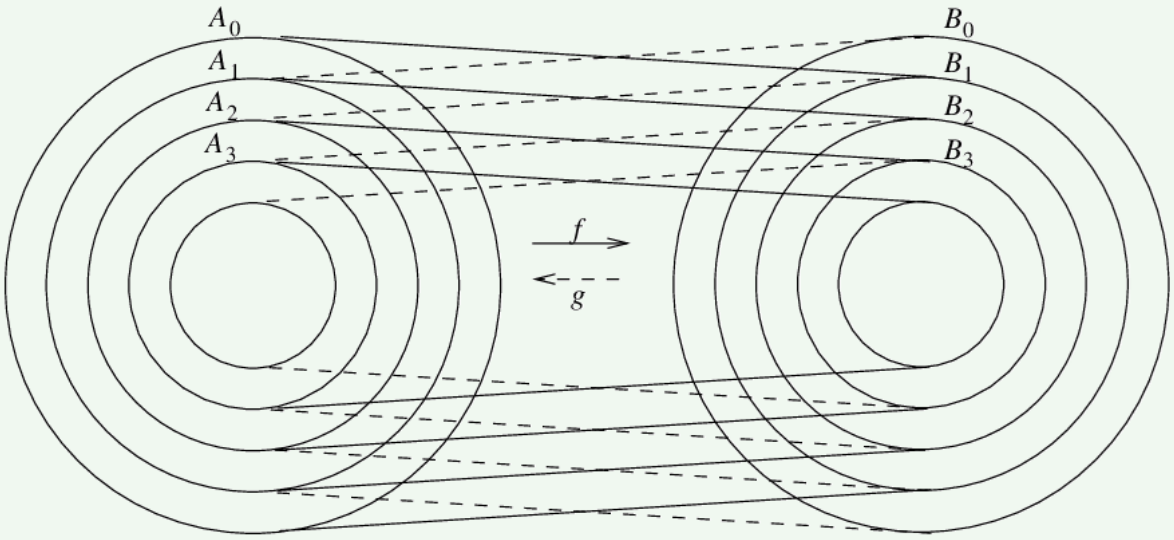
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје

Весна Целакоска-Јорданова

ПРЕДАВАЊА ПО МНОЖЕСТВА И ЛОГИКА



СКОПЈЕ, 2026

УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ ВО СКОПЈЕ

ВЕСНА ЦЕЛАКОСКА-ЈОРДАНОВА

ПРЕДАВАЊА ПО МНОЖЕСТВА И ЛОГИКА

СКОПЈЕ, 2026

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. „Гоце Делчев“ бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Биљана Ангелова, ректор

Уредник на публикацијата:
проф. д-р Весна Целакоска-Јорданова

Рецензенти:
д-р Валентина Миовска, редовен професор на ПМФ – Скопје
д-р Весна Манова Ераковиќ, редовен професор на ПМФ – Скопје

Техничка обработка:
проф. д-р Весна Целакоска-Јорданова

Лектура на македонски јазик:
Виолета Јовановска-Никовска

Илустратор:
проф. д-р Весна Целакоска-Јорданова

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

[510.3+510.6](075.8)

ЦЕЛАКОСКА-Јорданова, Весна
Предавања по множества и логика [Електронски извор] / Весна Целакоска-Јорданова ; [илустратор Весна Целакоска-Јорданова]. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", 2026

Начин на пристапување (URL): https://ukim.edu.mk/e-book/00158. - Текст во PDF формат, содржи 235 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 30.12.2025. - Библиографија: стр. 229-230. - Регистар

ISBN 978-9989-43-539-3

а) Основи на математиката -- Теорија на множества -- Математичка логика -- Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 67850501

Во спомен на професорот Ѓорѓи Чупона

Оваа страница намерно е оставена празна

ПРЕДГОВОР

Поимот множество е основен поим во математиката. Воведувањето тео–ретско-множествени идеи во наставата е мотивирано од нивната улога во современото изградување на математиката. Во математичките науки, од огромното разнообразие факти, издвоени се три насочувачки и обединувачки идеи, врз чија основа може да се изгради математиката: идеите за множество, релација и структура (последнава, всушност, се сведува на првите две). Од друга страна, дедуктивната природа на математичките теории бара правилна употреба на логичкото мислење. Тука не зборуваме за „разумно мислење“ што се учи од детството, туку за прецизно мислење изразено преку законите на мислењето од математичката логика. Сето ова, не само што претставува основа за изучување на многу математички области, туку и на други научни области што се врзани со математиката, како што се, на пример, компјутер–ските науки и физиката.

Оваа книга произлезе од предавањата и вежбите што ги одржував во текот на последните дваесетина години по предметот Множества и логика, на студентите од прва година на сите насоки по математика на Природно-математичкиот факултет при Универзитетот „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје и е наменета пред сѐ за нив. Предметот се слуша во првиот семестар со 6 часа неделно, од кои 4 часа се предвидени за предавања и 2 часа за вежби. Книгава истовремено претставува и учебник и збирка со решени задачи, а може да им биде корисна и на студентите од други факултети, како и на наставниците по математика од средните училишта.

Книгата се состои од пет глави, а секоја теориска целина (лекција) содржи примери за илустрација и задачи за вежбање коишто се детално решени. Сепак, содржината на книгата може да се подели на два дела: првиот дел содржи елементи од математичката логика, а вториот дел – елементи од наивната теорија на множествата.

Целта на овие предавања е да ги оспособи студентите коишто го следат овој курс не само да го научат предвидениот материјал, туку и да научат да ги изразуваат математичките тврдења и нивните докази со помош на реченици, во вид на писмен состав што содржи математички симболи и формули, за лесно да можат да го следат текот на сопственото размислување. На тој начин ќе научат да ја ценат тежината и важноста на ефективното изразување.

На крајот, ја користам можноста да им изразам благодарност на сите оние коишто на некаков начин придонесоа овој учебник да ја види светлината на денот. Им благодарам на рецензентите за конкретните забелешки коишто придонесоа да се подобри овој учебник. Посебно ѝ се заблагодарувам на проф. д-р Валентина Миовска за содржајните дискусии и конструктивни предлози. Му благодарам на мојот татко, проф. д-р Наум Целакоски, кој безрезервно ме поддржа во идејата да ја напишам оваа книга и кој беше секогаш тука за да ги ислуша моите дилеми. Им благодарам и на сите досегашни и идни читатели за нивните забелешки, коментари и дискусии.

Скопје, октомври 2018 година.

Весна Целакоска-Јорданова

СОДРЖИНА

1 МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА

Во формалнаша логика, коншрадикцијаша е сигнал за пораз, но во еволуцијаша на вистинскошо знаење го означува првиош чекор во напредувањешо кон победаша.

Алфред Вајшхед

1.1. Искази и операции со искази

Основа на математичкиот јазик се реченици коишто ги нарекуваме искази. Тоа се декларативни реченици на кои може да им се придружи само една од двете вредности: точно или неточно.

Исказ е декларативна реченица којашто има смисла и којашто е или вистинита или невистинита. Зборовите „вистинит“ (точен) и „невистинит“ (неточен) се нарекуваат *вистинитосни вредности* на исказот и се означуваат соодветно со ⊤ (се чита „те“) или со ⊥ (се чита „не те“).

За означување на исказите ги користиме буквите од латиницата $p, q, r, \ldots$, или тие букви, но со индекси $p_1, q_1, r_1, \ldots$ Нив ги викаме *исказни букви* или *исказни променливи*. Кратко ќе велиме „исказ p“ наместо „p е ознака за некој исказ“.

Условот, кој било исказ да прима една и само една од две вредности се нарекува *дихотомија*, а логиката во која е прифатена дихотомијата се вика *двовалентна* или *бинарна логика*. Ова ограничување на само две вистинитосни вредности понекогаш создава проблеми во „вистинскиот живот“ каде што двосмисленоста и „нијанси на вистината“ често го замаглуваат нашето размислување и одлуки. Ќе наведеме неколку примери на декларативни реченици: вистинити, невистинити или такви чијашто вистинитосна вредност е непозната, односно реченици коишто не се искази.

Примери за искази:

а) 2 е прост број.

б) Реката Вардар минува низ Скопје.

в) $2 < 1$.

Од овие искази вистинити се а) и б), а невистинит е исказот в).

Да забележиме дека не секоја декларативна реченица е исказ. На пример:

а) Сината боја е најубава.

б) Февруари има 28 денови.

в) $x + 3 = 4$.

Реченицата од примерот а) не е исказ, зашто за едни тоа е вистина, а за други не е. Во примерот б), точноста на реченицата зависи од тоа дали се работи за месец февруари во непрестапна или во престапна година. Во примерот в), реченицата е вистинита за едни вредности на x, а за други не е. На пример, за $x=1$ се добива $1+3=4$, што е точно, а за $x=2$ се добива $2+3=4$ што е неточно.

Исто така не се искази: прашални, заповедни и разни „желбени“ реченици, како на пример: „Сакам 2+2 да е 5.“ или „Мислам дека $\sqrt{25}$ е 5.“ и сл.

Веќе рековме дека еден исказ може да биде или вистинит или невистинит. Наместо реченицата „ p е вистинит исказ.“, пишуваме $\tau(p)=\mathsf{T}$ (се чита: „тау од пе е те“), а наместо „Исказот p е невистинит.“ пишуваме $\tau(p)=\perp$ (се чита: „тау од пе е не те“).

Од два дадени искази, со помош на логичките сврзници „и“, „или“, „ако..., тогаш ...“, „ако и само ако“ и негацијата „не“ (чии ознаки ги воведуваме по ред како што се спомнуваат: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ и $\neg$), можат да се формираат нови искази, наречени сложени искази. Овие сврзници ги нарекуваме и логички операции, а нивните називи по ред како што се спомнуваат се: конјункција, дисјункција, импликација, еквиваленција и негација.

За еден исказ велиме дека е *сложен исказ* ако во него се јавуваат некои од сврзниците $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$, додека исказ што не содржи ниту еден од тие сврзници се вика *елементарен* (или *атомарен*) *исказ*.

Дефиниција 1. *Негација* на исказот p е исказот „не p“, којшто е вистинит кога p е невистинит, а невистинит – кога p е вистинит.

Еве ја и вистинитосната таблица на негацијата $\neg p$:

p	$\neg p$
T	$\perp$
$\perp$	T

***Пример* 1.** Да формираме негација од исказите:

а) p : 10 е парен број.

б) q : Реката Вардар минува низ Скопје.

в) r : $2=3$.

Вистинитосната вредност на исказите p, q и r, соодветно е: T, T и $\perp$, додека на $\neg p, \neg q$ и $\neg r$, соодветно, е: $\perp$, $\perp$ и T.

Исказите $\neg p, \neg q$ и $\neg r$ ги формираме вака:

а) $\neg p$: Не е точно дека 10 е парен број. (Но, може да се каже и вака: 10 не е парен број.)

б) $\neg q$: Реката Вардар не минува низ Скопје.

в) $\neg r$: Не е точно дека $2 = 3$. (Може и вака: $2 \neq 3$.)

Дефиниција 2. *Конјункција* на два искази p и q е исказ „p и q" (го означуваме со $p \wedge q$), којшто е вистинит ако двата искази p и q се вистинити, а невистинит – ако барем едниот од нив е невистинит.

Целокупниот тек на вистинитосните вредности на конјункцијата $p \wedge q$ е даден со следнава вистинитосна таблица:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

***Пример* 2.** Исказот „Бројот $\sqrt{2}$ е ирационален реален број" е вистинит, зашто е конјункција од два вистинити искази: p: $\sqrt{2}$ е ирационален број и q: $\sqrt{2}$ е реален број. Исказот, пак, „Бројот $\sqrt{2}$ е рационален реален број" е невистинит, зашто претставува конјункција од еден невистиниот исказ p: $\sqrt{2}$ е рационален број и еден вистинит исказ q: $\sqrt{2}$ е реален број.

Дефиниција 3. *Дисјункција* на два искази p и q е исказ „p или q" (го означуваме со $p \vee q$), којшто е вистинит кога барем едниот од исказите p и q е вистинит, а е невистинит кога обата се невистинити.

Целокупниот тек на вистинитосните вредности на дисјункцијата $p \vee q$ е даден со оваа вистинитосна таблица:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	$\perp$	T
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$

***Пример* 3.** Исказот „Бројот 21 е непарен или е прост број“ е вистинит исказ, зашто е дисјункција од два искази p: 21 е непарен број, кој е вистинит исказ и q: 21 е прост број, кој е невистинит исказ.

Забелешка 1. Исказите „21 е непарен број или 21 е прост број“ и „или 21 е непарен број или 21 е прост број“ се различни и имаат различни вистинитосни вредности. Исказот „Или p или q“ се вика *исклучна дисјункција* и се означува со $p \veebar q$. Тој е вистинит кога едниот од исказите е вистинит, а другиот е невистинит, додека, пак, тој е невистинит кога обата искази p и q имаат иста вистинитосна вредност.

p	q	$p \veebar q$
⊤	⊤	⊥
⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥

Така, на пример, исказот „Или 5 е непарен или 5 е прост број“ е невистинит исказ (исклучна дисјункција), зашто и двата искази p: 5 е непарен број и q: 5 е прост број, се вистинити. Исказот, пак, „5 е непарен број или 5 е прост број“ е вистинит исказ (дисјункција).

Дефиниција 4. *Импликација* на исказите p и q е исказот „ако p, тогаш q “ (го означуваме со $p \Rightarrow q$), којшто е невистинит кога исказот p е вистинит и исказот q е невистинит, а во сите останати случаи е вистинит исказ.

Вистинитосната таблица за импликацијата е дадена со:

p	q	$p \Rightarrow q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤

***Пример* 4.** Да утврдиме која од следниве импликации е вистинит исказ.

а) Ако $12{,}5 \cdot 10 = 125$, тогаш $125 : 10 = 12{,}5$.

б) Ако $3^2 = (-3)^2$, тогаш $3 = -3$.

в) Ако $4 \mid 10$, тогаш $4 \mid 100$.

г) Ако $2+3=4$, тогаш $4+6=8$.

Решение. а) Вистинитосната вредност на дадената импликација е $\top$, зашто и двата искази $12{,}5\cdot 10=125$, $125:10=12{,}5$ се вистинити.

б) Вистинитосната вредност на дадената импликација е $\perp$, затоа што $\tau(3^2=(-3)^2)=\top$, а $\tau(3=-3)=\perp$.

в) Вистинитосната вредност на импликацијата е $\top$, зашто $\tau(4\,|\,10)=\perp$, а $\tau(4\,|\,100)=\top$.

г) Вистинитосната вредност на импликацијата е $\top$, зашто вистинитосната вредност и на двата искази $2+3=4$ и $4+6=8$ е $\perp$.

Забелешка 2. Од посебно значење се оние импликации $p\Rightarrow q$, при кои исказите p и q се сврзани со содржинска, т. е. со причинско-последична врска.

Со поимот импликација е поврзана одредена терминологија. Потребно е таа веднаш да се усвои за понатаму да се избегнат тешкотии во одредени математички дискусии. Во една импликација $p\Rightarrow q$, исказот p го нарекуваме *претпоставка*, а исказот q *заклучок*.

Импликацијата $p\Rightarrow q$ во математика се искажува и на следниве начини:

(1) „p го повлекува q“ ;

(2) „од p следува q“ ;

(3) „секогаш кога p, тогаш q“.

(4) „p е доволен услов за q“ ;

(5) „q е потребен услов за p“ ;

(6) „доволен услов за q е p“ ;

(7) „потребен услов за p е q“ .

Во првите четири реченици p се спомнува пред q, а од нив првите три се очигледни. Но, во четвртиот случај е потребна одредена внимателност. Да забележиме и дека постои разлика помеѓу (4) и (5) што се однесува на редоследот на појавување на исказите p и q. Покрај тоа, (6) лесно може да се добие од (4), а (7) од (5). За да ги избегнеме тешкотиите при усвојувањето на овие начини на искажување, подетално ќе ги разгледаме поимите доволен услов и потребен услов за некое тврдење.

Доволен услов на некое тврдење се вика таков услов при чие исполнување даденото тврдење задолжително е вистинито.

Потребен услов (или *неопходно следство*) на некое тврдење е таков услов без чие исполнување не може да биде точно даденото тврдење. Ако потребниот услов е исполнет, даденото тврдење може да биде вистинито, но не мора.

Следниот дијаграм може да помогне да се запомни разликата помеѓу поимите потребен услов и доволен услов:

p	го повлекува	q
$\uparrow$		$\uparrow$
доволен услов		потребен услов

Поимите потребен услов и доволен услов се многу важни во математиката поради нивната употреба при формулирање и докажување разни математички тврдења. Математичко тврдење коешто е вистинито, а неговата вистинитост е потврдена со доказ, се вика *теорема*.

***Пример* 5.** Исказот p: „Бројот n завршува со 0“ е доволен услов за исказот q: „Бројот n е делив со 5“. Притоа, исказот p во овој случај не е потребен услов за q, зашто има и други броеви што се деливи со 5, а не завршуваат со 0.

Тврдењето „Ако бројот n завршува со 0, тогаш тој број е делив со 5“, со помош на терминот „доволен услов“ може да се искаже и на следниов начин: „Доволен услов за бројот n да е делив со 5 е тој број да завршува со 0“.

Употребата на зборот потребен во (5) обично предизвикува забуна. Да забележиме дека да се рече „q е потребен услов за p“ не значи дека q сам за себе е доволен да го гарантира p. Повеќе би се рекло дека она што го вели е: q мора да важи пред воопшто да може да има каков било збор дека важи p.

***Пример* 6.** Да ја разгледаме теоремата: „Ако еден четириаголник $ABCD$ е правоаголник, тогаш неговите дијагонали се еднакви меѓу себе.“

Заклучокот „дијагоналите во четириаголникот $ABCD$ се еднакви меѓу себе“ е потребен услов за претпоставката „еден четириаголник $ABCD$ е правоаголник“. Оттука е јасно дека ниту еден четириаголник чиишто дијагонали не се еднакви не е правоаголник.

Од друга страна, потребниот услов може да биде исполнет (на пример, „четириаголникот $ABCD$ има еднакви дијагонали“), а да не е последица од претпоставката „четириаголникот $ABCD$ е правоаголник“. Имено, четириаголникот $ABCD$ може да биде и рамнокрак трапез.

Оваа теорема може да се искаже и на следниов начин: „Потребен услов за еден четириаголник да е правоаголник е тој четириаголник да има еднакви дијагонали.“

Забелешка 3. Импликацијата „ако q, тогаш p“ ($q \Rightarrow p$) се нарекува *обратен исказ* на исказот „ако p, тогаш q“. Да забележиме дека терминот „обратен исказ“ не значи исто што и терминот „спротивен исказ“. Имено, *спро-*

тивен исказ на исказот $p \Rightarrow q$ („ако p, тогаш q“) е исказот $\neg q \Rightarrow \neg p$ („ако $\neg q$, тогаш $\neg p$“; читај: „ако не е q, тогаш не е p“, т. е. „ако не е исполнето q, тогаш не е исполнето p“).

