\to-2-} F(X) = 0 = F(-2)$ и $\lim_{x\to2-} F(X) = 1 = F(2)$, имаме дека $F(x)$ е неопаѓачка непрекината функција. Тогаш, густината на распределба на X е

$$p(x) = F'(x) = \frac{1}{4} \geq 0,\ -2 < x < 2,$$

односно X има $\mathcal{U}(-2,2)$ распределба, па за математичкото очекување и дисперзијата имаме дека се еднакви на

$$EX = \frac{-2+2}{2} = 0 \text{ и } DX = \frac{(2+2)^2}{12} = \frac{4}{3}.$$

ЗАДАЧА 4.46. Случајната променлива X е рамномерно распределена на интервалот $(-1,1)$. Најди ги $E(2X+3)$ и $E(X^2+1)$.

Решение. Од $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$ имаме дека $EX = \frac{-1+1}{2} = 0$ и $DX = \frac{(1+1)^2}{12} = \frac{1}{3}$. Од тука

$$E(2X+3) = 2EX + 3 = 2 \cdot 0 + 3 = 3,$$

$$E(X^2+1) = E(X^2) + 1 = DX + (EX)^2 + 1 = \frac{1}{3} + 0^2 + 1 = \frac{4}{3}.$$

ЗАДАЧА 4.47. Нека X и Y се независни случајни променливи, така што $X \sim \mathcal{U}(-1,3)$ распределба, а $Y = 2X - 1$.

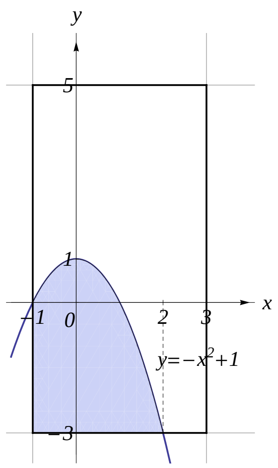
а) Одреди ја дисперзијата на случајната променлива XY.

б) Најди ја веројатноста $P\{X^2 \leq 1 - Y\}$.

Решение. Од $X \sim \mathcal{U}(-1,3)$ имаме дека $EX = \frac{-1+3}{2} = 1$ и $DX = \frac{(3+1)^2}{12} = \frac{4}{3}$. Од Задача 4.17 а) и $Y = 2X - 1$, следи дека $Y \sim \mathcal{U}(2 \cdot (-1) - 1, 2 \cdot 3 - 1)$ т.е. $Y \sim \mathcal{U}(-3,5)$, од каде $EY = \frac{-3+5}{2} = 1$ и $DY = \frac{(5+3)^2}{12} = \frac{16}{3}$.

а) Користејќи ја независноста на X и Y и својствата на математичкото очекување и дисперзијата, имаме

$$\begin{aligned}
&D(XY) = E(XY)^2 - (E(XY))^2 = E(X^2Y^2) - (E(XY))^2 = \\
&= E(X^2) \cdot E(Y^2) - (EX \cdot EY)^2 = (DX + (EX)^2) \cdot (DY + (EY)^2) - (EX \cdot EY)^2 = \\
&= (\frac{4}{3} + 1^2) \cdot (\frac{16}{3} + 1^2) - (1 \cdot 1)^2 = \frac{124}{9} \approx 13,777778.
\end{aligned}$$



Цртеж 4.11

б) Густините на распределба на X и Y соодветно се $p_X(x) = \frac{1}{4}$, за $-1 < x < 3$ и $p_Y(y) = \frac{1}{8}$, за $-3 < y < 5$. Од независноста на X и Y имаме дека густината на распределба на случајниот вектор (X,Y) е $p(x,y) = p_X(x)\cdot p_Y(y) = \frac{1}{32}$, за $-1 < x < 3$, $-3 < y < 5$. Тогаш, за бараната веројатност имаме (Цртеж 4.11)

$$P\{X^2 \leq 1-Y\} = \iint\limits_{x^2\leq 1-y} p(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} dx \int_{-3}^{-x^2+1} \frac{1}{32}\,dy = \frac{9}{32} = 0,28125.$$

ЗАДАЧА 4.48. Нека случајната променлива X има $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $m\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$ распределба. Најди ги EX и DX.

Решение. Густината на распределба на X е $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $x\in\mathbb{R}$. Тогаш, за математичкото очекување имаме

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Ставаме смена $t=\frac{x-m}{\sigma}$, па

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+m)e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = m,$$

бидејќи $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0$, како интеграл од непарна функција над симетричен интервал, а $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1$, од тоа што $p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$ е густина на распределба на случајна променлива со $\mathcal{N}(0,1)$ распределба.

Дисперзијата ја пресметуваме директно по формулата за вториот централен момент т.е.

$$\begin{aligned} DX &= E(X-EX)^2 = E(X-m)^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx. \end{aligned}$$

Ставаме смена $t=\frac{x-m}{\sigma}$, па

$$DX = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Повторно ставаме смена $s=\frac{t^2}{2}$, па

$$DX = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{2}}e^{-s}ds = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} s^{\frac{3}{2}-1}e^{-s}ds = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(\frac{3}{2}) = \sigma^2,$$

каде $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ е Гама функција со својства $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$, за $0<\alpha<1$ и $\Gamma(1+\alpha)=\alpha\,\Gamma(\alpha)$, за $\alpha>0$, од каде за $\alpha=\frac{1}{2}$ се добива $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, па затоа $\Gamma(\frac{3}{2})=\Gamma(1+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\,\sqrt{\pi}$.

ЗАДАЧА 4.49. Случајната променлива X е нормално распределена со густина на распределба

$$p(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-1)^2}{50}},\ x\in\mathbb{R}.$$

Најди ги математичкото очекување и дисперзијата на X.

Решение. Густината на распределба ја запишуваме во облик погоден за одредување на параметрите на нормалната распределба, односно

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 5^2}}\,e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 5^2}},\ x\in\mathbb{R},$$

од каде заклучуваме дека $X\sim\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ со $m=1$ и $\sigma^2=5^2$ што се соодветно бараните математичко очекување и дисперзија, односно $EX=m=1$ и $DX=\sigma^2=5^2=25$.

ЗАДАЧА 4.50. Нека случајната променлива X има χ_n^2 распределба. Најди ги EX и DX.

Решение. Густината на распределба на X е

$$p(x)=\begin{cases}\frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} & ,x>0\\ 0 & ,\text{инаку}\end{cases},$$

каде $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ е гама функција. Математичкото очекување е

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx=\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\,dx=\frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{\infty} t^{\frac{n}{2}}e^{-t}dt=\frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\Gamma(\frac{n}{2}+1)=n,$$

затоа што $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ за секој $\alpha>0$. Вториот момент е

$$\begin{aligned}EX^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)\,dx=\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{n}{2}+1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\,dx=\frac{4}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{\infty} t^{\frac{n}{2}+1}e^{-t}dt=\\ &= \frac{4}{\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\Gamma(\frac{n}{2}+2)=\frac{4(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\Gamma(\frac{n}{2}+1)=4\cdot(\frac{n}{2}+1)\frac{n}{2}=n^2+2n.\end{aligned}$$

Тогаш, дисперзијата е

$$DX=EX^2-(EX)^2=n^2+2n-n^2=2n.$$

ЗАДАЧА 4.51. Нека случајната променлива X има Кошиева распределба, односно нејзината густина на распределба е $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, за $x \in \mathbb{R}$. Најди ги EX и DX.

Решение. Ќе покажеме дека математичкото очекување на X не постои. Ја испитуваме апсолутната конвергенција на интегралот

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx = \\
&= -\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, dx = \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{1} \frac{dt}{t} + \frac{1}{2\pi}\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi}\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi}\lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = +\infty,
\end{aligned}$$

од каде следи дека не постои конечно математичко очекување на X. На сличен начин се добива дека $E(X^+) = E(X^-) = +\infty$, од каде следи дека не постои математичкото очекување на X. Па, не постои ни дисперзијата на X.

ЗАДАЧА 4.52. Нека X има $\mathcal{N}(0,1)$ распределба. Најди ги моментите на X од произволен ред n.

Решение. Густината на распределба на случајната променлива $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ е $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Моментот на X од ред n, за $n = 2k+1$ е

$$EX^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 0,$$

зарди непарноста на подинтегралната функција и интегрирање над симетричен интервал. Кога $n = 2k$, ја изведуваме формулата со математичка индукција. Имаме,

$$\begin{aligned}
EX^2 &= DX + (EX)^2 = 1 + 0^2 = 1 = 1!!, \\
EX^4 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(-x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + 3\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\Big) = \\
&= 3\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 3EX^2 = 3 \cdot 1 = 3!!, \text{ итн.}
\end{aligned}$$

Претпоставуваме дека $EX^{2k} = (2k-1)!!$, тогаш за $n = 2k+2$ имаме

$$\begin{aligned}
EX^{2k+2} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(-x^{2k+1}e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + (2k+1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\Big) = \\
&= (2k+1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = (2k+1)EX^{2k} = \\
&= (2k+1)\cdot(2k-1)!! = (2k+1)!!
\end{aligned}$$

Значи,

$$EX^n = \begin{cases} 0 & , n = 2k+1 \\ (n-1)!! & , n = 2k \end{cases} .$$

ЗАДАЧА 4.53. Нека X има $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ распределба. Определи ги централните моменти на X од произволен ред n.

Решение. Ако $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, тогаш $Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ и за неа важи (види Задача 4.52)

$$EY^n = \begin{cases} 0 & , n = 2k+1 \\ (n-1)!! & , n = 2k \end{cases} .$$

Тогаш за централните моменти на X имаме

$$E(X-EX)^n = E(X-m)^n = E(\sigma Y)^n = \sigma^n EY^n = \begin{cases} 0 & , n = 2k+1 \\ \sigma^n(n-1)!! & , n = 2k \end{cases} .$$

ЗАДАЧА 4.54. Крајните точки на отсечката $\overline{AB} = l$ се наоѓаат на краците од правиот агол XOY, при што растојанието X на точката A од темето O на аголот XOY со еднаква веројатност може да прими вредности од интервалот $[0, l]$. Најди ја очекуваната вредност на растојанието Y на темето O до отсечката AB.

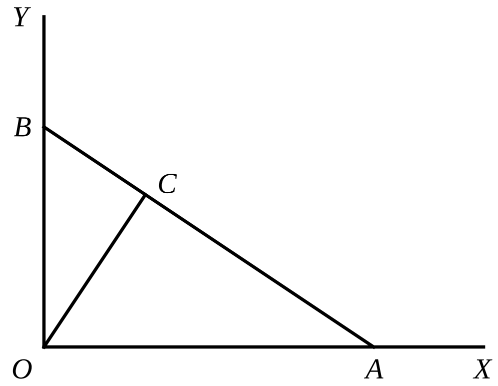
Решение. Од услов на задачата имаме дека $X \sim \mathcal{U}[0, l]$, од каде густината на распределба на X е

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{l} & , x \in [0, l] \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases} .$$

Од сличноста на триаголниците ΔACO и ΔAOB (види Цртеж 4.12) имаме $\overline{OC} : \overline{OA} = \overline{OB} : \overline{AB}$, т.е. $Y : X = \sqrt{l^2 - X^2} : l$, од каде $Y = X\sqrt{1 - (\frac{X}{l})^2}$. Нека

$g(x) = x\sqrt{1-(\frac{x}{l})^2}$. Тогаш, очекуваната оддалеченост на темето O од отсечката AB е

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)\,dx = \int_0^l x\sqrt{1-(\frac{x}{l})^2}\cdot\frac{1}{l}\,dx = \frac{l}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \frac{l}{3}.$$



Цртеж 4.12

ЗАДАЧА 4.55. Правата p која минува низ точката $T(a,0)$, $a \neq 0$, ротира околу неа и при тоа еднакво веројатно зазема која било положба. Нека Y е оддалеченост на правата p од координатниот почеток. Најди ги распределбата на Y, математичкото очекување EY и дисперзијата DY.

Решение. Нека X е аголот кој го зафаќа правата p со x-оската. Тогаш, X има $\mathcal{U}(0,\pi)$ распределба со густина на распределба $p_x(x) = \frac{1}{\pi}$, $0 < x < \pi$, а за растојанието Y на правата p од координатниот почеток важи $Y = |a|\sin X$ (нацртај цртеж). Па, функцијата на распределба на Y е

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{|a|\sin X \le y\} = P\{\sin X \le \frac{y}{|a|}\} = \\ &= P\{0 < X \le \frac{\pi}{2},\ X \le \arcsin\frac{y}{|a|}\} + P\{\frac{\pi}{2} < X < \pi,\ X \ge \pi - \arcsin\frac{y}{|a|}\} = \\ &= P\{0 < X \le \arcsin\frac{y}{|a|}\} + P\{\pi - \arcsin\frac{y}{|a|} \le X < \pi\} = \\ &= F_X(\arcsin\frac{y}{|a|}) - F_X(0) + F_X(\pi) - F_X(\pi - \arcsin\frac{y}{|a|}),\ 0 < y \le |a|. \end{aligned}$$

Од тука, густината на распределба на Y е

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= F_Y'(y) = F_X'(\arcsin\frac{y}{|a|})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{|a|} + F_X'(\pi - \arcsin\frac{y}{|a|})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{|a|} = \\ &= p_X(\arcsin\frac{y}{|a|})\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}} + p_X(\pi - \arcsin\frac{y}{|a|})\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}, \end{aligned}$$

за $0 < y < |a|$. Па, за математичкото очекување на Y имаме

$$EY = \int_0^{|a|} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}\, dy = \int_0^{a^2} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2|a|}{\pi}.$$

за чие пресметување е искористена смената $t = a^2 + y^2$. За вториот момент на Y имаме

$$\begin{aligned} EY^2 &= \int_0^{|a|} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y^2}{\sqrt{a^2 - y^2}}\, dy = -\frac{2}{\pi} y\sqrt{a^2 - y^2}\Big|_0^{|a|} + \frac{2}{\pi} \int_0^{|a|} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot |a| \cos t\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t\, dt = \frac{a^2}{2}, \end{aligned}$$

за што е искористена парцијална интеграција, а потоа смена $y = |a| \sin t$. И конечно, дисперзијата на Y е

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{a^2}{2} - \left(\frac{2|a|}{\pi}\right)^2 = a^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right).$$

ЗАДАЧА 4.56. Случајната променлива X има математичко очекување 3 и средно квадратно отстапување 0,1. Со помош на неравенството на Чебишев, оцени ја веројатноста $P\{2,5 < X < 3,5\}$.

Решение. За случајната променлива X имаме дека $EX = 3$ и $DX = \sigma^2 = 0,1^2 = 0,01$, па користејќи го неравенството на Чебишев добиваме

$$\begin{aligned} &P\{2,5 < X < 3,5\} = P\{2,5 - 3 < X - EX < 3,5 - 3\} = P\{|X - EX| < 0,5\} = \\ &= 1 - P\{|X - EX| \geq 0,5\} \geq 1 - \frac{DX}{0,5^2} = 1 - \frac{0,01}{0,25} = 0,96. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4.57. Веројатноста за појавување на настанот A во кој било од n независни експерименти е $p = \frac{1}{3}$. Одреди го минималниот број експерименти за со веројатност не помала од 0,99 апсолутното отстапување на релативната честота за појавување на настанот A од веројатноста $P(A)$ да не надминува 0,01.

Решение. Случајната променлива X - број на појавувања на настанот A во серија од n независни експерименти, има биномна распределба $\mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$, од каде

$EX = \frac{n}{3}$ и $DX = \frac{2n}{9}$ (види Задача 3.19). Количникот $\frac{X}{n}$ е релативната честота на појавување на настанот A при спроведување на експериментот n пати. Се бара најмалиот природен број за кој важи неравенството

$$P\{|\frac{X}{n} - P(A)| \leq 0,01\} \geq 0,99.$$

Бидејќи $P(A) = p = \frac{1}{3}$ и $EX = \frac{n}{3}$, последното неравенство е еквивалентно на

$$P\{|X - EX| \leq 0,01n\} \geq 0,99.$$

Од неравенството на Чебишев имаме

$$P\{|X - EX| \leq 0,01n\} \geq 1 - \frac{DX}{(0,01n)^2} = 1 - \frac{\frac{2n}{9}}{(0,01n)^2} = 1 - \frac{2}{9 \cdot 0,01^2 \cdot n}.$$

Па, ако $1 - \frac{2}{9 \cdot 0,01^2 \cdot n} \geq 0,99$, тогаш ќе биде исполнето неравенството $P\{|X - EX| \leq 0,01n\} \geq 0,99$. Со решавање се добива дека најмалиот број n за кој важи $1 - \frac{2}{9 \cdot 0,01^2 \cdot n} \geq 0,99$ е $n = 222223$, што претставува најмалиот потребен број на експерименти.

ЗАДАЧА 4.58. Очекуваната почетна брзина на еден куршум е 500 m/s. Оцени ја веројатноста при испукување на куршум, неговата почетна брзина да не е помала од 800 m/s.

Решение. Нека X е почетната брзина на куршумот (во m/s). Дадено е дека $EX = 500$. Со помош на неравенството на Марков ја оценуваме веројатноста почетна брзина на куршумот да не е помала од 800 m/s т.е.

$$P\{X \geq 800\} \leq \frac{EX}{800} = \frac{500}{800} = 0,625.$$

ЗАДАЧА 4.59. Дисперзијата на секоја од 2500 независни случајни променливи е 5. Оцени ја веројатноста отстапувањето на аритметичката средина на тие случајни променливи од аритметичката средина на нивните математички очекувања да не надминува 0,4.

Решение. Нека $X_1, X_2, ..., X_{2500}$ се независните случајни променливи со $DX_i = 5,\ i = 1, 2, ..., 2500$. Од неравенството на Чебишев и својствата на математичкото очекување и дисперзијата имаме

$$P\{|\frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{2500} X_i - \frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{2500} EX_i| \leq 0,4\} = P\{|\frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{2500} X_i - E(\frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{2500} X_i)| \leq 0,4\} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{D\left(\frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{2500} X_i\right)}{0,4^2} = 1 - \frac{\frac{1}{2500^2}\sum_{i=1}^{2500} DX_i}{0,4^2} = 1 - \frac{\frac{1}{2500^2} \cdot 2500 \cdot 5}{0,4^2} = 0,9875.$$

ЗАДАЧА 4.60. Даден е законот на распределба на случајниот вектор (X, Y) со следната табела

$X \backslash Y$	1	3	10
2	3/47	2/47	9/47
4	7/47	8/47	5/47
5	1/47	4/47	8/47

а) Најди ги условните закони на распределба на X и Y при зададени вредности на Y и X, соодветно.

б) Најди ги веројатностите $P\{X \leq 4|Y = 3\}$ и $P\{Y > 1|X > 2\}$.

в) Најди ги распределбите на случајните променливи $E(X|Y)$ и $E(Y|X)$.

Решение. Маргиналните закони на распределба на X и Y соодветно се (сумирањето е по редици, односно колони)

x	2	4	5
$P\{X = x\}$	14/47	20/47	13/47

y	1	3	10
$P\{Y = y\}$	11/47	14/47	22/47

а) Условниот закон на распределба на X при услов $Y = 1$ е

$$\begin{aligned}
P\{X = 2|Y = 1\} &= \frac{P\{X = 2, Y = 1\}}{P\{Y = 1\}} = \frac{\frac{3}{47}}{\frac{11}{47}} = \frac{3}{11}, \\
P\{X = 4|Y = 1\} &= \frac{P\{X = 4, Y = 1\}}{P\{Y = 1\}} = \frac{\frac{7}{47}}{\frac{11}{47}} = \frac{7}{11}, \\
P\{X = 5|Y = 1\} &= \frac{P\{X = 5, Y = 1\}}{P\{Y = 1\}} = \frac{\frac{1}{47}}{\frac{11}{47}} = \frac{1}{11},
\end{aligned}$$

или со табела

x	2	4	5
$P\{X = x\|Y = 1\}$	3/11	7/11	1/11

Слично се добиваат останатите условни закони на распределба на X при зададени вредности на Y т.е.

x	2	4	5
$P\{X = x\|Y = 3\}$	2/14	8/14	4/14

x	2	4	5
$P\{X = x\|Y = 10\}$	9/22	5/22	8/22

Условните закони на распределба на Y при зададени вредности на X се

y	1	3	10
$P\{Y = y\|X = 2\}$	3/14	2/14	9/14

y	1	3	10
$P\{Y = y\|X = 4\}$	7/20	8/20	5/20

y	1	3	10
$P\{Y = y\|X = 5\}$	1/13	4/13	8/13

б) За бараните веројатности имаме

$$P\{X \le 4|Y = 3\} = P\{X = 2|Y = 3\} + P\{X = 4|Y = 3\} = \frac{2}{14} + \frac{8}{14} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7},$$

$$P\{Y > 1|X > 2\} = P\{Y \in \{3, 10\}|X \in \{4, 5\}\} = \frac{P\{Y \in \{3, 10\}, X \in \{4, 5\}\}}{P\{X \in \{4, 5\}\}} =$$

$$= \frac{P\{Y = 3, X = 4\} + P\{Y = 3, X = 5\} + P\{Y = 10, X = 4\} + P\{Y = 10, X = 5\}}{P\{X = 4\} + P\{X = 5\}} =$$

$$= \frac{\frac{8}{47} + \frac{4}{47} + \frac{5}{47} + \frac{8}{47}}{\frac{20}{47} + \frac{13}{47}} = \frac{25}{33}.$$

в) Условното математичко очекување $E(X|Y)$ прима вредности $E(X|Y = y_j)$ со веројатности $P\{Y = y_j\}$, $y_j \in \{1, 3, 10\}$. Вредностите $E(X|Y = y_j)$ се математички очекувања на условните распределби кои ги изведовме погоре. Па, затоа

$$\begin{aligned} E(X|Y = 1) &= 2 \cdot \frac{3}{11} + 4 \cdot \frac{7}{11} + 5 \cdot \frac{1}{11} = \frac{39}{11}, \\ E(X|Y = 3) &= 2 \cdot \frac{2}{14} + 4 \cdot \frac{8}{14} + 5 \cdot \frac{4}{14} = 4, \\ E(X|Y = 10) &= 2 \cdot \frac{9}{22} + 4 \cdot \frac{5}{22} + 5 \cdot \frac{8}{22} = \frac{39}{11}, \end{aligned}$$

односно $E(X|Y)$ прима само две вредности $\frac{39}{11}$ и 4 со веројатности

$$\begin{aligned} P\{E(X|Y) = \frac{39}{11}\} &= P\{Y = 1\} + P\{Y = 10\} = \frac{11}{47} + \frac{22}{47} = \frac{33}{47}, \\ P\{E(X|Y) = 4\} &= P\{Y = 3\} = \frac{14}{47}, \end{aligned}$$

или со табела

x	$39/11$	4
$P\{E(X\|Y) = x\}$	$33/47$	$14/47$

На сличен начин се добива и распределбата на $E(Y|X)$ дадена со табелата

y	$81/20$	$99/14$	$93/13$
$P\{E(Y\|X) = y\}$	$20/47$	$14/47$	$13/47$

ЗАДАЧА 4.61. Случајната променлива Y е распределена според следниот закон на распределба $P\{Y = 1\} = \frac{1}{8}$ и $P\{Y = 2\} = \frac{7}{8}$. За случајната променлива X дадени се условните закони на распределба $P\{X = 2y|Y = y\} = \frac{3}{4}$ и $P\{X = 3y|Y = y\} = \frac{1}{4}$, за $y = 1, 2$. Најди ги распределбата на $E(X|Y)$ и математичкото очекување EX.

Решение. Условниот закон на распределба на X при услов $Y = 1$ е

$$P\{X = 2|Y = 1\} = \frac{3}{4} \text{ и } P\{X = 3|Y = 1\} = \frac{1}{4},$$

па соодветното условно математичко очекување на X при услов $Y = 1$ е

$$E(X|Y = 1) = 2 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

Условниот закон на распределба на X при услов $Y = 2$ е

$$P\{X = 4|Y = 2\} = \frac{3}{4} \text{ и } P\{X = 6|Y = 2\} = \frac{1}{4},$$

па соодветното условно математичко очекување на X при услов $Y = 2$ е

$$E(X|Y = 2) = 4 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{18}{4}.$$

Значи, распределбата на $E(X|Y)$ е

x	$9/4$	$18/4$
$P\{E(X\|Y) = x\}$	$1/8$	$7/8$

За математичкото очекување на X имаме

$$EX = E(E(X|Y)) = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{18}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{135}{32} = 4,21875.$$

ЗАДАЧА 4.62. Една коцка се фрла два пати. Ако и во двете фрлања падне парен број, таа се фрла уште еднаш. Нека X е број на паднати двојки, а Y е број на паднати шестки. Најди ги распределбата на случајниот вектор (X, Y) и условното математичко очекување $E(Y|X = 1)$.