Дефиниција 5. *Еквиваленција* на два искази p и q е исказот „p ако и само ако q“ (го означуваме со $p \Leftrightarrow q$), којшто е вистинит кога исказите p и q имаат исти вистинитосни вредности, а е невистинит кога исказите p и q имаат различни вистинитосни вредности.

Вистинитосната таблица за еквиваленција е дадена со:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T

Да забележиме дека изразот „ако и само ако“ понекогаш се пишува како „акко“, за да се скрати пишувањето.

***Пример* 7.** Да утврдиме која од следниве еквиваленции е вистинит исказ.

а) $3^3 = 27$ ако и само ако $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

б) $5^3 = 5 \cdot 3$ ако и само ако $4^3 = 4 \cdot 3$.

в) $2 > 3$ ако и само ако $3 > 2$.

Решение. а) Вистинитосната вредност на дадената еквиваленција е T, зашто и двата искази $3^3 = 27$, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ се вистинити.

б) Вистинитосната вредност на дадената еквиваленција е T, зашто и двата искази се невистинити ($5^3 = 125 \neq 15 = 5 \cdot 3$ и $4^3 = 64 \neq 12 = 4 \cdot 3$).

в) Вистинитосната вредност на дадената еквиваленција е $\perp$, зашто исказот $2 > 3$ е невистинит, а исказот $3 > 2$ е вистинит.

Забелешка 5. Еквиваленцијата „p ако и само ако q“ се искажува и на следниве начини:

1) p тогаш и само тогаш кога q;

2) p е еквивалентно со q;

3) p е потребен и доволен услов за q.

Потребен и доволен услов на некое тврдење се вика таков услов, без чие исполнување тврдењето не е исполнето, а при неговото исполнување тврдењето задолжително е вистинито.

***Пример* 8.** Теоремата: „Еден четириаголник е паралелограм ако и само ако неговите дијагонали заемно се преполовуваат“, може да се се искаже на следниве начини:

„Потребен и доволен услов за еден четириаголник да биде паралелограм е неговите дијагонали заемно да се преполовуваат.“

„Потребен и доволен услов за дијагоналите на еден четириаголник заемно да се преполовуваат е тој четириаголник да биде паралелограм.“

Понатаму ќе разгледуваме сложени искази и зависноста на нивната вистинитосна вредност од вистинитосните вредности на исказите од кои се формирани.

Задачи за вежбање

1. Одреди ја вистинитосната вредност на следниве искази:

а) Бројот 5472 е делив со 3 и бројот 5472 е делив со 4.
б) Бројот 5967 е делив со 13 и со 8.
в) $\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{7}>1\right)\vee\left(\frac{5}{4}-\frac{4}{3}>0\right)$.
г) Ако $6\,|\,54$, тогаш $3\,|\,27$.
д) Ако $\frac{1}{2}<2$, тогаш $\frac{4}{3}<1$.
ѓ) $4^2=8$ ако и само ако $3^2=6$.
е) 36 не е делив со 8.

Решение. а) Дадени се исказите p: бројот 5472 е делив со 3 и q: бројот 5472 е делив со 4. Вистинитосната вредност и на p и на q е $\top$, па според тоа вистинитосната вредност дадениот исказ $p\wedge q$ е $\top$.

б) Во овој пример исказите се p: бројот 5967 е делив со 13 и q: бројот 5967 е делив со 8, а се бара да се одреди вистинитосната вредност на исказот $p\wedge q$. Бидејќи $\tau(p)=\top$, а $\tau(q)=\perp$, следува дека $\tau(p\wedge q)=\perp$.

в) Даден е исказот p: $\frac{7}{5}-\frac{3}{7}>1$, чијашто вистинитосна вредност е $\tau(p)=\perp$ (зашто $\frac{7}{5}-\frac{3}{7}=\frac{49-15}{35}=\frac{34}{35}<1$) и исказот q: $\frac{5}{4}-\frac{4}{3}>0$, чијашто вистинитосна вредност е $\tau(q)=\perp$ ($\frac{5}{4}-\frac{4}{3}=\frac{15-16}{12}=-\frac{1}{12}<0$). Се бара да се определи вистинитосната вредност на исказот $p \vee q$. Од дефиницијата за дисјункција следува дека $\tau(p \vee q) = \perp$.

г) Во овој пример исказите се p: $6 \mid 54$ и q: $3 \mid 27$, а се бара да се одреди вистинитосната вредност на импликацијата $p \Rightarrow q$. Бидејќи и двата искази имаат вистинитосна вредност T, следува дека $\tau(p \Rightarrow q) = \mathsf{T}$.

д) И во овој пример станува збор за одредување на вистинитосната вредност на импликацијата $p \Rightarrow q$, каде што p: $\frac{1}{2} < 2$ и q: $\frac{4}{3} < 1$. Бидејќи $\tau(p) = \mathsf{T}$, а $\tau(q) = \perp$, следува дека $\tau(p \Rightarrow q) = \perp$.

ѓ) Дадени се исказите p: $4^2 = 8$ и q: $3^2 = 6$, а се бара да се одреди вистинитосната вредност на еквиваленцијата $p \Leftrightarrow q$. И двата искази имаат иста вистинитосна вредност $\perp$, па според тоа $\tau(p \Leftrightarrow q) = \mathsf{T}$.

е) Во овој пример станува збор за негација на исказот p: 36 е делив со 8. Бидејќи $\tau(p) = \perp$, следува дека $\tau(\neg p) = \mathsf{T}$.

2. Одреди кои од следниве искази е вистинит:

а) $5 \geq 5$; б) $7 \leq 8$; в) $8 \geq 10$.

Решение. Да забележиме дека симболите $\geq$ и $\leq$ се читаат како: „... е поголем или еднаков на...“ и „... е помал или еднаков на...“. Според тоа, во сите примери станива збор за дисјункција на два искази и тоа:

а) p: $5 > 5$, q: $5 = 5$, па $\tau(p \vee q) = \tau(\perp \vee \mathrm{T}) = \mathrm{T}$.

б) p: $7 < 8$, q: $7 = 8$, па $\tau(p \vee q) = \tau(\mathrm{T} \vee \perp) = \mathrm{T}$.

в) p: $8 > 10$, q: $8 = 10$, па $\tau(p \vee q) = \tau(\perp \vee \perp) = \perp$.

3. Искажи ги со помош на изразите „потребен услов“ и „доволен услов“, следниве искази:

1) Ако еден четириаголник е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.

2) Ако a е корен на полиномот $P(x)$, тогаш $P(x)$ е делив со $x - a$.

Решение. 1) а. „Еден четириаголник е ромб е доволен услов за неговите дијагонали да се заемно нормални.“ или „Доволен услов за дијагоналите во еден четириаголник да се заемно нормални, е тој да биде ромб.“

б. „Дијагоналите во еден четириаголник се заемно нормални е потребен услов за тој четириаголник да биде ромб.“ или „Потребен услов за еден четириаголник да биде ромб е неговите дијагонали да се заемно нормални.“

2) а. „a е корен на полиномот $P(x)$ е доволен услов за $P(x)$ да биде делив со $x-a$.“ или „ Доволен услов за полиномот $P(x)$ да е делив со $x-a$ е a да е корен на $P(x)$.“

б. „Полиномот $P(x)$ е делив со $x-a$ е потребен услов a да е корен на $P(x)$.“ или „ Потребен услов a да е корен на полиномот $P(x)$ е $P(x)$ да е делив со $x-a$.“

4. Даден е исказот *p*: „Четириаголникот *ABCD* е паралелограм“. Утврди дали исказите дадени подолу се потребен услов за даденото тврдење и дали се и доволен услов:

а) $AB \parallel CD$; б) $\overline{AB}=\overline{CD} \wedge \overline{AD}=\overline{BC}$; в) $\measuredangle A+\measuredangle B=180^\circ$;

г) $\measuredangle A=\measuredangle C$; д) $AB \parallel CD \wedge \measuredangle A=\measuredangle C$.

Решение. Секое од тврдењата а) – д) е потребен услов за даденото тврдење. Имено, ако четириаголникот *ABCD* е паралелограм, тогаш сите тврдења а) – д) се точни, но ако четириаголникот *ABCD* е таков што $AB \parallel CD$, не мора да следува дека *ABCD* е паралелограм (може да биде, на пример, трапез), па така тврдењето под а) не е и доволен услов. Слично може да се аргументираат и барањата под в) и г), додека тврдењата под б) и д) се и потребен и доволен услов за даденото тврдење.

5. Теоремата: „Ромб има две оски на симетрија“, да се формулира со користење на зборовите:

а) „ако..., тогаш...“; б) „потребен услов...“;

в) „доволен услов...“; г) „секогаш кога...“.

Решение. Оваа теорема се состои од два искази:

p: Четириаголникот е ромб.

q: Четириаголникот има две оски на симетрија.

Така, дадената теорема се искажува вака во бараната форма:

а) „Ако еден четириаголник е ромб, тогаш тој има две оски на симетрија“.

б) „Еден четириаголник има две оски на симетрија е потребен услов за тој четириаголник да биде ромб.“ или „Потребен услов за еден четириаголник да биде ромб, е тој четириаголник да има две оски на симетрија.“

в) „ Еден четириаголник е ромб е доволен услов тој да има две оски на симетрија.“ или „Доволен услов за еден четириаголник да има две оски на симетрија е тој четириаголник да биде ромб.“

г) Секогаш кога четириаголникот е ромб, четириаголникот има две оски на симетрија.

1.2. Исказни формули

Исказните формули, во општ случај, се сложени реченици формирани од некои почетни искази со помош на логички сврзници. Ако новите сложени реченици се искази, тогаш можеме да ја продолжиме постапката на формирање сè посложени и посложени реченици, кои ги нарекуваме *исказни формули* или кратко – формули. Ваквото формирање сложени реченици ќе го дефинираме прецизно.

Со Σ го означуваме множеството наречено *азбука* (или *алфабет*), коешто е унија од следниве множества

1. исказни букви $p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots, p_n, q_n, r_n, \dots$;
2. логички сврзници $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg\}$;
3. логички константи $\{\top, \bot\}$
4. помошни симболи $\{\ (\ ,\ )\ \}$.

Забелешка 1. Множеството исказни букви е пребројливо (в. 5.3.). Елементите $p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots, p_n, q_n, r_n, \dots$ и $\{\top, \bot\}$ се викаат *атомарни исказни формули*. Да забележиме дека множеството логички константи $\{\top, \bot\}$ не мора да се воведува како дел од исказните формули, т.е. 3. може и да се изостави.

Дефиниција 1. *Исказна формула* (кратко *формула*) се дефинира со:

(i) Исказните букви и логичките константи се исказни формули.

(ii) Ако A и B се формули, тогаш исказни формули се и
$(A \wedge B), (A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ и $(\neg A)$.

(iii) Исказни формули се само тие изрази што се добиваат со конечна примена на правилата (i) и (ii).

Исказните формули обично се означуваат со големите букви од латиница–цата.

Забелешка 2. Ваквиот начин на дефинирање на исказните формули овоз–можува да се формираат формули со одредена должина (бројот на симболи од азбуката во дадената формула), со помош на формули со помала должина. Оваа дефиниција е пример за *рекурентна дефиниција*.

***Пример* 1.** Формули се на пример:

$$(p \wedge q),\ (((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow q),\ ((\neg p) \Rightarrow q),\ (p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)), \dots$$

Не се формули: $\Rightarrow pq$, $p \vee q$, $p \wedge p \vee q$, $\Rightarrow p \neg$. Изразот $p \vee q$ не е формула. Според (i), p и q се формули, но според (ii), $(p \vee q)$ е формула, а не $p \vee q$, зашто во неа недостигаат надворешните загради.

Дефиниција 2. Една формула B е *потформула* од формула A ако и само ако B е формула којашто е дел од формулата A.

Пример 2. Потформули од формулата $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)))$ се: $(p \Leftrightarrow q)$, $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$, $(p \Rightarrow q)$, $(q \Rightarrow p)$, p, q.

За да се избегне оптоварувањето и за да се овозможи подобра „читливост“ на една исказна формула, ќе воведеме договор за изоставање на некои загради во формулите.

а) *Изоставање на надворешните загради*. На пример, наместо да пишуваме $(p \wedge q)$ ќе пишуваме $p \wedge q$; наместо $((p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r))$, ќе пишуваме $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$ и сл.

б) *На логичките операции им доделуваме различни приоритети на „сврзување“, односно на „раздвојување“*. Имено, $\neg$ сврзува најсилно, $\wedge$ и $\vee$ послабо, а $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$ најслабо. Според тоа, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$ посилно ја раздвојуваат формулата отколку $\wedge$ и $\vee$. На пример, $(p \wedge q) \Rightarrow (q \vee r)$ можеме да ја запишеме и вака: $p \wedge q \;\Rightarrow\; q \vee r$; $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$ како $p \wedge q \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$ (овде заградите не можеме да ги изоставиме зашто $\Leftrightarrow$ и $\Rightarrow$ имаат иста „сила“. Кога би ги изоставиле, би добиле $p \wedge q \Leftrightarrow p \Rightarrow r$, а ова не е формула).

Исто така, заради поголема прегледност, ќе ги изоставаме заградите секаде каде што се јавува симболот $\neg$ како негација на исказна буква или онаму каде што се јавува последователно неколку пати. На пример: наместо $(p \vee q) \wedge (\neg p)$ ќе пишуваме $(p \vee q) \wedge \neg p$; наместо $\neg(\neg(\neg p))$, ќе пишуваме $\neg\neg\neg p$ и сл.

Од посебен интерес е одредувањето на вистиниосната вредност на исказните формули. Затоа, во математичката логика е изградена посебна структура, таканаречена исказна алгебра.

Дефиниција 3. *Исказна алгебра* се нарекува подредената шестка

$$(\{\top, \bot\}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg),$$

кај која првата компоненета е двоелементното множество $\{\top, \bot\}$, додека втората, третата, четвртата и петтата компонента се бинарни операции на множеството $\{\top, \bot\}$, а шестата е унарна операција на $\{\top, \bot\}$, дефинирани со следниве Кејлиеви шеми:

$\wedge$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$

$\vee$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

$\Rightarrow$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$

$\Leftrightarrow$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$

p	$\neg p$
$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$

Исказните букви $p, q, r, \ldots, p_1, q_1, r_1, \ldots, p_n, q_n, r_n, \ldots$ ги интерпретираме како елементи на множеството $\{\top, \bot\}$ од исказната алгебра, а логичките сврзници $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ ги интерпретираме како операции на исказната алгебра кои се означени со истите симболи, а дефинирани со Кејлиевите шеми.

Дефиниција 4. По претходно договорена вредност на исказните букви p_i како елементи на множеството $\{\top, \bot\}$ дефинираме:

1. Вредност на формулата p_i да е вредноста на исказната буква p_i. Означуваме: $\tau(p_i)$.

2. Ако $\tau(A)$ е вредност на формулата A и $\tau(B)$ е вредност на формулата B, тогаш:

$\tau(A) \wedge \tau(B)$	е вредност на формулата	$A \wedge B$
$\tau(A) \vee \tau(B)$	е вредност на формулата	$A \vee B$
$\tau(A) \Rightarrow \tau(B)$	е вредност на формулата	$A \Rightarrow B$
$\tau(A) \Leftrightarrow \tau(B)$	е вредност на формулата	$A \Leftrightarrow B$
$\neg\, \tau(A)$	е вредност на формулата	$\neg A$

На пример, ако исказната буква p има вредност $\top$, т.е. $\tau(p) = \top$, а исказната буква q има вредност $\bot$, т.е. $\tau(q) = \bot$, тогаш формулата $\neg p \vee (q \Rightarrow p)$ има вредност $\tau(\neg p \vee (q \Rightarrow p)) = \neg \tau(p) \vee (\tau(q) \Rightarrow \tau(p)) = \neg \top \vee (\bot \Rightarrow \top) = \bot \vee \top = \top$.

Ако една формула A е составена (само) од исказните букви $p_1, p_2, \ldots, p_n$, тогаш ќе пишуваме $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Формулата $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ добива вредност $\top$ или $\bot$ за секој избор на исказните букви $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Еден таков избор на исказните букви $p_1, p_2, \ldots, p_n$, претставува подредена n-ка од симболи $\top$, $\bot$. Такви подредени n-ки има вкупно 2^n и за секоја таква n-ка формулата $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ добива одредена вредност.

Интерпретација на едно множество исказни формули претставува доделување вредности на исказните букви коишто учествуваат во сите тие формули. На тој начин се одредуваат вредностите на сите тие формули во дадената интерпретација. За да се одредат вредностите на една формула во сите интерпретации се користат вистинитосни таблици. Заради тоа што во секоја интерпретација на формулата одговара еден распоред на симболите $\top$, $\bot$ за секоја исказна буква, во вистинитосната таблица се внесуваат сите тие распореди (всушност подредените n-ки коишто ги спомнавме погоре).

На пример, за формула од две букви $A(p, q)$ имаме вкупно 4 подредени парови: $(\top, \top)$, $(\top, \bot)$, $(\bot, \top)$, $(\bot, \bot)$. Така ја добиваме вистинитосната таблица за формулата $A(p,q)$. Ако $A(p,q)$ е формулата $p \wedge (q \Rightarrow p)$, тогаш нејзината вистинитосна таблица е:

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \wedge (q \Rightarrow p)$
⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊥

Задачи за вежбање

1. Дадено е конечно множество од бинарни низи со должина 5:

$$\begin{gathered}\{(00000),(10000),(11000),(11100),(11110),\\(11111),(01111),(00111),(00011),(00001)\}\end{gathered}.$$

Објасни како може да се претстави ова множество во исказна формула.

Решение. За секој $1 \le i \le 5$, p_i е исказ којшто интуитивно значи дека на i-то-то место има 1. Очигледно е дека $\neg p_i$ значи дека на i-тото место нема 1, т.е. на i-тото место има 0. Исказната формула е следната:

$$\begin{aligned}&(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_5) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_5) \vee\\ &\vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_5) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_5) \vee\\ &\vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge \neg p_5) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge p_5) \vee\\ &\vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge p_5) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge p_5) \vee\\ &\vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_4 \wedge p_5) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge p_5).\end{aligned}$$

2. Состави вистинитосна таблица за следниве исказни формули:

а) $A: \neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$;

б) $B: p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$.

Решение. а) Прво ќе ги најдеме сите потформули од дадената формула.

Покрај исказните букви, тоа се: $\neg q$, $p \wedge \neg q$, $p \Rightarrow q$, $\neg(p \Rightarrow q)$. Потоа, за сите интерпретации на исказните букви ги определуваме вистинитосните вредности на сите потформули, а на крајот – и на бараната формула.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤

б) Прво ќе ги најдеме сите потформули од дадената формула. Покрај исказ–ните букви, тоа се: $\neg r$ и $q \Leftrightarrow \neg r$. Потоа, за сите интерпретации на исказните букви (кои ги има вкупно $2^3 = 8$) ги определуваме вистинитосните вредности на сите потформули, а на крајот – и на бараната формула.

p	q	r	$\neg r$	$q \Leftrightarrow \neg r$	$p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥

3. Опиши ја со логички јазик состојбата на семафорите во разни случаи и запиши ги исказните формули коишто ги изразуваат следниве факти:

а) Семафорот покажува или зелено или црвено или жолто.