Решение. Множеството елементарни настани е

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \{1, ..., 6\}, x_1 \text{ непарен или } x_2 \text{ непарен}\} \cup \\ &\cup \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \{1, ..., 6\}, x_1 \text{ парен и } x_2 \text{ парен}\}, \end{aligned}$$

при што $P\{(x_1, x_2)\} = \frac{1}{6^2}$ и $P\{(x_1, x_2, x_3)\} = \frac{1}{6^3}$. Случајните вредности X и Y примаат вредности $X, Y \in \{0, 1, 2, 3\}$, а законот на распределба на (X, Y) е

$$\begin{aligned} &P\{X = 0, Y = 0\} = P\{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \{1, 3, 5\}\} + P\{(4, x_2) \mid x_2 \in \{1, 3, 5\}\} + \\ &+ P\{(x_1, 4) \mid x_1 \in \{1, 3, 5\}\} + P\{(4, 4, x_3) \mid x_3 \in \{1, 3, 4, 5\}\} = \\ &= \frac{9}{6^2} + \frac{3}{6^2} + \frac{3}{6^2} + \frac{4}{6^3} = \frac{94}{6^3}, \end{aligned}$$

$$P\{X=0,Y=1\} = P\{(6,x_2) \mid x_2 \in \{1,3,5\}\} + P\{(x_1,6) \mid x_1 \in \{1,3,5\}\} +$$
$$+P\{(6,4,x_3) \mid x_1 \in \{1,3,4,5\}\} + P\{(4,6,x_3) \mid x_3 \in \{1,3,4,5\}\} + P\{(4,4,6)\} =$$
$$= \frac{3}{6^2} + \frac{3}{6^2} + \frac{4}{6^3} + \frac{4}{6^3} + \frac{1}{6^3} = \frac{45}{6^3} \text{ итн.}$$

или со табела

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	$94/6^3$	$45/6^3$	$6/6^3$	$1/6^3$
1	$45/6^3$	$12/6^3$	$3/6^3$	0
2	$6/6^3$	$3/6^3$	0	0
3	$1/6^3$	0	0	0

од каде маргиналниот закон на распределба на X е

x	0	1	2	3
$P\{X=x\}$	$146/6^3$	$60/6^3$	$9/6^3$	$1/6^3$

Условниот закон на распределба на Y при услов $X=1$ е

$$P\{Y=0|X=1\} = \frac{P\{Y=0,X=1\}}{P\{X=1\}} = \frac{\frac{45}{6^3}}{\frac{60}{6^3}} = \frac{45}{60} = 0,75,$$

$$P\{Y=1|X=1\} = \frac{12}{60} = 0,20,\ P\{Y=2|X=1\} = \frac{3}{60} = 0,05,\ P\{Y=3|X=1\} = 0.$$

Тогаш, условното математичко очекување е

$$E(Y|X=1) = 0 \cdot 0,75 + 1 \cdot 0,20 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0 = 0,3.$$

ЗАДАЧА 4.63. Се фрлаат три монети од 5, 10 и 50 денари. Нека X е вкупната вредност на паднатите пари (се собираат вредностите од оние монети на кои се паднала пара).

а) Најди ја очекуваната вредност на X, ако на точно две од монетите се паднала пара.

б) Нека Y е вкупната вредност на паднатите пари на монетите од 10 и 50 денари. Најди ја распределбата на $E(X|Y)$.

Решение. Нека x_i, $i=1,2,3$ е паднатата вредност на монетата од 5, 10 и 50 денари соодветно. Тогаш, просторот елементарни настани е

$$\Omega = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 \in \{0,5\},\ x_2 \in \{0,10\},\ x_3 \in \{0,50\}\},$$

и при тоа од независноста на фрлањата на монетите за веројатноста на секој елементарен настан имаме дека е $P\{(x_1,x_2,x_3)\} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

а) Нека A е настанот дека на точно две од монетите се паднала пара, тогаш $A = \{(5,10,0),(5,0,50),(0,10,50)\}$ и при тоа $P(A) = \frac{3}{8}$. Случајната променлива X - вкупна вредност на паднатите пари на монетите е дефинирана со $X((x_1,x_2,x_3)) = x_1+x_2+x_3$, $(x_1,x_2,x_3) \in \Omega$. Се бара условното математичко очекување $E(X|A)$. Имаме дека $E(X|A) = \frac{E(XI_A)}{P(A)}$, каде I_A е индикатор на настанот A. Тогаш, случајната променлива XI_A е дефинирана со

$$(XI_A)(w) = \begin{cases} X(w) & ,w \in A \\ 0 & ,w \notin A \end{cases},$$

од каде нејзината распределба е

$$P\{XI_A = 15\} = P\{X = 15\} = P\{(5,10,0)\} = \frac{1}{8},$$

$$P\{XI_A = 55\} = P\{X = 55\} = P\{(5,0,50)\} = \frac{1}{8},$$

$$P\{XI_A = 60\} = P\{X = 60\} = P\{(0,10,50)\} = \frac{1}{8},$$

$$P\{XI_A = 0\} = P\{w \mid w \notin A\} = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8},$$

па математичкото очекување на XI_A е

$$E(XI_A) = 15 \cdot \frac{1}{8} + 55 \cdot \frac{1}{8} + 60 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{5}{8} = \frac{130}{8}.$$

И конечно,

$$E(X|A) = \frac{E(XI_A)}{P(A)} = \frac{\frac{130}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{130}{3} = 43\frac{1}{3} \approx 43,333333.$$

б) Случајната променлива Y - вкупна вредност на паднатите пари на монетите од 10 и 50 денари е дефинирана со $Y((x_1,x_2,x_3)) = x_2 + x_3$, $(x_1,x_2,x_3) \in \Omega$. Тогаш, $E(X|Y)$ е случајна променлива која прима вредности $E(X|Y = y)$ со веројатности $P\{Y = y\}$, $y \in \{0,10,50,60\}$ соодветно. За распределбата на Y имаме

$$P\{Y = 0\} = P\{(0,0,0),(5,0,0)\} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

$$P\{Y = 10\} = P\{(0,10,0),(5,10,0)\} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

$$P\{Y = 50\} = P\{(0,0,50),(5,0,50)\} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

$$P\{Y = 60\} = P\{(0,10,50),(5,10,50)\} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Условната распределба на X при услов $Y = 0$ е

$$P\{X = 0|Y = 0\} = \frac{P\{X = 0, Y = 0\}}{P\{Y = 0\}} = \frac{P\{(0,0,0)\}}{P\{Y = 0\}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

$$P\{X = 5|Y = 0\} = \frac{P\{X = 5, Y = 0\}}{P\{Y = 0\}} = \frac{P\{(5,0,0)\}}{P\{Y = 0\}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

$$P\{X = 10|Y = 0\} = P\{X = 15|Y = 0\} = P\{X = 50|Y = 0\} =$$
$$= P\{X = 55|Y = 0\} = P\{X = 60|Y = 0\} = P\{X = 65|Y = 0\} = 0,$$

од каде за условното математичко очекување на X при услов $Y = 0$ имаме

$$E(X|Y = 0) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 50 \cdot 0 + 55 \cdot 0 + 60 \cdot 0 + 65 \cdot 0 = \frac{5}{2}.$$

На сличен начин добиваме дека

$$E(X|Y = 10) = \frac{25}{2}, E(X|Y = 50) = \frac{105}{2}, E(X|Y = 60) = \frac{125}{2}.$$

Па, распределбата на случајната променлива $E(X|Y)$ е

x	$5/2$	$25/2$	$105/2$	$125/2$
$P\{E(X|Y) = x\}$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

ЗАДАЧА 4.64. Експериментот се состои од фрлање на коцка за играње сè додека не се падне шестка. Нека Y е вкупниот број на фрлања, а X е бројот на паднати единици. Најди ги $E(X|Y)$ и $E(X^2|Y)$.

Решение. Да го најдеме прво условното математичко очекување $E(X|Y = y)$, $y \in \mathbb{N}$. Настанот $\{Y = y\}$ значи дека во првите $y - 1$ фрлања на коцката не се паднала шестка, а во y-то фрлање се паднала шестка. Од независноста на фрлањата на коцката, за распределбата на Y имаме

$$P\{Y = y\} = \left(\frac{5}{6}\right)^{y-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{y-1}}{6^y},\ y = 1, 2, 3, ...$$

За условната распределба на бројот на паднати единици при услов $\{Y = y\}$ е $(X|Y = y) \sim \mathcal{B}(y - 1, \frac{1}{5})$, затоа што под услов да во првите $y - 1$ фрлања не се паднала шестка, единица се паѓа со веројатност од $\frac{1}{5}$. Условното математичко очекување на X при услов $\{Y = y\}$ е (види Задача 3.19)

$$E(X|Y = y) = (y - 1) \cdot \frac{1}{5} = \frac{y - 1}{5}.$$

Па, распределбата на $E(X|Y)$ е

$$P\{E(X|Y) = \frac{y-1}{5}\} = \frac{5^{y-1}}{6^y},\ y = 1, 2, 3, ...$$

Сега, повторно од $(X|Y = y) \sim \mathcal{B}(y-1, \frac{1}{5})$ и Задача 3.19, за условната дисперзија на X при услов $\{Y = y\}$ имаме

$$D(X|Y = y) = (y-1) \cdot \frac{1}{5} \cdot (1 - \frac{1}{5}) = \frac{4(y-1)}{25}.$$

Тогаш, за вториот условен момент на X при услов $\{Y = y\}$ имаме

$$E(X^2|Y = y) = D(X|Y = y) + (E(X|Y = y))^2 = \frac{4(y-1)}{25} + (\frac{y-1}{5})^2 = \frac{(y-1)(y+3)}{25}.$$

И конечно, распределбата на $E(X^2|Y)$ е

$$P\{E(X^2|Y) = \frac{(y-1)(y+3)}{25}\} = \frac{5^{y-1}}{6^y},\ y = 1, 2, 3, ...$$

Воочуваме дека условното математичко очекување во однос на случајна променлива Y е случајна променлива чија случајност е индуцирана од Y. Така, за случајната променлива $E(X|Y)$ имаме дека прима вредност $E(X|Y)(w) = \frac{y-1}{5}$, ако Y прима вредност $Y(w) = y$. Значи, $E(X|Y)(w) = \frac{Y(w)-1}{5}$, за $w \in \Omega$, па $E(X|Y) = \frac{Y-1}{5}$. Слично, $E(X^2|Y) = \frac{(Y-1)(Y+3)}{25}$.

ЗАДАЧА 4.65. Случајниот вектор (X, Y) има густина на распределба

$$p(x, y) = \begin{cases} 8xy & , 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}.$$

Најди ги условните математички очекувања $E(Y|X = \frac{1}{2})$ и $E(Y|X \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}))$.

Решение. Маргиналната густина на распределба на X е

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dy = \int_x^1 8xy\ dy = 4x(1 - x^2),\ 0 < x < 1.$$

Тогаш, условната густина на распределба на Y при услов $X = x$ е

$$p_Y(y|x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)} = \frac{8xy}{4x(1 - x^2)} = \frac{2y}{1 - x^2},\ x < y < 1.$$

Од тука условната густина на распределба на Y при услов $X = \frac{1}{2}$ е

$$p_Y(y|X = \frac{1}{2}) = \frac{2y}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{8y}{3}, \ \frac{1}{2} < y < 1.$$

Па, условното математичко очекување на Y при услов $X = \frac{1}{2}$ е

$$E(Y|X = \frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, p_Y(y|X = \frac{1}{2})\, dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{8y^2}{3}\, dy = \frac{7}{9} \approx 0,777778.$$

Сега, за условната густина на распределба на Y при услов $X \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ имаме

$$\begin{aligned} p_Y(y|X \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})) &= \frac{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} p(x,y)\, dx}{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} p_X(x)\, dx} = \begin{cases} \frac{\int_{\frac{1}{4}}^{y} 8xy\, dx}{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 4x(1-x^2)\, dx} & , \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4} \\ \frac{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 8xy\, dx}{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 4x(1-x^2)\, dx} & , \frac{3}{4} \le y < 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{4y(16y^2-1)}{11} & , \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4} \\ \frac{32y}{11} & , \frac{3}{4} \le y < 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Тогаш, условното математичко очекување на Y при услов $X \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ е

$$\begin{aligned} E(Y|X \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})) &= \int_{-\infty}^{\infty} y\, p_Y(y|X \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}))\, dy = \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{4y^2(16y^2-1)}{11}\, dy + \int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{32y^2}{11}\, dy = \frac{173}{220} \approx 0,786364. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4.66. Случајниот вектор (X, Y) има $\mathcal{U}((0,1) \times (0,1))$ распределба. Најди го условното математичко очекување $E(X|X + Y < 1)$.

Решение. Густината на распредлба на случајниот вектор (X, Y) е

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & , 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}.$$

Дефинираме нови случајни променливи $U = X$ и $V = X + Y$. Од Задача 4.41 имаме дека густината на распределба на случајниот вектор (U, V) е

$$p_{UV}(u,v) = \begin{cases} 1 & , 0 < u < 1,\ u < v < u + 1 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}$$

и маргиналната густина на распределба на $V = X + Y$ е

$$p_V(v) = \begin{cases} \int_0^v du & ,0 < v < 1 \\ \int_{v-1}^1 du & ,1 \leq v < 2 \end{cases} = \begin{cases} v & ,0 < v \leq 1 \\ 2 - v & ,1 < v < 2 \end{cases}.$$

Тогаш, условната густина на распределба на X при услов $X + Y < 1$ е

$$\begin{aligned} p_X(x|X+Y<1) &= p_U(x|V<1) = \frac{\int\limits_{v<1} p_{UV}(x,v)\,dv}{\int\limits_{v<1} p_V(v)\,dv} = \\ &= \frac{\int_x^1 dv}{\int_0^1 v\,dv} = 2(1-x), \text{ за } 0 < x < 1, \end{aligned}$$

од каде за математичкото очекување имаме

$$E(X|X+Y<1) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x|X+Y<1)\,dx = \int_0^1 2x(1-x)\,dx = \frac{1}{3} \approx 0,333333.$$

ЗАДАЧА 4.67. Нека X и Y се независни случајни променливи со $\mathcal{U}(0,1)$ распределби секоја. Нека $U = X + Y$. Најди ги $E(U|X)$, $E(X|U)$, $E(XU|X)$ и $E(XU|U)$.

Решение. Од $X, Y \sim \mathcal{U}(0,1)$ имаме дека $EX = EY = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. Потоа, од својствата на условно математичко очекување и независноста на X и Y, за случајните променливи $E(U|X)$ и $E(XU|X)$ имаме

$$E(U|X) = E(X+Y|X) = E(X|X) + E(Y|X) = X + EY = X + \frac{1}{2},$$

$$E(XU|X) = XE(U|X) = X(X + \frac{1}{2}).$$

Од Задача 4.41 имаме дека густината на распределба на случајниот вектор (X, U) е

$$p_{XU}(x,u) = 1,\ 0 < x < 1,\ x < u < x+1,$$

па маргиналната густина на распределба на $U = X + Y$ е

$$p_U(u) = \min\{u, 1\} - \max\{0, u-1\},\ 0 < u < 2,$$

односно

$$p_U(u) = \begin{cases} u & ,0 < u \leq 1 \\ 2 - u & ,1 < u < 2 \end{cases}.$$

Условната густина на распределба на X при услов $U = u$, за $0 < u \leq 1$ е

$$p_X(x|u) = \frac{p_{XU}(x,u)}{p_U(u)} = \frac{1}{u},\ 0 < x < u,$$

односно $(X|U = u) \sim \mathcal{U}(0,u)$, за $0 < u \leq 1$, од каде за $0 < u \leq 1$ имаме дека $E(X|U = u) = \frac{0+u}{2} = \frac{u}{2}$. На сличен начин се добива дека условната густина на распределба на X при услов $U = u$, за $1 < u < 2$ е

$$p_X(x|u) = \frac{p_{XU}(x,u)}{p_U(u)} = \frac{1}{2-u},\ u-1 < x < 1,$$

т.е. $(X|U = u) \sim \mathcal{U}(u-1,1)$, за $1 < u < 2$, од каде исто така и за $1 < u < 2$ се добива дека $E(X|U = u) = \frac{u-1+1}{2} = \frac{u}{2}$. Значи, и во двата случаја, условното математичко очекување на X при услов $U = u$ е $E(X|U = u) = \frac{u}{2}$ што значи дека случајната променлива $E(X|U) = \frac{U}{2}$. И конечно, од својствата на условно математичко очекување имаме дека

$$E(XU|U) = UE(X|U) = \frac{U^2}{2}.$$

4.4 Карактеристични функции

Нека $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ се две (реални) случајни променливи дефинирани над просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогаш, $Z = X + iY : \Omega \to \mathbb{C}$ дефинирана со $Z(w) = X(w) + iY(w)$, $w \in \Omega$ е комплексна случајна променлива дефинирана над истиот простор на веројатност. Ако постојат математичките очекувања на X и Y и се конечни, тогаш постои и математичкото очекување на Z и при тоа $EZ = EX + iEY$.

- **Карактеристична функција** на случајната променлива $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е функцијата $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ дефинирана со

  $$\varphi_X(t) = Ee^{itX} = E(\cos(tX) + i\sin(tX)).$$

  Ако X е случајна променлива од дискретен тип која прима вредности $x_1, x_2, ...$, тогаш

  $$\varphi_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{itx_k} P\{X = x_k\}.$$

Ако X е од апсолутно непрекинат тип со густина на распределба $p(x)$, тогаш

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x)\, dx.$$

- **Својства.** Нека X е случајна променлива и нека $\varphi_X(t)$ е нејзината карактеристична функција. Тогаш,

  (i) $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1$,

  (ii) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$,

  (iii) $\varphi_{aX+b}(t) = \varphi_X(at)\, e^{itb}$,

  (iv) $EX^k = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}$, за $k = 0, 1, ..., n$,

  (v) Ако $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни случајни променливи, тогаш

  $$\varphi_{X_1+X_2+...+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\, \varphi_{X_2}(t)\, ...\, \varphi_{X_n}(t).$$

- **Теорема.** На секоја карактеристична функција $\varphi(t)$ ѝ соодветствува единствена функција на распределба $F(x)$ т.е. не може две различно распределени случајни променливи да имаат исти карактеристични функции.

- **Теорема. (Инверзна формула за карактеристична функција)** Нека $\varphi(t)$ е карактеристична функција на случајната променлива X, за која важи $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < +\infty$. Тогаш, X е од апсолутно непрекинат тип и за густината на распределба $p(x)$ на X важи

  $$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt.$$

ЗАДАЧА 4.68. Најди ја карактеристичната функција на случајната променлива X, дадена со нејзината распределба:

а) $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$,
б) $X \sim \mathcal{P}(a)$, $a > 0$,
в) $X \sim \mathcal{U}(a, b)$, $a < b$,
г) $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$,
д) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Решение. Од дефиниција на карактеристична функција кај случајна променлива од дискретен, односно апсолутно непрекинат тип имаме:

а) Ако $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, тогаш $P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0,1,...,n$, па карактеристичната функција е

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} = (1-p+pe^{it})^n.$$

б) Ако $X \sim \mathcal{P}(a)$, тогаш $P\{X=k\} = \frac{a^k}{k!}\, e^{-a}$, $k = 0,1,...$, па карактеристичната функција е

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\, \frac{a^k}{k!}\, e^{-a} = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ae^{it})^k}{k!} = e^{-a} e^{ae^{it}} = e^{a(e^{it}-1)}.$$

в) Ако $X \sim \mathcal{U}(a,b)$, тогаш густината на распределба на X е $p_X(x) = \frac{1}{b-a}$, $x \in (a,b)$, па карактеристичната функција е

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \int_a^b e^{itx}\, \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (\cos(tx) + i\sin(tx))\, dx = \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b \cos(tx)\, dx + i\, \frac{1}{b-a} \int_a^b \sin(tx)\, dx = \\
&= \frac{1}{b-a}\, \frac{\sin(tx)}{t}\Bigg|_a^b - i\, \frac{1}{b-a}\, \frac{\cos(tx)}{t}\Bigg|_a^b = \\
&= \frac{\sin(bt)-\sin(at)}{t(b-a)} - i\, \frac{\cos(bt)-\cos(at)}{t(b-a)} = \\
&= \frac{i\sin(bt) - i\sin(at) + \cos(bt) - \cos(at)}{it(b-a)} = \\
&= \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}.
\end{aligned}$$

г) Ако $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, тогаш густината на распределба на X е $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$, па карактеристичната функција е

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Ако побараме извод (по t) добиваме

$$\varphi_X'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx-x^2/2}\, dx.$$

Понатаму, со парцијална интеграција, ја добиваме диференцијалната равенка

$$\begin{aligned}
\varphi_X'(t) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d(e^{-x^2/2}) = \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\, e^{itx} e^{-x^2/2}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-x^2/2}\, dx = -t\varphi_X(t),
\end{aligned}$$

со почетен услов $\varphi_X(0) = 1$, од каде добиваме дека $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$.

д) Ако $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, тогаш, густината на распределба на X е $p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, па карактеристичната функција е

$$\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x}\, dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

ЗАДАЧА 4.69. Најди ја карактеристичната функција $\varphi_X(t)$ на случајната променлива X која има густина на распределба $p_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, а потоа одреди ја дисперзијата DX.

Решение. Случајната променлива X е од апсолутно непрекинат тип, па затоа

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= Ee^{itX} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-|x|}dx = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_{-\infty}^{0} e^{(it+1)x}dx + \int_0^{+\infty} e^{(it-1)x}dx\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\left.\frac{e^{(it+1)x}}{it+1}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{(it-1)x}}{it-1}\right|_{0}^{+\infty}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{it+1} - \frac{1}{it-1}\Big) = \frac{1}{1+t^2},
\end{aligned}$$

од каде за првиот и вториот извод на $\varphi_X(t)$ во $t = 0$ имаме

$$\varphi'_X(0) = -\left.\frac{2t}{(1+t^2)^2}\right|_{t=0} = 0 \text{ и } \varphi''_X(0) = -\left.\frac{6t^2-2}{(1+t^2)^3}\right|_{t=0} = -2.$$

Тогаш, математичото очекување и вториот момент на X се

$$EX = \frac{\varphi'_X(0)}{i} = 0 \text{ и } EX^2 = \frac{\varphi''_X(0)}{i^2} = \frac{-2}{-1} = 2,$$

од каде за дисперзијата имаме

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 2 - 0^2 = 2.$$

ЗАДАЧА 4.70. Одреди ја распределбата на случајната променлива X, ако нејзината карактеристична функција е $\varphi_X(t) = e^{2it} \cdot \cos\frac{t}{2}$.

Решение. Од $\cos\frac{t}{2}=\frac{e^{it/2}+e^{-it/2}}{2}$, имаме

$$\varphi_X(t)=e^{2it}\cdot\cos\frac{t}{2}=e^{2it}\cdot\frac{e^{it/2}+e^{-it/2}}{2}=\frac{1}{2}e^{5it/2}+\frac{1}{2}e^{3it/2},$$

па од дефиниција на карактеристична функција на дискретна случајна променлива заклучуваме дека X прима вредности $\frac{3}{2}$ и $\frac{5}{2}$ со веројатности

$$P\{X=\frac{3}{2}\}=\frac{1}{2} \text{ и } P\{X=\frac{5}{2}\}=\frac{1}{2}.$$

ЗАДАЧА 4.71. Нека $\varphi_X(t)=e^{-t^2/2}$ е карактеристична функција на случајната променлива X од апсолутно непрекинат тип. Најди ја распределбата на X.

Решение. Од инверзната формула за карактеристична функција, за густината на распределба на X имаме

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\cdot e^{-t^2/2}\,dt= \\ &= \frac{1}{2\pi}\,e^{-x^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t+ix)^2}{2}}\,dt=\frac{1}{2\pi}\,e^{-x^2/2}\cdot\sqrt{2\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}, \end{aligned}$$

т.е. $X\sim\mathcal{N}(0,1)$.

ЗАДАЧА 4.72. Најди ја распределбата на случајната променлива X од апсолутно непрекинат тип со карактеристична функција

$$\varphi_X(t)=\begin{cases} 1-|t| & ,|t|\leq 1 \\ 0 & ,|t|>1 \end{cases}.$$

Решение. Од инверзната формула за карактеристична функција, за густината на распределба на X имаме

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-itx}(1-|t|)\,dt= \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0} e^{-itx}(1+t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1} e^{-itx}(1-t)\,dt= \\ &= \frac{1}{2\pi x^2}(2-e^{ix}-e^{-ix})=\frac{1-\cos x}{\pi x^2}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4.73. Дали функцијата $\varphi(t) = (1-i|t|)^{-1}$ е карактеристична функција на некоја случајна променлива? Образложи го одговорот.

Решение. Ќе покажеме дека $\varphi(t)$ не е карактеристична функција на ниедна случајна променлива. Имено,

$$\varphi(-t) = (1 - i|-t|)^{-1} = (1 - i|t|)^{-1} = \varphi(t) \neq \overline{\varphi(t)},$$

затоа што $\mathrm{Im}(\varphi(t)) = |t|/(1+t^2) \neq 0$, за $t \neq 0$, па заклучуваме дека $\varphi(t)$ не може да биде карактеристична функција на случајна променлива.

ЗАДАЧА 4.74. Покажи дека, ако $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни случајни променливи со $\mathcal{N}(0,1)$ распределби, тогаш исто таква распределба има и случајната променлива $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$.

Решение. Од тоа што $X_k \sim \mathcal{N}(0,1)$, $k = 1, 2, ..., n$, имаме дека нивните карактеристични функции се $\varphi_{X_k}(t) = e^{-t^2/2}$, $k = 1, 2, ..., n$. Сега, од независноста на $X_1, X_2, ..., X_n$ имаме

$$\varphi_{X_1+X_2+...+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{-t^2/2} = e^{-nt^2/2},$$

па карактеристичната функција на Y_n е

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1+X_2+...+X_n)}(t) = \varphi_{X_1+X_2+...+X_n}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = e^{-\frac{n}{2}(\frac{t}{\sqrt{n}})^2} = e^{-t^2/2},$$

од каде заклучуваме дека $Y_n \sim \mathcal{N}(0,1)$.

4.5 Разни задачи

ЗАДАЧА 4.75. Функцијата на распределба на непрекинатата случајна променлива X - непрекинато време на работа на некоја машина е

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{T}}, \quad x \geq 0,$$

каде $T > 0$ е константа. Најди ја веројатноста дека машината непрекинато работела за време $x \geq T$.

Решение. Бараната веројатност е

$$\begin{aligned} P\{X \geq T\} &= 1 - P\{X < T\} = 1 - P\{0 \leq X < T\} = 1 - F_X(T-) + F_X(0-) = \\ &= 1 - F_X(T) + F_X(0) = 1 - (1 - e^{-\frac{T}{T}}) + (1 - e^{-\frac{0}{T}}) = \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

затоа што $F_X(x)$ е непрекината функција.

ЗАДАЧА 4.76. Исправна монета се фрла n пати. Најди го законот на распределба и функцијата на распределба на случајната променлива X - број на појавувања на „грб“ на монетата.

Решение. Веројатноста да се падне „грб“ при едно фрлање на монетата е $\frac{1}{2}$. Фрлањата се независни, па затоа распределбата на случајната променлива X која прима вредности $X \in \{1, 2, ..., n\}$ е

$$\begin{aligned} P\{X=0\} &= \frac{1}{2^n}, \\ P\{X=1\} &= C_n^1 \frac{1}{2^n} = \binom{n}{1}\frac{1}{2^n}, \\ P\{X=2\} &= C_n^2 \frac{1}{2^n} = \binom{n}{2}\frac{1}{2^n}, \\ &\dots \\ P\{X=n\} &= \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

односно $P\{X=k\} = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$, $k = 0, 1, ..., n$. Функцијата на распределба на X е

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[x]}\binom{n}{k} & , 0 \le x < n \\ 1 & , x \ge n \end{cases}.$$

ЗАДАЧА 4.77. Една точка случајно е фрлена во круг со радиус R, така што веројатноста точката да се падне во произволна област од внатрешноста на кругот, е пропорционална со плоштината на таа област. Најди ја функцијата на распределба $F_X(x)$ и густината на распределба $p_X(x)$ на случајната променлива X - растојание на точката до центарот на кругот.