б) Семафорот се менува од зелено во жолто, од жолто во црвено и од црвено во зелено.

в) Семафорот може да ја задржи истата боја 3 секунди.

Решение. Ги формулираме следниве искази:

p_k : Семафорот покажува зелено во k-та секунда.

q_k : Семафорот покажува црвено во k-та секунда.

r_k : Семафорот покажува жолто во k-та секунда.

а) „Семафорот покажува или зелено или црвено или жолто“ се претставува во вид на следнава исказна формула:

$$\left(p_k \Leftrightarrow (\neg q_k \wedge \neg r_k)\right) \wedge \left(q_k \Leftrightarrow (\neg p_k \wedge \neg r_k)\right) \wedge \left(r_k \Leftrightarrow (\neg p_k \wedge \neg q_k)\right).$$

б) „Семафорот се менува од зелено во жолто, од жолто во црвено и од црвено во зелено“ се претставува во вид на следнава исказна формула:

$$\left(p_{k-1} \Rightarrow (p_k \vee r_k)\right) \wedge \left(r_{k-1} \Rightarrow (r_k \vee q_k)\right) \wedge \left(q_{k-1} \Rightarrow (q_k \vee p_k)\right).$$

в) „Семафорот може да ја задржи истата боја 3 секунди“ се претставува во вид на следнава исказна формула:

$$\left(p_{k-3} \wedge p_{k-2} \wedge p_{k-1} \Rightarrow \neg p_k\right) \wedge \left(q_{k-3} \wedge q_{k-2} \wedge q_{k-1} \Rightarrow \neg q_k\right)$$
$$\wedge \left(r_{k-3} \wedge r_{k-2} \wedge r_{k-1} \Rightarrow \neg r_k\right).$$

1. 3. Тавтологии, методи за докажување и нивна примена

Во претходната лекција видовме дека постојат исказни формули коишто добиваат вредност T независно од тоа какви вредности примаат исказните букви од кои е составена таа формула (в. на пример, зад. 2. а) во 1.2). Такви се, на пример, и формулите: $p \vee \neg p$, $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ и други. Таквите формули имаат посебна улога во математичката логика.

Дефиниција 1. За една формула A велиме дека е *тавтологија* ако за сите вредности на своите исказни букви има вредност T.

Тавтологиите ги означуваме со $\models A$.

Дефиниција 2. За една формула A велиме дека е *контрадикција* ако за сите вредности на своите исказни букви има вредност $\perp$.

Според тоа, една формула A е тавтологија ако и само ако $\neg A$ е контрадикција.

Тавтологиите се важна класа формули, зашто секоја тавтологија е некаков логички закон. Подолу е наведен еден *список од тавтологии* со нивните вообичаени називи:

1.	$p \Rightarrow p$	(рефлексивност на импликацијата)
2.	$p \vee \neg p$	(закон за исклучено трето)
3.	$\neg(p \wedge \neg p)$	(закон за непротивречност)
4.	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	(инволутивност на негацијата)
5.	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	(вистина од произволно)
6.	$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	(од лажно произволно)

7.	$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p)) \Rightarrow p$	(Пирсов закон)
8.	$(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$	(закон за заклучување од спротивното)
9.	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	(закон за контрапозиција)
10.	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$	(закон за замена на импликацијата)
11.	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	(закон за замена на еквиваленцијата)
12.	$(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$	(закон за сведување на апсурд)
13.	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	(транзитивност на импликацијата или закон за силогизам)
14.	$((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$	(транзитивност на еквиваленцијата)
15.	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow p \wedge q)$	(закон за прва последица)
16.	$p \vee p \Leftrightarrow p$	(идемпотентност на дисјункцијата)
17.	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	(идемпотентност на конјункцијата)
18.	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	(комутативен закон за дисјункција)
19.	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	(комутативен закон за конјункција)
20.	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	(асоцијативен закон за дисјункција)
21.	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	(асоцијативен закон за конјункција)
22.	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(дистрибутивност на $\vee$ спрема $\wedge$)
23.	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(дистрибутивност на $\wedge$ спрема $\vee$)
24.	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	(закон за апсорпција)
25.	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	(закон за апсорпција)
26.	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	(Де Морганов закон)
27.	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	(Де Морганов закон)
28.	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$	(Modus ponens – закон за потврдување)
29.	$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$	(Modus tollens – закон за одрекување)
30.	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$	(доказ со набројување)

Од практични причини е корисно меѓу исказните букви да се земат и двете константи $\top$ и $\bot$, и соодветно да се интерпретираат како точно и неточно. Така добиваме дека и следниве исказни формули се тавтологии:

1. $p \vee \top \Leftrightarrow \top$ 2. $p \vee \bot \Leftrightarrow p$ 3. $p \wedge \top \Leftrightarrow p$ 4. $p \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$

5. $(p \Rightarrow \top) \Leftrightarrow \top$ 6. $(p \Rightarrow \bot) \Leftrightarrow \neg p$ 7. $(\top \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$ 8. $(\bot \Rightarrow p) \Leftrightarrow \top$

Својство 1. *Ако A и $A \Rightarrow B$ се тавтологии, тогаш и B е тавтологија.*

Доказ. Нека $p_1, p_2, ..., p_n$ се сите исказни букви во формулите A и B. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека формулата B не е тавтологија. Тогаш постои комбинација од вредностите на исказните букви $p_1, p_2, ..., p_n$ за кои формулата B има вредност $\perp$, т.е. $\tau(B) = \perp$. Но, од условот имаме дека A и $A \Rightarrow B$ се тавтологии, т.е. $\tau(A) = \top$ и $\tau(A \Rightarrow B) = \top$, па значи $\tau(B) = \top$, што противречи на претпоставката дека $\tau(B) = \perp$. □

Својство 2. *Ако $A(p_1, p_2, ..., p_n)$ е тавтологија и $B_1, B_2, ..., B_n$ се некои исказни формули од исказните букви $p_1, p_2, ..., p_n$, тогаш и $A(B_1, B_2, ..., B_n)$ е тавтологија.*

Доказ. Нека сите исказни букви $p_1, p_2, ..., p_n$ во формулите $B_1, B_2, ..., B_n$ имаат некакви вредности. Нека вредностите на тие формули се $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \{\perp, \top\}$, соодветно, т. е. $\tau(p_i) = \alpha_i$, за секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Тогаш:

$$\tau(A(B_1, B_2, ..., B_n)) = \tau(A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = \tau(A(p_1, p_2, ..., p_n)) = \top. \ \square$$

Својство 3. *Ако A и B се формули и F е формула во којашто формулата A е потформула (пишуваме $F(A)$), тогаш*

$$\models (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (F(A) \Leftrightarrow F(B)).$$

Доказ. Нека сите исказни букви што учествуваат во формулата што треба да ја докажеме имаат некаква вредност. Ќе покажеме дека за секоја вредност на исказните букви $\tau\big((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (F(A) \Leftrightarrow F(B))\big) = \top$.

Навистина, ако $\tau(A \Leftrightarrow B) = \top$, тогаш $\tau(A) = \tau(B)$, од што следува дека и $\tau(F(A)) = \tau(F(B))$, а оттука $\tau\big(F(A) \Leftrightarrow F(B)\big) = \top$, па значи $\tau\big(\top \Rightarrow \top\big) = \top$. Ако $\tau(A \Leftrightarrow B) = \perp$, тогаш $\tau(A) \neq \tau(B)$, од што следува дека и $\tau(F(A)) \neq \tau(F(B))$, а оттука $\tau\big(F(A) \Leftrightarrow F(B)\big) = \perp$, па значи $\tau\big(\perp \Rightarrow \perp\big) = \top$. Според тоа, формулата $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (F(A) \Leftrightarrow F(B))$ е тавтологија. □

Во овој дел ќе наведеме пет *методи за докажување дека дадена исказна формула е тавтологија.*

I. ***Метод на вистинитосна таблица.*** Овој метод се состои во креирање вистинитосна таблица за дадена формула. Притоа, ги земаме сите можни комбинации од вредностите на исказните букви, па ако во колоната на таа формула за сите вредности на своите исказни букви има вредност $\top$, тогаш таа формула е тавтологија, а во спротивно – не е тавтологија.

***Пример* 1.** Со помош на вистинитосна таблица ќе покажеме дека формулата $\neg p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$ е тавтологија.

Ја конструираме следнава вистинитосна таблица:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \wedge (p \vee q)$	$\neg p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$

II. ***Метод за сведување на противречност.*** Овој метод го користи фактот дека ако една формула е тавтологија, тогаш за сите вредности на исказните букви од таа формула, таа не може да има вредност $\perp$. Овој метод е погоден за користење кај формули од обликот $A \Rightarrow B$, каде што A и B се некои формули.

***Пример* 2.** Да покажеме дека е тавтологија формулата

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)).$$

Да го претпоставиме спротивното, т. е. дека за некои вредности на исказните букви p, q и r, вредноста на формулата е $\perp$. Тогаш $\tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \top$ и $\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) = \perp$. Од второто равенство следува дека $\tau(p \Rightarrow q) = \top$ и $\tau(p \Rightarrow r) = \perp$. Од последното равенство добиваме дека $\tau(p) = \top$ и дека $\tau(r) = \perp$. Заменувајќи ја добиената вредност за p во равенката $\tau(p \Rightarrow q) = \top$, добиваме дека $\tau(q) = \top$. Но, тогаш

$$\tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \tau(\top \Rightarrow (\top \Rightarrow \perp)) = \tau(\top \Rightarrow \perp) = \perp,$$

што противречи на претпоставката дека $\tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \top$. Според тоа, формулата $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ е тавтологија.

III. ***Метод на еквиваленциски трансформации.*** Наоѓаме формула B којашто е еквивалентна со почетната формула A, т.е. $A \sim B$, за која лесно можеме да провериме дека е тавтологија. Притоа, релацијата $\sim$ на множеството исказни формули се дефинира вака: $A \sim B$ ако и само ако $\tau(A) = \tau(B)$ за сите вредности на исказните букви во формулите A и B и важи $\models A \Leftrightarrow B$.

***Пример* 3.** Да покажеме дека формулата

$$(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee r)$$

е тавтологија користејќи го методот на еквиваленциски трансформации.

Дадената формула ја трансформираме со примена на веќе познати тавтологии, при што ја добиваме следната низа еквивалентни формули:

$(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$

$((p \vee r) \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (дистрибутивен закон за првите две потформули)

$((p \vee r) \vee (p \wedge r)) \wedge (q \vee (p \wedge r))$

Асоцијативниот закон за $\vee$ го применуваме во првиот пар загради, т. е. се ослободуваме од заградите во формулата $(p \vee r) \vee (p \wedge r)$ (коишто потоа и ги прераспределуваме), а кај вториот пар загради применуваме дистрибутивен закон на $\vee$ спрема $\wedge$. Добиваме:

$(p \vee (r \vee (p \wedge r))) \wedge ((q \vee p) \wedge (q \vee r))$.

Од законот за апсорпција имаме дека $r \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow r$, па ја добиваме формулата $(p \vee r) \wedge (q \vee p) \wedge (q \vee r)$, што требаше да се докаже.

IV. ***Метод за сведување исказна формула до конјунктивна форма***. Овој метод е специјален случај од методот на еквиваленциски трансформации. Имено, дадената формула се сведува на формула во *конјунктивна форма*, т. е. на формула со обликот $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$, при што секоја од формулите A_i е од облик $p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n$, каде што p_i е исказна буква или негација на таа исказна буква.

Пример **4.** Да покажеме дека формулата $(p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow \neg p$ е тавтологија со помош на методот за сведување изказна формула во конјунктивна форма.

Со примена на веќе познати тавтологии ја сведуваме дадената формула во конјунктивна форма, т. е. ја добиваме следната низа еквивалентни формули:

$(p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow \neg p$

$(\neg p \vee (q \wedge \neg q)) \Rightarrow \neg p$ (закон за замена на импликацијата)

$\neg(\neg p \vee (q \wedge \neg q)) \vee \neg p$ (закон за замена на импликацијата)

$(\neg\neg p \wedge \neg(q \wedge \neg q)) \vee \neg p$ (Де Морганов закон)

$(p \wedge (\neg q \vee \neg\neg q)) \vee \neg p$ (Де Морганов закон)

$(p \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p$ (закон за двојна негација)

$(p \vee \neg p) \wedge ((\neg q \vee q) \vee \neg p)$ (дистрибутивен закон на $\vee$ спрема $\wedge$)

$(p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p)$ (асоцијативен закон)

Последната формула е точна за секоја вредност на променливите p, q и r, зашто $p \vee \neg p \Leftrightarrow \top$ (закон за исклучено трето), а од исти причини и

$q \vee \neg q \Leftrightarrow \top$, па $\tau(\neg q \vee q \vee \neg p) = \top$. Бидејќи последната формула е тавтологија и е еквивалентна со почетната формула, следува дека и почетната формула е тавтологија.

V. ***Дискусија по исказна буква***. Избираме една исказна буква (обично онаа којашто најчесто се јавува во дадената формула) и разгледуваме два случаја: прво, кога нејзината вредност е $\top$, а потоа кога нејзината вредност е $\perp$. За да биде дадената формула тавтологија, потребно и доволно е двете формули добиени со замената на тие вредности за исказната буква да бидат тавтологии.

***Пример* 5**. Да покажеме дека формулата

$$(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee r)$$

е тавтологија со методот дискусија по исказна буква.

Сите исказни букви се јавуваат ист број пати, па затоа сеедно е по која буква ќе ја изведуваме дискусијата. Ќе ја избереме буквата p.

Нека $\tau(p) = \top$. Во дадената формула ќе ја замениме вредноста на p, па ја добиваме формулата

$$(\top \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (\top \wedge r) \Leftrightarrow (\top \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (\top \vee r)\,.$$

Имајќи ги предвид тавтологиите 3. $p \wedge \top \Leftrightarrow p$ и 1. $p \vee \top \Leftrightarrow \top$, добиваме дека горната формула е еквивалентна со формулата

$$q \vee (q \wedge r) \vee r \Leftrightarrow \top \wedge (q \vee r) \wedge \top\,.$$

Од законот за апсорпција имаме дека $q \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow q$, па ја добиваме формулата $q \vee r \Leftrightarrow q \vee r$ којашто е тавтологија.

Нека $\tau(p) = \perp$. Тогаш, со замена на оваа вредност на p во дадената формула, ја добиваме формулата

$$(\perp \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (\perp \wedge r) \Leftrightarrow (\perp \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (\perp \vee r)\,.$$

Имајќи ги предвид тавтологиите 4. $p \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$ и 2. $p \vee \perp \Leftrightarrow p$, добиваме дека горната формула е еквивалентна со формулата

$$\perp \vee (q \wedge r) \vee \perp \Leftrightarrow q \wedge (q \vee r) \wedge r\,.$$

Од законот за апсорпција имаме дека $q \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow q$, па ја добиваме формулата $q \wedge r \Leftrightarrow q \wedge r$ којашто е тавтологија.

Значи, дадената формула е тавтологија.

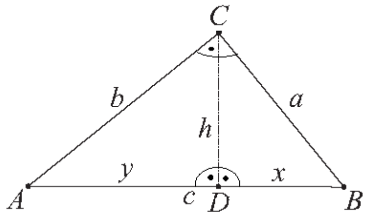
Примената на тавтологиите при решавање задачи е многу честа. Колку за илустрација, ќе наведеме два примера.

***Пример* 6**. Бројот $\sqrt{2}$ не е рационален.

Доказ. Да го претпоставиме спротивното, т. е. дека $\sqrt{2}$ е рационален број. Тогаш $\sqrt{2}$ може да се претстави во облик $\frac{p}{q}$, каде што p и q се цели броеви. Притоа, можеме да претпоставиме дека тие се заемно прости, т.е. дека НЗД$(p,q)=1$. Со квадрирање на равенството $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, добиваме дека $2=\frac{p^2}{q^2}$, т.е. дека $p^2=2q^2$. Тоа значи дека p^2 е парен број. Ако квадратот на еден број е парен, тогаш тој број е парен, па значи p е парен број. Тоа значи дека $p=2k$ за некој цел број k. Според тоа, $(2k)^2=2q^2$ повлекува $4k^2=2q^2$, што повлекува $q^2=2k^2$, од што следува дека q^2 е парен број, па значи q е парен број. Според тоа, НЗД (p,q) = 2, што противречи на фактот дека НЗД$(p,q)=1$. Според тоа, претпоставката дека $\sqrt{2}$ е рационален број не е добра, т. е. $\sqrt{2}$ е не е рационален број.

***Пример* 7**. Нека a, b и c се должини на страните во еден триаголник ABC. Ако триаголникот ABC е правоаголен, при што a и b се должините на катетите, а c е должината на хипотенузата, тогаш $c^2=a^2+b^2$. Обратно, ако за должините на страните во еден триаголник важи $c^2=a^2+b^2$, тогаш тој триаголник е правоаголен.

Доказ. Нека h е должината на висината спуштена од темето C кон хипотенузата. Таа висина го дели триаголникот на два правоаголни триаголници: $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$. Тие се слични со триаголникот ABC ($\measuredangle ACD=\measuredangle DBC$ и $\measuredangle DAC=\measuredangle BCD$ како агли со заемно нормални краци и $\measuredangle ADC=\measuredangle BDC=90^\circ$).



Да ставиме $\overline{AD}=y$ и $\overline{BD}=x$. Тогаш $x+y=c$. Од сличноста на $\triangle ADC$ со $\triangle ABC$ и на $\triangle BDC$ со $\triangle ABC$, соодветно, следува дека и $\triangle ADC$ е сличен со $\triangle BDC$. Оттука произлегуваат следниве три пропорции:

$$h:a=y:b,\quad h:a=b:c,\quad x:a=h:b.$$

Од втората пропорција $h:a=b:c$ следува дека $h=\frac{ab}{c}$; од третата пропорција $x:a=h:b$ следува дека $x=\frac{ah}{b}$, а од првата пропорција $h:a=y:b$ следува дека $y=\frac{hb}{a}$. Добиените вредности за x и y ги заменуваме во формулата $x+y=c$, па добиваме:

$$\frac{ah}{b}+\frac{hb}{a}=c \Rightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)h=c \Rightarrow h=\frac{c}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}.$$

Ако на левата страна од равенството го замениме $h=\frac{ab}{c}$, добиваме дека $\frac{ab}{c}=\frac{c}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}$, оттука следува дека $ab\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=c^2$, т.е. $a^2+b^2=c^2$.

Останува да го покажеме обратното тврдење.

Нека за должините на страните во $\triangle ABC$ важи равенството $c^2=a^2+b^2$. Да разгледаме сега, правоаголен триаголник чии должини на катетите се a и b. Според претходно покажаното, следува дека должината на хипотенузата на тој триаголник мора да е c. Значи, овој триаголник е складен со $\triangle ABC$ зашто нивните соодветни страни се еднакви. Тоа значи дека и соодветните агли се еднакви, од што следува дека дадениот триаголник ABC е правоаголен, што требаше да се докаже.