Решение. Да ги означиме со $\mathbf{P}(K_x)$ и $\mathbf{P}(K)$ плоштините на круговите со радиус x $(0 \le x \le R)$ и R соодветно. Тогаш, веројатноста случајно фрлена точка во кругот со радиус R да падне на растојание не поголемо од x од центарот на кругот е

$$P\{X \le x\} = \frac{\mathbf{P}(K_x)}{\mathbf{P}(K)} = \frac{x^2\pi}{r^2\pi} = \frac{x^2}{R^2}, \text{ за } 0 \le x \le R,$$

$$P\{X \le x\} = 0, \text{ за } x < 0 \quad \text{и} \quad P\{X \le x\} = 1, \text{ за } x > R,$$

односно, функцијата на распределба на X е

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x^2}{R^2} & , 0 \leq x \leq R \\ 1 & , x > R \end{cases}.$$

За густината на распределба имаме

$$p_X(x) = F'_X(x) = \frac{2x}{R^2}, \text{ за } 0 \leq x \leq R \quad \text{и} \quad p_X(x) = F'_X(x) = 0 \text{ за } x < 0 \text{ или } x > R.$$

ЗАДАЧА 4.78. Нека $F_1(x)$ и $F_2(x)$ се функции на распределба на случајните променливи X_1 и X_2 соодветно, и нека a_1 и a_2 се ненегативни реални броеви, така што $a_1 + a_2 = 1$. Покажи дека $F(x) = a_1F_1(x) + a_2F_2(x)$ е исто така функција на распредлба на некоја случајна променлива X.

Решение. Функциите $F_1(x)$ и $F_2(x)$ се неопаѓачки функции, непрекинати од десно и $\lim_{x\to-\infty} F_i(x) = 0$ и $\lim_{x\to+\infty} F_i(x) = 1$, $i = 1, 2$.

(i) Од $F_1(x)$ и $F_2(x)$ се неопаѓачки функции и $a_1, a_2 \geq 0$, следи дека и $F(x) = a_1F_1(x) + a_2F_2(x)$ е неопаѓачка функција.

(ii) Нека $x \in \mathbb{R}$. Тогаш,

$$F(x+) = a_1F_1(x+) + a_2F_2(x+) = a_1F_1(x) + a_2F_2(x) = F(x),$$

што значи дека $F(x)$ е непрекината од десно.

(iii) Ќе покажеме дека и $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ и $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = a_1 \lim_{x\to-\infty} F_1(x) + a_2 \lim_{x\to-\infty} F_2(x) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = a_1 \lim_{x\to+\infty} F_1(x) + a_2 \lim_{x\to+\infty} F_2(x) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 = a_1 + a_2 = 1.$$

Од (i)-(iii) следи дека $F(x)$ е функција на распределба на некоја случајна променлива.

ЗАДАЧА 4.79. Нека $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функција на распределба на некоја случајна променлива за која важи $F(0) = 0$. Докажи дека функцијата $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинирана со

$$G(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right) & , x \geq 1 \end{cases}$$

е исто така функција на распределба на некоја случајна променлива.

Решение. Функцијата $F(x)$ е неопаѓачка, непрекината од десно и $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ и $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Ќе покажеме дека и за функцијата $G(x)$ важат овие својства.

(i) Нека $x_1 \geq x_2 \geq 1$, тогаш

$$\begin{aligned} G(x_1) - G(x_2) &= \left(F(x_1) - F\left(\frac{1}{x_1}\right)\right) - \left(F(x_2) - F\left(\frac{1}{x_2}\right)\right) = \\ &= \Big(F(x_1) - F(x_2)\Big) + \left(F\left(\frac{1}{x_2}\right) - F\left(\frac{1}{x_1}\right)\right) \geq 0, \end{aligned}$$

затоа што $F(x_1) \geq F(x_2)$ и $F(\frac{1}{x_2}) \geq F(\frac{1}{x_1})$ од $F(x)$ неопаѓачка функција и $x_1 \geq x_2 \geq 1$, од каде $\frac{1}{x_2} \geq \frac{1}{x_1}$.

Нека $x_1 \geq 1 \geq x_2$, тогаш

$$G(x_1) - G(x_2) = F(x_1) - F\left(\frac{1}{x_1}\right) \geq 0,$$

затоа што $x_1 \geq 1 \geq \frac{1}{x_1}$ и од $F(x)$ неопаѓачка функција.

За $1 \geq x_1 \geq x_2$ имаме дека тривијално важи $G(x_1) - G(x_2) = 0 \geq 0$, што значи дека за секои $x_1 \geq x_2$ важи $G(x_1) \geq G(x_2)$, па $G(x)$ е неопаѓачка функција.

(ii) Нека $x \geq 1$. Тогаш, од непрекинатоста од десно на $F(x)$ имаме

$$G(x+) = F(x+) - F(\frac{1}{x}+) = F(x) - F(\frac{1}{x}) = G(x).$$

За $x < 1$ имаме дека тривијално важи $G(x+) = 0 = G(x)$, што значи дека $G(x)$ е непрекината од десно за секој $x \in \mathbb{R}$. што значи дека $F(x)$ е непрекината од десно. Да забележиме дека во $x = 1$ функцијата $G(x)$ е непрекината и од лево и од десно.

(iii) Од дефинираноста на $G(x)$ јасно е дека $\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$. Потоа,

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(F(x) - F(\frac{1}{x})\right) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to+\infty} F(\frac{1}{x}) = 1 - F(0) = 1 - 0 = 1.$$

Од (i)-(iii) следи дека $F(x)$ е функција на распределба на некоја случајна променлива.

ЗАДАЧА 4.80. Случајната променлива X има густина на распределба $p_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Најди ја густината на распределба $p_Y(x)$ на случајната променлива $Y = \min\{X, X^2\}$.

Решение. За функцијата на распределба на Y имаме

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{\min\{X, X^2\} \leq y\} = \\ &= 1 - P\{\min\{X, X^2\} > y\} = 1 - P\{X > y, X^2 > y\}. \end{aligned}$$

За $y \leq 0$ имаме дека $P\{X^2 > y\} = 1$, па затоа $P\{X > y, X^2 > y\} = P\{X > y\}$. За $y > 0$ имаме дека $P\{X > y, X^2 > y\} = P\{X > y, |X| > \sqrt{y}\} = P\{X > y, X > \sqrt{y}\}$, па за $0 < y < 1$ имаме дека $\sqrt{y} > y$ па затоа $P\{X > y, X > \sqrt{y}\} = P\{X > \sqrt{y}\}$, додека за $y > 1$ имаме дека $y > \sqrt{y}$ и затоа $P\{X > y, X > \sqrt{y}\} = P\{X > y\}$. Конечно,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= 1 - P\{X > y, X^2 > y\} = \begin{cases} 1 - P\{X > \sqrt{y}\} & ,0 < y < 1 \\ 1 - P\{X > y\} & ,\text{инаку} \end{cases} \\ &= \begin{cases} P\{X \leq \sqrt{y}\} & ,0 < y < 1 \\ P\{X \leq y\} & ,\text{инаку} \end{cases} = \begin{cases} F_X(\sqrt{y}) & ,0 < y < 1 \\ F_X(y) & ,\text{инаку} \end{cases}. \end{aligned}$$

Тогаш, за густината на распределба на Y имаме

$$p_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} F'_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} & ,0 < y < 1 \\ F'_X(y) & ,\text{инаку} \end{cases} = \begin{cases} p_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} & ,0 < y < 1 \\ p_X(y) & ,\text{инаку} \end{cases}.$$

ЗАДАЧА 4.81. Дај пример за сингуларна функција на распределба.

Решение. Пример за сингуларна функција на распределба е **Канторовата сингуларна функција на распределба** која се дефинира на следниот начин.

Нека $C \subseteq \mathbb{R}$ е Канторотовото множество кое се добива од интервалот $[0, 1]$ со последователно отстранување на средните третини од интервалите кои не се отстранети. Значи, во првиот чекор се отстранува интервалот $I_{11} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Во вториот чекор од останатите два интервала $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ се отстрануваат интервалите $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ и сите три отстранети интервали по вториот чекор се нумерираат со

$$I_{21} = \Big(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\Big),\ I_{22} = \Big(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big),\ I_{23} = \Big(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\Big).$$

По вториот чекор останати се четири интервала на кои се повторува досегасхната постапка. Така, после n чекори отстранети се $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1} = 2^n - 1$ интервали кои ги нумерираме со I_{nk}, $1 \leq k \leq 2^n - 1$. Ги воведуваме ознаките

$$A_n = \cup_{k=1}^{2^n-1} I_{nk}, \quad A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

тогаш Канторотовото множество се дефинира со $C = [0,1] \setminus A$. Да забележиме дека збирот на должините на интервалте I_{nk}, $1 \le k \le 2^n - 1$, а со тоа и должината на множеството A_n е

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + ... + \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Кога $n \to \infty$ се добива дека мерата на множестовото A е 1, од каде мерата на Канторовото множество C е 0.

Сега, дефинираме функција $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на следниот начин

1) $F(x) = 0$ за $x < 0$ и $F(x) = 1$ за $x > 1$;

2) $F(x) = \frac{k}{2^n}$ за $x \in I_{nk}$.

   Бидејќи за секој n и $k \in \{1, 2, ..., 2^n - 1\}$, $I_{n+1,2k} = I_{nk}$, имаме дека за $x \in I_{n+1,2k} = I_{nk}$, $F(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n}$, што значи добра дефинираност на 2). Исто така, од 1) и 2) следи дека $F(x)$ е неопаѓачка на $(-\infty, 0) \cup A \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} \setminus C$. Потоа, за $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus C$, за кои $|x_1 - x_2| \le \frac{1}{3^n}$, важи $|F(x_1) - F(x_2)| \le \frac{1}{2^n}$, па $F(x)$ е рамномерно непрекината на $\mathbb{R} \setminus C$.

3) Бидејќи множеството $\mathbb{R} \setminus C$ е секаде густо множество во $\mathbb{R}$, функцијата $F(x)$ може да се додефинира и на множеството C за да биде непрекината.

Добивме дека вака дефинираната функција $F(x)$ е непрекината функција на распределба. Но, таа не е апсолутно непрекината. Имено, за $t \in \mathbb{R} \setminus C$ важи $F'(t) = 0$, од каде за секој $x \in \mathbb{R}$ важи $\int_{-\infty}^{x} F'(t)dt = 0$. Ако претпоставиме дека постои ненегативна функција $p(x)$ така што $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt = 0$ за сите $x \in \mathbb{R}$, добиваме противречност со дефинираноста 2) на функцијата $F(x)$.

ЗАДАЧА 4.82. Случајниот вектор (X, Y) има $\mathcal{N}(0, 0, 1, 1, 0)$ распределба. Најди ја функцијата на распределба $F(x, y)$ на (X, Y) и веројатноста точката (X, Y) да се падне во правоаголникот $\{(x, y) \mid x_1 \le x \le x_2,\ y_1 \le y \le y_2\}$.

Решение. Од $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, 0, 1, 1, 0)$, имаме дека густината на распределба на (X, Y) е

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Функцијата на распределба $F(x, y)$ на (X, Y) е

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)dudv = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}dudv = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{v^2}{2}}dv = (0,5 + \Phi_0(x)) \cdot (0,5 + \Phi_0(y)), \end{aligned}$$

каде $\Phi_0(x)$ е функцијата на Лаплас (види Задача 4.15). Тогаш, бараната веројатност е

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2,\ y_1 \leq Y \leq y_2\} = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} p(x,y)dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y_1}^{y_2} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = (\Phi_0(x_2)-\Phi_0(x_1))\cdot(\Phi_0(y_2)-\Phi_0(y_1)).$$

ЗАДАЧА 4.83. Случајните променливи X и Y се независни и еднакво распределени со $\mathcal{E}(1)$ распределба. Најди ја густината на распределба на случајната променлива $U = \frac{X-Y}{X+Y}$.

Решение. Од $X \sim \mathcal{E}(1)$ и $Y \sim \mathcal{E}(1)$ имаме дека густините на X и Y се

$$p_X(x) = e^{-x},\ x > 0 \ \text{ и } \ p_Y(y) = e^{-y},\ y > 0,$$

соодветно. Од независноста на X и Y, густината на распределба на случајниот вектор (X,Y) е

$$p(x,y) = p_X(x)\cdot p_Y(y) = e^{-x-y},\ x > 0,\ y > 0.$$

Бидејќи $P\{X > 0\} = P\{Y > 0\} = 1$, имаме $P\{-1 < \frac{X-Y}{X+Y} < 1\} = 1$, па функцијата на распределба на $U = \frac{X-Y}{X+Y}$ е

$$\begin{aligned} F_U(x) &= P\{U \leq x\} = P\{\frac{X-Y}{X+Y} \leq x\} = P\{Y \geq \frac{1-x}{1+x}X\} = \\ &= \iint_{v \geq \frac{1-x}{1+x}u} p(u,v)dudv = \int_0^{+\infty} du \int_{\frac{1-x}{1+x}u}^{+\infty} e^{-u-v}dv = \frac{1+x}{2},\ -1 \leq x < 1, \end{aligned}$$

од каде за густината на распределба на U имаме

$$p_U(x) = F_U'(x) = \frac{1}{2},\ -1 < x < 1,$$

односно $U = \frac{X-Y}{X+Y}$ има $\mathcal{U}(-1,1)$ распределба.

ЗАДАЧА 4.84. Случајниот вектор (X_1,X_2) при услов $Y = y$ има $\mathcal{U}((0,y)\times(0,y))$ распределба, а случајната променлива Y има $\mathcal{U}(1,2)$ распределба. Најди ја условната распределба на Y при услов $(X_1,X_2) = (x_1,x_2)$.

Решение. Од $(X_1, X_2)|Y = y \sim \mathcal{U}((0, y) \times (0, y))$ за условната густина на распределба на (X_1, X_2) при услов $Y = y$ имаме дека е

$$p_{X_1X_2}(x_1, x_2|y) = \frac{1}{y^2},\ 0 < x_1, x_2 < y,$$

а од $Y \sim \mathcal{U}(1, 2)$, имаме дека густината на распределба на Y е

$$p_Y(y) = 1,\ 1 < y < 2.$$

Тогаш, густината на распределба на (X_1, X_2, Y) е

$$p_{X_1X_2Y}(x_1, x_2, y) = p_Y(y) \cdot p_{X_1X_2}(x_1, x_2|y) = \frac{1}{y^2},\ 0 < x_1, x_2 < y,\ 1 < y < 2,$$

од каде густината на распределба на (X_1, X_2) е

$$\begin{aligned} p_{X_1X_2}(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1X_2Y}(x_1, x_2, y)dy = \\ &= \begin{cases} \int_1^2 \frac{1}{y^2}\, dy & ,0 < x_1, x_2 < 1 \\ \int_{\max\{x_1,x_2\}}^2 \frac{1}{y^2}\, dy & ,1 \leq x_1 < 2 \text{ или } 1 \leq x_2 < 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} & ,0 < x_1, x_2 < 1 \\ \frac{1}{\max\{x_1,x_2\}} - \frac{1}{2} & ,1 \leq x_1 < 2 \text{ или } 1 \leq x_2 < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Бараната условна густина на распределба на Y при услов $(X_1, X_2) = (x_1, x_2)$ е

$$p_Y(y|x_1, x_2) = \frac{p_{X_1X_2Y}(x_1, x_2, y)}{p_{X_1X_2}(x_1, x_2)} = \begin{cases} \frac{2}{y^2} & ,0 < x_1, x_2 < 1,\ 1 < y < 2 \\ \frac{2\max\{x_1,x_2\}}{y^2(2-\max\{x_1,x_2\})} & ,1 \leq \max\{x_1, x_2\} < y < 2 \end{cases}.$$

ЗАДАЧА 4.85. Случајната променлива X од апсолутно непрекинат тип има густина на распределба $p(x)$. Најди го законот на распределба на случајната променлива

$$Y = \text{sign}X = \begin{cases} 1 & ,X > 0 \\ 0 & ,X = 0 \\ -1 & ,X < 0 \end{cases},$$

како и нејзиното математичко очекување и дисперзија.

Решение. Законот на распределба на Y е

$$\begin{aligned} P\{Y = -1\} &= P\{X < 0\} = P\{X \leq 0\} = F(0), \\ P\{Y = 0\} &= P\{X = 0\} = 0, \\ P\{Y = 1\} &= P\{X > 0\} = 1 - P\{X \leq 0\} = 1 - F(0), \end{aligned}$$

каде $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\, du$ е функцијата на распределба на X. Тогаш, математичкото очекување е

$$EY = (-1) \cdot F(0) + 1 \cdot (1 - F(0)) = 1 - 2F(0),$$

вториот момент е

$$EY^2 = (-1)^2 \cdot F(0) + 1^2 \cdot (1 - F(0)) = 1,$$

од каде за дисперзијата имаме

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = 1 - (1 - 2F(0))^2 = 4F(0) \cdot (1 - F(0)).$$

ЗАДАЧА 4.86. Нека случајната променлива X има густина на распределба $p_s(x) = ax^s e^{-\alpha^2 x^2}$, $x > 0$, каде $s \in \mathbb{N}$. Определи ги a, α и DX во општ случај, и за $s = 1$ и $s = 2$, ако е познато математичкото очекување EX.

Решение. Нека $s \in \mathbb{N}$ е фиксен. Имаме дека

$$\int_0^{+\infty} ax^s e^{-(\alpha x)^2} dx = 1 \text{ и } \int_0^{+\infty} ax^{s+1} e^{-(\alpha x)^2} dx = EX.$$

Со воведување на смена $t = (\alpha x)^2$ добиваме

$$1 = \int_0^{+\infty} ax^s e^{-(\alpha x)^2} dx = \frac{a}{2\alpha^{s+1}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{s-1}{2}} e^{-t} dt = \frac{a}{2\alpha^{s+1}}\, \Gamma(\frac{s+1}{2}),$$

$$EX = \int_0^{+\infty} ax^{s+1} e^{-(\alpha x)^2} dx = \frac{a}{2\alpha^{s+2}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{s}{2}} e^{-t} dt = \frac{a}{2\alpha^{s+2}}\, \Gamma(\frac{s+2}{2}),$$

каде $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$, $s > 0$ е гама функцијата. Од последните равенства се добива

$$a = \frac{2\alpha^{s+1}}{\Gamma(\frac{s+1}{2})} \text{ и } \alpha = \frac{1}{EX} \cdot \frac{\Gamma(\frac{s+2}{2})}{\Gamma(\frac{s+1}{2})}.$$

За вториот момент, со помош на истата смена $t = (\alpha x)^2$ добиваме

$$EX^2 = \int_0^{+\infty} ax^{s+2} e^{-(\alpha x)^2} dx = \frac{a}{2\alpha^{s+3}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{s+1}{2}} e^{-t} dt = \frac{a}{2\alpha^{s+3}}\, \Gamma(\frac{s+3}{2}),$$

и од својството за гама функцијата, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $s > 0$ и добиениот израз за a, имаме

$$EX^2 = \frac{a\Gamma(\frac{s+3}{2})}{2\alpha^{s+3}} = \frac{a\frac{s+1}{2}\Gamma(\frac{s+1}{2})}{2\alpha^{s+1}\alpha^2} = \frac{s+1}{2\alpha^2}.$$

Тогаш, користејќи го изразот за α, дисперзијата е

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{s+1}{2\alpha^2} - (EX)^2 = (EX)^2 \left(\frac{s+1}{2} \cdot \frac{\Gamma^2(\frac{s+1}{2})}{\Gamma^2(\frac{s+2}{2})} - 1 \right).$$

За $s = 1$ се добива $p_1(x) = \alpha x e^{-\alpha^2 x^2}$, $x > 0$ т.е. **законот на Реле**, и при тоа $\alpha = \frac{1}{EX} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $a = 2\alpha^2 = \frac{\pi}{2(EX)^2}$ и $DX = (EX)^2(\frac{4}{\pi} - 1)$.

За $s = 2$ се добива $p_2(x) = \alpha x^2 e^{-\alpha^2 x^2}$, $x > 0$ т.е. **законот на Максвел**, и при тоа $\alpha = \frac{1}{EX} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $a = \frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}} = \frac{32}{\pi^2 (EX)^3}$ и $DX = (EX)^2(\frac{3\pi}{8} - 1)$.

ЗАДАЧА 4.87. Нека X е случајна променлива со $\mathcal{U}(8, 9)$ распределба и нека $X_n = \frac{1}{n}[nX]$, $n \in \mathbb{N}$, каде за $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ е цел дел од x. Покажи дека $|X - X_n| < \frac{1}{n}$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и најди ги EX и EX_n.

Решение. Од неравенството $[x] \leq x < [x] + 1$ кое важи за секој $x \in \mathbb{R}$ имаме дека $[nX] \leq nX < [nX] + 1$, од каде $\frac{[nX]}{n} \leq X < \frac{[nX]}{n} + \frac{1}{n}$, односно $X_n \leq X < X_n + \frac{1}{n}$, т.е. $0 \leq X - X_n < \frac{1}{n}$, од каде $|X - X_n| < \frac{1}{n}$ што требаше да се докаже.

Математичкото очекување на X е $EX = \frac{8+9}{2} = 8 + \frac{1}{2}$.

За да го најдеме математичкото очекување на X_n, ја наоѓаме прво распределбата на веројатности. Случајната променлива X_n прима вредности $X_n \in \{8, 8 + \frac{1}{n}, 8 + \frac{2}{n}, ..., 8 + \frac{n-1}{n}\}$ со веројатности

$$\begin{aligned} P\{X_n = 8 + \frac{k}{n}\} &= P\{[nX] = 8n + k\} = P\{nX \in [8n + k, 8n + k + 1)\} = \\ &= P\{X \in [8 + \frac{k}{n}, 8 + \frac{k+1}{n})\} = \int_{8+\frac{k}{n}}^{8+\frac{k+1}{n}} dx = 8 + \frac{k+1}{n} - 8 - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

за $k = 0, 1, ..., n - 1$, односно X_n има рамномерна распределба на множеството $\{8, 8 + \frac{1}{n}, 8 + \frac{2}{n}, ..., 8 + \frac{n-1}{n}\}$, од каде за математичкото очекување на X_n имаме

$$EX_n = \frac{1}{n}(8 + 8 + \frac{1}{n} + 8 + \frac{2}{n} + ... + 8 + \frac{n-1}{n}) = \frac{1}{n}(8n + \frac{(n-1)n}{2n}) = 8 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

ЗАДАЧА 4.88. Нека X е случајна променлива од апсолутно непрекинат тип со густина на распределба $p(x)$ и нека $a = const$. Од каков тип е случајната променлива $Y = \min\{X, a\}$? Најди ги математичкото очекување и дисперзијата на Y.

Решение. За случајната променлива Y имаме

$$Y = \begin{cases} X & , X < a \\ a & , X \geq a \end{cases},$$

и таа прима вредност a со веројатност

$$p_a = P\{Y = a\} = P\{X \geq a\} = \int_a^{+\infty} p(x)\, dx,$$

па ако $p_a = 0$, тогаш $Y = x$ и таа е случајна променлива од апсолутно непрекинат тип, а ако $p_a > 0$, тогаш Y е од мешан тип.

За математичкото очекување, вториот момент и дисперзијата на Y имаме

$$EY = ap_a + \int_{-\infty}^{a} xp(x)dx,\ EY^2 = a^2 p_a + \int_{-\infty}^{a} x^2 p(x)dx,\ DY = EY^2 - (EY)^2.$$

ЗАДАЧА 4.89. Нека X и Y се независни случајни променливи со густини на распределба $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ соодветно. Најди ги математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива $U = |X - Y|$. Најди пример кога $EU = EX = EY$ и $DU = DX = DY$.

Решение. Од независноста на X и Y имаме дека густината на распределба на случајниот вектор (X, Y) е $p(x, y) = p_X(x) \cdot p_y(y)$. Тогаш, математичкото очекување на $U = |X - Y|$ е

$$EU = \iint_{\mathbb{R}^2} |x - y| p(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} |x - y| p_X(x) p_Y(y) dx dy.$$

Со правата $x = y$, рамнината $\mathbb{R}^2$ ја делиме на две подобласти

$$D_1 = \{(x, y) \mid x \geq y\} \text{ и } D_2 = \{(x, y) \mid x < y\}.$$

Тогаш,

$$\begin{aligned} EU &= \iint_{D_1} (x - y) p_X(x) p_Y(y) dx dy + \iint_{D_2} (y - x) p_X(x) p_Y(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx \int_{-\infty}^{x} p_Y(y) dy - \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y) dy \int_{y}^{+\infty} p_X(x) dx + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y) dy \int_{-\infty}^{y} p_X(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx \int_{x}^{+\infty} p_Y(y) dy. \end{aligned}$$

Ако $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)dt$ и $F_Y(x) = \int_{-\infty}^{y} p_Y(t)dt$ се функциите на распределба на X и Y соодветно, тогаш

$$\begin{aligned} EU &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)F_Y(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} yp_Y(y)(1-F_X(y))dy + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} yp_Y(y)F_X(y)dy - \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)(1-F_Y(x))dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [2xp_X(x)F_Y(x) - xp_X(x)]dx + \int_{-\infty}^{+\infty} [2yp_Y(y)F_X(y) - yp_Y(y)]dy \\ &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)F_Y(x)dx - EX + 2\int_{-\infty}^{+\infty} yp_Y(y)F_X(y)dy - EY. \end{aligned}$$

Од независноста на X и Y имаме

$$EU^2 = E|X-Y|^2 = E(X-Y)^2 = EX^2 - 2\cdot EX\cdot EY + EY^2 = DX + DY + (EX-EY)^2.$$

И конечно, дисперзијата на U е $DU = EU^2 - (EU)^2$.

Ако $X, Y \sim \mathcal{E}(1)$, тогаш $EX = EY = 1$ и $DX = DY = 1$. Со замена на густините на распределба и функциите на распределба на X и Y во изразите за математичкото очекување, вториот момент и дисперзијата на U се добива дека $EU = 1$ и $DU = 1$.

ЗАДАЧА 4.90. Покажи дека, ако $X_1, X_2, ..., X_n$ се позитивни, независни и еднакво распределени случајни променливи, тогаш важи

$$E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{k}{n},\ 1 \le k \le n.$$

Решение. Од својствата на математичко очекување имаме

$$E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = E\left(\sum_{i=1}^{k}\left(X_i / \sum_{j=1}^{n} X_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{k} E\left(X_i / \sum_{j=1}^{n} X_j\right).$$

Бидејќи $X_1, .X_2, ..., X_n$ се еднакво распределени, значи дека

$$E\left(X_i / \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \alpha,\ \text{за секој } i = 1, 2, ..., n.$$

Тогаш,

$$1 = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i / \sum_{j=1}^{n} X_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i / \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha = n\alpha,$$

од каде се добива дека $\alpha = \frac{1}{n}$, па затоа

$$E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{i=1}^{k} E\left(X_i / \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = k\alpha = \frac{k}{n}.$$

ЗАДАЧА 4.91. Нека X е случајна променлива со $EX > a$, $a \in \mathbb{R}$, $a = const.$ и $DX < +\infty$. Докажи дека

$$P\{X \le a\} \le \frac{DX}{(EX-a)^2}.$$

Решение. Од $EX > a$ имаме дека $2EX - a > a$, и од $(a, 2EX - a) \subseteq (a, +\infty)$ имаме дека $P\{a < X < 2EX - a\} \le P\{X > a\}$. Сега, со користење на неравенството на Чебишев се добива

$$\begin{aligned} P\{X \le a\} &= 1 - P\{X > a\} \le 1 - P\{a < X < 2EX - a\} = \\ &= 1 - P\{a - EX < X - EX < EX - a\} = 1 - P\{|X - EX| < EX - a\} = \\ &= P\{|X - EX| \ge EX - a\} \le \frac{DX}{(EX-a)^2}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4.92. Функцијата на распределба $F(x)$ на случајната променлива X од апсолутно непрекинат тип е дадена со графикот на Цртеж 4.13. Покаж-хи дека математичкото очекување геометриски може да биде претставено со плоштината на штрафираниот дел.

Решение. Од цртежот имаме дека $F(x) = 0$, за $x < 0$. Нека $p(x)$ е густината на распределба на X, тогаш $p(x) = F'(x)$. За математичкото очекување имаме

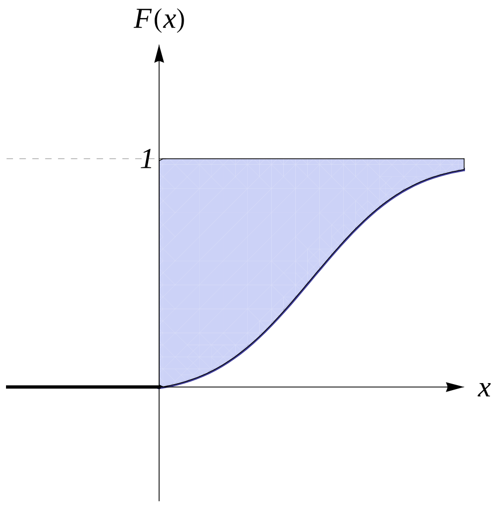
$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\, dx = \int_0^{\infty} xF'(x)\, dx = -\int_0^{\infty} x(1 - F(x))'\, dx.$$

Со парцијална интеграција $u = x$, $dv = (1 - F(x))'\, dx$ добиваме

$$EX = -\, x(1 - F(x))\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (1 - F(x))\, dx.$$

Од конечноста на EX, интегралот $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\ dx = \int_0^{\infty} xp(x)\ dx$ конвергира ($p(x) = 0$, за $x < 0$), од каде $\int_K^{\infty} xp(x)\, dx \to 0$, кога $K \to \infty$. Тогаш,

$$0 \le K(1 - F(K)) = K\int_K^{\infty} p(x)\, dx \le \int_K^{\infty} xp(x)\, dx \to 0, \text{ кога } K \to \infty,$$



Цртеж 4.13

што значи $\lim_{x\to\infty} x(1-F(x)) = 0$. Конечно, за математичкото очекување имаме

$$EX = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\, dx,$$

што геометриски може да се претстави со плоштината на штрафираниот дел од Цртеж 4.13.

ЗАДАЧА 4.93. Покажи дека ако

$$\lim_{x\to-\infty} (xF(x)) = 0 \;\text{ и }\; \lim_{x\to+\infty} (x(1 - F(x))) = 0,$$

каде $F(x)$ е функцијата на распределба на случајната променлива X од апсолутно непрекинат тип, тогаш

$$EX = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\, dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)\, dx.$$

Решение. Нека $p(x)$ е густината на распределба на X, тогаш $p(x) = F'(x)$ и

$p(x) = -(1 - F(x))'$. Затоа,

$$\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xp(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xp(x)dx = \\
&= \int_{-\infty}^{0} xF'(x)dx - \int_{0}^{\infty} x(1-F(x))'dx = \\
&= xF(x)\big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx - x(1-F(x))\big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty}(1-F(x))dx = \\
&= \int_{0}^{+\infty}(1-F(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx,
\end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

ЗАДАЧА 4.94. Покажи дека ако X е случајна променлива со конечно математичко очекување и $\varphi(x)$ е конвексна диференцијабилна функција, тогаш $E(\varphi(X)) \geq \varphi(EX)$.

Решение. Ако $\varphi(x)$ е конвексна диференцијабилна функција, тогаш

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geq \varphi'(x_1)(x_2 - x_1), \text{ за секои } x_1, x_2.$$

Заменуваме за $x_1 = EX$ и $x_2 = X$ и добиваме

$$\varphi(X) - \varphi(EX) \geq \varphi'(EX)(X - EX),$$

па ако на последното неравенство побараме математичко очекување добиваме

$$E(\varphi(X) - \varphi(EX)) \geq E(\varphi'(EX)(X - EX)),$$

односно

$$E(\varphi(X)) - \varphi(EX) \geq \varphi'(EX)(EX - EX) = 0,$$

од каде се добива дека $E(\varphi(X)) \geq \varphi(EX)$, што требаше да се докаже.

ЗАДАЧА 4.95. Од множеството $\{1, 2, ..., n\}$ на случаен начин се избира број X, а потоа од множеството $\{1, 2, ..., X\}$ на случаен начин се избира број Y. Нека $U = X + Y$ и $V = X - Y$. Најди ја распределбата на случајниот вектор (U, V) и коваријансата $cov(U, V)$.

Решение. Множеството од елементарни настани е $\Omega = \{(x, y) | 1 \leq y \leq x \leq n\}$, при што $P\{(X, Y) = (x, y)\} = P\{X = x\}P\{Y = y | X = x\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x}$.

Вредностите кои ги примаат новите случајни променливи $U = X + Y$ и $V = X - Y$ се $U \in \{2, 3, ..., 2n\}$ и $V \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Законот на распределба на случајниот вектор (U, V) е

$$P\{U = u, V = v\} = P\{X+Y = u, X-Y = v\} = P\{X = \frac{u+v}{2}, Y = \frac{u-v}{2}\} = \frac{2}{n(u+v)},$$

кога $1 \leq \frac{u-v}{2} \leq \frac{u+v}{2} \leq n$.

Понатаму, бидејќи

$$\begin{aligned} cov(U, V) &= E(UV) - EU \cdot EV = \\ &= E((X+Y)(X-Y)) - E(X+Y) \cdot E(X-Y) = \\ &= E(X^2 - Y^2) - (EX + EY)(EX - EY) = \\ &= (EX^2 - EY^2) - ((EX)^2 - (EY)^2) = \\ &= (EX^2 - (EX)^2) - (EY^2 - (EY)^2) = DX - DY, \end{aligned}$$

потребно е да се најдат дисперзиите на X и Y.

Случајната променлива X има рамномерна распределба на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ т.е. $P\{X = x\} = \frac{1}{n}$, $x = 1, 2, ..., n$, па затоа $DX = \frac{n^2-1}{12}$.

При услов $X = x$, случајната променлива Y има рамномерна распределба на $\{1, 2, ..., x\}$ т.е. $P\{Y = y|X = x\} = \frac{1}{x}$, $y = 1, 2, ..., x$, од каде условното математичко очекување на Y при зададена вредност $X = x$ е $E(Y|X = x) = \frac{x+1}{2}$, додека условниот втор момент е $E(Y^2|X = x) = \frac{(x+1)(2x+1)}{6}$.

Случајната променлива условно математичко очекување на Y при услов X т.е. $E(Y|X)$ прима вредности $E(Y|X = x) = \frac{x+1}{2}$ со веројатности $P\{X = x\} = \frac{1}{n}$, $x \in \{1, 2, ..., n\}$ од каде нејзиното математичко очекување е

$$E(E(Y|X)) = \sum_{x=1}^{n} E(Y|X = x)P\{X = x\} = \sum_{x=1}^{n} \frac{x+1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+3}{4},$$

па затоа

$$EY = E(E(Y|X)) = \frac{n+3}{4}.$$

Случајната променлива условен втор момент на Y при услов X прима вредности $E(Y^2|X = x) = \frac{(x+1)(2x+1)}{6}$ со веројатности $P\{X = x\} = \frac{1}{n}$, $x \in \{1, 2, ..., n\}$ од каде нејзиното математичко очекување е,

$$E(E(Y^2|X)) = \sum_{x=1}^{n} E(Y^2|X = x)P\{X = x\} = \sum_{x=1}^{n} \frac{(x+1)(2x+1)}{6} \cdot \frac{1}{n} = \frac{4n^2 + 15n + 15}{36},$$

па затоа

$$EY^2 = E(E(Y^2|X)) = \frac{4n^2 + 15n + 15}{36}.$$

Конечно, за дисперзијата на Y се добива

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{4n^2 + 15n + 15}{36} - \left(\frac{n+3}{4}\right)^2 = \frac{7n^2 + 6n - 21}{144},$$

од каде

$$cov(U, V) = DX - DY = \frac{n^2 - 1}{12} - \frac{7n^2 + 6n - 21}{144} = \frac{5n^2 - 6n + 9}{144}.$$

ЗАДАЧА 4.96. Формула за тотално математичко очекување. Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност и нека настаните $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ формираат разбивање на Ω. Нека $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е случајна променлива. Покажи дека

$$EX = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) E(X|A_i).$$

Решение. Од дефиницијата, за условното математичко очекување на X во однос на настанот A_i имаме $E(X|A_i) = \frac{E(XI_{A_i})}{P(A_i)}$, $i = 1, ..., n$, каде I_A е индикатор на настанот A. Користејќи ги својствата на математичкото очекување и тоа дека $A_1, A_2, ..., A_n$ формираат разбивање на Ω имаме

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) E(X|A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot \frac{E(XI_{A_i})}{P(A_i)} = \sum_{i=1}^{n} E(XI_{A_i}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} XI_{A_i}\right) = EX.$$

ЗАДАЧА 4.97. Случајно се фрла фер коцка. Нека Y е бројот на паднати точки на коцката, а X е случајно избран реален број од интервалот $(0, Y)$ со рамномерна распределба. Најди го EX.

Решение. Случајната променлива Y има дискретна рамномерна распределба $P\{Y = k\} = \frac{1}{6}$, $k = 1, ..., 6$. Дефинираме настани $A_k = \{Y = k\}$, $k = 1, ..., 6$ кои формираат разбивање на Ω. Тогаш, од формулата за тотално математичко очекување (Задача 4.96) имаме

$$EX = \sum_{k=1}^{6} P(A_k) E(X|A_k) = \sum_{k=1}^{6} P\{Y = k\} E(X|Y = k).$$

Бидејќи $(X|Y = k) \sim \mathcal{U}(0, k)$, имаме дека $E(X|Y = k) = \frac{0+k}{2} = \frac{k}{2}$, $k = 1, ..., 6$. Конечно, за математичкото очекување имаме

$$EX = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot \frac{k}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{4} = 1,75.$$

ЗАДАЧА 4.98. Едно глувче е заробено во соба со три излеза, во центарот на еден лавиринт. Првиот излез од собата води кон излез од лавиринтот за 3 минути. Вториот излез од собата води повторно кон истата соба за 5 минути. Третиот излез од собата води повторно кон истата соба за 7 минути. Секогаш кога бира, глувчето со еднаква веројатност избира еден од трите излези од собата. Кое е очекуваното време за кое глувчето ќе излезе од лавиринтот?

Решение. Дефинираме случајни променливи X-време за кое глувчето ќе излезе од лавиринтот и Y-излез кој глувчето го избира. Од условот на задачата Y има дискретна рамномерна распределба т.е. $P\{Y=k\}=\frac{1}{3}$, $k=1,2,3$, додека за условните математички очекувања на X при дадена вредност на Y имаме

$$E(X|Y=1)=3,\ E(X|Y=2)=5+EX,\ E(X|Y=3)=7+EX.$$

Тогаш, математичкото очекување на X е

$$\begin{aligned} EX &= E(E(X|Y))=\sum_{k=1}^{3}E(X|Y=k)P\{Y=k\}= \\ &= 3\cdot\frac{1}{3}+(5+EX)\cdot\frac{1}{3}+(7+EX)\cdot\frac{1}{3}=5+\frac{2}{3}\cdot EX, \end{aligned}$$

од каде $EX=15$, односно очекуваното време за кое глувчето ќе излезе од лавиринтот е 15 минути.

ЗАДАЧА 4.99. Збир на случаен број случајни променливи. Нека X_n, $n=1,2,...$ се независни и еднакво распределени случајни променливи со математичко очекување μ и дисперзија σ^2. Нека N е случајна променлива независна од сите X_n, $n=1,2,...$ која прима вредности $1,2,3,...$ Нека $S_N=\sum_{k=1}^{N}X_k$. Најди ги $E(S_N|N)$, $E(S_N^2|N)$, $E(S_N)$ и $D(S_N)$.

Решение. Случајната променлива S_N при услов $N=n$ е збир од фиксен конечен број на еднакво распределени случајни променливи и затоа

$$E(S_N|N=n)=E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum_{k=1}^{n}EX_k=n\mu.$$

Значи, случајната променлива $E(S_N|N)$ прима вредности $E(S_N|N)(w)=n\mu$, ако N прима вредност $N(w)=n$, од каде $E(S_N|N)(w)=N(w)\mu$, за $w\in\Omega$, односно $E(S_N|N)=N\mu$.

Сега, од својството на условна дисперзија и од независноста на X_k, за условниот втор момент на S_N при услов $N = n$ имаме

$$\begin{aligned} E(S_N^2|N=n) &= D(S_N|N=n) + (E(S_N|N=n))^2 = D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) + (n\mu)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} DX_k + n^2\mu^2 = n\sigma^2 + n^2\mu^2, \end{aligned}$$

односно $E(S_N^2|N) = N\sigma^2 + N^2\mu^2$.

За математичкото очекување и дисперзијата на S_N имаме

$$E(S_N) = E(E(S_N|N)) = E(N\mu) = \mu EN,$$
$$E(S_N^2) = E(E(S_N^2|N)) = E(N\sigma^2 + N^2\mu^2) = \sigma^2 EN + \mu^2 EN^2,$$

од каде за дисперзијата на S_N добиваме

$$D(S_N) = E(S_N^2) - (E(S_N))^2 = \sigma^2 EN + \mu^2 EN^2 - \mu^2(EN)^2 = \sigma^2 EN + \mu^2 DN.$$

ЗАДАЧА 4.100. Бројот на купувачи кои влегуваат во една продавница во текот на еден ден има Поасонова распределба со параметар $\lambda = 10$. Парите кои еден купувач ќе ги потроши во продавницата има $\mathcal{U}(0, 1000)$ распределба (во денари). Најди ја очекуваната вредност и дисперзијата на парите кои ќе ги собере продавницата во еден ден.

Решение. Нека X_k е износот кој k-тиот купувач ќе го потроши во продавницата, $k = 1, 2, ...$ и нека N е бројот на купувачи кои влегле во продавницата во текот на еден ден. Од условот на задачата X_k, $k = 1, 2, ...$ се независни и еднакво распределени со $\mathcal{U}(0, 1000)$ распределби, а N е независна од сите X_k, $k = 1, 2, ...$ и $N \sim \mathcal{P}(10)$. Тогаш, $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$ е сумата пари кои продавницата ќе ги собере во еден ден. Се бараат $E(S_N)$ и $D(S_N)$.

Од Задача 4.99 имаме дека

$$E(S_N) = \mu EN \text{ и } D(S_N) = \sigma^2 EN + \mu^2 DN,$$

каде μ и σ^2 се математичкото очекување и дисперзијата на случајните променливи X_k т.е. $\mu = \frac{0+1000}{2} = 500$ и $\sigma^2 = \frac{(1000-0)^2}{12} = \frac{500^2}{3}$. Потоа, од $N \sim \mathcal{P}(10)$ имаме дека $EN = DN = 10$, од каде

$$E(S_N) = \mu EN = 500 \cdot 10 = 5000 \text{ и}$$
$$D(S_N) = \sigma^2 EN + \mu^2 DN = \frac{500^2}{3} \cdot 10 + 500^2 \cdot 10 = \frac{4 \cdot 500^2}{3} \cdot 10 = \frac{10^7}{3}.$$

ЗАДАЧА 4.101. Дали функцијата

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & , |t| \leq 1 \\ 0 & , |t| > 1 \end{cases}$$

е карактеристична функција на некоја случајна променлива? Образложи го одговорот.

Решение. Да претпоставиме дека $\varphi(t)$ е карактеристична функција за некоја случајна променлива со функција на распрелеба $F(x)$. Од апсолутната непрекинатост на интегралот

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\ dt = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)\ dt = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3} < +\infty,$$

следи дека случајната променлива X е од апсолутно непрекинат тип и нејзијата густина на распределба е

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t)\ dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} e^{-itx} (1 - t^2)\ dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} (\cos(-tx) + i \sin(-tx))(1 - t^2)\ dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \cos(tx)(1 - t^2)\ dt - i\, \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \sin(tx)(1 - t^2)\ dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} \cos(tx)(1 - t^2)\ dt = \frac{2(\sin x - x \cos x)}{\pi x^3}, \end{aligned}$$

што не е можно, затоа што мора $p(x) \geq 0$, а ваквата густина на распределба може да прима и негативни вредности. Значи, $\varphi(t)$ не може да биде карактеристична функција на ниедна случајна променлива.

ЗАДАЧА 4.102. Нека $\varphi_X(t)$ е карактеристична функција на случајната променлива X. Изрази го збирот $D(\sin X) + D(\cos X)$ преку $\varphi_X(1)$.

Решение. Користејќи ги својствата на карактеристична функција имаме

$$\begin{aligned} D(\sin X) + D(\cos X) &= E(\sin X)^2 - (E(\sin X))^2 + E(\cos X)^2 - (E(\cos X))^2 = \\ &= E((\sin X)^2 + (\cos X)^2) - ((E(\sin X))^2 + (E(\cos X))^2) = \\ &= 1 - |\varphi_X(1)|^2. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4.103. Случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни и еднакво распределни со експоненцијални $\mathcal{E}(1)$ распределби. Покажи дека случајните променливи $U = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ и $V = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}$ имаат иста распределба.

Решение. Од Задача 4.68 имаме дека карактеристичната функција на X_k е $\varphi_{X_k}(t) = \frac{1}{1-it}$, $k = 1, 2, ..., n$. Од својствата на карактеристична функција имаме дека $\varphi_{X_k/k}(t) = \varphi_{X_k}(\frac{t}{k}) = \frac{k}{k-it}$, $k = 1, 2, ..., n$. Потоа, од независноста на $X_1, ..., X_n$ следи независноста на X_k/k, $k = 1, 2, ..., n$, од каде

$$\varphi_Z(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k/k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k-it} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k k\binom{n}{k}}{k-it},$$

при што последното равенство се покажува со индукција по n.

Од друга страна, за распределбата на случајната променлива Y имаме

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\{Y \leq x\} = P\{\max\{X_1, X_2, ..., X_n\} \leq x\} = P\{X_1 \leq x, ..., X_n \leq x\} = \\ &= P\{X_1 \leq x\}...P\{X_n \leq x\} = F_{X_1}(x)...F_{X_n}(x) = (F(x))^n, \end{aligned}$$

каде $F(x)$ е заедничката функција на распределба на секоја од случајните променливи $X_1, ..., X_n$. Тогаш, густината на распределба на Y е

$$p_Y(x) = F'_Y(x) = np(x)(F(x))^{n-1},$$

каде $p(x)$ е заедничката густина на распределба на секоја од случајните променливи $X_1, ..., X_n$, за кои знаеме дека имаат експоненцијална $\mathcal{E}(1)$ распределба со $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$ и $p(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$, и затоа

$$p_Y(x) = ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}, \ x \geq 0.$$

Така, за карактеристичната функција на Y добиваме

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_Y(x)\, dx = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{+\infty} e^{itx} n(-1)^k \binom{n-1}{k} e^{-(k+1)x} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (k+1) \binom{n}{k+1} \int_0^{+\infty} e^{itx} e^{-(k+1)x} dx = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k \binom{n}{k} \int_0^{+\infty} e^{x(it-k)} dx = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} \frac{1}{k-it}. \end{aligned}$$

Добивме дека карактеристичните функции на Y и Z се еднакви, од каде, заклучуваме дека Y и Z имаат исти распределби.

ЗАДАЧА 4.104. Случајната променлива X има $\mathcal{U}(0, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ распределба, случајната променлива Y има $\mathcal{U}(0,1)$ распределба и $X = Y + U$, при што Y и U се независни случајни променливи. Најди ја распределбата на случајната променлива U.

Решение. Од $X \sim \mathcal{U}(0, n+1)$ и $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$ имаме дека карактеристичните функции на X и Y соодветно се

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{it(n+1)} - 1}{(n+1)it} \text{ и } \varphi_Y(t) = \frac{e^{it} - 1}{it}.$$

Нека $\varphi_U(t)$ е карактеристична функција на U. Од независноста на Y и U имаме

$$\varphi_X(t) = \varphi_{Y+U}(t) = \varphi_Y(t) \cdot \varphi_U(t),$$

од каде

$$\varphi_U(t) = \frac{\varphi_X(t)}{\varphi_Y(t)} = \frac{(e^{it(n+1)} - 1) \cdot it}{(e^{it} - 1) \cdot (n+1)it} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} e^{itk},$$

од каде заклучуваме дека U е дискретна случајна променлива со закон на распределба

$$P\{U = k\} = \frac{1}{n+1},\ k = 0, 1, 2, ..., n,$$

односно U има дискретна рамномерна распределба на множеството $\{0, 1, 2, ..., n\}$.

4.6 Задачи за самостојна работа

ЗАДАЧА 4.105. Најди ја функцијата на распределба $F_X(x)$ на случајната променлива X од Задача 3.2.

ЗАДАЧА 4.106. Најди ја функцијата на распределба $F_X(x)$ на случајната променлива X дадена со нејзиниот закон на распределба

x	3	4	7	10
$P\{X = x\}$	0,2	0,1	0,4	0,3

ЗАДАЧА 4.107. Случајната променлива X е дадена со нејзината функцијата на распределба $F_X(x)$, односно

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} & , -1 \leq x < \frac{1}{3} \\ 1 & , x \geq \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Најди ја веројатноста X да прима вредности од интервалот $(0, \frac{1}{3})$.

ЗАДАЧА 4.108. Случајната променлива од апсолутно непрекинат тип X е дадена со нејзината густина на распределба $p_X(x)$, односно

$$p_X(x) = \begin{cases} \cos x & , x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}.$$

Најди ја функцијата на распределба $F_X(x)$ на случајната промелива X.

ЗАДАЧА 4.109. Случајната променлива од апсолутно непрекинат тип X е дадена со нејзината густина на распределба $p_X(x)$, односно

$$p_X(x) = \begin{cases} a \ \sin 3x & , x \in (0, \frac{\pi}{3}) \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}.$$

Најди ја вредноста на параметарот $a \in \mathbb{R}$ и веројатноста да X прима вредности од интервалот $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$.

ЗАДАЧА 4.110. Густината на распределба на случајната променлива X е $p_X(x) = \frac{4C}{e^x + e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$. Најди ја вредноста на константата C, $C \in \mathbb{R}$.

ЗАДАЧА 4.111. Густината на распределба на случајната променлива X од апсолутно непрекинат тип е

$$p_X(x) = \begin{cases} C \cdot \operatorname{arctg} x & , x \in (0, 1) \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}.$$

Одреди ги вредноста на C, $C \in \mathbb{R}$ и веројатноста дека X прима вредности од интервалот $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

ЗАДАЧА 4.112. Случајната променлива X има нормална распределба со густина на распределба $p_X(x) = C \cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$, $x \in \mathbb{R}$. Одреди ја вредноста на C, $C \in \mathbb{R}$ и најди ја веројатноста $P\{X \in [2, 5]\}$.

ЗАДАЧА 4.113. Дадена е функцијата $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 - \frac{1-e^{-x}}{x} & , x > 0 \end{cases}.$$

Дали $F(x)$ е функција на распределба на некоја случајна променлива? Образложи.

ЗАДАЧА 4.114. Нека $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функција на распределба на некоја случајна променлива и нека $a > 0$. Докажи дека функцијата $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинирана со

$$G(x) = \frac{aF(x)}{a + 1 - F(x)}$$

е исто така функција на распределба на некоја случајна променлива.

ЗАДАЧА 4.115. При мерењето на дијаметарот на една топка се очекува да се направи грешка X распределена по нормален закон на распределба со средно квадратно отстапување $\sigma = 10$ mm. Најди ја веројатноста дека мерењето ќе биде направено со грешка која по апсолутна вредност не надминува 15 mm.

ЗАДАЧА 4.116. Случајната променлива X е рамномерно распределена на интервалот $(0, 2\pi)$ т.е. $X \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$. Најди ја густината на распределба $p_Y(y)$ на случајната променлива $Y = \cos X$.