Задачи за вежбање

1. Провери дали формулата $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow\neg r)\Rightarrow(r\Rightarrow\neg p)$ е тавтологија со помош на:

а) вистинитосна таблица;

б) методот на сведување на противречност.

Решение. а) Ја формираме следнава вистинитосна таблица.

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	A $p\Rightarrow q$	B $q\Rightarrow\neg r$	C $A\wedge B$	D $r\Rightarrow\neg p$	$C\Rightarrow D$
T	T	T	⊥	⊥	T	⊥	⊥	⊥	T
T	T	⊥	⊥	T	T	T	T	T	T
T	⊥	T	⊥	⊥	⊥	T	⊥	⊥	T
T	⊥	⊥	⊥	T	⊥	T	⊥	T	T
⊥	T	T	T	⊥	T	⊥	⊥	T	T
⊥	T	⊥	T	T	T	T	T	T	T
⊥	⊥	T	T	⊥	T	T	T	T	T
⊥	⊥	⊥	T	T	T	T	T	T	T

Бидејќи во последната колона сите симболи се T, следува дека дадената формула е тавтологија.

б) Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека дадената формула не е тавтологија. Тогаш од тоа што $\tau\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \neg r) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p)\big) = \bot$, следува дека $\tau\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \neg r)\big) = \top$ и $\tau(r \Rightarrow \neg p) = \bot$. Од второто равенство имаме дека $\tau(r) = \top$ и $\tau(\neg p) = \bot$, па $\tau(p) = \top$.

Од друга страна, од равенството $\tau\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \neg r)\big) = \top$ следува дека $\tau(p \Rightarrow q) = \top$ и $\tau(q \Rightarrow \neg r) = \top$. Заменувајќи ја претходно добиената вредност на p во равенката $\tau(p \Rightarrow q) = \top$, добиваме дека $\tau(p \Rightarrow q) = \tau(\top \Rightarrow q) = \top$ од што следува дека мора $\tau(q) = \top$. Добиената вредност за q ја заменуваме во равенката $\tau(q \Rightarrow \neg r) = \top$, па добиваме $\tau(q \Rightarrow \neg r) = \tau(\top \Rightarrow \bot) = \bot$, што противречи на тврдењето дека $\tau(q \Rightarrow \neg r) = \top$.

Според тоа, претпоставката дека дадената формула не е тавтологија не е добра, т.е. таа е тавтологија.

2. Со помош на методот на сведување до конјунктивна форма докажи дека формулата $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee r)$ е тавтологија.

Решение. Со примена на веќе познати тавтологии ја сведуваме дадената формула во конјунктивна форма, т.е. ја добиваме следната низа еквивалентни формули:

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee r)$

$(\neg p \vee q) \Rightarrow (\neg (p \vee r) \vee q \vee r)$ (закон за замена на импликацијата)

$\neg (\neg p \vee q) \vee (\neg (p \vee r) \vee q \vee r)$ (закон за замена на импликацијата)

$(\neg \neg p \wedge \neg q) \vee ((\neg p \wedge \neg r) \vee q \vee r)$ (Де Морганов закон)

$(p \wedge \neg q) \vee ((\neg p \wedge \neg r) \vee q \vee r)$ (инволутивност на негацијата)

Во следните неколку чекори ќе го примениме дистрибутивниот на $\vee$ во однос на $\wedge$.

$(p \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg r \vee q \vee r))$

$\big((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q \vee r)\big) \wedge \big((p \wedge \neg q) \vee (\neg r \vee q \vee r)\big)$

$\big((p \vee \neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q \vee r)\big) \wedge \big((p \vee \neg r \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee q \vee r)\big)$

Од асоцијативниот закон за $\wedge$ имаме дека:

$$(p \vee \neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg r \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee q \vee r).$$

Од законот за исклучување на третото следува дека вредноста на секоја од формулите $p \vee \neg p \vee q \vee r$, $\neg q \vee \neg p \vee q \vee r$, $p \vee \neg r \vee q \vee r$, $\neg q \vee \neg r \vee q \vee r$ е $\top$, па значи и вредноста на последната формула е $\top$. Бидејќи таа е тавтологија и е еквивалентна со почетната формула, следува дека и почетната фор–мула е тавтологија.

3. Докажи дека следниве формули се тавтологии:

а) $\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \Leftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_k$;

б) $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k) \Leftrightarrow \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_k$;

в) $(p \Rightarrow p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k) \Leftrightarrow (p \Rightarrow p_1) \vee (p \Rightarrow p_2) \vee \ldots \vee (p \Rightarrow p_k)$;

г) $(p \Rightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \Leftrightarrow (p \Rightarrow p_1) \wedge (p \Rightarrow p_2) \wedge \ldots \wedge (p \Rightarrow p_k)$;

д) $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow p) \wedge (p_2 \Rightarrow p) \wedge \ldots \wedge (p_k \Rightarrow p)$;

ѓ) $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow p) \vee (p_2 \Rightarrow p) \vee \ldots \vee (p_k \Rightarrow p)$.

Решение. а) Доказот се изведува со индукција по k . За $k = 1$ се добива формулата $\neg p_1 \Leftrightarrow \neg p_1$ којашто е тавтологија. За $k = 2$ формулата се сведува на еден од Де Моргановите закони, па значи е тавтологија. Да претпоставиме дека формулата е тавтологија за $k = n$. За $k = n+1$ имаме:

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge p_{n+1}) \Leftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee \neg p_{n+1}.$$

Дека оваа формула е тавтологија ќе покажеме со дискусија по исказната буква p_{n+1} . Имено, ако $\tau(p_{n+1}) = \mathrm{T}$, тогаш формулата се сведува на

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \top) \Leftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee \bot$$

а таа е еквивалентна со $\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Leftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n$, која е тавтологија според индуктивната претпоставка. Ако $\tau(p_{n+1}) = \bot$, тогаш формулата се сведува на

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \bot) \Leftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee \top .$$

Притоа, $\tau(\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \bot)) = \mathrm{T}$ и $\tau(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee \mathrm{T}) = \mathrm{T}$,

па $\tau\big(\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \bot) \Leftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee \mathrm{T}\big) = \mathrm{T}$, па и во овој случај формулата е точна. Според тоа, таа е тавтологија.

б) Задачата може да се покаже на ист начин како под а), но овде во индуктивниот чекор ќе го користиме методот на еквиваленциски трансформации. Доказот ќе го изведеме со индукција по k . За $k = 1$ се добива формулата $\neg p_1 \Leftrightarrow \neg p_1$ којашто е тавтологија. За $k = 2$ формулата се сведува на еден од Де Моргановите закони, па значи е тавтологија. Да претпоставиме дека формулата е тавтологија за $k = n$. За $k = n+1$ имаме:

$$\begin{aligned} & \neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \vee p_{n+1}) \\ \Leftrightarrow\ & \neg\big((p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \vee p_{n+1}\big) && \text{(асоцијативен закон за } \vee \text{)} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \wedge \neg p_{n+1}$ (Де Морганов закон)

$\Leftrightarrow \left(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n\right) \wedge \neg p_{n+1}$ (индуктивна претпоставка)

$\Leftrightarrow \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n \wedge \neg p_{n+1}$ (асоцијативен закон за $\wedge$).

в) Задачата може едноставно да се реши со дискусија по исказната буква p. Имено, ако $\tau(p) = \top$, тогаш користејќи ја формулата 7. $(\top \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$, дадената формула се сведува на $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k \Leftrightarrow p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k$, што е тавтологија. Ако $\tau(p) = \perp$, тогаш од тавтологијата 8. $(\perp \Rightarrow p) \Leftrightarrow \top$ добиваме дека

$\tau(\perp \Rightarrow p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k) = \top$, а $\tau\big((\perp \Rightarrow p_1) \vee (\perp \Rightarrow p_2) \vee \ldots \vee (\perp \Rightarrow p_k)\big) = \top$,

па од $\tau(\top \Leftrightarrow \top) = \top$ следува дека дадената формула е точна. Според тоа, таа е тавтологија.

г) Се решава слично како задачата под в).

д) Задачата може едноставно да се реши со дискусија по исказната буква p. Имено, ако $\tau(p) = \top$, тогаш од од тавтологијата 5. $(A \Rightarrow \top) \Leftrightarrow \top$ добиваме дека $\tau(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k \Rightarrow \top) = \top$ и $\tau\big((p_1 \Rightarrow \top) \wedge (p_2 \Rightarrow \top) \wedge \ldots \wedge (p_k \Rightarrow \top)\big) = \top$, па формулата во овој случај е точна. Ако $\tau(p) = \perp$, тогаш од тавтологијата 6. $(A \Rightarrow \perp) \Leftrightarrow \neg A$, следува дека дадената формула е еквивалентна со формулата под б) за којашто покажавме дека е тавтологија. Бидејќи и во двата случаја дадената формула е $\top$, следува дека таа е тавтологија.

ѓ) Се докажува слично како д).

Во некои случаи е корисно да се користат повеќе различни методи за решавање иста задача. На пример, при спроведување дискусија по една исказна буква, за едниот случај можеме да го користиме методот на еквиваленциски трансформации, а за другиот – методот за сведување на противречност.

4. Да се претворат во логички јазик следниве реченици на Сократ, а потоа да се утврди дали неговото заклучување е логички правилно:

а) „Ако сум виновен, тогаш мора да бидам казнет. Виновен сум. Значи, мора да бидам казнет.“

б) „Ако сум виновен, тогаш мора да бидам казнет. Не сум виновен. Значи, нема да бидам казнет.“

Решение. Дадени се два искази:

p: „Виновен сум.“ и q: „Мора да бидам казнет.“

а) Дадените реченици ја добиваат следнава логичка форма: $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ (modus ponens), а тоа е тавтологија. Значи заклучувањето е логички правилно.

б) Во овој пример, дадените реченици се преточуваат во следнава исказна формула: $(p \Rightarrow q) \wedge \neg p \Rightarrow \neg q$, а таа не е тавтологија (на пример ако вредноста на p е $\perp$, а вредноста на q е $\top$, тогаш

$$\tau((p \Rightarrow q) \wedge \neg p \Rightarrow \neg q)) = \tau((\perp \Rightarrow \top) \wedge \top \Rightarrow \perp)) = \tau(\top \wedge \top \Rightarrow \perp) = \perp).$$

Значи заклучувањето не е логички правилно.

1.4. Хипотези и последици

Расудувањето е една од главните форми на мислењето, кое е насочено кон потврдување или побивање на некое тврдење или пак, кон добивање нов извод од едно или повеќе тврдења. Заклучоци се изведуваат со помош на правилата за логичко заклучување, тргнувајќи од познати искази (хипотези, т.е. претпоставки). Во теоријата на искази тоа прецизно се дефинира на следниот начин.

Дефиниција 1. Нека $A_1, A_2, \dots, A_n$ и B се исказни формули. За формулата B велиме дека е *семантичка последица* од формулите $A_1, A_2, \dots, A_n$ и пишуваме $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$, ако за сите вредности на исказните букви за коишто сите формули $A_1, A_2, \dots, A_n$ имаат вредност $\top$, за истите тие вредности на исказните букви и формулата B има вредност $\top$.

Ако $n = 1$, т.е. ако $A_1 = A$, тогаш пишуваме $A \models B$.

Формулите $A_1, A_2, \dots, A_n$ ги нарекуваме *хипотези* за формулата B, а B е нивна *семантичка последица*.

***Пример* 1**. Тврдењето $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \models q \vee r$ важи. Да ја разгледаме вистинитосната таблица во која ќе ги споредиме вистинитосните вредности на формулите $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)$ и $q \vee r$.

p	q	r	$p \vee q$	$p \Rightarrow r$	$(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)$	$q \vee r$	
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	*
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	*
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	*
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	*
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	

Секаде каде што формулата $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)$ има вредност ⊤ (во примеров за подредените тројки (⊤,⊤,⊤), (⊤,⊥,⊤), (⊥,⊤,⊤) и (⊥,⊤, ⊥)), таму и формулата $q \vee r$ има вредност ⊤, па значи формулата $q \vee r$ е семантичка последица од $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)$. Тие редици се означени со *, како што е прикажано.

Теорема 1. (i) $A \models B$ *ако и само ако* $\models A \Rightarrow B$.

(ii) $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ *ако и само ако* $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \models B$.

Доказ. (i) Нека $A \models B$. Нека $p_1, p_2, \ldots, p_k$ се сите исказни букви содржани во формулите *A* и *B*. Тогаш за сите вредности на буквите $p_1, p_2, \ldots, p_k$ за коишто формулата *A* има вредност ⊤, и формулата *B* ќе има вредност ⊤, па затоа $\tau(A \Rightarrow B) = \top$. За останатите интерпретации, вредноста на формулата *A* е ⊥, па импликацијата $A \Rightarrow B$ повторно ќе биде ⊤, зашто $\tau(\bot \Rightarrow B) = \top$. Според тоа, формулата $A \Rightarrow B$ е тавтологија.

Обратно, нека $A \Rightarrow B$ е тавтологија. Тогаш за сите вредности на исказните букви $p_1, p_2, \ldots, p_k$ за коишто формулата *A* има вредност ⊤, и формулата *B* ќе има вредност ⊤. Значи, $A \models B$.

(ii) Нека $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$. Нека $p_1, p_2, \ldots, p_k$ се сите исказни букви содржани во формулите $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и *B*. Тогаш за сите вредности на $p_1, p_2, \ldots, p_k$ за коишто формулите $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имаат вредност ⊤, и формулата *B* ќе има вредност ⊤. Од вистинитосната таблица за $\wedge$ следува дека за сите тие вредности на буквите, формулата $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ има вредност ⊤. Бидејќи и формулата *B* има вредност ⊤, следува дека $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \models B$.

Обратно, нека $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \models B$. Тогаш за сите вредности на исказните букви $p_1, p_2, \ldots, p_k$ за коишто формулата $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ има вредност ⊤ и формулата *B* ќе има вредност ⊤. Од дефиницијата за конјункција следува дека и сите формули $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имаат вредност ⊤. Значи, $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$. □

Последица 1. $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n \models B$ *ако и само ако* $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \models A_n \Rightarrow B$.

Доказ. За $n = 1$, тврдењето се сведува на Теорема 1 (i). Нека $n > 1$. Тогаш од Теорема 1 (ii) следува дека

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B \text{ ако и само ако } A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \models B$$

$$\text{ако и само ако } \models (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \wedge A_n \Rightarrow B.$$

Од тавтологијата $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ следува дека

$\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \wedge A_n \Rightarrow B$ ако и само ако

$\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \Rightarrow (A_n \Rightarrow B)$.

Од Теорема 1 (i), последната тавтологија е еквивалентна со

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \models A_n \Rightarrow B,$$

а таа, заради Теорема 1 (ii) е еквивалентна со $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \models A_n \Rightarrow B$. □

Со последователна примена на Последицата 1 добиваме дека важи

Последица 2. $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n \models B$ *ако и само ако*

$$\models A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (A_n \Rightarrow B)\ldots)).$$

Дефиниција 2. *Спротивна формула* на една формула A (ја означуваме со A_s) е формула што се добива од формулата A со:

1. замена на симболите $\vee$ со $\wedge$, а $\wedge$ со $\vee$,
2. наместо секоја исказна буква p_i ставаме $\neg p_i$, а наместо $\neg p_i$ ставаме p_i.

На пример, ако A: $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$, тогаш A_s: $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)$.

Теорема 2. *Нека A е формула во која единствени логички сврзници се $\neg$, $\wedge$ и $\vee$ и нека A_s е спротивна формула на A. Тогаш* $\models \neg A \Leftrightarrow A_s$.

Доказ. Доказот го изведуваме со индукција по бројот на логичките сврзници во формулата A.

За $n = 1$, формулата A е од облик или $\neg p$ или $p \wedge q$ или $p \vee q$, каде што p и q се исказни букви. Во овие три случаи, спротивните формули A_s се:

$$p \text{ на } \neg p, \quad \neg p \vee \neg q \text{ на } p \wedge q \text{ и } \neg p \wedge \neg q \text{ на } p \vee q.$$

Тогаш формулата $\neg A \Leftrightarrow A_s$ е соодветно:

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p, \quad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q, \quad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q.$$

Во секој од овие случаи формулата $\neg A \Leftrightarrow A_s$ е тавтологија (првата е законот за инволуторност на негацијата, а вториот и третиот се Де Морганови закони). Значи, тврдењето е точно за $n = 1$.

Нека $n > 1$. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за секој $k < n$, а ќе покажеме дека е точно за n. Во тој случај, формулата A има облик или $\neg B$, или $B \wedge C$ или $B \vee C$, каде што формулите B и C имаат помалку од n сврзници, па од индуктивната претпоставка тврдењето е точно. Тогаш спротивната формула A_s во секој од овие три случаи, соодветно, е:

$$\neg B_s,\quad B_s \vee C_s,\quad B_s \wedge C_s.$$

Во првиот случај A е $\neg B$, додека A_s е $\neg B_s$.

За формулата B, од индуктивната претпоставка важи дека $\models \neg B \Leftrightarrow B_s$. Од тавтологијата $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$, добиваме дека $\models \neg\neg B \Leftrightarrow \neg B_s$, па значи $\models \neg A \Leftrightarrow A_s$.

Во вториот случај A е $B \wedge C$ и A_s е $B_s \vee C_s$. Тогаш од индуктивната претпоставка имаме дека $\models \neg B \Leftrightarrow B_s$ и $\models \neg C \Leftrightarrow C_s$, а оттука следува дека

$$\neg A \Leftrightarrow (\neg B \vee \neg C) \Leftrightarrow (B_s \vee C_s) \Leftrightarrow A_s.$$

Според тоа, $\models \neg A \Leftrightarrow A_s$.

Во третиот случај A е $B \vee C$ и A_s е $B_s \wedge C_s$. Тогаш од индуктивната претпоставка имаме дека $\models \neg B \Leftrightarrow B_s$ и $\models \neg C \Leftrightarrow C_s$, а оттука следува дека

$$\neg A \Leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C) \Leftrightarrow (B_s \wedge C_s) \Leftrightarrow A_s.$$

Според тоа, $\models \neg A \Leftrightarrow A_s$. □

Да забележиме дека поимот спротивна формула може да се прошири и на формулите коишто ги содржат сврзниците $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$. Всушност, формулите што содржат $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$ се сведуваат на формули што ги содржат сврзниците $\neg$, $\wedge$ и $\vee$, со помош на законот за замена на импликација и законот за замена на еквиваленција.

Дефиниција 3. Едно множество формули $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ е *непротивречно* (*конзистентно*) ако постои интерпретација во која сите формули $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имаат вистинитосна вредност ⊤.

Едно множество формули $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ е *противречно* (*контрадикторно*) ако во секоја интерпретација барем една од тие формули е невистинита.

Теорема 3. *Едно множество формули $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ е противречно ако тоа е контрадикција на последици од тоа множество формули.*

Доказ. Нека $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ е контрадикција на последици од тоа множество формули, т.е. $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models B \wedge \neg B$, за која било формула B. Тогаш од Последицата 1 имаме дека

$$\models A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B \wedge \neg B,$$

од каде што следува дека за секоја интерпретација, $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ има вредност $\perp$, зашто во спротивно, претходната формула не би била тавтологија. Значи, за сите вредности на своите исказни букви, барем една од формулите A_i има вредност $\perp$.