ЗАДАЧА 4.117. Случајната променлива X има нормална распределба $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Најди ја функцијата на распределба $F_Y(y)$ на случајната променлива $Y = -X$ изразена преку функцијата на Лаплас $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

ЗАДАЧА 4.118. Случајната променлива X има густина на распределба $p_X(x)$ на $(0, +\infty)$, и нула во останатиот дел. Најди ја густината на распределба $p_Y(x)$ на случајната променлива Y, ако:
а) $Y = e^{-X}$,
б) $Y = \ln X$,
в) $Y = X^3$,
г) $Y = \frac{1}{X^2}$,
д) $Y = \sqrt{X}$.

ЗАДАЧА 4.119. Еден стап со должина l на случаен начин се крши на два дела. Најди ја густината на распределба на плоштината на правоаголникот, чии страни имаат должини еднакви на должините на добиените делови од кршењето на стапот.

ЗАДАЧА 4.120. Случајниот вектор (X, Y) е рамномерно распределен во круг со радиус R и центар во координатниот почеток. Најди ги:
а) густината на распределба $p(x, y)$ на случајниот вектор (X, Y),
б) маргиналните густини на распределба $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ на X и Y соодветно,
в) веројатноста $P\{|X| \leq \frac{R}{2},\ 0 \leq Y \leq \frac{R}{3}\}$.
Дали X и Y се независни случајни променливи?

ЗАДАЧА 4.121. Густината на распределба на случајниот вектор (X, Y) е $p(x, y) = ae^{-(x+1)^2 - |y|}$, $a \in \mathbb{R}$. Најди ги:

а) вредноста на коефициентот a,
б) маргиналните густини на распределба $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ на X и Y соодветно,
в) функцијата на распределба $F(x,y)$ на (X,Y).
Дали X и Y се независни случајни променливи?

ЗАДАЧА 4.122. Независните случајни променливи X и Y дадени се со своите густини на распределба $p_X(x) = e^{-x}$, за $x > 0$ и $p_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-y/2}$, за $y > 0$ соодветно, односно $X \sim \mathcal{E}(1)$ и $Y \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$. Најди ја распределбата на случајната променлива $X+Y$.

ЗАДАЧА 4.123. Коефициентите a и c на квадратната равенка $ax^2+2x+c=0$ на случаен начин, независно еден од друг, примаат вредности од интервалот $[0,2]$. Најди ја веројатноста дека корените на равенката се реални.

ЗАДАЧА 4.124. Случајниот вектор (X,Y) има рамномерна распределба на правоаголникот $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1\}$. Најди ги распределбите на случајните променливи $U = \min\{X,Y\}$ и $V = \max\{X,Y\}$.

ЗАДАЧА 4.125. Случајниот вектор (X,Y) има густина на распределба

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}\max\{x,y\} & ,0 < x,y < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} .$$

Најди ги условната густина на распределба на Y при услов $X = x$ и веројатноста $P\{Y < \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2}\}$.

ЗАДАЧА 4.126. Математичкото очекување и средното квадратно отстапување на нормално распределената случајна променлива X се 10 и 2 соодветно. Најди ја веројатноста дека X прима вредности од интервалот $(12,14)$.

ЗАДАЧА 4.127. Најди го математичкото очекување на случајната променлива X дадена со густината на распределба

$$p_X(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

ЗАДАЧА 4.128. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} c(x^2+2x) & ,x \in (0,1) \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} .$$

Најди ги вредноста на c, $c \in \mathbb{R}$ и математичкото очекување EX.

ЗАДАЧА 4.129. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}} & ,x \in (-c,c) \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} ,$$

каде $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ е константа. Најди ги математичкото очекување EX и дисперзијата DX.

ЗАДАЧА 4.130. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} 2\cos 2x & , x \in (0, \frac{\pi}{4}) \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}.$$

Најди ги moX и meX.

ЗАДАЧА 4.131. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & , -1 < x < 1 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}.$$

Најди ги moX и meX.

ЗАДАЧА 4.132. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{n}{x_0} x^{n-1} e^{\frac{x^n}{x_0}} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases},$$

каде $n \in \mathbb{N}$ и $x_0 > 0$. Најди ја moX.

ЗАДАЧА 4.133. Случајната променлива X дадена е со нејзината густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{a}{2} x & , 0 < x \leq 1 \\ \frac{a}{2}(2-x) & , 1 < x \leq 2 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}.$$

а) Определи ја вредноста на a, $a \in \mathbb{R}$ и веројатноста $P\{X > \frac{1}{4} \mid X < \frac{1}{2}\}$.

б) Најди ги математичкото очекување и дисперзијата за случајната променлива $Y = \frac{1}{X}$.

ЗАДАЧА 4.134. Случајниот вектор (X, Y) има густина на распределба

$$p(x, y) = \begin{cases} x + y & , 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}.$$

а) Најди ја функцијата на распределба $F(x, y)$ на (X, Y) и веројатноста $P\{X^2 - X \geq Y^2 - Y\}$.

б) Покажи дека $mo(X - Y) = moX - moY$ и $me(X - Y) = meX - meY$.

ЗАДАЧА 4.135. Нека X и Y се независни случајни променливи со рамномерни $\mathcal{U}(a - \frac{\lambda}{2}, a + \frac{\lambda}{2})$, $\lambda > 0$ распределби.

а) Најди ги распределбата на случајниот вектор (X, Y) и неговата функција на распределба $F(x, y)$.

б) Најди ги математичкото очекување $E(X - Y)$ и дисперзијата $D(X - Y)$.

ЗАДАЧА 4.136. Случајните променливи X и Y се независни и рамномерно распределени на интервалите (a,b), $a<b$ и (c,d), $c<d$, соодветно. Најди ги $E(X+Y)$, $D(X+Y)$, $E(XY)$ и $D(XY)$.

ЗАДАЧА 4.137. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x)=\begin{cases} x+0,5 & ,x\in(0,1) \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}.$$

Најди го математичкото очекување на случајната променлива $Y=X^3$.

ЗАДАЧА 4.138. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\sin x & ,x\in(0,\pi) \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}.$$

Најди ги дисперзиите на X и $Y=X^2$.

ЗАДАЧА 4.139. Дијаметарот на еден круг е рамномерно распределен на интервалот (a,b). Најди ги математичкото очекување и дисперзијата на плосхтината на кругот.

ЗАДАЧА 4.140. Работ на една коцка е рамномерно распределен во интервалот (a,b). Најди ги математичкото очекување и дисперзијата на волуменот на коцката.

ЗАДАЧА 4.141. Случајната променлива X е дадена со својата функција на распределба

$$F_X(x)=\begin{cases} 1-\frac{2}{ax^3} & ,x\geq 1 \\ 0 & ,x<1 \end{cases}.$$

а) Определи ги вредноста на a, $a\in\mathbb{R}$ и густината на распределба $p_X(x)$.

б) Најди го математичкото очекување EX и дисперзијата DX.

в) Најди ги густината на распределба на случајната променлива $Y=\ln X$, нејзиното математичко очекување EY и дисперзијата DY.

ЗАДАЧА 4.142. Густината на распределба на случајната променлива X е дадена со

$$p_X(x)=\begin{cases} ax^2e^{-kx} & ,x\geq 0 \\ 0 & ,x<0 \end{cases},$$

каде $k\in\mathbb{R}$, $k>0$ е константа. Најди ја вредноста на a, $a\in\mathbb{R}$, функцијата на распределба $F_X(x)$ на X, веројатноста $P\{0<X<\frac{1}{k}\}$, математичкото очекување EX и дисперзијата DX.

ЗАДАЧА 4.143. Нека $ABCD$ е квадрат со страна 1. На страните AB и AD случајно и независно се фрлаат точките M и N соодветно, така што растојанието на секоја од нив до точката A рамномерно прима вредности од интервалот $(0,1)$. Најди го математичкото очекување на квадратот на растојанието меѓу M и N.

ЗАДАЧА 4.144. Правоаголник со страни a и b случајно се фрла на рамнина, така што сите вредности на аголот α, што го зафаќа страната a со оската Ox се еднакво веројатни. Најди го математичкото очекување на проекцијата на правоаголникот на оската Ox.

ЗАДАЧА 4.145. Независните случајни променливи X и Y имаат математички очекувања $EX = 1$ и $EY = 3$ и дисперзии $DX = 4$ и $DY = 25$. Ако X и Y се координати на случајна точка од рамнината, најди ги математичкото очекување и дисперзијата на растојанието од координатниот почеток до проекцијата на точката (X, Y) на правата која минува низ координатниот почеток и формира агол од 60° со позитивната насока на x-оската.

ЗАДАЧА 4.146. Случајните променливи X и Y се рамномерно распределени на интервалот $(0,1)$. Покажи дека важи неравенството $E(|X-Y|) \leq 0,5$.

ЗАДАЧА 4.147. Нека X е произволна случајна променлива со $EX = \mu$. Покажи дека за секој реален број c важи

$$E(X-c)^2 = E(X-\mu)^2 + (\mu-c)^2 = DX + (\mu-c)^2.$$

ЗАДАЧА 4.148. Случајната променлива X има закон на распределба

$$P\{X = 0,1\} = 0,2;\ P\{X = 0,4\} = 0,3;\ P\{X = 0,6\} = 0,5.$$

Со неравенството на Чебишев оцени ја веројатноста $P\{|X - EX| < \sqrt{0,4}\}$.

ЗАДАЧА 4.149. Веројатноста за појавување на настанот A во секое независно испитување е $\frac{1}{2}$. Со користење на неравенството на Чебишев, оцени ја веројатноста да при 100 изведени независни испитувања, бројот на појавувања на настанот A е од 40 до 60.

ЗАДАЧА 4.150. Средната температура во една област за време на летото е $20^\circ C$, а средното квадратно отстапување е $2^\circ C$. Оцени ја веројатноста температурата во таа област за време на летото да се отклонува од средната температура по апсолутна вредност помалку од $6^\circ C$.

ЗАДАЧА 4.151. Нека случајните променливи X и Y се такви што $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$ и $Y = \operatorname{sign} X$. Најди го коефициентот на корелација $\rho(X, Y)$.

ЗАДАЧА 4.152. Нека X и Y се независни еднакво распределени случајни променливи со конечна дисперзија. Докажи дека случајните променливи $X+Y$ и $X-Y$ се некорелирани.

ЗАДАЧА 4.153. Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни еднакво распределени случајни променливи со $EX_i = \mu$ и $DX_i = \sigma^2$, $i = 1, 2, ..., n$. Најди ги математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

ЗАДАЧА 4.154. Случајната променлива X е дадена со нејзината густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & , 1 \leq x < 3 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}.$$

Најди го условното математичко очекување $E(X|X \geq 2)$.

ЗАДАЧА 4.155. Случајниот вектор (X, Y) е рамномерно распределен во внатрешноста на триаголникот со темиња $(0,0), (0,1), (1,0)$. Најди ги условната распределба на X при услов $Y = y$ и условното математичко очекување $E(X|Y = y)$, за $0 \leq y \leq 1$.

ЗАДАЧА 4.156. Нека X и Y се независни случајни променливи со Поасонови распределби со параметар λ, $\lambda > 0$. Нека $U = X + Y$. Најди го условното математичко очекување $E(X|U = n)$.

ЗАДАЧА 4.157. Нефер монета се фрла сè додека не се падне пара. Во секое фрлање, со веројатност p се појавува пара, а со веројатност $1-p$ се појавува грб. Кој е очекуваниот број на фрлања на коцката?

ЗАДАЧА 4.158. Еден турист кој се загубил пристигнува на едно место каде треба да одбере еден од три пата. Ако го одбере првиот пат, по 1 час песхачење повторно ќе стигне на истото место. Ако го одбере вториот пат, по 6 часа пешачење повторно ќе стигне на истото место. Ако го одбере третиот пат, по 2 часа пешачење ќе стигне до градот. На патиштата нема знаци, па туристот секој пат со иста веројатност избира еден од патиштата (заборава кој пат го избрал последниот пат). Кое е очекуваното време за кое туристот ќе стигне во градот?

ЗАДАЧА 4.159. Најди ја карактеристичната функција на случајната променлива X, ако:

а) X има Бернулиева 0-1 распределба со параметар $0 < p < 1$,
б) X има геометриска распределба со параметар $0 < p < 1$,
в) $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

ЗАДАЧА 4.160. Случајниот вектор (X, Y) има $\mathcal{U}(K)$ распределба, каде $K = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$. Најди ја карактеристичната функција $\varphi_U(t)$ на случајната променлива $U = \mathrm{arctg}\frac{Y}{X}$.

ЗАДАЧА 4.161. Покажи дека, ако $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни случајни променливи со $\mathcal{N}(0,1)$ распределби, тогаш исто таква распределба има и случајната променлива $Y_n = \frac{1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+...+c_n^2}}(c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n)$, каде $c_k = const.$, $k = 1, 2, ..., n$.

ЗАДАЧА 4.162. Нека X_k, $k = 1, 2, .., n$ се независни случајни променливи со $\mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, 2, ..., n$ распределби соодветно и нека $Y_n = a_1X_1+a_2X_2+...+a_nX_n$, каде $a_k = const.$, $k = 1, 2, ..., n$. Покажи дека $Y_n \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, каде $m = a_1m_1+a_2m_2+ ... + a_nm_n$ и $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + ... + a_n^2\sigma_n^2$.

ЗАДАЧА 4.163. Нека X_k, $k = 1, 2, ..., n$ се независни случајни променливи со $\Gamma(\alpha_k, \beta)$, $k = 1, 2, ..., n$ распределби соодветно и нека $Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Покажи дека $Y_n \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, каде $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

ЗАДАЧА 4.164. Нека X_k, $k = 1, 2, ..., n$ се независни случајни променливи со $\mathcal{N}(0,1)$ распределби и нека $Y_n = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$. Покажи дека $Y_n \sim \chi_n^2$.

5

ГРАНИЧНИ ТЕОРЕМИ

5.1 Гранични теореми во Бернулиевата шема

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност. Разгледуваме Бернулиева шема со n независни испитувања и настан A кој се реализира со веројатност $p = P(A)$ при секое од n-те независни испитувања. Нека X е бројот на реализации на настанот A при n-те испитувања. Тогаш $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

- **Теорема на Поасон.** Нека $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, тогаш за $k = 0, 1, \ldots$ важи

  $$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{a^k}{k!}\, e^{-a},$$

  кога $n \to \infty$, $p \to 0$ и $np \to a$.

  Оваа апроксимација дава добри приближувања кога настанот A е редок настан т.е. кога $n \geq 100$ и $np < 10$. Исто така имаме дека

  $$P\{k_1 \leq X \leq k_2\} \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

- **Локална теорема на Моавр-Лаплас.** Нека $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, тогаш за $k = 0, 1, ...$ важи

$$P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\Phi\big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\big)$$

кога $n \to \infty$, каде $0 < p < 1$, $q = 1-p$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}$, и $\alpha_n \sim \beta_n$ означува дека $\alpha_n/\beta_n \to 1$, кога $n \to \infty$.

Оваа апроксимација дава добро приближување кога веројатноста на настанот A не е ниту многу мала, ниту многу голема, т.е. кога $np \geq 10$ и $n(1-p) \geq 10$.

- **Интегрална теорема на Моавр-Лаплас.** Нека $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, тогаш

$$P\{k_1 \leq X \leq k_2\} \to \Phi_0\big(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\big) - \Phi_0\big(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\big)$$

кога $n \to \infty$, каде $0 < p < 1$, $q = 1-p$, $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\int_0^x e^{-u^2/2}du$.

Повторно, оваа апроксимација е добра за $np \geq 10$ и $n(1-p) \geq 10$. При практична примена пак на оваа апроксимација се користи нејзиното подобрување

$$P\{k_1 \leq X \leq k_2\} \approx \Phi_0(\frac{k_2+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi_0(\frac{k_1-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{npq}}).$$

N.B. *При пресметувањето на горенаведените приближни вредности се користат таблиците дадени во Прилог В.*

ЗАДАЧА 5.1. Веројатноста дека еден телевизор ќе биде произведен со дефект изнесува 0,002. Колкава е веројатноста дека од случајно избрани 500 телевизори ќе има:

а) точно два телевизора со дефект,
б) барем еден телевизор со дефект,
в) повеќе од еден, а помалку од пет телевизора со дефект?

Решение. Изборот на еден телевизор е еден експеримент кој се повторува независно. Па, разгледуваме Бернулиева шема со $n = 500$, каде се разгледува реализација на настанот A - телевизорот е произведен со дефект, чија веројатност е $p = P(A) = 0,002$. Нека X е број на телевизори произведени со дефенкт. Тогаш $X \sim \mathcal{B}(500; 0,002)$. Бидејќи $n = 500 \geq 100$ и $a = np = 1 < 10$, за приближно пресметување на бараните веројатности ја користиме теоремата на Поасон, Таблица 1 и Таблица 2:

а) $P\{X = 2\} \approx \frac{1^2}{2!}e^{-1} = 0,183940$,

б) $P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} \approx 1 - \frac{1^0}{0!}e^{-1} = 1 - 0,367879 = 0,632121$,

в) $P\{1 < X < 5\} = P\{2 \leq X \leq 4\} \approx \sum_{k=2}^{4} \frac{1^k}{k!}e^{-1} = \sum_{k=0}^{4} \frac{1^k}{k!}e^{-1} - \sum_{k=0}^{1} \frac{1^k}{k!}e^{-1} = 0,996340 - 0,735759 = 0,260581$.

ЗАДАЧА 5.2. Колку пати со веројатност 0,0484 може да се очекува појавување на настанот A во серија од 100 независни испитувања, ако веројатноста за успех при секое испитување е 0,5?

Решение. Дадена е Бернулиева шема со $n = 100$ и $p = P(A) = 0,5$. Нека X е број на појавувања на настанот A. Се бара k, $(0 \leq k \leq 100)$ за кој имаме дека $P\{X = k\} = 0,0484$. Бидејќи $a = np = 50 \geq 10$, теоремата на Поасон нема да даде добро приближување на веројатноста $P\{X = k\}$, па затоа ја користиме локалната теорема на Моавр-Лаплас, според која

$$P\{X = k\} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\Phi\Big(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\,\Phi\Big(\frac{k - 100 \cdot 0,5}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\Big) = \frac{1}{5}\,\Phi\Big(\frac{k - 50}{5}\Big).$$

Значи, бараме k такво што

$$\frac{1}{5}\,\Phi\Big(\frac{k - 50}{5}\Big) = 0,0484 \text{ т.е. } \Phi\Big(\frac{k - 50}{5}\Big) = 0,242.$$

Од Таблица 3 имаме дека $\Phi(1) = 0,242$, и бидејќи $\Phi(x)$ е парна функција заклучуваме дека $\frac{k-50}{5} = 1$ или $\frac{k-50}{5} = -1$, односно $k = 55$ или $k = 45$.

ЗАДАЧА 5.3. Една група од 200 стрелци изведува гаѓање во мета, така што секој стрелец гаѓа по еднаш во метата и ја погодува неа со веројатност 0,8. Определи ја веројатноста дека ќе бидат постигнати:

а) барем 120 погодоци,

б) најмногу 160 погодоци,

в) повеќе од 150, а помалку од 190 погодоци.

Решение. Едно гаѓање на еден стрелец е едно независно испитување. Се разгледува Бернулиева шема со $n = 200$ и $p = P(A) = 0,8$, каде A - целта е погодена при едно гаѓање. Нека X е број на погодоци на целта. Тогаш, од интегралната теорема на Моавр-Лаплас имаме,

а) $P\{X \geq 120\} = P\{120 \leq X \leq 200\} \approx \Phi_0(\frac{200+\frac{1}{2}-200\cdot 0,8}{\sqrt{200\cdot 0,8\cdot 0,2}}) - \Phi_0(\frac{120-\frac{1}{2}-200\cdot 0,8}{\sqrt{200\cdot 0,8\cdot 0,2}})$, каде вредностите на функцијата $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}du$ се читаат од Таблица 4. Од непарноста на функцијата $\Phi_0(x)$ и тоа дека $\Phi_0(x)\approx 0,5$ за $x\geq 5$, имаме

$$P\{X\geq 120\}\approx \Phi_0(7,16)-\Phi_0(-7,16)=\Phi_0(7,16)+\Phi_0(7,16)=0,5+0,5=1.$$

б) $P\{X\leq 160\}=P\{0\leq X\leq 160\}\approx \Phi_0(\frac{160+\frac{1}{2}-200\cdot 0,8}{\sqrt{200\cdot 0,8\cdot 0,2}})-\Phi_0(\frac{0-\frac{1}{2}-200\cdot 0,8}{\sqrt{200\cdot 0,8\cdot 0,2}})=\Phi_0(0,09)-\Phi_0(-28,37)=\Phi_0(0,09)+\Phi_0(28,37)=0,03586+0,5=0,53586.$

в) $P\{150<X<190\}=P\{151\leq X\leq 189\}\approx \Phi_0(\frac{189+\frac{1}{2}-200\cdot 0,8}{\sqrt{200\cdot 0,8\cdot 0,2}})-\Phi_0(\frac{151-\frac{1}{2}-200\cdot 0,8}{\sqrt{200\cdot 0,8\cdot 0,2}})=\Phi_0(5,21)-\Phi_0(-1,68)=\Phi_0(5,21)+\Phi_0(1,68)=0,5+0,45352=0,95352.$

ЗАДАЧА 5.4. Колку независни испитувања треба да се направат за веројатноста настанот A да се појави повеќе од 5 пати изнесува 0,8? Веројатноста за успех во секое од независните испитувања е 0,05.

Решение. Разгледуваме Бернулиева шема со број на независни испитувања n и настан A кој се јавува со веројатност $p=P(A)=0,05$. Нека X е број на појавувања на настанот A, треба да се одреди n за да $P\{X>5\}=0,8$. Со користење на интергралната теорема на Моавр-Лаплас добиваме

$$0,8=P\{X>5\}=P\{6\leq X\leq n\}\approx \Phi_0(\frac{n+\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}})-\Phi_0(\frac{6-\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}}).$$

Бидејќи,

$$\frac{n+\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}}=\frac{0,95\sqrt{n}}{\sqrt{0,0475}}+\frac{1}{2\sqrt{0,0475n}}\geq 4,36\sqrt{n}>9,75>5,$$

имаме дека $\Phi_0(\frac{n+\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}})\approx 0,5$. Затоа, $0,8\approx 0,5-\Phi_0(\frac{6-\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}})$, од каде $\Phi_0(\frac{6-\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}})\approx -0,3$, односно $\Phi_0(-\frac{6-\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}})\approx 0,3$, заради непарноста на функцијата $\Phi_0(x)$. Од Таблица 4 наоѓаме дека $\Phi_0(0,84)=0,29955$ и $\Phi_0(0,85)=0,30234$, и затоа ставаме

$$-\frac{6-\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}}=0,845,$$

од каде со решавање на последната равенка по n добиваме дека $n=156$.

ЗАДАЧА 5.5. Веројатноста за реализирање на настанот A во секое од 625-те независни испитувања е 0,8. Најди ја веројатноста дека релативната честота за реализирање на настанот A се отклонува од веројатноста на настанот A по апсолутна вредност не повеќе од 0,04.

Решение. Разгледуваме Бернулиева шема со $n = 625$ и $p = P(A) = 0,8$. Нека X е број на реализации на настанот A, тогаш количникот $\frac{X}{n}$ ја претставува релативната честота за реализирање на настанот A. За $\varepsilon > 0$ имаме,

$$|\frac{X}{n} - p| \le \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |X - np| \le n\varepsilon \;\Leftrightarrow\; -n\varepsilon + np \le X \le n\varepsilon + np,$$

па затоа

$$P\{|\frac{X}{n} - p| \le \varepsilon\} = P\{-n\varepsilon + np \le X \le n\varepsilon + np\} \approx \Phi_0(\frac{n\varepsilon + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}) - \Phi_0(\frac{-n\varepsilon - \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}) = 2\Phi_0(\frac{n\varepsilon + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}).$$

Тогаш, за бараната веројатност имаме

$$P\{|\frac{X}{625} - 0,8| \le 0,04\} \approx 2\Phi_0(\frac{625 \cdot 0,04 + \frac{1}{2}}{\sqrt{625 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}) = 2\Phi_0(2,55) = 2 \cdot 0,49461 = 0,98922.$$

ЗАДАЧА 5.6. Една монета се фрла $2N$ пати (N - голем број). Најди ја веројатноста дека „грб“ се паднал точно N пати.

Решение. Означуваме со A - на монетата се паднал „грб“. Тогаш имаме Бернулиева шема со $n = 2N$ и $p = P(A) = \frac{1}{2}$. Нека X е број на паднати грбови при n фрлања на монетата. Се бара веројатноста $P\{X = N\}$. Од локалната теорема на Моавр-Лаплас имаме

$$P\{X = N\} \approx \frac{1}{\sqrt{2N \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\,\Phi\Big(\frac{N - 2N \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{2N \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\Big) = \sqrt{\frac{2}{N}}\,\Phi(0) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot 0,3989 = \frac{0,5642}{\sqrt{N}}.$$

5.2 Конвергенција на низи од случајни променливи

Нека $X_1, X_2, X_3, \ldots$ и X се случајни променливи дефинирани над ист простор на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- Низата случајни променливи (X_n) **конвергира по веројатност** кон случајната променлива X, ознака $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty$, ако

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\{w : |X_n(w) - X(w)| \ge \varepsilon\} = 0.$$

- Низата случајни променливи (X_n) **конвергира скоро сигурно** (или **конвергира со веројатност 1**) кон случајната променлива X, ознака $X_n \stackrel{\text{с.с.}}{\to} X$, $n \to \infty$, ако
$$P\{w : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\} = 1.$$

- Низата случајни променливи (X_n) **конвергира во средно со ред** r, каде $0 < r < +\infty$ кон случајната променлива X, ознака $X_n \stackrel{r}{\to} X$, $n \to \infty$, ако
$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^r = 0.$$
Кога $r = 2$ таа конвергенција ја нарекуваме **средно квадратна конвергенција** и ја означуваме уште и со $X_n \stackrel{\text{с.к.}}{\to} X$, $n \to \infty$.

- Низата случајни променливи (X_n), со соодветни функции на распределба $F_{X_n}(x)$, **конвергира по распределба** (или **слабо конвергира**) кон случајната променлива X, ознака $X_n \Rightarrow X$, $n \to \infty$ или $X_n \stackrel{dist.}{\to} X$, $n \to \infty$, ако
$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F(x),$$
во сите точки на непрекинатост x на функцијата на распределба $F(x)$ на X.