Теорема 4. *Ако некоја контрадикција е последица од хипотезите* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *и* $\neg B$ ***,*** *тогаш B е последица од хипотезите* $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Доказ. Да претпоставиме дека $A_1, \dots, A_n, \neg B \models C \wedge \neg C$ **,** за некоја формула *C*. Тогаш од Последицата 1 имаме дека $A_1, A_2, \dots, A_n \models \neg B \Rightarrow C \wedge \neg C$. Оттука, за сите вредности на исказните букви за кои формулите A_i имаат вредност T, и формулата $\neg B \Rightarrow C \wedge \neg C$ ќе има вредност T. Според тоа, формулата $\neg B$ за тие вредности на буквите има вредност ⊥, т. е. формулата B има вредност T. □

Задачи за вежбање

1. Докажи дека за формулите *A* и *B* од $A \models B$ следува тврдењето „ако $\models A$, тогаш $\models B$", но обратното не мора да важи.

Решение. Ако формулата *A* е тавтологија, а е исполнет условот $A \models B$, тоа значи дека и формулата *B* е вистинита за секоја вредност на исказните букви коишто се вклучени во формулите *A* и *B*, па значи *B* е тавтологија.

Да претпоставиме дека тврдењето „ако $\models A$, тогаш $\models B$" е точно. Тогаш тоа е точно и кога ниту една од формулите *A* и *B* не е тавтологија. На пример, нека *A* е исказната формула $p \vee q$, а *B* е исказната формула $p \wedge q$. Но, $p \vee q \models p \wedge q$ не е точно, зашто има вредности на исказните букви, на пример за $\tau(p) = \top$ и $\tau(q) = \bot$, за коишто формулата *A* е T, а формулата *B* е ⊥.

2. Докажи дека формулата $p \wedge q \wedge r$ не е семантичка последица од формулите: $p \vee q$, $\neg q \vee r$ и $\neg p \vee r$.

Решение. Во следнава интерпретација на исказните букви *p*, *q* и *r*: $\tau(p) = \bot$, $\tau(q) = \tau(r) = \top$, важи дека $\tau(p \vee q) = \top$, $\tau(\neg q \vee r) = \top$ и $\tau(\neg p \vee r) = \top$, додека $\tau(p \wedge q \wedge r) = \bot$. Значи, формулата $p \wedge q \wedge r$ не е семантичка последица од наведените формули.

3. Докажи дека формулата $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ е семантичка последица од формулите: $\neg p \Rightarrow q$, $\neg q \Rightarrow r$, $\neg p \Rightarrow r$.

Решение. Ќе покажеме дека формулата $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ има вредност T во секоја интерпретација во која формулите $\neg p \Rightarrow q$, $\neg q \Rightarrow r$, $\neg p \Rightarrow r$ имаат вредност T.

Задачата ќе ја решиме со методот на вистинитосна таблица.

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow r$	$\neg p \Rightarrow r$	$(\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow r) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$	
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	*
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	*
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	*
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	*
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$	
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	*
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	*
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	*
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	*
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	

Од вистинитосните таблици имаме дека, за сите вредности на исказните букви p, q и r, за коишто формулите $\neg p \Rightarrow q$, $\neg q \Rightarrow r$, $\neg p \Rightarrow r$ имаат вредност $\top$, за истите тие вредности на исказните букви, и формулата $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ има вредност $\top$ (редиците означени со *).

4. Аладин пронашол два ковчега во некоја пештера, едниот црн, другиот бел. Знаел дека секој од нив содржи или богатство или стапица. На црниот ковчег пишувало: „Барем еден од овие два ковчега содржи богатство." На белиот ковчег пишувало: „Во црниот ковчег има стапица." Аладин знаел дека или натписите на двата ковчега се вистинити или дека двата натписи се лажни. Може ли Аладин да избере ковчег така што да биде сигурен дека ќе го пронајде богатството? Во тој случај, кој ковчег треба да го избере?

Решение. Да ги разгледаме исказите:

p: Црниот ковчег содржи богатство.

q: Белиот ковчег содржи богатство.

Очигледно е дека негациите на овие два искази се:

$\neg p$: Црниот ковчег содржи стапица.

$\neg q$: Белиот ковчег содржи стапица.

зашто се можни само тие две состојби (исклучна дисјункција).

Формално да го запишеме она што го пишува на ковчезите.

$p \vee q$: Барем еден од двата ковчега содржи богатство.

$\neg p$: Црниот ковчег содржи стапица.

Формално да го запишеме она што го знае Аладин, т.е. или двата натписи се точни или двата се лажни. Тоа значи дека важи еквиваленцијата:

$$(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p.$$

Треба да се прашаме: при која интерпретација на исказните букви оваа формула е точна? Единствена интерпретација која ја задоволува формулата е $\tau(p) = \perp$ и $\tau(q) = \top$. Така, Аладин може да го отвори белиот ковчег и да биде сигурен дека внатре има богатство.

1.5. Предикатска логика

Исказната логика не е доволно моќна да ги претстави сите видови тврдења коишто се среќаваат во математиката, ниту пак да изрази одредени типови врски меѓу исказите. Така, на пример, реченицата „x е поголемо од 1“, каде што x е променлива, не е исказ, зашто не можеме да ја определиме нејзината вистинитосна вредност без да ја знаеме вредноста на x. Но, вакви реченици често се среќаваат во математиката. Еве уште неколку примери:

а) $x - 5 = 0$, б) $x + 2y = 6$, в) x е заеднички делител на y и z.

Притоа ќе сметаме дека допуштени вредности за променливите x, y и z се природните броеви.

Ако во речениците а) – в) променливите се заменат со кои било нивни допуштени вредности, ќе се добијат искази, при што некои од нив ќе бидат вистинити, а некои невистинити. На пример,

а') $2 - 5 = 0$; $10 - 5 = 0$; $5 - 5 = 0$.
(Првите два искази се невистинити, а третиот е вистинит.)

б') $1 + 2 \cdot 1 = 6$; $2 + 2 \cdot 2 = 6$; $1 + 2 \cdot 2 = 6$.
(Првиот и третиот исказ се невистинити, а вториот е вистинит.)

в') 4 е заеднички делител на 8 и 12.
(Вистинит исказ.)

Дефиниција 1. *Предикат* (или *исказна функција*) е реченица со променливи којашто станува исказ за секоја вредност на променливите од некое дадено множество D, наречено *дефинициона област* на предикатот, а неговите елементи – *допуштени вредности* на променливите.

Да забележиме дека предикатот во примерот а) содржи само една променлива, во б) – две променливи, а во в) – три променливи. За предикатите со една променлива се вели дека се со *должина еден*, за оние со две променливи – со *должина два*, итн. Предикатите се означуваат обично со големите букви од латиницата $P, Q, R, S, \ldots$, со назначување на променливите во загради. Така, предикатите со должина еден се означуваат со $P(x)$, $Q(x)$,..., со должина два со $P(x, y)$ $Q(x, y)$,... итн.

Еден предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се вика *идентично вистинит* (или само *вистинит*) ако за која било n-ка допуштени вредности на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неговата вистинитосна вредност е ⊤. Со други зборови, предикатот $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е вистинит ако и само ако е вистинит секој конкретен исказ што може да се добие од него.

***Пример* 1.** а) $P(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$, при што $x, y, z \in \mathbb{R}$, е идентично вистинит предикат.

б) $P(x, y) : x^2 - y^2 \geq 0$, при што $x, y \in \mathbb{R}$, не е идентично вистинит. Да забележиме дека во општ случај $P(x, y) \neq P(y, x)$!

Дефиниција 2. Нека $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е предикат со n променливи чиишто допуштени вредности припаѓаат на исто множество D. Секоја n-ка вредности на променливите за коишто предикатот станува вистинит исказ се вика *решение на предикатот*. Множеството $M \subseteq D^n$ од сите такви вредности се вика *множество решенија* на тој предикат.

Да забележиме дека ако еден предикат е со најмалку две променливи, тогаш тие променливи можат да имаат иста дефинициона област D или различни дефинициони области $D_1, D_2, \ldots, D_n$, за $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соодветно. Во вториов случај, множеството решенија на предикатот $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ќе биде множеството $M \subseteq D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$.

***Пример* 2.** а) Множеството решенија на предикатот $P(x) : x < 5$, $x \in \mathbb{N}$ е $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

б) Множеството решенија на предикатот $P(x) : x^2 = -1$, $x \in \mathbb{R}$ е $M = \varnothing$. Ако $x \in \mathbb{C}$, тогаш $M = \{ i, -i \}$.

в) Множеството решенија на предикатот $P(x, y) : x + y = 4$, $x, y \in \mathbb{N}$ е $M = \{ (1, 3), (2, 2), (3, 1) \}$.

г) Множеството решенија на предикатот $P(x, y) : x + y = 4$, $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{N}$ е $M = \{ (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4), (-1, 5), (-2, 6), (-3, 7), \ldots \} = \{ (4 - y, y) \mid y \in \mathbb{N} \}$.

***Пример* 3.** Нека е даден предикатот $P(x): 2x+1 \geq 7$ при што $x \in \mathbb{N}$. Тој станува исказ за одредени вредности на *x*, како на пример: $P(2): 2 \cdot 2+1 \geq 7$; $P(3): 2 \cdot 3+1 \geq 7$; $P(5): 2 \cdot 5+1 \geq 7$. Но, дадениот предикат може да стане исказ и со употребата на зборовите „секој“ и „некој“. На пример, искази се:

а) За секој $x \in \mathbb{N}$, $2x+1 \geq 7$. ($\perp$)

б) За некој $x \in \mathbb{N}$, $2x+1 \geq 7$. ($\top$)

Дефиниција 3. Зборовите *секој* (алтернативно: *за кој било*, *за сите*) и *некој* (алтернативно: *барем за еден*, *постои ... за кој...*) се викаат *квантификатори* (или *кванти*).

Квантификаторот „секој“ се нарекува *универзален квантификатор* и се означува со симболот $\forall$ (свртено А – почетната буква од германскиот збор Alle, што значи сите), додека „некој“ се вика *егзистенцијален квантификатор* и се означува со симболот $\exists$ (свртено Е – почетната буква од Es gibt, што значи егзистира, постои).

Така, исказите а) и б) од примерот 3, можеме да ги запишеме како:

а) $(\forall x \in \mathbb{N})\ 2x+1 \geq 7$.

б) $(\exists x \in \mathbb{N})\ 2x+1 \geq 7$.

Кога сакаме да потенцираме дека постои еден и само еден (или постои точно еден) елемент, се користи симболот $\exists!$. На пример, реченицата: „Постои еден и само еден $x \in \mathbb{N}$ што е решение на равенката $2x+1=7$“, со симболи може да се запише вака: $(\exists! x \in \mathbb{N})\ 2x+1=7$.

Да забележиме дека симболите $\forall$, $\exists$ и $\exists!$ се употребуваат со променлива. Но, една променлива може да се појави во реченица и без квантификатор. Таква променлива се нарекува *слободна променлива*, додека онаа што се појавува со квантификатор се нарекува *врзана променлива*. На пример, во реченицата: $(\forall x)(x<y)$, *x* е врзана променлива, а *y* е слободна.

За секоја вредност на променливите, предикатите ги примаат вредностите $\top$ и $\perp$ исто како исказите, па затоа над нив може да се изведуваат логички операции аналогни со операциите над исказите. Така, од два предиката $P(x)$ и $Q(y)$ можеме да формираме нов предикат: $P(x) \wedge Q(y)$ којшто има две слободни променливи x и y.

Неговата вистинитосна вредност за кој било пар (a,b) од допуштените вредности на променливите се дефинира како вистинитосната вредност на исказот $P(a) \wedge Q(b)$. Аналогно се дефинираат предикатите:

$$P(x) \vee Q(y),\ P(x) \Rightarrow Q(y),\ P(x) \Leftrightarrow Q(y),\ \neg P(x).$$

Така се дефинираат операциите $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ и над предикати со должина поголема или еднаква на 2.

На ист начин како што доделуваме вистинитосни вредности на исказ, можеме да доделиме вистинитосни вредности на реченици што содржат квантификатор.

1) $((\forall x \in D)\, P(x))$ е вистинит ако и само ако $P(x)$ е вистинит исказ за секоја вредност на променливата $x \in D$.

Според тоа, $((\forall x \in D)\, P(x))$ е невистинит секогаш кога постои најмалку еден $x \in D$ за кој $P(x)$ е невистинит исказ.

Формално, ако $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, тогаш

$$((\forall x \in D)\, P(x)) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n) \wedge \dots.$$

2) $((\exists x \in D)\, P(x))$ е вистинит секогаш кога $P(x)$ е вистинит исказ за барем една вредност на променливата $x \in D$.

Според тоа, $((\exists x \in D)\, P(x))$ е невистинит само кога $P(x)$ е невистинит исказ за секој $x \in D$.

Формално, ако $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, тогаш

$$((\exists x \in D)\, P(x)) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n) \vee \dots.$$

Бидејќи $((\forall x \in D)\, P(x))$ и $((\exists x \in D)\, P(x))$ се искази коишто имаат определена вистинитосна вредност, можеме да правиме и нивни негации. Да разгледаме неколку примери.

***Пример* 4.** Нека е даден исказот:

а) За секој $x \in \mathbb{N}$, $x + x = 2x$.

Негацијата на овој исказ може да се направи на два начина:

а') Не за секој $x \in \mathbb{N}$, $x + x = 2x$.

а'') Постои $x \in \mathbb{N}$, за кој не е точно дека $x + x = 2x$.

Според а''), ако е даден исказот $(\forall x \in \mathbb{N})\, x + x = 2x$, тогаш неговата негација е $(\exists x \in \mathbb{N}) \neg (x + x = 2x)$, т.е. $(\exists x \in \mathbb{N})\, x + x \neq 2x$.

За произволен предикат $P(x)$ имаме дека важи следната еквиваленција:

$$\neg((\forall x \in D)\, P(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in D) \neg P(x). \qquad (1)$$

б) За некој $x \in \mathbb{R}$, $x + 1 = 3$.

Негацијата на овој исказ може да се направи на два начина:

б') Не е точно дека за некој $x \in \mathbb{R}$, $x + 1 = 3$.

б'') За секој $x \in \mathbb{R}$, не е точно дека $x+1=3$.

Според б'') ако е даден исказот $(\exists x \in \mathbb{R})\, x+1=3$, тогаш неговата негација е $(\forall x \in \mathbb{R}) \neg (x+1=3)$, т.е. $(\forall x \in \mathbb{R})\, x+1 \neq 3$.

Значи, за произволен предикат $P(x)$ важи следната еквиваленција:

$$\neg((\exists x \in D)\, P(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in D) \neg P(x). \tag{2}$$

На сличен начин можеме да доделиме вистинитосни вредности на комбинации од предикати, т.е. на негации од комбинации на предикати.

***Пример* 5.** Да се определи негацијата на исказот $(\forall x \in D)\,(P(x) \wedge Q(x))$.

$\neg((\forall x \in D)\,(P(x) \wedge Q(x)))$

$\Leftrightarrow \quad (\exists x \in D) \neg(P(x) \wedge Q(x)) \qquad$ (од (1))

$\Leftrightarrow \quad (\exists x \in D)\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \qquad$ (од Де Морганови закони)

На пример, нека D е множеството студенти од класот за овој предмет и нека

$P(x)$: x е корисник на Facebook.

$Q(x)$: x е корисник на Instagram.

Негацијата на исказот $(\forall x \in D)\,(P(x) \wedge Q(x))$ може да се искаже на два начина:

а') Не сите студенти од овој клас се корисници на Facebook и (исто така) на Instagram.

а'') Постои (барем еден) студент од овој клас којшто не е корисник на Facebook или на Instagram. (Може да не е корисник ни на едната ни на другата социјална мрежа.)

Како може да се трансформира еден логички израз во друг?

***Пример* 6.** Да ја утврдиме вистинитосната вредност на

$$(\exists x \in D)\,(P(x) \vee Q(x)),$$

каде што $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Исказот $(\exists x \in D)\,(P(x) \vee Q(x))$ е вистинит ако и само ако постои $a_i \in D$ таков што $P(a_i) \vee Q(a_i)$ е вистинит, т.е.

$$(\exists x \in D)\,(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (P(a_1) \vee Q(a_1)) \vee \ldots \vee (P(a_n) \vee Q(a_n)).$$

Последниов израз станува вистинит кога барем еден $P(a_i)$ или $Q(a_j)$ е вистинит, т.е.

$$(\exists x \in D)\,(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in D)\, P(x) \vee (\exists x \in D)\, Q(x). \tag{3}$$

Забелешка 1. Покрај формулите (1) и (2), следниве формули ги изразуваат *законите за логичко заклучување* за кој било избор на предикати P и Q и за која било дефинициона област:

1. $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x)$.
2. $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftarrow (\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x)$.
3. $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x) P(x) \vee (\exists x) Q(x)$.
4. $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$.
5. $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x) P(x) \Rightarrow (\forall x) Q(x))$.
6. $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\exists x) P(x) \Rightarrow (\exists x) Q(x))$.
7. $(\exists x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x) P(x) \Rightarrow (\exists x) Q(x))$.
8. $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x) P(x) \Leftrightarrow (\forall x) Q(x))$.

Да наброиме уште неколку такви формули:

1. $(\forall x)(P(x) \vee Q) \Leftrightarrow (\forall x) P(x) \vee Q$, ако x не е слободна во Q
2. $(\exists x)(P(x) \wedge Q) \Leftrightarrow (\exists x) P(x) \wedge Q$, ако x не е слободна во Q
3. $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\exists x) P(x) \Rightarrow Q)$, ако x не е слободна во Q
4. $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Leftrightarrow (\forall x) Q(x))$, ако x не е слободна во P
5. $(\exists x)(P(x) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\forall x) P(x) \Rightarrow Q)$, ако x не е слободна во Q
6. $(\exists x)(P \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (\forall x) Q(x))$, ако x не е слободна во P.

Забелешка 2. Записот $(\forall x)(\forall y) P(x, y)$ значи исто што и $(\forall y)(\forall x) P(x, y)$; аналогно $(\exists x)(\exists y) P(x, y)$ значи исто што и $(\exists y)(\exists x) P(x, y)$.

Но, $(\forall x)(\exists y) P(x, y)$ и $(\exists y)(\forall x) P(x, y)$ не значат исто. На пример, нека $P(x, y): x < y$ и нека доменот $D = \mathbb{N}$. Тогаш $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\, x < y$ значи:

„За секој природен број x, постои природен број y што е поголем од x.“, што е точно (на пример, $y = x + 1$ е поголем од x).

Од друга страна, $(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})\, x < y$ значи:

„Постои природен број y, таков што за секој природен број x, y е поголем од x.“ (или: „Постои природен број y, што е поголем од секој природен број x.“), што не е точно, зашто не постои најголем природен број.

Досега видовме како се прави негација на предикати коишто содржат логички сврзници „и“ и „или“. Ќе разгледаме како се постапува во случај на импликација на два предикати:

$$(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)),$$

што значи: за секој x од доменот D, ако $P(x)$ е точно, тогаш и $Q(x)$ е точно.