- **Лема на Борел-Кантели.** Нека $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ е настанот дека се реализирале бесконечно многу настани од низата настани $A_1, A_2, A_3, ...$, т.е. $A^* = \{w : w \in A_k$ за бесконечно многу $k\}$. Тогаш,
а) За произволна низа од настани (A_n) за која $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, важи равенството $P(A^*) = 0$.
б) За низа од независни настани (A_n) за која $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, важи равенството $P(A^*) = 1$.

- **Последица.** Нека (X_n) е низа од независни случајни променливи. Тогаш важи $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{с.с.}} X \iff \forall \varepsilon > 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} < +\infty$.

- **Теорема.** Нека (X_n) е произволна низа од случајни променливи. Тогаш важи
а) $X_n \stackrel{\text{с.с.}}{\to} X$, $n \to \infty \Longrightarrow X_n \stackrel{\text{P}}{\to} X$, $n \to \infty$.
б) $X_n \stackrel{\text{с.к.}}{\to} X$, $n \to \infty \Longrightarrow X_n \stackrel{\text{P}}{\to} X$, $n \to \infty$.
в) $X_n \stackrel{P}{\to} X$, $n \to \infty \Longrightarrow X_n \stackrel{dist.}{\to} X$, $n \to \infty$.

ЗАДАЧА 5.7. Нека (X_n) е низа од независни случајни променливи со закони на распределба

$$P\{X_n = -n\} = \frac{3}{(n+1)^2},\ P\{X_n = 0\} = 1 - \frac{5}{(n+1)^2},\ P\{X_n = n\} = \frac{2}{(n+1)^2},$$

за $n = 2, 3, ...$ Испитај ги сите четири вида на конвергенција на низата (X_n).

Решение. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Тогаш,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} P\{|X_n| \geq \varepsilon\} &= \sum_{n=[\varepsilon]}^{+\infty} (P\{X_n = -n\} + P\{X_n = n\}) = \\ &= \sum_{n=[\varepsilon]}^{+\infty} \frac{5}{(n+1)^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{(n+1)^2} < +\infty,\end{aligned}$$

од каде според последицата од лемата на Борел-Кантели заклучуваме дека $X_n \overset{\text{с.с.}}{\to} 0,\ n \to \infty$. Имено, од лемата на Борел-Кантели имаме дека

$$\begin{aligned}& \forall\varepsilon > 0,\ P\{w : |X_n(w)| \geq \varepsilon \text{ за бесконечно многу } k\} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \forall\varepsilon > 0,\ P\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{w : |X_n(w)| \geq \varepsilon\}\} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & P\{\bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{w : |X_n(w)| \geq \varepsilon\}\} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & P\{\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{w : |X_n(w)| < \varepsilon\}\} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & P\{w : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = 0\} = 1,\end{aligned}$$

од каде следи скоро сигурната конвергенција на низата (X_n) кон 0. Од конвергенцијата скоро сигурно, следи конвергенцијата по веројатност и слабата конвергенција, односно $X_n \overset{\text{P}}{\to} 0,\ n \to \infty$ и $X_n \overset{dist.}{\to} 0,\ n \to \infty$.
За да ја испитаме средно квадратната конвергенција, ќе го побараме математичкото очекување

$$EX_n^2 = (-n)^2 \cdot \frac{3}{(n+1)^2} + 0^2 \cdot (1 - \frac{5}{(n+1)^2}) + n^2 \cdot \frac{2}{(n+1)^2} = \frac{5n^2}{(n+1)^2} \to 5 \neq 0,$$

кога $n \to \infty$, од каде заклучуваме дека низата (X_n) не конвергира средно квадратно кон 0. Да забележиме дека за $0 < r < 2$, $E|X_n|^r \to 0$, кога $n \to \infty$, што значи дека низата (X_n) конвергира во средно со ред r, за $0 < r < 2$.

ЗАДАЧА 5.8. Случајните променливи X_n, $n = 1, 2, ...$ имаат $\mathcal{U}(0, \frac{1}{n})$ распределби, а случајните променливи Y_n, $n = 1, 2, ...$ се независни од X_n, $n = 1, 2, ...$ и се зададени со законите на распределба

$$P\{Y_n = 0\} = \frac{1}{2},\ P\{Y_n = \frac{1}{n}\} = \frac{1}{2},\ n = 1, 2, ...$$

Испитај ги сите четири вида на конвергенција на низата (U_n), $U_n = X_n + Y_n$, $n = 1, 2, ...$

Решение. За бројните карактеристики на случајните променливи X_n имаме

$$EX_n = \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2n} \text{ и } DX_n = \frac{1}{12}(\frac{1}{n} - 0)^2 = \frac{1}{12n^2}.$$

Бројните карактеристики на случајните променливи Y_n се

$$EY_n = 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n},\ EY_n^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{n})^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n^2},$$

од каде

$$DY_n = EY_n^2 - (EY_n)^2 = \frac{1}{2n^2} - (\frac{1}{2n})^2 = \frac{1}{4n^2}.$$

Од независноста на X_n и Y_n за математичкото очекување и дисперзија на $U_n = X_n + Y_n$ имаме

$$EU_n = E(X_n + Y_n) = EX_n + EY_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

$$DU_n = D(X_n + Y_n) = DX_n + DY_n = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{3n^2}.$$

Испитуваме конвергенција на низата (U_n) кон 0. За средно квадратната конвергенција на (U_n) кон 0 имаме

$$EU_n^2 = DU_n + (EU_n)^2 = \frac{1}{3n^2} + (\frac{1}{n})^2 = \frac{4}{3n^2} \to 0,$$

кога $n \to \infty$, од каде заклучуваме дека $U_n \overset{\text{с.к.}}{\to} 0$, $n \to \infty$. Од тука следува дека $U_n \overset{\text{P}}{\to} 0$, $n \to \infty$ и $U_n \overset{dist.}{\to} 0$, $n \to \infty$.

Следно, ја испитуваме скоро сигурната конвергенција на низата (U_n) кон 0. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Со помош на неравенството на Марков ја оценуваме веројатноста

$$P\{|U_n| \geq \varepsilon\} = P\{U_n^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{EU_n^2}{\varepsilon^2} = \frac{4}{3n^2\varepsilon^2},$$

од каде

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|U_n| \geq \varepsilon\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3n^2\varepsilon^2} < +\infty,$$

па од последицата од лемата на Борел-Кантели следи дека $U_n \overset{\text{с.с.}}{\to} 0$, $n \to \infty$.

ЗАДАЧА 5.9. Нека е дадена низата $X_1, X_2, ...$ од случајни променливи со исти $\mathcal{U}(0,1)$ распредеби. Покажи дека низата $Y_n = (1 + \frac{X_n}{n})^n$, $n = 1, 2, ...$ слабо конвергира кон e^{X_1}.

Решение. *Прв начин.* Густината на распределба на случајните променливи $X_n \sim \mathcal{U}(0,1)$ е

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in (0,1) \\ 0 & , x \notin (0,1) \end{cases}, \ n = 1, 2, ...$$

Ќе покажеме дека низата од функции на распределба на случајните променливи Y_n конвергира кон функцијата на распределба на случајната променлива e^{X_1}. Имаме дека функцијата на распределба на случајната променлива e^{X_1} е

$$\begin{aligned} F_{e^{X_1}}(x) &= P\{e^{X_1} \leq x\} = P\{X_1 \leq \ln x\} = \int_{-\infty}^{\ln x} p_{X_1}(u)\, du = \\ &= \begin{cases} 0 & , \ln x < 0 \\ \int_0^{\ln x} du & , 0 \leq \ln x < 1 \\ 1 & , \ln x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \ln x & , 1 \leq x < e \\ 1 & , x \geq e \end{cases}. \end{aligned}$$

Функцијата на распределба на Y_n е

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= P\{Y_n \leq x\} = P\{(1 + \frac{X_n}{n})^n \leq x\} = P\{X_n \leq n(x^{\frac{1}{n}} - 1)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{n(x^{\frac{1}{n}}-1)} p_{X_n}(u)\, du = \begin{cases} 0 & , n(x^{\frac{1}{n}} - 1) < 0 \\ \int_0^{n(x^{\frac{1}{n}}-1)} du & , 0 \leq n(x^{\frac{1}{n}} - 1) < 1 \\ 1 & , n(x^{\frac{1}{n}} - 1) \geq 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ n(x^{\frac{1}{n}} - 1) & , 1 \leq x < (1 + \frac{1}{n})^n \\ 1 & , x \geq (1 + \frac{1}{n})^n \end{cases} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \ln x & , 1 \leq x < e \\ 1 & , x \geq e \end{cases} = F_{e^{X_1}}(x), \end{aligned}$$

од каде заклучуваме дека $Y_n \overset{dist.}{\to} e^{X_1}$, $n \to \infty$.
Втор начин. Ќе покажеме дека низата карактеристични функции на Y_n конвергира кон карактеристичната функција на e^{X_1}, од каде ќе следи соодветната слаба конвергенција. Имаме,

$$\varphi_{Y_n}(t) = Ee^{itY_n} = Ee^{it(1+\frac{X_n}{n})^n} = \int_0^1 e^{it(1+\frac{x}{n})^n}\, dx \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_0^1 e^{ite^x}\, dx = Ee^{ite^{X_1}} = \varphi_{e^{X_1}}(t),$$

од каде следи дека $Y_n \overset{dist.}{\to} e^{X_1}$, $n \to \infty$.

ЗАДАЧА 5.10. Нека $X_n \sim \chi^2_n$, $n = 1, 2, ...$ се независни случајни променливи и $Y_n = \frac{X_n}{n}$, $n = 1, 2, ...$ Покажи дека $Y_n \overset{P}{\to} 1$.

Решение. Ако $X_n \sim \chi_n^2$, значи дека X_n имаат гама распределба со параметри $\alpha = \frac{n}{2}$ и $\lambda = \frac{1}{2}$, па нивните математички очекување и дисперзии се $EX_n = n$ и $DX_n = 2n$. Тогаш, од неравенството на Чебишев, за произволен $\varepsilon > 0$, имаме

$$\begin{aligned} P\{|Y_n - 1| \geq \varepsilon\} &= P\{|\frac{X_n}{n} - 1| \geq \varepsilon\} = P\{|X_n - n| \geq n\varepsilon\} = \\ &= P\{|X_n - EX_n| \geq n\varepsilon\} \leq \frac{DX_n}{(n\varepsilon)^2} = \frac{2n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

од каде заклучуваме дека $Y_n \xrightarrow{P} 1$.

ЗАДАЧА 5.11. Нека $X_n \sim \mathcal{U}(0, n)$, $n = 1, 2, ...$ се независни случајни променливи и $Y_n = \min\{X_n, 1\}$, $n = 1, 2, ...$ Покажи дека $Y_n \xrightarrow{P} 1$, но не е точно дека $Y_n \xrightarrow{\text{с.с.}} 1$.

Решение. Густината на распределба на случајните променливи $X_n \sim \mathcal{U}(0, n)$ е

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , x \in (0, n) \\ 0 & , x \notin (0, n) \end{cases}, \ n = 1, 2, ...$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Тогаш,

$$\begin{aligned} P\{|Y_n - 1| \geq \varepsilon\} &= P\{|\min\{X_n, 1\} - 1| \geq \varepsilon\} = P\{1 - \min\{X_n, 1\} \geq \varepsilon\} = \\ &= P\{\min\{X_n, 1\} \leq 1 - \varepsilon\} = 1 - P\{\min\{X_n, 1\} > 1 - \varepsilon\} = \\ &= 1 - P\{X_n > 1 - \varepsilon,\ 1 > 1 - \varepsilon\} = 1 - P\{X_n > 1 - \varepsilon\} = \\ &= P\{X_n \leq 1 - \varepsilon\} = \begin{cases} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{n}\, dx & , 0 < 1 - \varepsilon < n \\ 0 & , 1 - \varepsilon \leq 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1-\varepsilon}{n} & , 0 < \varepsilon < 1 \\ 0 & , \varepsilon \geq 1 \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

од каде заклучуваме дека $Y_n \xrightarrow{P} 1$.
Бидејќи за $0 < \varepsilon < 1$ имаме дека

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|Y_n - 1| \geq \varepsilon\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \varepsilon}{n} = +\infty,$$

па од независноста на X_n, $n = 1, 2, ...$, а со тоа и на Y_n, $n = 1, 2, ...$, од последицата на лемата на Борел-Кантели, заклучуваме дека $Y_n \overset{\text{с.с.}}{\nrightarrow} 1$.

ЗАДАЧА 5.12. Докажи дека ако за низата $X_1, X_2, ...$ важи $a \leq X_n \leq b$, за $n = 1, 2, ...$, каде $\infty < a < b < +\infty$ и ако $X_n \xrightarrow{P} X$, тогаш $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$.

Решение. Нека $a \le X_n \le b$, $n = 1, 2, \ldots$, каде $\infty < a < b < +\infty$ и нека $X_n \xrightarrow{P} X$, тогаш и $a \le X \le b$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Тогаш,

$$\begin{aligned}(X_n - X)^2 &= (X_n - X)^2 I\{|X_n - X| < \varepsilon\} + (X_n - X)^2 I\{|X_n - X| \ge \varepsilon\} \le \\ &\le \varepsilon^2 + (b-a)^2 I\{|X_n - X| \ge \varepsilon\},\end{aligned}$$

каде $I\{.\}$ е индикатор на настан. Ако побараме математичко очекување и примениме дека $X_n \xrightarrow{P} X$ т.е. $P\{|X_n - X| \ge \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ќе добиеме

$$E(X_n - X)^2 \le \varepsilon^2 + (b-a)^2 P\{|X_n - X| \ge \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon^2.$$

Од произволноста на $\varepsilon > 0$, за $\varepsilon \to 0$, добиваме дека $E(X_n - X)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, односно дека $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$.

5.3 Закон на големите броеви

Нека (X_n) е низа од случајни променливи дефинирани на ист простор на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- **Закон на големите броеви на Чебишев.** Нека (X_n) е низа од независни случајни променливи и нека $C > 0$ е константа така што за секој природен број n важи $DX_n \le C$. Тогаш, за низата (X_n) важи **слабиот закон на големите броеви** т.е.

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)\right) \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty.$$

- **Закон на големите броеви на Хинчин.** Нека (X_n) е низа од независни и еднакво распределени случајни променливи со конечни математички очекувања еднакви на m. Тогаш, за низата (X_n) важи **слабиот закон на големите броеви** т.е.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} m, \quad n \to \infty.$$

- **Закон на големите броеви на Колмогоров.** Нека (X_n) е низа од независни случајни променливи така што $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} < +\infty$. Тогаш, за низата (X_n) важи **силниот закон на големите броеви** т.е.

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)\right) \overset{\text{с.с.}}{\to} 0,\ n \to \infty.$$

ЗАДАЧА 5.13. Дадена е низата од независни случајни променливи $X_1, X_2, ...$ со нивните закони на распределба

$$P\{X_n = -\sqrt{n}\} = \frac{1}{n},\ P\{X_n = 0\} = 1 - \frac{2}{n},\ P\{X_n = \sqrt{n}\} = \frac{1}{n},$$

за $n = 1, 2, ...$ Испитај дали важи законот на големи броеви за низата (X_n).

Решение. Ги наоѓаме бројните карактеристики на случајните променливи X_n, имено

$$EX_n = (-\sqrt{n}) \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot (1 - \frac{2}{n}) + \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} = 0,$$

$$EX_n^2 = (-\sqrt{n})^2 \cdot \frac{1}{n} + 0^2 \cdot (1 - \frac{2}{n}) + (\sqrt{n})^2 \cdot \frac{1}{n} = 2,$$

од каде

$$DX_n = EX_n^2 - (EX_n)^2 = 2 - 0^2 = 2.$$

Од независноста на низата од случајни променливи (X_n) и ограниченоста со константа на нивните дисперзии, добиваме дека важи слабиот закон на големите броеви на Чебишев. Имено, нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Тогаш, користејќи ги неравенството на Чебишев и независноста на случајните променливи X_n, $n = 1, 2, ...$ имаме

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\varepsilon^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} DX_k}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot n \cdot 2}{\varepsilon^2} = \frac{2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

односно $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$, од каде важи слабиот закон на големите броеви. За да ја испитаме скоро сигурната конвергенција, забележуваме дека $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < +\infty$, и од независносна на низата од случајни променливи (X_n), заклучуваме дека важи силниот закон на големите броеви на Колмогоров.

ЗАДАЧА 5.14. Испитај дали за низата од независни случајни променливи (X_n) со распределби

$$P\{X_n = -\sqrt{\ln n}\} = \frac{1}{2},\ P\{X_n = \sqrt{\ln n}\} = \frac{1}{2},$$

за $n = 1, 2, ...$, важи законот на големите броеви.

Решение. Бројните карактеристики на случајните променливи X_n се

$$EX_n = (-\sqrt{\ln n}) \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{\ln n} \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$EX_n^2 = (-\sqrt{\ln n})^2 \cdot \frac{1}{2} + (\sqrt{\ln n})^2 \cdot \frac{1}{2} = \ln n,$$

од каде

$$DX_n = EX_n^2 - (EX_n)^2 = \ln n - 0^2 = \ln n.$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Тогаш, користејќи ги неравенството на Чебишев и независноста на случајните променливи X_n, $n = 1, 2, ...$ имаме

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)\right| \geq \varepsilon\right\} &\leq \frac{D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\varepsilon^2} = \\ = \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} DX_k}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln k}{n^2\varepsilon^2} &\leq \frac{n \ln n}{n^2 \varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

односно $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$, од каде важи слабиот закон на големите броеви. Исто така, од $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} < +\infty$ и од независноста на низата од случајни променливи (X_n), следи дека важи силниот закон на големите броеви на Колмогоров.

ЗАДАЧА 5.15. Испитај дали за низата од независни случајни променливи (X_n) со густини на распределба

$$p_{X_n}(x) = n e^{-nx},\ x > 0,$$

за $n = 1, 2, ...$, важи законот на големите броеви.

Решение. Бројните карактеристики на случајните променливи X_n се

$$\begin{aligned} EX_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_{X_n}(x)\, dx = n \int_0^{+\infty} x\, e^{-nx}\, dx = \\ &= -x\, e^{-nx}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-nx}\, dx = 0 - \frac{1}{n}\, e^{-nx}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EX_n^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, p_{X_n}(x)\, dx = n \int_0^{+\infty} x^2\, e^{-nx}\, dx = \\
&= \left(-x^2\, e^{-nx} - \frac{1}{n}\, x\, e^{-nx} \right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \left(x\, e^{-nx} + \frac{1}{n}\, e^{-nx} \right) dx = \\
&= 0 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2},
\end{aligned}$$

од каде

$$DX_n = EX_n^2 - (EX_n)^2 = \frac{2}{n^2} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}.$$

Бидејќи (X_n) е низа од независни случајни променливи и $DX_n = \frac{1}{n^2} \leq 1$, за секој $n = 1, 2, ...$, следи дека за низата (X_n) важи слабиот закон на големите броеви на Чебишев. Понатаму, од $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty$, следи дека за низата (X_n) важи силниот закон на големите броеви на Колмогоров (секако, ако важи силниот закон на големите броеви, тогаш важи и слабиот закон на големите броеви).

ЗАДАЧА 5.16. Испитај дали за низата од независни случајни променливи (X_n) со распределби

$$P\{X_n = -1\} = P\{X_n = 1\} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right),\ P\{X_n = -2^{n/2}\} = P\{X_n = 2^{n/2}\} = \frac{1}{2^{n+1}},$$

за $n = 1, 2, ...$, важи законот на големите броеви.

Решение. Бројните карактеристики на случајните променливи X_n се

$$EX_n = (-1) \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + (-2^{n/2}) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + 2^{n/2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 0,$$

$$EX_n^2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + 1^2 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + (-2^{n/2})^2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + (2^{n/2})^2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^n},$$

од каде

$$DX_n = EX_n^2 - (EX_n)^2 = 2 - \frac{1}{2^n} - 0^2 = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Од тоа што

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \frac{1}{2^n}}{n^2} < +\infty,$$

заклучуваме дека за низата (X_n) важи силниот закон на големите броеви на Колмогоров. Следи дека важи и слабиот закон на големите броеви.

5.4 Централна гранична теорема

Нека (X_n) е низа од случајни променливи дефинирани на ист простор на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- **Централна гранична теорема.** Нека (X_n) е низа од независни и еднакво распределени случајни променливи со математичко очекување $E(X_1) = m$ и конечна дисперзија $D(X_1) = \sigma^2 > 0$. Тогаш, за секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du, \quad n \to \infty.$$

ЗАДАЧА 5.17. Случајната променлива X е аритметичка средина на 3200 независни и еднакво распределени случајни променливи со математичко очекување 3 и дисперзија 2. Најди ја веројатноста $P\{X \in (2,95; 3,075)\}$.

Решение. Нека $X = \frac{1}{3200}\sum_{k=1}^{3200} X_k$, каде X_k, $k = 1, 2, ..., 3200$ се независни и еднакво распределени случајни променливи со $EX_k = 3$ и $DX_k = 2$, $k = 1, 2, ..., 3200$. Тогаш, со примена на централната гранична теорема за низата (X_n), за бараната веројатност имаме

$$\begin{aligned}
&P\{X \in (2,95; 3,075)\} = \\
&= P\{2,95 < \frac{1}{3200}\sum_{k=1}^{3200} X_k < 3,075\} = \\
&= P\{9440 < \sum_{k=1}^{3200} X_k < 9840\} = \\
&= P\{\frac{9440 - 3200 \cdot 3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3200}} < \frac{\sum_{k=1}^{3200} X_k - 3200 \cdot 3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3200}} < \frac{9840 - 3200 \cdot 3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3200}}\} = \\
&= P\{-2 < \frac{\sum_{k=1}^{3200} X_k - 3200 \cdot 3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3200}} < 3\} \approx \\
&\approx \Phi_0(3) - \Phi_0(-2) = 0,49865 + 0,47725 = 0,97590,
\end{aligned}$$

каде вредностите на функцијата $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du$ ги читаме од Таблица 4.

ЗАДАЧА 5.18. Векот на траење на една светилка (во часови) е случајна променлива со густина на распределба $p(x) = 0,01e^{-0,01x}$, $x \geq 0$. Колку светилки треба да се подготват за да со веројатност 0,95 се обезбеди осветлување во временски интервал од 5000 часови (се претпоставува дека замената на светилките е моментална)?

Решение. Нека X_k е времетраењето на k-тата светилка (во часови), $k = 1, ..., n$. Тогаш, $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ е времетраењето на n светилки (во часови), каде $X_k \sim \mathcal{E}(0,01)$, $k = 1, ..., n$ се независни случајни променливи и $EX_k = \frac{1}{0{,}01} = 100$, $DX_k = \frac{1}{0{,}01^2} = 10000$, $k = 1, ..., n$. Од условот на задачата имаме

$$P\{Y_n > 5000\} = 0,95.$$

Од друга страна,

$$\begin{aligned} P\{Y_n > 5000\} &= P\{\sum_{k=1}^{n} X_k > 5000\} = \\ &= P\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - 100n}{\sqrt{10000}\sqrt{n}} > \frac{5000 - 100n}{\sqrt{1000}\sqrt{n}}\} = \\ &= P\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - 100n}{\sqrt{10000}\sqrt{n}} > \frac{50 - n}{\sqrt{n}}\} = \\ &= 1 - P\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - 100n}{\sqrt{10000}\sqrt{n}} \leq \frac{50 - n}{\sqrt{n}}\} \approx \\ &\approx 1 - \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{50 - n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{n - 50}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

односно $\Phi_0\left(\frac{n-50}{\sqrt{n}}\right) \approx 0,95 - 0,5 = 0,45$, при што од Таблица 4 добиваме дека $\frac{n-50}{\sqrt{n}} = 1,65$, од каде $n \approx 63$. Значи, треба да се подготват приближно 63 светилки за со веројатност 0,95 да се обезбеди непрекинато осветлување од 5000 часови.

ЗАДАЧА 5.19. Во еден процес на собирање броевите се заокружуваат на најблискиот цел број. Претпоставуваме дека грешките на заокружување се независни и рамномерно распределени на интервалот $(-0,5; 0,5)$.
а) Ако се собираат 1500 броеви, колкава е веројатноста дека апсолутната вредност на вкупната грешка ќе надмине 15?
б) Колку најмногу броеви може да се соберат, за со веројатност 0,9, апсолутната вредност на вкупната грешка да биде помала од 10?

Решение. Нека X_k е грешката на заокружување на k-тиот број, $k = 1, ..., n$. Тогаш, $X_k \sim \mathcal{U}(-0,5; 0,5)$, $k = 1, ..., n$, се независни случајни променливи со

$EX_k = 0$ и $DX_k = \frac{1}{12}$, $k = 1, ..., n$. Вкупната грешка на заокружување при собирање на n броеви ќе биде $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
а) За $n = 1500$ со примена на централната гранична теорема имаме

$$\begin{aligned}
&P\{|Y_{1500}| > 15\} = 1 - P\{-15 \le Y_{1500} \le 15\} = \\
&= 1 - P\{\frac{-15 - 1500 \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{1500}} \le \frac{\sum_{k=1}^{1500} X_k - 1500 \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{1500}} \le \frac{15 - 1500 \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{1500}}\} = \\
&= 1 - P\{-1,34 \le \frac{\sum_{k=1}^{1500} X_k - 1500 \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{1500}} \le 1,34\} \approx \\
&\approx 1 - \Phi_0(1,34) + \Phi_0(-1,34) = 1 - 2\Phi_0(1,34) = \\
&= 1 - 2 \cdot 0,40988 = 0,18024.
\end{aligned}$$

б) Имаме дека

$$P\{|Y_n| < 10\} = 0,9.$$

Од друга страна,

$$\begin{aligned}
&P\{|Y_n| < 10\} = P\{-10 < \sum_{k=1}^{n} X_k < 10\} = \\
&= P\{\frac{-10 - n \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{n}} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{n}} \le \frac{10 - n \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{n}}\} \approx 2\Phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}$$

значи $\Phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) \approx 0,45$, односно $\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}} = 1,645$, од каде $n \approx 443$. Треба да се соберат најмногу 443 броеви за со веројатност 0,9, апсолутната вредност на вкупната грешка да е помала од 10.