***Пример* 7.** Нека $P(x)$: $x > 1$, а $Q(x)$: $x^2 > 1$, при што доменот $D = \mathbb{R}$. Тогаш, формулата $(\forall x \in \mathbb{R})(P(x) \Rightarrow Q(x))$ се чита како: „за секој $x \in \mathbb{R}$, ако $x > 1$, тогаш $x^2 > 1$."

На дадена импликација

$$1.\ (\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)),$$

којашто се нарекува *директна импликација*, можат да се придружат неколку нејзини варијации:

2. $(\forall x)(\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x))$ (*контрапозиција*)
3. $(\forall x)(Q(x) \Rightarrow P(x))$ (*обратна импликација*)
4. $(\forall x)(\neg P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$ (*контрапозиција на обратната импликација*).

Да забележиме дека импликацијата 1. $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$ е еквивалентна со нејзината контрапозиција 2., а нејзината негација $\neg\big((\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \big)$ е еквивалентна со формулата $(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$. Ова се докажува со помош на (1), законот за замена на импликцијата и Де Моргановите закони. Имено:

$$\neg\big((\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \big) \Leftrightarrow \neg\big((\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x)) \big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)\ \neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)).$$

***Пример* 8.** Да ја запишеме симболички следнава реченица: „За секој x и за секој y, ако x и y се реални броеви, тогаш квадратот на нивниот збир не е негативен."

Нека $P(x)$: x е реален број. Јасно, $P(y)$: y е реален број. Бидејќи делот од реченицата „квадратот на нивниот збир" (тука мислиме на x и y) симболички запишан е $(x+y)^2$, следува дека дадената реченица може да се запише како:

$$(\forall x)\Big((\forall y)[(P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow \neg[(x+y)^2 < 0]] \Big).$$

Но, наместо горниот запис, често постапуваме и вака:

$$(\forall x, y)\Big((P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow \neg[(x+y)^2 < 0] \Big).$$

Ако не сакаме да имаме негација, тогаш пишуваме:

$$(\forall x, y)\Big(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow (x+y)^2 \geq 0 \Big).$$

Да забележиме дека дадената реченица може да се претстави симболички и вака: $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x+y)^2 \geq 0$.

Зошто е важна предикатската логика? Таа ни овозможува да изведуваме разни видови заклучоци. Ќе разгледаме неколку примери.

***Пример* 9.** Дадени се следниве реченици:

„Секој студент на ИМ на ПМФ, мора да учи Множества и логика." и

„Бојан е студент на ИМ на ПМФ.“

Логично е да заклучиме дека Бојан мора да учи Множества и логика.

Да изведеме правило на заклучување што одговара на овој пример. Нека $P(x)$ е предикат и x е променлива којашто припаѓа на доменот D. Тогаш:

$$\frac{(\forall x \in D)\ P(x)}{P(c),\ \text{за секој}\ c \in D}.$$

Што ни зборува напишаното? Секогаш кога за секој $x \in D$, $P(x)$ е точно, тогаш $P(x)$ е точно за кој било избор на променливата x од доменот D, па специјално, $P(x)$ е точно за кој било избран $c \in D$. Значи, $P(x)$ е точно за секој $c \in D$.

Да разгледаме еден друг пример.

***Пример* 10.** Дадени се следниве реченици:

1) „Секој студент што ќе освои повеќе од 90 поени на испитот, ќе добие оценка 10 (десет).“,

2) „Постојат студенти што освоиле повеќе од 90 поени на испитот.“ и

3) „Бојан е студент што освоил повеќе од 90 поени на испитот.“

Логично е да заклучиме дека Бојан ќе добие оценка 10 (десет).

Да изведеме правило на заклучување што одговара на овој пример. Нека $P(x)$ е предикатот „x ќе добие оценка 10 (десет).“, $Q(x)$ е предикатот „x освои повеќе од 90 поени на испитот.“, а x е променлива којашто припаѓа на доменот D којшто се состои од сите студенти на предметот Множества и логика. Во предикатската логика речениците 1) и 2) се преведуваат како:

1) $(\forall x)(Q(x) \Rightarrow P(x))$.

2) $(\exists x)\, Q(x)$.

Исказот 3) може да се изрази преку 2), т.е. $Q(\text{Бојан})$. Ако замениме за $x = \text{Бојан}$ во 1), добиваме $Q(\text{Бојан}) \Rightarrow P(\text{Бојан})$. Последново, заедно со $Q(\text{Бојан})$, со користење на модус поненс, дава $P(\text{Бојан})$.

Да изведеме правило на заклучување што одговара на овој пример. Нека $P(x)$ е предикат и x е променлива којашто припаѓа на доменот D. Тогаш:

$$\frac{P(c),\ \text{за некој}\ c \in D}{(\exists x \in D)\ P(x)}.$$

Што ни зборува напишаното? Секогаш кога за некој $c \in D$, $P(c)$ е точно, тогаш постои x од доменот D за кој $P(x)$ е точно.

Забелешка. Предикатската логиката е многу побогат систем отколку исказната логика. Нејзините интерпретации ги вклучуваат вообичаените структури од математиката, а нејзините реченици ни овозможуваат да изразиме многу својства на овие структури. Од сето она што досега го разгледуваме, можеме да заклучиме дека јазикот што го разгледуваме се состои од почетни знаци со кои правиме посложени изрази (наречени терми) и сложени реченици (формули).

По договор, почетните симболи во предикатската логика се:

i. *Променливи*: $x_1, x_2, x_3, \ldots$

ii. *Константи*: $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$

iii. *Функциски знаци* (или *операциски знаци*): $f_1^1,\ f_2^1, \ldots f_1^2, \ldots f_i^j, \ldots$ (каде што горниот индекс ја означува должината на функцискиот знак)

iv. *Предикатски* (*релациски*) *знаци*: $R_1^1, R_1^2, \ldots R_1^2, \ldots R_i^j, \ldots$ (каде што горниот индекс ја означува должината на релацискиот знак)

v. *Логички сврзници*: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$

vi. *Помошни симболи* (*загради*): (,).

Со помош на почетните симболи (променливите, константите, функциските и помошните знаци), по одредени правила, се формираат терми (или изрази). Поимот *терм* (или *израз*) се дефинира на следниот индуктивен начин:

1. Променливите и константите се терми.
2. Ако $t_1, \ldots, t_n$ се терми и f е функциски знак со должина n, тогаш зборот $f(t_1, \ldots, t_n)$ е терм.
3. Терми се само оние зборови што се добиваат со конечна примена на 1. и 2. од оваа дефиниција.

На пример, терми се: x_2, c_5, $f^2(x_2, c_5)$, $f_5^3(f_2^1(x_2), f_1^2(x_1, x_2), x_6)$.

Термите поврзани меѓу себе со релациски знаци формираат *предикатски формули* (или кратко, *формули*). Но, пред да се дефинираат прецизно, прво го дефинираме поимот елементарна формула.

Елементарна формула е збор $R(t_1, \ldots, t_n)$, каде што $t_1, \ldots, t_n$ се терми и R е релациски знак со должина n.

Тргнувајќи од елементарните формули индуктивно ги дефинираме и *предикатските формули*:

(а) Секоја елементарна формула е формула.

(б) Ако P и Q се формули, тогаш и $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \Rightarrow Q)$, $(P \Leftrightarrow Q)$, $\neg P$, $(\forall x)\,P$ и $(\exists x)\,P$, каде што x е некоја променлива, се формули.

(в) Формули се само оние зборови што се добиваат со конечна примена на (а) и (б) од оваа дефиниција.

На пример, формули се: $R_1^1(x_1)$, $(R_1^2(x_2, c_5) \wedge \neg R_1^2(f(x_1, c_1), x_3))$, $(\forall x_3)(R_1^1(f_1^1(x_1, x_1, x_3))) \Rightarrow (\exists x_2)(R_1^1(x_n) \wedge R_1^2(x_2, x_n)))$.

Еве и неколку зборови што не се формули:

а) $R_1^2(x_1)$ (R_1^2 е релациски знак со должина 2, а е применет над една променлива);

б) $R_1^1(R_2^2)$ (R_1^1 е релациски знак со должина 1 којшто е применет над релациски знак R_2^2 со должина 2);

в) $R_1^1(x_1) \Rightarrow (\exists x_2) R_1^2(x_2, f_1^1(x_3))$ (нема надворешни загради).

Заради поедноставно запишување на формулите, се усвојува сличен договор како за исказните формули – бришење на надворешните загради.

Фиксирајќи ги множествата константи, функциски и релациски знаци, добиваме формули во зависност од така избраните множества, а велиме и од тој јазик. Формалната дефиниција за јазик е:

Јазик е множество L чиишто елементи имаат својство: ниеден член од L не е конечна низа елементи од L. Елементите на јазикот ги викаме букви, симболи или знаци.

Со прецизирање на јазикот L се дефинираат терми и предикатски формули во рамките на тој јазик.

Задачи за вежбање

1. Најди ги слободните променливи во следниве формули:

а) $P(x) \wedge \neg Q(y, a)$;

б) $(\exists x) P(x, y)$;

в) $(\forall x) P(x) \Rightarrow (\exists y) \neg Q(R(x), y, R(y))$;

г) $(\forall x)(\exists y) P(x, Q(y))$;

д) $(\forall x)(\exists y) P(x, Q(y)) \Rightarrow Q(x, y)$.

Решение. Слободни променливи се:

а) x и y; б) y; в) нема слободни променливи;

г) нема слободни променливи; д) нема слободни променливи .

2. Најди ги слободните променливи во следниве формули:

а) $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow (\exists y) \neg Q(R(x), y, R(y)) \big)$;

б) $(\forall x)\big((\exists y) P(x, Q(y)) \Rightarrow P(x, y) \big)$;

в) $(\forall z)\big(P(z) \Rightarrow (\exists y)\big(Q(x, y, z) \vee Q(z, y, x) \big) \big)$.

Решение. а) нема слободни променливи;

б) y е слободна променлива;

в) x е слободна променлива.

3. Даден е предикатот $Z(x)$: x е цел број. „Преведи ги“ во формален јазик следнаве реченици:

а) Квадратот на секој негативен број е позитивен.

б) Не секој цел број е позитивен.

в) Ниеден позитивен цел број не е негативен.

г) Секој цел број е позитивен или ниту еден цел број не е позитивен.

Решение. а) $(\forall x)\,(Z(x) \wedge (x < 0) \Rightarrow (x^2 > 0))$.

б) $\neg\big((\forall x)(Z(x) \Rightarrow (x > 0))\big)$.

в) $(\forall x)(Z(x) \wedge (x > 0) \Rightarrow \neg(x < 0))$.

г) $(\forall x)(Z(x) \Rightarrow (x > 0)) \vee (\forall x)(Z(x) \Rightarrow \neg(x > 0))$.

4. Нека се дадени предикатите:

$P(x)$: x е планета слична на Земјата.

$Q(x)$: x има услови за живот.

Притоа, допуштените вредности на x се од множеството планети во галаксијата Млечен пат. Да ги најдеме интерпретациите во „обичен“ јазик, на следниве симболички записи:

а) $(\forall x)(Q(x) \Rightarrow P(x))$;

б) $(\forall x)\,P(x) \vee (\forall x)\,Q(x)$;

в) $(\forall x)\,(P(x) \vee \neg P(x))$;

г) $(\forall x)\,P(x) \vee (\forall x)\neg P(x)$;

д) $\neg((\forall x)\,(P(x) \vee Q(x)))$.

Решение. а) Секоја планета што има услови за живот личи на Земјата.

б) Сите планети се слични на Земјата или сите планети имаат услови за живот.

в) Една планета е или слична на Земјата или не е.

г) Секоја планета е слична на Земјата или секоја планета не е слична на Земјата.

д) Некои планети не се слични на Земјата и немаат услови за живот.

5. „Преведи ги“ на формален јазик, користејќи предикати и квантификатори, следниве реченици:

1. Сите студенти се паметни.
2. Постои студент.
3. Постои паметен студент.

4. Секој студент се дружи со некој студент.
5. Секој студент се дружи со некој друг студент.
6. Постои студент кој се дружи со секој втор студент.

Решение. Нека $S(x)$: x е студент, $P(x)$: x е паметен, $R(x, y)$: x се дружи со y. Тогаш:

1. $(\forall x)\,(S(x) \Rightarrow P(x))$.
2. $(\exists x)\, S(x)$.
3. $(\exists x)\,(S(x) \wedge P(x))$.
4. $(\forall x)\,(S(x) \Rightarrow (\exists y)(S(y) \wedge R(x, y)))$.
5. $(\forall x)\,(S(x) \Rightarrow (\exists y)(S(y) \wedge \neg(x = y) \wedge R(x, y)))$.
6. $(\exists x)\,(S(x) \wedge (\forall y)(S(y) \wedge \neg(x = y) \Rightarrow R(y, x)))$.

6. „Преведи ги“ на формален јазик, користејќи предикати и квантификатори, следниве реченици:

1. Јован е студент.
2. Јован учи или анализа или геометрија (но не и двете).
3. Јован учи анализа и геометрија.
4. Јован не учи анализа.
5. Ниту еден студент не учи анализа.
6. Само еден студент не положи геометрија.
7. Сите студенти положија геометрија, а барем еден студент не положи анализа.
8. Сите студенти што учат анализа учат и геометрија.

Решение. Нека $S(x)$: x е студент, $U(x, y)$: x учи предмет y, $P(x, y)$: x го положи y. Тогаш:

1. $S(\text{Јован})$.
2. $U(\text{Јован}, \text{анализа}) \veebar U(\text{Јован}, \text{геометрија})$.
3. $U(\text{Јован}, \text{анализа}) \wedge U(\text{Јован}, \text{геометрија})$.
4. $\neg U(\text{Јован}, \text{анализа})$.
5. $(\forall x)(S(x) \wedge \neg U(x, \text{анализа}))$.
6. $(\exists! x)(S(x) \wedge \neg P(x, \text{геометрија}))$
7. $(\forall x)(S(x) \wedge P(x, \text{геометрија})) \wedge (\exists x)(S(x) \wedge \neg P(x, \text{анализа}))$.
8. $(\forall x)(S(x) \wedge U(x, \text{анализа}) \Rightarrow U(x, \text{геометрија}))$.

7. „Преведи ги“ на формален јазик, користејќи предикати и квантификатори, следниве реченици:

1. Секој астронаут ќе патува барем до една планета.
2. Некои астронаути ќе патуваат до сите планети.

3. Другите астронаути нема да патуваат до ниту една планета,

а потоа, од формален јазик во „обичен“ јазик овие реченици:

а. $(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\exists y)(A(y) \wedge L(y,x)))$.

б. $(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\exists y)(A(y) \wedge \neg L(y,x)))$.

Решение. Нека $A(x)$: x е астронаут, $P(y)$: y е планета, $L(x,y)$: x ќе патува до y. Тогаш:

1. $(\forall x)(A(x) \Rightarrow ((\exists y)(P(y) \wedge L(x,y))))$.
2. $(\exists x)[A(x) \wedge ((\forall y)[P(y) \Rightarrow L(x,y)])]$
3. $(\exists x)(A(x) \wedge (\forall y)[P(y) \Rightarrow \neg L(x,y)])$

а. До секоја планета ќе допатува некој астронаут.

б. За секоја планета, постои астронаут кој нема да патува до неа.

1.6. Формални теории

Досегашното разгледување на исказите се однесуваше главно на нивното значење. Од множеството исказни формули, пак, издвоивме едно значајно подмножество формули наречени тавтологии. Видовме дека тавтологиите се многу важни зашто тие претставуваат закони на мислењето. Во овој дел наша цел ќе биде да го опишеме ова множество формули без да ги користиме термините „вистинит“ и „невистинит“, т. е. „точно“ и „неточно“. Заради тоа, потребно е да ги прецизираме поимите како што се доказ (дедукција, изведување), теорема и др. Тие поими конкретно се дефинираат во рамките на формалната теорија.

Дефиниција 1. *Формална теорија* $\mathcal{T}$ е подредена четворка множества $\mathcal{T} = (A, \mathrm{Form}, \mathrm{Ax}, R)$, каде што:

– A е непразно множество од основни (почетни) симболи (коешто е најмногу пребројливо). Множеството A го нарекуваме *азбука* (или *алфабет*), а неговите елементи *букви* (*почетни симболи* или *знаци*). Сите конечни низи од букви се нарекуваат *зборови*. Множеството од сите зборови образувани од букви (од A) се означува со A^+. Празната низа од букви обично се означува со λ, па A^* ќе ни го означува множеството $A^+ \cup \{\lambda\}$.

– Form е непразно множество, коешто е подмножество од A^*. Елементите на Form ги нарекуваме *формули*. Притоа, за секој збор над азбуката A е дадена ефективна постапка за одлучување дали некој збор е формула или не. (Терминот „ефективна постапка“ нема строго да го дефинираме.)

– Ax е непразно подмножество од множеството Form. Елементите на множеството Ax ги викаме *аксиоми*. Ако е дадена ефективна постапка со која може да се одлучи дали некоја формула е аксиома или не, тогаш за таа теорија велиме дека е *аксиома̄ска*.

– R е конечно непразно множество на некои релации на множството формули Form, кои се нарекуваат *йравила за изведување*. Ако $\alpha \in R$ е некое правило за изведување со должина n и ако $W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}, W_n$ (по тој редослед) се во релација α, тогаш пишуваме

$$\alpha : \ \frac{W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}}{W_n}$$

и велиме дека формулата W_n е *дирек̄тна йоследица* од формулите $W_1, \ldots, W_{n-1}$.

Дефиниција 2. Една конечна низа формули $W_1, \ldots, W_{n-1}, W_n$ (дадена по тој редослед) од формалната теорија $\mathcal{T}$ се нарекува *доказ* (*изведување, дедукција*) во теоријата $\mathcal{T}$, ако секоја формула W_i ($1 \le i \le n$) од таа низа го исполнува следниот услов:

(i) W_i е аксиома; или

(ii) W_i е директна последица од некои претходни формули од таа низа, добиена со некое правило за изведување од теоријата $\mathcal{T}$.

Дефиниција 3. Ако низата формули $W_1, \ldots, W_{n-1}, W_n$ од теоријата $\mathcal{T}$ е доказ, тогаш последната формула W_n на таа низа ја нарекуваме *̄теорема*. Пишуваме: $\vdash W_n$, а ако е потребно да се нагласи за која теорија се работи, тогаш пишуваме $\vdash_{\mathcal{T}} W_n$.

Забелешка. Поимите изведување и теорема се релативни и се дефинираат во рамките на некоја теорија. Значи, ако некоја низа формули за изведување е доказ во некоја теорија $\mathcal{T}$, тогаш во некоја друга теорија, на пример $\mathcal{T}_1$, таа низа не мора да биде доказ. Слично важи и за теоремите.

Дефиниција 4. Една формална теорија $\mathcal{T}$ е *одлучлива* ако постои ефективна постапка со која може да се утврди дали произволна формула е теорема во формалната теорија $\mathcal{T}$.