ЗАДАЧА 5.20. Со примена на централната гранична теорема докажи дека

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Нека $X_1, ..., X_n, ...$ се независни и еднакво распределени случајни променливи со $\mathcal{P}(1)$ распределби, од каде $EX_n = DX_n = 1$, $n = 1, 2, ...$ Нека $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, тогаш $Y_n \sim \mathcal{P}(n)$, односно законот на распределба на Y_n е

$$P\{Y_n = k\} = \frac{n^k}{k!}\, e^{-n},\ k = 0, 1, 2, ...$$

Имаме,

$$\begin{aligned}
e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n}P\{Y_n=k\}=P\{0\le Y_n\le n\}=\\
&=P\{\frac{0-n}{\sqrt{n}}\le\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n}{\sqrt{n}}\le\frac{n-n}{\sqrt{n}}\}=\\
&=P\{-\sqrt{n}\le\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n}{\sqrt{n}}\le 0\}\approx\\
&\approx\Phi_0(0)-\Phi_0(-\sqrt{n})=\Phi_0(\sqrt{n})\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

5.5 Разни задачи

ЗАДАЧА 5.21. Техничката контрола проверува една серија на апарати. Се знае дека со веројатност 0,01 апаратот има дефекет А, и независно од тоа, со веројатност 0,02, апаратот има дефокт Б. Еден апарат се смета за дефектен, ако има барем еден од дефектите А или Б. Која е веројатноста дека бројот на дефектни апарати во серија од 100 апарати е меѓу 2 и 6?

Решение. Да ги означиме со A и B настаните дека апаратот има дефект А, односно Б. Нека D е настанот дека апаратот е со дефект, односно $D=A\cup B$. Од $P(A)=0,01$, $P(B)=0,02$ и независноста на A и B имаме дека

$$\begin{aligned}
P(D) &= P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\\
&= 0,01+0,02-0,01\cdot 0,02=0,01+0,02-0,0002=0,0298.
\end{aligned}$$

Нека X е број на дефектни апарати во серија од 100 апарати, тогаш $X\sim\mathcal{B}(100;0,0298)$. Бидејќи $np=100\cdot 0,0298=2,98\approx 3<10$, ја користиме теоремата на Поасон и Таблица 2, за да ја најдеме бараната веројатност.

$$P\{2\le X\le 6\}\approx\sum_{k=0}^{6}\frac{3^k}{k!}e^{-3}-\sum_{k=0}^{1}\frac{3^k}{k!}e^{-3}=0,966491-0,199148=0,767343.$$

ЗАДАЧА 5.22. Една пратка од 100 сандаци со телевизори се смета за исправна, ако во целата пратка има најмногу 120 неисправни телевизори. Бројот на неисправни телевизори во еден сандак е случајна променлива со $\mathcal{P}(1)$ распределба. Одреди ја веројатноста пратката да биде исправна.

Решение. Нека X_k е бројот на неисправни телевизори во k-тиот сандак, тогаш $X_k \sim \mathcal{P}(1)$, $k = 1, 2, ..., 100$ и сите X_k, $k = 1, 2, ..., 100$ се независни. Од каде за вкупниот број на неисправни телевизори во пратката од 100 сандаци имаме дека е $Y = \sum_{k=1}^{100} X_k \sim \mathcal{P}(100)$. Да забележиме дека Y има приближно $\mathcal{N}(100, 100)$ распределба, па затоа за бараната веројатност пратката да е исправна имаме

$$P\{Y \leq 120\} \quad = \quad P\{\frac{Y-100}{\sqrt{100}} \leq \frac{120-100}{\sqrt{100}}\} = P\{Y^* \leq 2\},$$

каде $Y^* = \frac{Y-100}{\sqrt{100}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Сега, од Таблица 4, имаме дека

$$P\{Y \leq 120\} = P\{Y^* \leq 2\} \approx 0,5 + 0,47725 = 0,97725.$$

ЗАДАЧА 5.23. Дадена е низата од независни случајни променливи (X_n) со распределби

$$P\{X_n = \frac{n-1}{2n}\} = P\{X_n = \frac{n+1}{2n}\} = \frac{1}{2},\ n = 1, 2, ...$$

Испитај ги сите четири вида на конвергенција на низата (X_n).

Решение. Бројните карактеристики на случајните променливи X_n се

$$EX_n = \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2n}{4n} = \frac{1}{2},$$

$$EX_n^2 = (\frac{n-1}{2n})^2 \cdot \frac{1}{2} + (\frac{n+1}{2n})^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2n^2+2}{8n^2} = \frac{n^2+1}{4n^2},$$

од каде

$$DX_n = EX_n^2 - (EX_n)^2 = \frac{n^2+1}{4n^2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4n^2}.$$

Испитуваме конвергенција на низата (X_n) кон $\frac{1}{2}$. Од тоа што

$$\begin{aligned} E(X_n - \frac{1}{2})^2 &= E(X_n^2 - X_n + \frac{1}{4}) = EX_n^2 - EX_n + \frac{1}{4} = \\ &= \frac{n^2+1}{4n^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

од каде заклучуваме дека $X_n \stackrel{\text{с.к.}}{\to} \frac{1}{2}$, $n \to \infty$. Од тука следува дека $X_n \stackrel{P}{\to} \frac{1}{2}$, $n \to \infty$ и $X_n \stackrel{dist.}{\to} \frac{1}{2}$, $n \to \infty$.

Следно, ја испитуваме скоро сигурната конвергенција на низата (X_n) кон $\frac{1}{2}$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Со помош на неравенството на Чебишев ја оценуваме веројатноста

$$P\{|X_n - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon\} = P\{|X_n - EX_n| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX_n}{\varepsilon^2} = \frac{1}{4n^2\varepsilon^2},$$

од каде

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2\varepsilon^2} < +\infty,$$

па од последицата од лемата на Борел-Кантели следи дека $X_n \stackrel{\text{с.с.}}{\to} \frac{1}{2}$, $n \to \infty$.

ЗАДАЧА 5.24. Дадена е низата од независни случајни променливи (X_n) со распределби

$$X_n \sim \mathcal{U}((0, \frac{1}{n^2}) \cup (1, 1 + \frac{1}{n})),\ n = 1, 2, ...$$

Испитај ги сите четири вида на конвергенција на низата (X_n).

Решение. Случајната променлива X има рамномерна распределба на унија од дисјунктни интервали т.е. $X \sim \mathcal{U}((a,b) \cup (c,d))$, каде $(a,b) \cap (c,d) = \emptyset$, ако нејзината густина на распределба е

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)+(d-c)} & , x \in (a,b) \cup (c,d) \\ 0 & , x \notin (a,b) \cup (c,d) \end{cases}.$$

Значи, густината на распределба на X_n е

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}} & , x \in (0, \frac{1}{n^2}) \cup (1, 1+\frac{1}{n}) \\ 0 & , x \notin (0, \frac{1}{n^2}) \cup (1, 1+\frac{1}{n}) \end{cases} = \begin{cases} \frac{n^2}{n+1} & , x \in (0, \frac{1}{n^2}) \cup (1, 1+\frac{1}{n}) \\ 0 & , x \notin (0, \frac{1}{n^2}) \cup (1, 1+\frac{1}{n}) \end{cases}.$$

Тогаш, за математичкото очекување на X_n имаме

$$\begin{aligned} EX_n &= \int_0^{\frac{1}{n^2}} \frac{n^2}{n+1}\, x\, dx + \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{n^2}{n+1}\, x\, dx = \frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{1}{2n^4} + \frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n^2} = \\ &= \frac{1+n^2(2n+1)}{2n^2(n+1)} = \frac{2n^3+n^2+1}{2n^3+2n^2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \end{aligned}$$

Испитуваме конвергенција на низата (X_n) кон 1. Нека $\frac{1}{n} < \varepsilon < 1 - \frac{1}{n^2}$, тогаш $1 - \varepsilon > \frac{1}{n^2}$ и $1 + \varepsilon > 1 + \frac{1}{n}$, од каде

$$\begin{aligned} P\{|X_n - 1| \geq \varepsilon\} &= P\{X_n \leq 1 - \varepsilon\} + P\{X_n \geq 1 + \varepsilon\} = \\ &= \int_0^{\frac{1}{n^2}} \frac{n^2}{n+1}\, dx + 0 = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ако пуштиме $n \to \infty$, ќе добиеме дека $P\{|X_n - 1| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, за произволен $0 < \varepsilon < 1$. За $\varepsilon \geq 1$, тривијално се покажува дека $P\{|X_n - 1| \geq \varepsilon\} = 0$. Значи $X_n \overset{P}{\to} 1$, $n \to \infty$, од каде следи дека $X_n \overset{dist.}{\to} 1$, $n \to \infty$.
Од тоа што $0 \leq X_n \leq 2$, $n = 1, 2, ...$ и Задача 5.12, од $X_n \overset{P}{\to} 1$, $n \to \infty$, заклучуваме дека $X_n \overset{\text{с.к.}}{\to} 1$, $n \to \infty$.
За скоро сигурната конвергенција имаме дека за $\frac{1}{n} < \varepsilon < 1 - \frac{1}{n^2}$, се добива

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n - 1| \geq \varepsilon\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$$

и од независноста на X_n, $n = 1, 2, ...$, од последицата на лемата на Борел-Кантели, заклучуваме дека $X_n \overset{\text{с.с.}}{\nrightarrow} 1$, $n \to \infty$.

ЗАДАЧА 5.25. Низата случајни променливи (X_n) е дадена со густините на распределба

$$p_{X_n}(x) = \exp\{-(x - \frac{n+1}{n})\},\ x > \frac{n+1}{n},\ n = 1, 2, ...$$

Најди ја случајната променлива X, така што низата (X_n) конвергира по распределба кон X.

Решение. Да видиме кон што конвергира низата од карактеристични функции на случајните променливи X_n. Имено,

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_n}(t) &= Ee^{itX_n} = \int_{\frac{n+1}{n}}^{+\infty} e^{itx} e^{-(x - \frac{n+1}{n})} = e^{\frac{n+1}{n}} \int_{\frac{n+1}{n}}^{+\infty} e^{(it-1)x}\, dx \\
&= e^{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{-e^{(it-1)\frac{n+1}{n}}}{it - 1} = \frac{e^{it\frac{n+1}{n}}}{1 - it} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e^{it}}{1 - it},
\end{aligned}$$

што значи дека низата (X_n) слабо конвергира кон случајна променлива X која има карактеристична функција $\varphi_X(t) = \frac{e^{it}}{1-it}$. Може да се покаже дека случајната променлива X има густина на распределба $p_X(x) = e^{1-x}$, $x \geq 1$.

ЗАДАЧА 5.26. Ако $f(x)$ е непрекината функција во точката a, тогаш

$$(X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} a) \Longrightarrow (f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} f(a)).$$

Докажи.

Решение. Нека $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$ и нека $f(x)$ е непрекината функција во точката a. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Од непрекинатоста на $f(x)$ во a, постои $\delta > 0$, така што за сите $w \in \Omega$ за кои $|X_n(w) - a| < \delta$ следи дека $|f(X_n)(w) - f(a)| < \varepsilon$. Тогаш,

$$P\{w : |f(X_n)(w) - f(a)| < \varepsilon\} \geq P\{w : |X_n(w) - a| < \delta\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

затоа што $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$. О д произволноста на $\varepsilon > 0$, заклучуваме дека и $f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} f(a)$.

ЗАДАЧА 5.27. Испитај дали за низата од независни случајни променливи (X_n) со густини на распределба

$$p_{X_n}(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(nx-1)^2}{2}}, \ -\infty < x < +\infty,$$

за $n = 1, 2, ...,$ важи законот на големите броеви.

Решение. Случајните променливи X_n имаат распределба $X_n \sim \mathcal{N}(\frac{1}{n}; \frac{1}{n^2})$, за $n = 1, 2, ...,$ од каде $EX_n = \frac{1}{n}$ и $DX_n = \frac{1}{n^2}$. Тогаш, исто како во задача 5.15, ќе добиеме дека важат и слабиот и силниот закон на големите броеви.

ЗАДАЧА 5.28. Случајната променлива X_n прима вредности $-n, ..., -1, 0, 1, ..., n$ со веројатности

$$P\{X_n = 0\} = 1 - \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3}\right),$$
$$P\{X_n = -k\} = P\{X_n = k\} = \frac{1}{3k^3}, k = 1, 2, ..., n.$$

Ако (X_n) е низа од независни случајни променливи, испитај дали за низата (X_n) важи законот на големите броеви.

Решение. Бројните карактеристики на случајните променливи (X_n) се

$$EX_n = \sum_{k=-n}^{n} kP\{X_n = k\} = \sum_{k=1}^{n}(-k) \cdot \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{3k^3} = 0,$$

$$EX_n^2 = \sum_{k=-n}^{n} k^2 P\{X_n = k\} = \sum_{k=1}^{n}(-k)^2 \cdot \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{3k^3} = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

од каде

$$DX_n = EX_n^2 - (EX_n)^2 = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \le \frac{2}{3}(1+\ln n).$$

Последното неравенство важи затоа што

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{k} < 1 + \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x} = 1 + \int_{1}^{n}\frac{dx}{x} = 1 + \ln n.$$

Тогаш,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{DX_n}{n^2} < \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\ln n}{n^2} < \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sqrt{n}}{n^2} < +\infty.$$

Следи дека за низата (X_n) важи силниот закон на големите броеви на Колмогоров. Следи дека важи и слабиот закон на големите броеви.

ЗАДАЧА 5.29. Нека е дадена низата од независни случајни променливи (X_n) со густини на распределба $p_{X_n}(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$, $x > 0$. Испитај дали за низата (X_n) важи законот на големите броеви.

Решение. Математичкото очекување на случајните променливи X_n е

$$EX_n = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_{X_n}(x)\, dx = \frac{1}{n!}\int_{0}^{\infty} x^{n+1}e^{-x}\, dx = \frac{1}{n!}I_{n+1},$$

каде $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n!$, што може да се докаже со индукција по n или да се пресмета рекурзивно. Значи, $EX_n = \frac{1}{n!}(n+1)! = n+1$. Ги формираме случајните променливи

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}EX_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k - \frac{(n+1)(n+2)}{2n} + \frac{1}{n}.$$

Да ја испитаме конвергенцијата на низата од случајни променливи (Y_n). Карактеристичните функции на случајните променливи X_n се

$$\varphi_{X_n}(t) = Ee^{itX_n} = \frac{1}{n!}\int_{0}^{\infty} x^n e^{(it-1)x}\, dx = \frac{1}{n!}J_n,$$

каде $J_n = \int_0^\infty x^n e^{(it-1)x}\, dx = \frac{n!}{(1-it)^{n+1}}$, од каде следи дека $\varphi_{X_n}(t) = \frac{1}{(1-it)^{n+1}}$. Од независноста на случајните променливи X_n добиваме дека

$$\varphi_{Y_n}(t) = e^{-\frac{(n+1)(n+2)}{2n}it + \frac{it}{n}}\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(\frac{t}{n}) = e^{-\frac{(n+1)(n+2)}{2n}it + \frac{it}{n}} \cdot \frac{1}{(1-\frac{it}{n})^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1}},$$

од каде

$$\begin{aligned}\ln\varphi_{Y_n}(t) &= -\frac{(n+1)(n+2)}{2n}it + \frac{it}{n} - \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right)\ln(1-\frac{it}{n}) = \\ &= -\frac{(n+1)(n+2)}{2n}it - \frac{(n+1)(n+2)}{2}\ln(1-\frac{it}{n}) + \frac{it}{n} + \ln(1-\frac{it}{n}) = \\ &= -\frac{(n+1)(n+2)}{2n}it - \frac{(n+1)(n+2)}{2}\left(-\frac{it}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) + \frac{it}{n} + \ln(1-\frac{it}{n}) = \\ &= -\frac{(n+1)(n+2)t^2}{4n^2} - \frac{(n+1)(n+2)}{2}o(\frac{1}{n^2}) + \frac{it}{n} + \ln(1-\frac{it}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{t^2}{4},\end{aligned}$$

односно

$$\varphi_{Y_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{4}} = \varphi_X(t),$$

каде $X \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$. Добивме дека $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{dist.} X \neq 0$, од каде Y_n не конвергира по веројатност кон 0, па за низата (X_n) не важи слабиот закон на големите броеви, а со тоа не важи ни силниот закон на големите броеви.

ЗАДАЧА 5.30. Нека (X_n) е низа од независни случајни променливи со распределби $P\{X_n = -\frac{1}{n}\} = P\{X_n = \frac{1}{n}\} = \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Испитај дали за низата $Y_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}X_k$, $n = 1, 2, \ldots$ важи силниот закон на големите броеви?

Решение. Математичките очекувања на случајните променливи X_n се

$$EX_n = (-\frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

од каде

$$EY_n = E(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}X_k) = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}EX_k = 0.$$

Тогаш,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sqrt{j}X_j = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\sqrt{k}X_k = \sum_{k=1}^{n}a_{k,n}X_k,$$

каде $a_{k,n} = \frac{1}{n}(n-k+1)\sqrt{k}$. Ако $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$, тогаш треба $a_{1,n}X_1 \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$, што не важи, па затоа за низата (Y_n) не важи слабиот закон на големите броеви, а со тоа не важи ни силниот закон на големите броеви.

ЗАДАЧА 5.31. Една акумулација се празни секој ден во текот на случајно време (во минути) со распределба $\mathcal{U}(50\text{ min}, 70\text{ min})$. Брзината на празнење е 1 l/min. Колку најмалку вода треба да содржи акумулацијата, за со веројатност 0,95, после 400 дена празнење, во неа сѐ уште да има вода?

Решение. Нека X_k е количина на вода (во литри) која истекува k-тиот ден од акумулацијата, $k = 1, ..., 400$. Бидејќи акумулацијата се празни со брзина 1 l/min, имаме дека $X_k \sim \mathcal{U}(50\ l, 70\ l)$, $k = 1, ..., 400$. Тогаш, $Y_{400} = \sum_{k=1}^{400} X_k$ е вкупната количина на вода која истекува од акумулацијата за 400 дена. Да забележиме дека X_k, $k = 1, ..., 400$ се независни случајни променливи со $EX_k = 60$ и $DX_k = \frac{100}{3}$, $k = 1, ..., 400$. Се бара количината на вода K на акумулацијата (во литри), така што $P\{Y_{400} < K\} = 0,95$. Со примена на централната гранична теорема имаме

$$\begin{aligned}
P\{Y_{400} < K\} &= P\{\sum_{k=1}^{400} X_k < K\} = \\
&= P\{\frac{\sum_{k=1}^{400} X_k - 400 \cdot 60}{\sqrt{\frac{100}{3}}\sqrt{400}} < \frac{K - 400 \cdot 60}{\sqrt{\frac{100}{3}}\sqrt{400}}\} = \\
&= P\{\frac{\sum_{k=1}^{400} X_k - 400 \cdot 60}{\sqrt{\frac{100}{3}}\sqrt{400}} < \frac{(K - 24000)\sqrt{3}}{200}\} \approx \\
&\approx \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{(K - 24000)\sqrt{3}}{200}\right),
\end{aligned}$$

од каде $\Phi_0\left(\frac{(K-24000)\sqrt{3}}{200}\right) = 0,45$, односно $\frac{(K-24000)\sqrt{3}}{200} = 1,65$, од каде $K = 24190$. Во акумулацијата треба да има најмалку 24190 литри вода, за со веројатност 0,95, после 400 дена празнење, во неа сѐ уште да има вода.

ЗАДАЧА 5.32. Нека (X_n) е низа од случајни променливи со закони на распределба

$$P\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n^2},\ P\{X_n = -n\} = P\{X_n = n\} = \frac{1}{2n^2},\ n = 1, 2, ...$$

Докажи дека за низата (X_n) не важи централната гранична теорема.

Решение. За бројните карактеристики на случајните променливи X_n имаме

$$EX_n = (-n) \cdot \frac{1}{2n^2} + 0 \cdot (1 - \frac{1}{n^2}) + n \cdot \frac{1}{2n^2} = 0,$$

$$EX_n^2 = (-n)^2 \cdot \frac{1}{2n^2} + 0^2 \cdot (1 - \frac{1}{n^2}) + n^2 \cdot \frac{1}{2n^2} = 1,$$

од каде

$$DX_n = EX_n^2 - (EX_n)^2 = 1.$$

Треба да испитаме дали важи

$$P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} EX_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} DX_k}} \leq x\right\} = P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{n}} \leq x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

што претставува општ облик на централната гранична теорема, односно треба да испитаме дали $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{dist.} \mathcal{N}(0,1)$. Бидејќи $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ конвергира, заклучуваме дека $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, односно за низата (X_n) не важи централната гранична теорема.

5.6 Задачи за самостојна работа

ЗАДАЧА 5.33. Колку најмалку коцки за играње треба да се фрлат одеднаш за со веројатност помала од 0,3 да може да кажеме дека на ниедна од коцките не се појавиле 6 точки?

ЗАДАЧА 5.34. Ако се знае дека 99 % од студентите на еден факултет писхуваат со десна рака, а 2 % се лева, најди ја веројатноста дека од случајно избрани 200 студенти:

а) точно 196 пишуваат само со десна рака,

б) не помалку од 4 пишуваат со лева рака.

ЗАДАЧА 5.35. Веројатноста во една продавница за чевли случаен купувач да купи чевли број 41 е 0,2. Најди ја веројатноста дека од 100 купувачи, чевли број 41 купиле:

а) точно 25 луѓе,

б) од 10 до 30 луѓе,

в) не помалку од 35 луѓе.

ЗАДАЧА 5.36. а) На отсечката $\overline{AB} = l$, случајно се фрлаат 5 точки. Најди ја веројатноста дека најмалку 4 од нив се на растојание не поголемо од a, $a \in \mathbb{R}$ од средината на отсечката.

б) Ако $l = 10$ и $a = 0,05$, колку точки треба да се фрлат на отсечката $\overline{AB} = l$ за со веројатност 0,95 најмалку 4 од нив да се на растојание не поголемо од средината на отсечката.

ЗАДАЧА 5.37. Стрелците A, B и C гаѓаат во целта независно еден од друг и секој од нив ја погодува целта со веројатност 0,4. Во кој интервал во однос на очекуваниот број на погодоци се наоѓа вкупниот број на нивни погодоци, со веројатност 0,95, ако секој од нив гаѓа по 50 пати?

ЗАДАЧА 5.38. Нека е дадена низата од независни случајни променливи (X_n) со $\mathcal{U}(0,1)$ распределби. Испитај ги сите четири вида на конвергенција на низата

$$Y_n = \frac{1}{1+n^3X_n^2},\ n = 1,2,...$$

ЗАДАЧА 5.39. Нека е дадена низата од случајни променливи (X_n) со густини на распределба $p_{X_n}(x) = nx^{n-1}$, $0 < x < 1$, $n = 1,2,....$ Испитај ги сите четири вида на конвергенција на низата (X_n).

ЗАДАЧА 5.40. Дадена е низата од независни случајни променливи (X_n) при што $X_n \sim \mathcal{U}(0,n)$, $n = 1,2,....$ Испитај ги сите четири вида на конвергенција на низата $Y_n = \frac{X_n}{1-X_n}$, $n = 1,2,....$

ЗАДАЧА 5.41. Дадена е низата од независни случајни променливи (X_n) при што $X_n \sim \mathcal{U}(0,1)$, $n = 1,2,....$ Испитај ги сите четири вида на конвергенција на низата $Y_n = \frac{1}{nX_n}$, $n = 1,2,....$

ЗАДАЧА 5.42. Испитај дали за низата од независни случајни променливи (X_n) со распределби

$$P\{X_n = -1\} = P\{X_n = 1\} = \frac{1}{4},\ P\{X_n = 0\} = \frac{1}{2},\ n = 1,2,...,$$

важи законот на големите броеви.

ЗАДАЧА 5.43. Испитај дали за низата од случајни променливи (X_n) со распределби

$$P\{X_n = -n\} = P\{X_n = n\} = \frac{1}{2^n},\ P\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}},\ n = 1,2,...,$$

важи законот на големите броеви.

ЗАДАЧА 5.44. Нека е дадена низата од независни и еднакво распределени случајни променливи (X_n) со $EX_1 = a < +\infty$, $DX_1 = \sigma^2 < +\infty$. Испитај дали за низата $Y_n = (X_n - a)^2$, $n = 1,2,...$ важи законот на големите броеви.

ЗАДАЧА 5.45. Испитај дали за низата од независни случајни променливи (X_n) со густини на распределба

$$p_{X_n}(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)},\ -\infty < x < +\infty,$$

важи силниот закон на големите броеви.

ЗАДАЧА 5.46. Колку независни и еднакво распределени случајни променливи со дисперзија 5 треба да се земат, за со веројатност најмалку 0,9973 нивната аритметичка средина да отстапува од математичкото очекување најмногу за 0,01?

ЗАДАЧА 5.47. Во 100 кутии се распределени црни и бели топчиња. Бројот на црни топчиња по кутија е случајна променлива со $\mathcal{P}(1)$ распределба. Најди ја веројатноста дека вкупниот број на црни топчиња во сите 100 кутии е поголем од 120.

ЗАДАЧА 5.48. Еден апарат за игра го извлекува бројот k, $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ со веројатност $p_k = \frac{1}{e \cdot k!}$. Ако добие парен број, играчот губи 1 ден., ако добие непарен број, играчот добива 1 ден. Најди ја веројатноста дека по 1000 играња на апаратот, добивката на играчот ќе биде меѓу 100 и 200 ден.

ОДГОВОРИ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

Глава 1.