***Пример* 1.** Нека $\mathcal{T} = (A, \mathrm{Form}, \mathrm{Ax}, R)$ е формална теорија зададена на следниот начин.

Почетни симболи (букви) се a и b, т.е. азбука е множеството $A = \{a, b\}$.

Формули се сите зборови над азбуката A, т.е.

$$\mathrm{Form} = \{ a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, baa, bba, \dots \} .$$

Да забележиме дека множеството формули Form може да се запише и вака:

$$\mathrm{Form} = A \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots$$

Аксиома е формулата a, т.е. $\mathrm{Ax} = \{a\}$.

Правило за изведување е $\alpha : \dfrac{x}{xb}$, каде што x е формула, т.е. $R = \{\alpha\}$.

За дадената теорија, формулата $abbbb$ е теорема. Еве еден доказ за теоремата $abbbb$.

1. a (аксиома)
2. ab (од 1, по правилото за изведување α)
3. abb (од 2, по правилото за изведување α)
4. $abbb$ (од 3, по правилото за изведување α)
5. $abbbb$ (од 4, по правилото за изведување α)

Значи, $\vdash abbbb$.

По договор, зборовите *bb*, *bbb*, *bbbb, ...*, ќе ги пишуваме кратко во следниот облик: $b^2, b^3, b^4, \dots,$, соодветно. Слично и $\underbrace{b \dots b}_{n}$ (каде што n е бројот на појавувања на буквата b) кратко ќе го означуваме со b^n. Зборот b^0 по дефиниција е празниот збор λ.

Од доказот на теоремата *abbbb*, можеме да изведеме еден поопшт заклучок. Имено:

(1) *Зборот W е теорема ако и само ако зборот W е од облик* ab^n.

Очигледно, аксиомата a може да се претстави во облик ab^0. Правилото за изведување го „запазува" соодветниот облик на зборовите, т.е. ако формулата е од облик ab^k, тогаш формулата $ab^k b = ab^{k+1}$ добиена со правилото α од формулата ab^k го има тој облик, па и сите членови на изведувањето (т.е. доказот) се од тој облик. Значи, теоремите се од облик ab^n.

За обратното, нека формулата W е од облик ab^n. Ќе покажеме дека ab^n е теорема. Доказот се изведува со индукција по n. За $n = 0$ формулата W гласи ab^0, т. е. a. Бидејќи a е аксиома, следува дека таа е и теорема. Да претпоставиме дека формулата W од облик ab^n е теорема. Ќе покажеме дека формулата ab^{n+1} е теорема. Од индуктивната претпоставка следува дека постои низа формули $W_1, W_2, \dots, W_k$ каде што $W_k = W = ab^n$ е доказ на формулата ab^n. Тогаш низата формули $W_1, W_2, \dots, W_k, ab^{n+1}$ е доказ, зашто формулата ab^{n+1} е добиена со правилото за изведување од формулата $W_k = ab^n$.

Да забележиме дека формалната теорија од овој пример е одлучлива.

Од овој пример можеме да заклучиме дека со тврдењето (1) е опишано множеството од сите теореми на дадената формална теорија. Тоа тврдење се нарекува *мета-тврдење* или *мета-теорема* и се однесува на тврдењето за сите теореми од некоја дадена формална теорија (наречена *објект-теорија*).

Општо, при разгледувањето на некоја формална теорија, се служиме со некоја неформална, интуитивна математичка теорија како помошна, која се нарекува *мета-теорија*. Јазикот што го користиме при разгледувањето на мета-теоријата е природниот јазик (во нашиов случај – македонскиот јазик), дополнет со разни математички знаци. Него го нарекуваме *мета-јазик*, додека јазикот на објект теоријата се вика *објект-јазик*.

Дефиниција 5. Нека $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Form}$ е произволно подмножество формули од множеството формули Form на дадена формална теорија $\mathcal{T}$.

За една формула W велиме дека е (*синтактичка*) *последица* од множеството формули (*хипотези*) $\mathcal{F}$ ако постои конечна низа формули $W_1, \dots, W_{n-1}$, W , таква што секој член на таа низа е:

1. аксиома; или
2. хипотеза (од множеството $\mathcal{F}$)
3. директна последица од некои претходни формули од таа низа, добиена со некое правило за изведување од теоријата $\mathcal{T}$.

Означуваме: $\mathcal{F} \vdash_{\mathcal{T}} W$ (или само $\mathcal{F} \vdash W$) и читаме: „W е последица на хипотезите од $\mathcal{F}$“. Ако множеството хипотези е празно множество, тогаш наместо да пишуваме $\varnothing \vdash W$, ќе пишуваме $\vdash W$.

Конечната низа формули $W_1, \dots, W_{n-1}, W$ (од оваа дефиниција) ја нарекуваме *доказ* за формулата W по хипотезите од $\mathcal{F}$.

Лема 1. *Ако една формула W е последица од некое множество формули, тогаш формулата W е последица и од секое надмножество на тоа множество, т.е. ако $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_1 \vdash W$, тогаш $\mathcal{F}_2 \vdash W$.*

Доказ. Нека $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_1 \vdash W$. Тогаш постои доказ $W_1, \dots, W_{n-1}, W_n \equiv W$ за формулата W по хипотезите од $\mathcal{F}_1$. Од тоа што $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, следува дека оваа низа формули е доказ за формулата W и по хипотезите од $\mathcal{F}_2$, па $\mathcal{F}_2 \vdash W$. □

Задачи за вежбање

1. Нека $\mathcal{T} = (A, \mathrm{Form}, \mathrm{Ax}, R)$ е формална теорија зададена на следниот начин: азбука е множеството $A = \{a\}$; формули се сите зборови над азбуката A, т.е. $\mathrm{Form} = A^+ = \{a, aa, aaa, \dots\}$; $\mathrm{Ax} = \{aa\}$, т.е. аксиома е формулата aa и правило за изведување е $\alpha : \dfrac{x}{aax}$, каде што x е формула, т.е. $R = \{\alpha\}$.

а) Провери дали за дадената теорија $\mathcal{T}$ зборот $aaaaa$ е теорема.

б) Формулирај мета-тврдење со кое ќе се опишат сите теореми од теоријата $\mathcal{T}$, а потоа докажи го.

Решение. а) Формулата $aaaaa$ не е теорема. Кога формулата $aaaaa$ би била теорема, од правилото за изведување α, би добиле дека и формулата aaa е теорема (ги отстрануваме првите две букви во формулата $aaaaa$). Со повторна примена на правилото α, го добиваме зборот a, а тој не е аксиома.

б) Мета-тврдење: *Зборот W е теорема во формалната теорија $\mathcal{T}$ ако и само ако W содржи парен број букви a.*

Доказ. Нека W е теорема во формалната теорија $\mathcal{T}$. Единствена аксиома во оваа теорија е aa. Со примена на правилото за изведување над аксиомата се добива теоремата $aaaa$. Со повторна примена на правилото за изведување над теоремата $aaaa$ се добива нова теорема $aaaaaa$, итн. Правилото за изведување го „запазува" соодветниот облик на зборовите, т.е. ако формулата е од облик a^{2k}, тогаш формулата $aaa^{2k} = a^{2k+2}$ добиена со правилото α од формулата a^{2k} го има тој облик, па и сите членови на изведувањето (т.е. доказот) се од тој облик. Значи, теоремите се од облик a^{2n}.

Обратно, за произволна формула W со парен број букви a, со помош на математичка индукција, покажуваме дека W е теорема. Нека $n = 2k$ е бројот на сите букви во формулата W. Индукцијата ќе ја спроведеме по k.

За $k = 1$ формулата е аксиома, па значи и теорема. Да претпоставиме дека формулата со $2k$ букви a е теорема. Од индуктивната претпоставка, следува дека постои низа формули $W_1, W_2, \dots, W_k$ каде што $W_k = W = a^{2k}$ е доказ на формулата a^{2k}. Тогаш низата формули $W_1, W_2, \dots, W_k, aaa^{2k}$ е доказ за $aaa^{2k} = a^{2k+2}$, зашто формулата a^{2k+2} е добиена со правилото за изведување α над формулата $W_k = a^{2k}$. Според тоа, формулата со парен број букви a е теорема.

2. Нека $\mathcal{T} = (A, \mathrm{Form}, \mathrm{Ax}, R)$ е формална теорија зададена на следниот начин: азбука е множеството $A = \{0,1\}$, формули се сите зборови над азбуката A, т.е. $\mathrm{Form} = A^*$, аксиома е формулата 1, т.е. $\mathrm{Ax} = \{1\}$ и правила за изведување $\alpha : \dfrac{w}{0w1}$, $\beta : \dfrac{w}{w1}$, каде што w е формула, т.е. $R = \{\alpha, \beta\}$. Покажи дека формулата $0^3 1^6$ (т.е. 000111111) е теорема.

Решение. а) Доказ.

1. Формулата 1 е аксиома.
2. Со примена на правилата α и β се добиваат теоремите 011 и 11.
3. Со примена на правилото β над 011 се добива теоремата 0111, т.е. $0\,1^3$.
4. Со примена на правилото α над 0111 се добива теоремата 001111, т.е. $0^2 1^4$.
5. Со примена на правилото β над 001111 се добива теоремата 0011111, т.е. $0^2 1^5$.
6. Со примена на правилото α над 0011111 се добива теоремата 000111111, т.е. $0^3 1^6$.

3. Нека $\mathcal{T} = (A, \mathrm{Form}, \mathrm{Ax}, R)$ е формална теорија зададена на следниот начин: азбука е множеството $A = \{1,2,3\}$, формули се сите зборови над азбуката A, т.е. $\mathrm{Form} = A^+$, аксиома е формулата 2, т.е. $\mathrm{Ax} = \{2\}$ и правила за изведување $\alpha : \dfrac{w}{w111}$, $\beta : \dfrac{w1111}{w2}$, $\gamma : \dfrac{w2112}{w3}$, каде што w е формула, т.е. $R = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Докажи дека:

а) формулата 2113 е теорема.

б) формулата 12321 не е теорема.

в) формулата 221112111 не е теорема.

Решение. а) Доказ.

1. Формулата 2 е аксиома.
2. Формулата 2111 е теорема добиена од правилото α над аксиомата.
3. Формулата 2111111 е теорема добиена од правилото α над 2111.
4. Формулата 2111111 има четири единици на крајот, па можеме да го примениме правилото β над оваа формула и ја добиваме теоремата 2112.
5. Формулата 2112111 е теорема добиена од правилото α над 2112.
6. Формулата 2112111111 е теорема добиена од правилото α над 2112111.

7. Формулата 2112111111 има четири единици на крајот, па можеме да го примениме правилото β над оваа формула и ја добиваме теоремата 2112112.

8. Формулата 2112112 завршува на 2112, , па можеме да го примениме правилото γ над оваа формула и ја добиваме теоремата 2113.

б) Да претпоставиме дека 12321 е теорема. Последната буква во неа е 1, па значи не е применето ниту правилото β ниту правилото γ. Кога би го примениле правилото α над некој збор $x \in \mathrm{Form}$ би добиле $x111$ (а тоа не е така), па значи со примена на правилата за изведување над соодветни формули од Form, не може да се добие формулата 12321. Според тоа, таа не е теорема.

в) Нека формулата 221112111 е теорема. Од тоа што оваа формула завршува со 111, следува дека е применето правилото α над формулата 221112. Оваа формула може да се добие само од формулата 221111111 со примена на правилото β, додека, пак, 221111111 може да се добие само од 221111 со примена на правилото α. Исто така, формулата 221111 може да се добие само од формулата 221 со примена на правилото α. Последнава формула не може да се добие со ниту едно правило, па значи дадената формула не е теорема.

4. Да се конструира формална теорија $\mathcal{T}$ над азбуката $\{a,b\}$ таква што еден збор W е теорема ако и само ако содржи парен број букви a и непарен број букви b или непарен број букви a и парен број букви b.

Решение. Да забележиме дека условот на задачата е еквивалентен со тврдењето: *Зборот W е теорема ако и само ако W има непарен број букви.*

Нека формули над азбуката $A = \{a,b\}$ се сите зборови составени од буквите a и b. За аксиоми обично се земаат најкратките формули што го задоволуваат бараното својство, т.е. во овој случај $\mathrm{Ax} = \{a,b\}$. Правилата за изведување ќе ги конструираме така што да не се менува парноста на зборовите. Значи, на секој збор треба да се додаваат по две букви. За да бидат сите зборови теореми (според бараното својство) мораме да ги опфатиме сите случаи. Така, правилата за изведување се:

$$\alpha : \frac{w}{waa}, \ \beta : \frac{w}{wab}, \ \gamma : \frac{w}{wba}, \ \delta : \frac{w}{wbb}.$$

Ќе покажеме дека теорема од оваа теорија има парен број букви a и непарен број букви b или непарен број букви a и парен број букви b.

Бидејќи аксиомите имаат по една буква, а секое правило за изведување додава по две букви, следува дека парноста на бројот на букви не се менува. Сите теореми на вака добиената теорија имаат непарен број букви.

Обратно, ќе покажеме дека секој збор со непарен број букви е теорема. Доказот ќе го изведеме со индукција по k каде што $2k-1$ е должината на збор во оваа теорија. Сите зборови со должина 1 се аксиоми, па според тоа тие се и теореми. Да претпоставиме дека секој збор со должина $2k-1$ е теорема и да покажеме дека и произволен збор со должина $2k+1$ е теорема. Од индуктивната претпоставка имаме дека зборот што се состои од првите $2k-1$ букви е теорема. Нека x и y се последните две букви во зборот со должина $2k-1$. За парот букви xy имаме неколку можности: aa, ab, ba, bb. Ако правилата за изведување ги примениме над зборот со должина $2k-1$ во зависност од секој од овие случаи, тогаш се добива теорема со должина $2k+1$, што требаше да се докаже.

1.6.1. Исказната логика како формална теорија

Во основата на секоја математичка теорија (колку и да е неформално изложена) лежат исказната и предикатската логика. За да може некоја област да се изложи како формална теорија, потребно е претходно да се изградат на ист начин овие две области од логиката како формални теории.

Во овој раздел ќе дадеме еден важен пример на формална теорија, а тоа е исказното сметање, коешто го градиме така што класата од сите теореми во формалната теорија да се совпаѓа со класата тавтологии.

Нека $\mathcal{L}$ е формална теорија чијашто азбука е се состои од букви $p, q, r, \ldots$ (коишто се викаат *исказни букви*), симболите $\neg$ и $\Rightarrow$ (коишто се викаат *исказни сврзници*) и загради (,). Формулите на оваа теорија се дефинираат на следниов начин:

(i) исказните букви се исказни формули;

(ii) ако A и B се исказни формули, тогаш и $\neg A$ и $(A \Rightarrow B)$ се исто така исказни формули;

(iii) еден израз е исказна формула ако и само ако може да се добие од правилата (i) и (ii) во конечен број чекори.

Аксиоми се:

Ax1: $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

Ax2: $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Ax3: $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$,

каде што A и B се произволни исказни формули.

Правило за изведување е правилото модус поненс (modus ponens):

$$\text{(MP):} \quad \frac{A, A \Rightarrow B}{B},$$

т.е. B е директна последица од формулите A и $A \Rightarrow B$.

По договор, надворешните загради кај формулите се изоставаат.

Вака зададената формална теорија $\mathcal{L}$ се нарекува *исказно сметање* $\mathcal{L}$. Списокот аксиоми е зададен со помош на три шеми за аксиоми Ах1, Ах2 и Ах3, при што секоја од нив генерира бесконечно многу аксиоми. За секоја формула од $\mathcal{L}$ може ефективно да се провери дали е аксиома или не, па значи исказното сметање е *аксиоматска формална теорија*.

Останатите логички сврзници ги воведуваме со следните дефиниции:

$(A \wedge B)$ е замена за $\neg(A \Rightarrow \neg B)$

$(A \vee B)$ е замена за $\neg A \Rightarrow B$

$(A \Leftrightarrow B)$ е замена за $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Сите натамошни рагледувања се во рамките на теоријата $\mathcal{L}$, па наместо да пишуваме $\mathcal{F} \vdash_{\mathcal{L}} A$ кратко ќе пишуваме $\mathcal{F} \vdash A$. Притоа, $\mathcal{F}$ е подмножество од множеството формули во $\mathcal{L}$.

Лема 1. *За секоја формула A од исказното сметање* $\mathcal{L}$ *важи дека* $\vdash A \Rightarrow A$.

Доказ. Треба да покажеме дека $A \Rightarrow A$ е теорема во исказното сметање $\mathcal{L}$. Од дефиницијата за теорема во формална теорија, тоа значи дека треба да се покаже дека постои доказ на таа формула, т.е. изведување чиј последен член е формулата $A \Rightarrow A$.

Доказ. 1. $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ (од Ах1)

2. $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$ (од Ах2)

3. $(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ (1, 2, по (MP))

4. $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ (од Ах1)

5. $A \Rightarrow A$ (4, 3, по (MP))

Ова изведување е доказ во теоријата $\mathcal{L}$ за последната формула, па значи $A \Rightarrow A$ е теорема. □

Следното тврдење е познато како *теорема за дедукција* во формалната теорија на исказното сметање.

Теорема 1. (*Теорема за дедукција*) *Нека* $\mathcal{F}$ *е множество формули од теорија-та* $\mathcal{L}$, *т.е.* $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Form}(L)$ *нека A и B се формули. Тогаш:*

$$\mathcal{F} \cup \{A\} \vdash B \text{ ако и само ако } \mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B .$$

Доказ. Нека $\mathcal{F} \cup \{A\} \vdash B$. Тогаш постои доказ $W_1, W_2, \ldots, W_n$ на формулата $B \equiv W_n$ од хипотезите на множеството $\mathcal{F} \cup \{A\}$. Тврдењето се докажува со математичка индукција по должината n на доказот, т.е. ќе покажеме дека $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow W_n$.

За $n = 1$, W_1 може да биде: 1) формула од $\mathcal{F}$, 2) аксиома, 3) формулата A. Според Ax1, $W_1 \Rightarrow (A \Rightarrow W_1)$ е аксиома, па ако B е хипотеза од $\mathcal{F}$ или аксиома, тогаш низата W_1, $W_1 \Rightarrow (A \Rightarrow W_1)$, $A \Rightarrow W_1$ (при што последнава формула е добиена со модус поненс од претходните две), е доказ по хипотезите од $\mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow W_1$. Ако $B \equiv A$, тогаш од Лема 1 следува дека $\vdash A \Rightarrow A$, па значи $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow A$, т.е. $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow W_1$.

Нека $n > 1$. Да претпоставиме дека $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow W_k$ за секој $k < n$. Тогаш W_n може да биде: а) формула од $\mathcal{F}$, б) аксиома, в) формулата A, г) формулата што се добива по правилото модус поненс од формулите W_i и W_j за некои $i, j < n$ и каде што W_j е формулата $W_i \Rightarrow W_n$. Во првите три случаи доказот е ист како за $n = 1$. Во случајот г), од индуктивната претпоставка имаме дека $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow W_i$ и $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow (W_i \Rightarrow W_n)$. Од Ax2 за формулите A, W_i, W_n гласи: $(A \Rightarrow (W_i \Rightarrow W_n)) \Rightarrow ((A \Rightarrow W_i) \Rightarrow (A \Rightarrow W_n))$, па по правилото модус поненс следува дека $\mathcal{F} \vdash (A \Rightarrow W_i) \Rightarrow (A \Rightarrow W_n)$. Со повторна примена на правилото модус поненс, т.е. од $(A \Rightarrow W_i)$, $(A \Rightarrow W_i) \Rightarrow (A \Rightarrow W_n)$, следува дека $A \Rightarrow W_n$, па значи $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow W_n$.