1.69 а) не; б) да; в) не; **1.73** 0,05; 0,15; 0,05; 0,1; **1.75** *Упатство:* Искористи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за броевите $P(A)$, $P(B \setminus A)$, $P(C \setminus (A \cup B))$; **1.78** а) 35; б) 120; **1.79** 12; **1.80** а) 45, б) 360; **1.81** 416; **1.82** 8; **1.83** 40320; **1.84** 151200; **1.85** 151200; **1.86** 148329; **1.87** 0,083333; **1.88** 0,26296; **1.89** 0,25; 0,55; 0,45; 0,088; 0,136; 0,933; **1.90** 0,950739; **1.91** 0,98576; **1.92** 0,011549; 0,219609; 0,397230; **1.93** 0,027778; **1.94** 0,00032; 0,0016; 0,0384; **1.95** 0,416667; **1.96** 7/39; **1.97** 0,591237; **1.98** 0,480779; **1.99** $1-(364/365)^n$; 253; **1.100** 20; **1.101** $1-(365-nk-1)!/(365^{n-1}(365-n(k+1)))$; 7 **1.102** $2a/l$; **1.103** 0,75; **1.104** $(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2})/(2b)$; **1.105** 1 за $a > \sqrt{2}/4$; $4\sqrt{2}a-8a^2$ за $a \leq \sqrt{2}/4$; **1.106** $\pi/40$; **1.107** $(a-r)/a$; **1.108** $(2l(a+b)-l^2)/(ab\pi)$.

Глава 2.

2.58 0,5; **2.59** 0,1512; **2.60** 0,6; **2.61** 0,8; **2.62** 0,369748; 0,704959; **2.63** 0,2; **2.67** $2p/(1-p-q)$; **2.70** 3/8; **2.71** 2/9; **2.72** 0,857413; **2.73** 4/7; 2/7; 1/7; **2.74** 0,321908; 0,474516; **2.75** $P_{A_1A_2}(H_i)=4i^2/(n(n+1)^2)$, $i=1,2,...,n$; **2.76** $\frac{2}{p}\sum_{i=1}^n p_i^2(1-p_i)$, $p=\sum_{i=1}^n p_i$; **2.77** $\sum_{k=1}^n (1-P_k)$, $P_k = 1-(1-p_1^{(k)})(1-p_2^{(k)})(1-p_3^{(k)}p_4^{(k)})$; **2.78** $(1-p_1)p_2/(1-p_1p_2)$; **2.79** 0,293933; **2.80** 0,296296; **2.81** 0,122187; **2.82** 0,139532; **2.83** 0,088; 0,104; **2.84** 0,169932; **2.85** 7; **2.86** 8; **2.87** $\sum_{i=k}^n P^i(1-P)^{n-i}$, $P = p_1p+p_2(1-p)$; **2.88** 0,135; **2.89** 0,206; **2.90** 0,842567.

Глава 3.

4.147 1) Да; 2) Не; **3.68** $P\{X=0\}=P\{X=2\}=1/4$, $P\{X=1\}=1/2$; **3.69** $P\{X=0\}=1/45$, $P\{X=1\}=16/45$, $P\{X=2\}=28/45$; **3.70** $P\{X=0\}=0,0015$, $P\{X=1\}=0,0275$, $P\{X=2\}=0,1685$, $P\{X=3\}=0,4245$, $P\{X=4\}=0,3780$; **3.71** $P\{X=0\}=1/35$, $P\{X=1\}=12/35$, $P\{X=2\}=18/35$, $P\{X=3\}=4/35$; 1; **3.72** $P\{X=k\}=0,8^{k-1}\cdot 0,2$, $k=1,2,...$; **3.73** $P\{Y=y\}=\lambda^{\frac{y-6}{2}}e^{-\lambda}/(\frac{y-6}{2})!$, $y=6,8,10,12,14,...$; **3.74** а) $P\{X=1\}=1/27$, $P\{X=4/3\}=3/27$, $P\{X=5/3\}=6/27$, $P\{X=2\}=7/27$, $P\{X=7/3\}=6/27$, $P\{X=8/3\}=3/27$, $P\{X=3\}=1/27$; б) 2/9; **3.75** $p_1=0,4$, $p_2=0,1$, $p_3=0,5$; **3.76** $P\{X=1\}=0,6$, $P\{X=2\}=0,4$;

3.77 0,1; 0,9; 0,65132; **3.78** 0.008344; **3.79** $P\{Y=0\}=0,2$, $P\{Y=10\}=0,4$, $P\{Y=20\}=0,4$; **3.82** а) 1,8; б) 1,8; **3.83** $7n/2$, $35n/12$; **3.84** 1; **3.85** n; **3.86** 0,6496; **3.87** $4l/(a\pi)$; **3.88** $P\{T=2\}=e^{-a}$, $P\{T=2,5\}=ae^{-a}$, $P\{T=3\}=\frac{a^2}{2}e^{-a}$, $P\{T=6\}=1-e^{-a}(1+a+\frac{a^2}{2})$; $ET=6-e^{-a}(4+3,5a+1,5a^2)$; **3.89** $+\infty$; **3.90** а) $P\{X=k\}=(1-p_1(1-p_2)-p_2(1-p_1))^{k-1}(p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1))$, $k=1,2,\ldots$; $EX=1/(p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1))$; $DX=(p_1p_2+(1-p_1)(1-p_2))/(p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1))$; б) $(p_1(1-p_2))/(p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1))$; **3.91** -22; **3.92** а) $P\{X=-2\}=(1-p)^2$, $P\{X=0\}=2p(1-p)$; $P\{X=2\}=p^2$ и $P\{Y=2\}=1$; б) $EX=2(2p-1)$, $DX=8p(1-p)$, $EY=2$ и $DY=0$; **3.93** $P\{Y=-1\}=q_1p_2$, $P\{Y=0\}=q_1q_2+p_1p_2$ и $P\{Y=1\}=p_1q_2$, $q_1=1-p_1$, $q_2=1-p_2$; $EY=q_1p_2+p_1q_2$; $DY=p_1q_1+p_2q_2$; **3.94** $E(|X-np|)=2n\binom{n-1}{m-1}p^m(1-p)^{n-m+1}$, $D(|X-np|)=np(1-p)-4n^2\binom{n-1}{m-1}p^{2m}(1-p)^{2(n-m+1)}$, каде $m=[np+1]$; **3.95** а) (прва редица) 1/6, 1/6, 1/6, (втора редица) 0, 0; б) X и Y не се независни; **3.96** 0,10; 0,90; **3.97** а) $P\{X=0,Y=1\}=1/2, P\{X=1,Y=2\}=P\{X=2,Y=2\}=1/4, P\{X=0,Y=2\}=P\{X=1,Y=1\}=P\{X=2,Y=1\}=0$; в) X и Y не се независни; г) $p=1/2$; д) 0,904534; ѓ) $EU=3/4, EV=3/2, ES=9/4, ET=3/2$; **3.98** а) $P\{X=0,Y=0\}=0,0064, P\{X=0,Y=1\}=0,0192, P\{X=0,Y=2\}=0,0144, P\{X=1,Y=1\}=0,0512, P\{X=1,Y=2\}=0,1536, P\{X=1,Y=3\}=0,1152, P\{X=2,Y=2\}=0,1024, P\{X=2,Y=3\}=0,3072, P\{X=2,Y=4\}=0,2304, P\{X=0,Y=3\}=P\{X=0,Y=4\}=P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1,Y=4\}=P\{X=2,Y=0\}=P\{X=2,Y=1\}=0$; б) 2,8; в) 0,3904; **3.99** $P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0,Y=2\}=P\{X=1,Y=2\}=0$, $P\{X=0,Y=0\}=0,3$, $P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1,Y=1\}=0,2$, $P\{X=2,Y=0\}=P\{X=2,Y=2\}=0,075$ и $P\{X=2,Y=1\}=0,15$; **3.100** $P\{X=-4,Y=0\}=P\{X=-2,Y=-1\}=P\{X=-2,Y=1\}=P\{X=-1,Y=0\}=P\{X=0,Y=y\}=1/9$, $y=-2,-1,0,1,2$; **3.101** а) $P\{U=0,V=0\}=P\{U=2,V=0\}=1/4$, $P\{U=1,V=1\}=1/2$ и $P\{U=0,V=1\}=P\{U=1,V=0\}=P\{U=2,V=1\}=0$; $P\{U=0\}=P\{U=2\}=1/4$ и $P\{U=1\}=1/2$; $P\{V=0\}=P\{V=1\}=1/2$; б) U и V не се независни; **3.103** $P\{X=i,Y=j|X+Y=k\}=\frac{\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}}{\binom{n_1+n_2}{k}}$, за $0\le i\le n_1$, $0\le j\le n_2$ и $i+j=k$, а за сите останати i и j веројатноста е нула.

Глава 4.

4.105 $F_X(x)=0$, за $x<0$; $F_X(x)=0,125$, за $0\le x<1$; $F_X(x)=0,5$, за $1\le x<2$; $F_X(x)=0,875$, за $2\le x<3$; $F_X(x)=1$, за $x\ge 3$; **4.106** $F_X(x)=0$, за $x<3$; $F_X(x)=0,2$, за $3\le x<4$; $F_X(x)=0,3$, за $4\le x<7$; $F_X(x)=0,7$, за $7\le x<10$; $F_X(x)=1$, за $x\ge 10$; **4.107** 1/4; **4.108** $F_X(x)=0$, за $x<0$; $F_X(x)=\sin x$, за $0\le x<\frac{\pi}{2}$; $F_X(x)=1$, за $x\ge\frac{\pi}{2}$; **4.109** $a=3/2$; $P\{X\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})\}=\sqrt{2}/4\approx 0.353553$; **4.110** $1/(2\pi)$; **4.111** $C=4/(\pi-2\ln 2)$; 0,274032; **4.112** $C=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}$; $P\{X\in[2,5]\}=0,34134$; **4.113** Да; **4.115** 0,86638; **4.116** $p_Y(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, за $-1<x<1$; $p_Y(x)=0$, инаку; **4.117** $F_Y(x) = 0,5 + \Phi_0(\frac{x+m}{\sigma})$; **4.118** а) $p_Y(x) = \frac{1}{x}p_X(\ln\frac{1}{x})$, $0 < x < 1$; б) $p_Y(x) = e^x p_X(e^x)$, $-\infty < x < +\infty$; в) $p_Y(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}p_X(\sqrt[3]{x})$, $0 < x < +\infty$; г) $p_Y(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}p_X(\frac{1}{\sqrt{x}})$, $0 < x < +\infty$; д) $p_Y(x) = 2xp_X(x^2)$, $0 < x < +\infty$; **4.119** $p(x) = 2/(l\sqrt{l^2-4x})$, $0 < x < l^2/4$; **4.120** а) $p(x,y) = 1/(R^2\pi)$ за $x^2+y^2 \leq R^2$; б) $p_X(x) = 2\sqrt{R^2-x^2}/(R^2\pi)$ за $-R \leq x \leq R$; $p_Y(x) = 2\sqrt{R^2-y^2}/(R^2\pi)$ за $-R \leq y \leq R$; в) $1/(3\pi) \approx 0,106103$; X и Y не се независни случајни променливи; **4.121** а) $1/(2\sqrt{\pi})$; б) $p_X(x) = e^{-(x+1)^2}/\sqrt{\pi}$; $p_Y(x) = e^{-|y|}/2$; в) $F(x,y) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\Phi_0(\sqrt{2}(x+1)))\cdot e^y$ за $x \in \mathbb{R}$, $y < 0$, $F(x,y) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\Phi_0(\sqrt{2}(x+1)))\cdot(2-e^{-y})$ за $x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$; X и Y се независни случајни променливи; **4.122** $p_{X+Y}(u) = e^{-u/2}(1-e^{-u/2})$, за $u > 0$; **4.123** $\frac{1}{4}(1+2\ln 2) \approx 0,596574$; **4.124** $p_U(u) = 1/2$ за $-1 \leq u < 0$, $p_U(u) = (3-2u)/4$ за $0 \leq u < 1$; $p_V(v) = (2v+1)/4$ за $0 \leq v < 1$, $p_V(v) = 1/2$ за $1 \leq v < 2$; **4.125** $p_Y(y|x) = (2x)/(x^2+1)$, за $0 < y \leq x < 1$, $p_Y(y|x) = (2y)/(x^2+1)$, за $0 < x < y < 1$; $4/13 \approx 0,307692$; **4.126** 0,13591; **4.127** 0; **4.128** 3/4; 11/16; **4.129** 0; $c^2/2$; **4.130** moX не постои; $meX = \pi/12$; **4.131** moX не постои; $meX = 0$; **4.132** $moX = (\frac{n-1}{n}x_0)^{\frac{1}{n}}$; **4.133** а) 2; 3/4; б) $EY = 2\ln 2$; $DY = +\infty$; **4.134** а) $F(x,y) = 0$, за $x < 0$ или $y < 0$; $F(x,y) = \frac{1}{2}\ xy(x+y)$, за $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$; $F(x,y) = \frac{1}{2}\ x(x+1)$, за $0 \leq x < 1, y \geq 1$; $F(x,y) = \frac{1}{2}\ y(y+1)$, за $x \geq 1, 0 \leq y < 1$; $F(x,y) = 1$, за $x \geq 1, y \geq 1$; 1/2; **4.135** а) $p(x,y) = 1/\lambda^2$, за $a-\frac{\lambda}{2} < x, y < a+\frac{\lambda}{2}$; $F(x,y) = 0$, за $x < a-\frac{\lambda}{2}$ или $y < a-\frac{\lambda}{2}$; $F(x,y) = \frac{1}{\lambda^2}(x-a+\frac{\lambda}{2})(y-a+\frac{\lambda}{2})$, за $a-\frac{\lambda}{2} \leq x < a+\frac{\lambda}{2}$, $a-\frac{\lambda}{2} \leq y < a+\frac{\lambda}{2}$; $F(x,y) = \frac{1}{\lambda}(x-a+\frac{\lambda}{2})$, за $a-\frac{\lambda}{2} \leq x < a+\frac{\lambda}{2}$, $y \geq a+\frac{\lambda}{2}$; $F(x,y) = \frac{1}{\lambda}(y-a+\frac{\lambda}{2})$, за $x \geq a+\frac{\lambda}{2}$, $a-\frac{\lambda}{2} \leq y < a+\frac{\lambda}{2}$; $F(x,y) = 1$, за $x \geq a+\frac{\lambda}{2}$, $y \geq a+\frac{\lambda}{2}$; б) 0; $\frac{\lambda^2}{6}$; **4.136** $\frac{1}{2}(a+b+c+d)$; $\frac{1}{12}((b-a)^2+(d-c)^2)$; $\frac{1}{4}(a+b)(c+d)$; $(\frac{1}{12}(b-a)^2+\frac{1}{4}(a+b)^2)\cdot(\frac{1}{12}(d-c)^2+\frac{1}{4}(c+d)^2)-\frac{1}{16}(a+b)^2(c+d)^2$; **4.137** 13/40; **4.138** $\pi^2/4-2$; $\pi^4/4-4\pi^2+20$; **4.139** $\pi/12\ (a^2+ab+b^2)$; $\pi^2/720\ (4a^4-a^3b-6a^2b^2-ab^3+4b^4)$; **4.140** $1/4\ (b^3+b^2a+ba^2+a^3)$; $1/112\ (9b^6+2b^5a-5b^4a^2-12b^3a^3-5b^2a^4+2ba^5+9a^6)$; **4.141** а) $a = 2$; $p_X(x) = 3/x^4$, за $x \geq 1$; $p_X(x) = 0$, за $x < 1$; б) 3/2; 3/4; в) $p_Y(y) = 3e^{-3y}$, за $y \geq 0$; $p_Y(y) = 0$, за $y < 0$; 1/3; 1/9; **4.142** $a = k^3/2$; $F_X(x) = 1-(k^2x^2+2kx+2)/2\ e^{-kx}$, за $x \geq 0$; $F_X(x) = 0$, за $x < 0$; $p \approx 0,080301$; $3/k$; $3/k^2$; **4.143** 2/3; **4.144** $2(a+b)/\pi$; **4.145** $(1+3\sqrt{3})/2$; 79/4; **4.148** $p \geq 0,909$; **4.149** $p \geq 0,75$; **4.150** $p \geq 0,888889$; **4.151** $\sqrt{3}/2$; **4.153** $EY = \mu$, $DY = \sigma^2/n$; **4.154** 38/15; **4.155** $p_X(x|y) = 1/(1-y)$, за $0 < x < 1-y$; $(1-y)/2$; **4.156** $n/2$; **4.157** $1/p$; **4.158** 9 часа; **4.159** а) $\varphi(t) = 1-p-pe^{it}$; б) $\varphi(t) = p/(1-(1-p)e^{it})$; в) $\varphi(t) = e^{itm-\sigma^2t^2/2}$; **4.160** $\varphi_U(t) = (e^{it2\pi}-1)/(it2\pi)$.

Глава 5.

5.33 7; **5.34** 0,195367; 0,566528; **5.35** 0,04565; 0,99132; 0,00015; **5.36** $16a^4(5l-8a)/(l^5)$, $0 \leq a \leq l/2$; 1, $a > l/2$; 0, $a < 0$; 819; **5.37** [48; 72]; **5.38** $Y_n \stackrel{\text{с.с.}}{\to} 0$, $Y_n \stackrel{P}{\to} 0$, $Y_n \stackrel{dist.}{\to} 0$, $Y_n \stackrel{\text{с.к.}}{\to} 0$; **5.39** $X_n \stackrel{\text{с.к.}}{\to} 1$, $X_n \stackrel{P}{\to} 1$, $X_n \stackrel{dist.}{\to} 1$, $X_n \stackrel{\text{с.с.}}{\to} 1$; **5.40** $X_n \stackrel{P}{\to} -1$, $X_n \stackrel{dist.}{\to} -1$, $X_n \stackrel{\text{с.с.}}{\nrightarrow} -1$, $X_n \stackrel{\text{с.к.}}{\nrightarrow} -1$; **5.41** $Y_n \stackrel{dist.}{\to} 0$, $Y_n \stackrel{P}{\to} 0$, $Y_n \stackrel{\text{с.с.}}{\nrightarrow} 0$, $Y_n \stackrel{\text{с.к.}}{\nrightarrow} 0$; **5.42**

Да, важи слабиот закон на големите броеви.; **5.43** Да, важи силниот закон на големите броеви.; **5.44** Да, важи слабиот закон на големите броеви.; **5.45** Не важи, затоа што не постои математичкото очекување EX_n.; **5.46** Повеќе од 450000; **5.47** 0.02275; **5.48** 0.

ПРИЛОЗИ

A Некои поважни распределби

распределба	закон на распределба или густина на распределба	EX	DX	$\varphi_X(t)$
$X = I_A$, каде $p = P(A)$	$P\{X=0\} = 1-p$, $P\{X=1\} = p$	p	$p(1-p)$	$1-p+p\,e^{it}$
Рамномерна (дискр.) на $\{1,...,n\}$	$P\{X=k\} = \frac{1}{n}$, $k = 1,...,n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^{it}-e^{itn}}{n(1-e^{it})}$
Биномна, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$P\{X=k\} = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, $k = 0,1,...,n,\ q = 1-p$	np	npq	$(p\,e^{it}+q)^n$
Геометриска, $X \sim Geo(p)$	$P\{X=k\} = pq^k$, $k = 0,1,2,...,\ q = 1-p$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{1-q\,e^{it}}$
Поасонова, $X \sim \mathcal{P}(a),\ a > 0$	$P\{X=k\} = \frac{a^k}{k!}e^{-a}$, $k = 0,1,2,...$	a	a	$e^{a(e^{it}-1)}$
Хипергеометриска, $X \sim HGeo(n,m,k)$	$P\{X=i\} = \frac{\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}}{\binom{n}{k}}$, $\max\{0, m+k-n\} \leq i \leq \min\{m,k\}$	$\frac{km}{n}$	$\frac{km(n-m)(n-k)}{n^2(n-1)}$	
Рамномерна (непрек.), $X \sim \mathcal{U}(a,b)$	$p(x) = \frac{1}{b-a}$, $a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Нормална, $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < +\infty$	m	σ^2	$e^{itm-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Стандардна нормална, $X \sim \mathcal{N}(0,1)$	$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty < x < +\infty$	0	1	$e^{-\frac{t^2}{2}}$
Експоненцијална, $X \sim \mathcal{E}(\lambda),\ \lambda > 0$	$p(x) = \lambda\,e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}it}$
Гама, $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda),\ \alpha,\lambda > 0$	$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$(1-\frac{1}{\lambda}it)^{-\alpha}$
Хи-квадрат, $X \sim \chi^2_n,\ n \in \mathbb{N}$	$p(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}$, $x > 0$	n	$2n$	$(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$
Кошиева, $X \sim k(\lambda),\ \lambda > 0$	$p(x) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+x^2)}$, $-\infty < x < +\infty$	-	-	$e^{-\lambda\|t\|}$

В Таблици[1]

Табликa 1: Вредности на функцијата $y = \frac{a^k}{k!}e^{-a}$

$k \backslash a$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035
7					0,000001	0,000103
$k \backslash a$	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879	0,270671	0,149361
2	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	0,270671	0,224042
3	0,028388	0,038343	0,049398	0,061313	0,180447	0,224042
4	0,004968	0,007669	0,011115	0,015328	0,090224	0,168031
5	0,000695	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,050409
7	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604
8		0,000002	0,000004	0,000009	0,000859	0,008101
9				0,000001	0,000191	0,002701
10					0,000038	0,000810
11					0,000007	0,000221
12					0,000001	0,000055
13						0,000013
14						0,000003
15						0,000001

[1] Таблиците во овој дел се преземени од [10], при што одредени вредности се коригирани.

Таблица 1: (продолжение)

$k \backslash a$	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756
10	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18		0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19		0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20			0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21			0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22				0,000003	0,000022	0,000108
23				0,000001	0,000008	0,000042
24					0,000003	0,000016
25					0,000001	0,000006
26						0,000002
27						0,000001

Таблица 2: Вредности на функцијата $y = \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

$m \backslash a$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,995321	0,982477	0,963063	0,938448	0,909796	0,878099
2	0,999845	0,998852	0,996390	0,992074	0,985612	0,977885
3	0,999996	0,999943	0,999724	0,999224	0,998248	0,997642
4	1,000000	0,999998	0,999974	0,999939	0,999828	0,999606
5		1,000000	0,999999	0,999996	0,999986	0,999962
6			1,000000	1,000000	0,999999	0,999997
7					1,000000	1,000000
$m \backslash a$	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,844195	0,808792	0,772483	0,735759	0,406006	0,199148
2	0,965858	0,952577	0,937144	0,919699	0,676677	0,423190
3	0,994246	0,990920	0,988542	0,981012	0,857124	0,647232
4	0,999214	0,998589	0,997657	0,996340	0,947348	0,815263
5	0,999909	0,999816	0,999658	0,999406	0,983437	0,916082
6	0,999990	0,999980	0,999958	0,999917	0,995467	0,966491
7	0,999999	0,999998	0,999995	0,999990	0,998904	0,988095
8	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999763	0,996196
9				1,000000	0,995954	0,998897
10					0,999992	0,999707
11					0,999999	0,999928
12					1,000000	0,999983
13						0,999996
14						0,999999
15						1,000000

Таблица 2: (продолжение)

$m \backslash a$	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,091579	0,040428	0,017352	0,007295	0,003019	0,001234
2	0,238105	0,124652	0,061970	0,029636	0,013754	0,006232
3	0,433472	0,265026	0,151205	0,081765	0,042380	0,021228
4	0,628839	0,440493	0,285058	0,172991	0,099632	0,054963
5	0,785132	0,615960	0,445681	0,300708	0,191236	0,115690
6	0,889326	0,762183	0,606304	0,449711	0,313374	0,206780
7	0,948866	0,866628	0,743981	0,598714	0,452961	0,323896
8	0,978636	0,931806	0,847239	0,729091	0,592548	0,455652
9	0,991867	0,968172	0,916077	0,830496	0,716625	0,587408
10	0,997159	0,986205	0,957380	0,901479	0,815887	0,705988
11	0,999084	0,994547	0,979909	0,946650	0,888077	0,803008
12	0,999726	0,997981	0,991173	0,973000	0,936204	0,875773
13	0,999923	0,999202	0,996372	0,987188	0,965820	0,926149
14	0,999979	0,999774	0,998600	0,994282	0,982744	0,958533
15	0,999994	0,999931	0,999491	0,997593	0,991770	0,977964
16	0,999998	0,999980	0,999825	0,999041	0,996283	0,988894
17	0,999999	0,999994	0,999943	0,999637	0,998407	0,994680
18	0,999999	0,999998	0,999982	0,999869	0,999351	0,997573
19	0,999999	0,999999	0,999994	0,999955	0,999748	0,998943
20	1,000000	0,999999	0,999998	0,999985	0,999907	0,999560
21		1,000000	0,999999	0,999995	0,999967	0,999824
22			0,999999	0,999998	0,999989	0,999932
23			1,000000	0,999999	0,999997	0,999974
24				0,999999	0,999999	0,999990
25				1,000000	0,999999	0,999996
26					1,000000	0,999998
27						0,999999
28						1,000000

Таблица 3: Вредности на функцијата $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3876	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2686
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0330	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Табліца 4: Вредности на функцијата $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07152	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26738	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29678	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32380	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	0,34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	0,47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	0,49865		3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	0,49977		3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,49999997									

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. С. Вентецель, Л. А. Овчаров, *Прикладные задачи теории вероятностей,* Радио и связь, Москва, 1983.

[2] Н. Я. Виленкин, *Комбинаторика,* Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва, 1969.

[3] Р. Малчески, *Вовед во теоријата на веројатност,* Алфа 94, Скопје, 2006.

[4] П. Младеновић, *Вероватноћа и статистика,* Математички факултет, Београд, 2005.

[5] Ф. Мостеллер, *Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями,* Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва, 1975.

[6] И. Стојковска, *Основи на веројатност - предавања (интерна скрипта),* Институт за математика, Природно-математички факултет, Скопје, 2014.

***

[7] D. P. Bertsekas, J. N. Tsitsiklis, *Introdiction to Probability*, Massachusetts Institute of Technology, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts 2008.

[8] Z. Glišić, P. Peruničić, *Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i matematičke statistike*, Naučna knjiga, Beograd, 1982.

[9] R. Isaac, *The pleasures of probability*, Springer, New York, 1995.

[10] J. Mališić, *Zbirka zadataka iz teorije verovatnoće sa primenama*, Peto izdanje, Građevinska knjiga, Beograd, 1990.

[11] G. Roussas, *An Introduction to Probability and Statistical Inference*, Elsevier Science, 2003.

[12] H. Tijms, *Understanding probability. Chance rules in everyday life*, Second edition, Cambridge university press, Cambridge, 2007.

Е-издание:
https://www.ukim.edu.mk/e-izdanija/PMF/Zbirka-resheni-zadachi-od-teorija-na-verojatnost.pdf