За обратното, нека $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B$. Тогаш постои доказ $W_1, W_2, \ldots, W_n$ на формулата $(A \Rightarrow B) \equiv W_n$ од хипотезите на множеството $\mathcal{F}$. Тогаш низата $W_1, W_2, \ldots, W_n, A, B$ е доказ за формулата B од хипотезите на множеството $\mathcal{F} \cup \{A\}$, па (по примена на правилото модус поненс) се добива дека важи $\mathcal{F} \cup \{A\} \vdash B$. □

Сега ќе докажеме една лема којашто ќе ни помогне да докажеме едно важно својство на исказното сметање според кое, една формула е теорема ако и само ако таа е тавтологија.

Лема 2. *Нека* $A(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ *е формула во која сите исказни букви се меѓу буквите* $p_1, p_2, \ldots, p_k$. *Тогаш*

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k} \vdash A^{\alpha},$$

каде што $p^{\alpha} = \begin{cases} p, & \alpha = \top \\ \neg p, & \alpha = \bot \end{cases}$ *и за n-кацата вредности* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, *каде што* $\alpha_i \in \{\top, \bot\}$, $\alpha = A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$.

Доказ. Доказот го изведуваме со индукција по бројот на логичките сврзници $\neg$ и $\Rightarrow$ во формулата A.

За $n = 0$ формулата A е буквата p_i (можеме да ја избереме да биде p_1). Тогаш $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k} \vdash p_1^{\alpha_1}$ е точно, зашто $p_1^{\alpha_1} \vdash p_1^{\alpha_1}$.

Нека $n > 0$. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за секој $j < n$ и ќе го покажеме за n. Разгледуваме два случаја.

Случај 1. Формулата A е од облик $\neg B$. Од индуктивната претпоставка следува дека $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k} \vdash B^{\beta}$, каде што $\beta = B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Ќе го изведеме следното, т.е. $B^{\beta} \vdash A^{\alpha}$, т.е. $B^{\beta} \vdash (\neg B)^{\alpha}$ $(\alpha = \neg\beta)$. Ако $\beta = \top$, т.е. формулата има вредност $\top$ за n-ката $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, тогаш $B \vdash \neg\neg B$, а ова е точно (види задача 3 б)). Ако $\beta = \bot$, тогаш $\neg B \vdash \neg B$ (произлегува од Лемата 1). Значи, $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k} \vdash A^{\alpha}$.

Случај 2. Формулата A е од облик $B \Rightarrow C$. Од индуктивната претпоставка имаме дека

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k} \vdash B^{\beta}$$
$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k} \vdash C^{\gamma}.$$

Ќе покажеме дека $B^{\beta}, C^{\gamma} \vdash A^{\alpha}$, т.е. дека $B^{\beta}, C^{\gamma} \vdash (B \Rightarrow C)^{\alpha}$, каде што $\alpha = \beta \Rightarrow \gamma$. Тогаш за разни $\beta, \gamma \in \{\top, \bot\}$

$$B, C \vdash B \Rightarrow C,$$
$$B, \neg C \vdash \neg(B \Rightarrow C),$$
$$\neg B, C \vdash B \Rightarrow C,$$
$$\neg B, \neg C \vdash B \Rightarrow C,$$

што во сите случаи е точно (види задача 5).

Значи, $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k} \vdash A^{\alpha}$. □

Со следната теорема, позната како *Теорема за потполност*, потполно е опишано множеството од сите тавтологии. Тој опис е даден со аксиомите од формалната теорија $\mathcal{L}$.

Теорема 2. (*Теорема за потполност*) *Една формула А од теоријата* $\mathcal{L}$ *е тавтологија ако и само ако формулата А е теорема, т. е.*

$$\models A \text{ ако и само ако } \vdash A .$$

Доказ. Нека $\models A$. Тогаш од Лема 2 следува дека $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k} \vdash A^{\alpha}$, каде што $p_1, p_2, \dots, p_k$ се сите букви во формулата *А*. (Заради претпоставката дека *А* е теорема, $\alpha = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \top$ за сите вредности на $\alpha_i \in \{\top, \bot\}$, па A^{α} се совпаѓа со *А*).

За α_k имаме две можности: $\alpha_k = \top$ или $\alpha_k = \bot$. За тие два случаја соодветно добиваме дека:

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}, p_k \vdash A$$
$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}, \neg p_k \vdash A .$$

Од теоремата за дедукција соодветно за двата случаја добиваме дека:

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \vdash p_k \Rightarrow A$$
$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \vdash \neg p_k \Rightarrow A .$$

Користејќи ја задача 4 (види во задачите за вежба), се добива дека

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \vdash A .$$

На ист начин, повторно се разгледуваат два случаја: $\alpha_{k-1} = \top$ или $\alpha_{k-1} = \bot$. Тогаш $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_{k-2}^{\alpha_{k-2}} \vdash A$. Продолжувајќи ја оваа постапка, по конечен број чекори се добива дека $\vdash A$.

Обратно, нека $\vdash A$. Тогаш постои доказ $W_1, W_2, \dots, W_n$ на формулата *А* $\equiv W_n$. Да претпоставиме дека $n = 1$. Тогаш *А* е аксиома, а бидејќи секоја аксиома е теорема, имаме дека $\models A$. Нека $n > 1$ и $\models W_i$ за секој $i < n$. За формулата W_n постојат две можности: или W_n е аксиома или W_n е добиена од некои претходни формули W_i и $W_j \equiv W_i \Rightarrow W_n$ ($i, j < n$) во таа низа, по модус поненс. Во првиот случај, слично како за $n = 1, \models W_n$, а во вториот случај, од претпоставката дека $\models W_i$, $\models W_i \Rightarrow W_n$ и од теоремата 1 во делот 1.3 Тавтологии…, добиваме дека $\models W_n$. Значи, $\models A$.

Задачи за вежбање

1. Докажи го транзитивното правило за исказното сметање $\mathcal{L}$:

$$A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \ \vdash A \Rightarrow C\ .$$

Решение. Доказот следува од теоремата за дедукција.

1. $A \Rightarrow B$ (хипотеза)
2. $B \Rightarrow C$ (хипотеза)
3. A (хипотеза)
4. B (од 3 и 1 по (MP))
5. C (од 4 и 2 по (MP))

Значи, $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C,\ A \vdash C$, па од теоремата за дедукција имаме дека $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \ \vdash A \Rightarrow C$.

2. Докажи дека следната формула е теорема во исказното сметање $\mathcal{L}$:

$$\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)\,.$$

Решение. Доказот следува од теоремата за дедукција.

1. $\neg A$ (хипотеза)
2. $\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Ax1)
3. $\neg B \Rightarrow \neg A$ (од 1 и 2 по (MP))
4. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (Ax3)
5. $A \Rightarrow B$ (од 3 и 4 по (MP))
6. A (хипотеза)
7. B (од 6 и 5 по (MP)).

Значи, $\neg A,\ A \vdash B$, па од теоремата за дедукција имаме дека $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

3. Докажи дека следните формули се теореми во исказното сметање $\mathcal{L}$:

а) $\neg\neg A \Rightarrow A$

б) $A \Rightarrow \neg\neg A$

в) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

г) $A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$.

Решение. а) 1. $\neg\neg A$ (хипотеза)

2. $\neg\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A)$ (задача 2)
3. $\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A$ (од 1 и 2 по (MP))
4. $(\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$ (Ax3)
5. $\neg\neg A \Rightarrow A$ (од 3 и 4 по (MP))
6. A (од 1 и 5 по (MP)).

Од наведената низа формули имаме дека $\neg\neg A \vdash A$. Од теоремата за дедукција следува дека $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$.

б) 1. $(\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)$ (Ax3)

2. $\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$ (задача 2)

3. $A \Rightarrow \neg\neg A$ (од 2 и 1 по (MP)).

Од наведената низа формули имаме дека $A \vdash \neg\neg A$. Од теоремата за дедукција следува дека $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$.

в) 1. $A \Rightarrow B$ (хипотеза)

2. $\neg\neg A \Rightarrow A$ (од задача 3 а))

3. $\neg\neg A \Rightarrow B$ (од 2 и 1 со примена на задача 1)

4. $B \Rightarrow \neg\neg B$ (од задача 3 б))

5. $\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B$ (од 3 и 4 со примена на задача 1)

6. $(\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Ax3)

7. $\neg B \Rightarrow \neg A$ (од 5 и 6 по (MP)).

Значи, $A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$, па од теоремата за дедукција следува дека $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

г) Ќе покажеме дека $A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)$. Бидејќи $A, A \Rightarrow B \vdash B$, од теоремата за дедукција (применета двапати), следува дека:

1. $\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

2. A (хипотеза)

3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ (од 1 и 2 по (MP))

4. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$ (од задача 3 в))

5. $\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$ (од 3 и 4 по (MP))

6. $\neg B$ (хипотеза)

7. $\neg(A \Rightarrow B)$ (од 6 и 5 по (MP))

Значи, $A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)$, па од теоремата за дедукција (применета двапати), следува дека $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$.

4. Докажи дека:

а) $A \Rightarrow B, \neg A \Rightarrow B \vdash B$.

б) $\neg A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow A$.

Решение.

а) 1. $A \Rightarrow B$ (хипотеза)

2. $\neg A \Rightarrow B$ (хипотеза)

3. $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg\neg A)$ (од задача 3 в))
4. $\neg B \Rightarrow \neg\neg A$ (од 2 и 3 по (MP))
5. $\neg\neg A \Rightarrow A$ (од задача 3 а))
6. $\neg B \Rightarrow A$ (од 4 и 5 со примена на задача 1)
7. $\neg B \Rightarrow B$ (од 6 и 1 со примена на задача 1)
8. $\neg B \Rightarrow (B \Rightarrow \neg(B \Rightarrow B))$ (од задача 2)
9. $(\neg B \Rightarrow (B \Rightarrow \neg(B \Rightarrow B))) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(B \Rightarrow B)))$ (Ax3)
10. $(\neg B \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(B \Rightarrow B))$ (од 8 и 9 по (MP))
11. $\neg B \Rightarrow \neg(B \Rightarrow B)$ (од 7 и 10 по (MP))
12. $(\neg B \Rightarrow \neg(B \Rightarrow B)) \Rightarrow ((B \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ (Ax3)
13. $(B \Rightarrow B) \Rightarrow B$ (од 11 и 12 по (MP))
14. $B \Rightarrow B$ (од Лема 1)
15. B (од 14 и 13 по (MP)).

б) 1. $\neg A \Rightarrow B$ (хипотеза)
2. $B \Rightarrow \neg\neg B$ (од задача 3б))
3. $\neg A \Rightarrow \neg\neg B$ (од 1 и 2 по (MP))
4. $(\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$ (Ax3)
5. $\neg B \Rightarrow A$ (од 3 и 4 по (MP)).

5. Докажи дека:

а) $A, B \vdash A \Rightarrow B$

б) $A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)$

в) $\neg A, B \vdash A \Rightarrow B$

г) $\neg A, \neg B \vdash A \Rightarrow B$.

Решение. а) 1. B (хипотеза)
2. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (Ax1)
3. $A \Rightarrow B$ (од 1 и 2 по (MP))

Значи, $B \vdash A \Rightarrow B$, па и $A, B \vdash A \Rightarrow B$.

б) Од задача 3 г) имаме дека $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$, па двапати применувајќи ја теоремата за дедукција добиваме дека $A, \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B))$.

в) Од доказот на а) од оваа задача имаме $B \vdash A \Rightarrow B$, па и $\neg A, B \vdash A \Rightarrow B$.

г) 1. $\neg A$ (хипотеза)

2. $\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Ax1)
3. $\neg B \Rightarrow \neg A$ (од 1 и 2 по (MP))
4. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (Ax3)
5. $A \Rightarrow B$ (од 3 и 4 по (MP)).

Значи, $\neg A \vdash A \Rightarrow B$, па и $\neg A, \neg B \vdash A \Rightarrow B$.

6. Докажи дека во формалната теорија на исказното сметање важи:

а) $A, B \vdash A \wedge B$

б) $A \wedge B \vdash A$

в) $A \wedge B \vdash B$.

Решение. а) Треба да покажеме дека $A, B \vdash \neg(A \Rightarrow \neg B)$.

1. A (хипотеза)
2. B (хипотеза)
3. $B \Rightarrow \neg\neg B$ (од задача 3б))
4. $\neg\neg B$ (од 2 и 3 по (MP))
5. $A \Rightarrow (\neg\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B))$ (од задача 3г))
6. $\neg\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B)$ (од 1 и 5 по (MP))
7. $\neg(A \Rightarrow \neg B)$ (од 4 и 6 по (MP)).

б) Треба да покажеме дека $\neg(A \Rightarrow \neg B) \vdash A$, т.е. според теоремата за дедукција дека $\vdash \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A$.

1. $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$ (од задача 2)
2. $(\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A)$ (од задача 4б))
3. $\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A$ (од 1 и 2 по (MP)).

в) Слично како во претходната задача, тврдиме дека $\neg(A \Rightarrow \neg B) \vdash B$.

1. $\neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$ (Ax1)
2. $\neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B)$ (од задача 4б))
3. $\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B$ (од 1 и 2 по (MP)).

1.6.2. Предикатската логика како формална теорија

Во овој дел ќе изложиме уште еден важен пример на формална теорија, а тоа е предикатското сметање (или логика од прв ред). Основите на предикатското сметање биле поставени независно од *Готлоб Фреге*, германски филозоф, логичар и математичар (1848 – 1925) и од *Чарлс Сандерс Пирс*, американски филозоф, логичар и математичар (1839 – 1914).

Формулите на теоријата што овде ќе ја изложиме, се сите предикатски формули изградени на вообичаен начин во кои се користат само логичките сврзници $\neg$, $\Rightarrow$ и квантификаторот $\forall$. Останатите сврзници се воведуваат со помош на дефиниции. Аксиоми се:

Ax1: $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

Ax2: $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Ax3: $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

Ax4: $(\forall x)(A \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)\, B(x))$, ако променливата x не е слободна во формулата A.

Ax5: $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(t)$, ако t е произволен терм слободен за променливата x во формулата $A(x)$.

Правила за изведување се правилото модус поненс (modus ponens) и генерализација, т.е.

$$\text{(MP):} \quad \frac{A, A \Rightarrow B}{B} \qquad \text{и} \qquad \text{(Gen):} \quad \frac{A}{(\forall x)A}.$$

Формалната теорија со аксиомите Ax1 – Ax5 и правилата за изведување (MP) и (Gen) ја нарекуваме *предикатско сметање од прв ред* и ја означуваме со PR[1]. Со L го означуваме јазикот на оваа теорија.

Дефиниција 1. Нека $\mathcal{F} \cup \{A\} \subseteq \mathrm{Form}(L)$. За формулата A велиме дека е *синтактичка последица* на множеството формули $\mathcal{F}$ ако постои конечна низа формули $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ таква што $A_n \equiv A$ и за секој $i \le n$

1. A_i е аксиома, или

2. $A_i \in \mathcal{F}$, или

3. за некои $j, k < i$ формулата A_i е добиена од формулите A_j и A_k од таа низа со помош на правилото за изведување (MP), или

4. за некој $j < i$, формулата A_i е добиена од формулата A_j на таа низа со помош на правилото за изведување (Gen).

Ако формулата A е синтактичка последица од множеството формули $\mathcal{F}$, тогаш пишуваме $\mathcal{F} \vdash W$. Ако $\mathcal{F} = \varnothing$, тогаш наместо да пишуваме $\varnothing \vdash A$, пишуваме $\vdash A$ и во тој случај формулата A е теорема.

Теорема 1. (*Теорема за дедукција*) *Ако* $\mathcal{F} \cup \{A, B\} \subseteq \mathrm{Form}(L)$, *тогаш:*

$$\mathcal{F} \cup \{A\} \vdash B \text{ ако и само ако } \mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B,$$

при што променливата по која ја вршиме генерализацијата (Gen) *не е слободна во формулата А.*

Доказ. Нека $\mathcal{F} \cup \{A\} \vdash B$. Тогаш постои доказ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на формулата $B \equiv A_n$ по хипотезите на $\mathcal{F} \cup \{A\}$.

Тврдењето се докажува со математичка индукција по должината n на доказот.

За $n = 1$ имаме A_1 $(\equiv B)$, па A_1, т.е. B е или аксиома или хипотеза од $\mathcal{F}$ или е формулата A. Ако B е аксиома или хипотеза од $\mathcal{F}$, тогаш низата $B,\ B \Rightarrow (A \Rightarrow B),\ A \Rightarrow B$ е доказ по хипотезите од $\mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B$. Ако $B \equiv A$, тогаш $\vdash A \Rightarrow A$, па и $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow A$, т.е. $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B$.

Нека $n > 1$. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за секој $i < n$, а ќе го покажеме за n. Во тој случај $A_n \equiv B$, па за формулата B имаме четири можности:

1. B е аксиома
2. $B \in \mathcal{F}$
3. $B \equiv A$
4. B не е аксиома, $B \notin \mathcal{F}$ и B не е A.

Во првите три случаи доказот е ист како за $n = 1$. Затоа ќе ја разгледаме само можноста 4. Тука се јавуваат два потслучаја и тоа: формулата B е добиена по правилото (MP) од некои две формули A_i и $A_j \equiv A_i \Rightarrow B$ $(i, j < n)$ коишто претходат во низата, и, формулата B е добиена по правилото (Gen) од некоја формула A_i $(i < n)$ во низата.

Во првиот потслучај, од индуктивната претпоставка следува дека $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow A_i$, $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow (A_i \Rightarrow B)$, што значи дека постои доказ $B_1, B_2, \ldots, B_k$ по хипотезите од $\mathcal{F}$, каде што

$$B_{k-1} : A \Rightarrow A_i \quad \text{и} \quad B_k : A \Rightarrow (A_i \Rightarrow B).$$

Доказот го продолжуваме со следниве формули:

$B_{k+1} : (A \Rightarrow (A_i \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow A_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$ (Ax2)

$B_{k+2} : (A \Rightarrow A_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (од B_k и B_{k+1} по MP)

$B_{k+3} : A \Rightarrow B$ (од B_{k-1} и B_{k+2} по MP).

Така добиваме доказ $B_1, B_2, \ldots, B_k, B_{k+1}, B_{k+2}, B_{k+3}$ на формулата $A \Rightarrow B$ по хипотезите од $\mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B$.

Во вториот потслучај, од индуктивната претпоставка следува дека $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow A_i$, па според правилото за генерализација (Gen) добиваме дека $\mathcal{F} \vdash (\forall x)(A \Rightarrow A_i)$ каде што x не е слободна променлива во формулата A. Значи, постои доказ $B_1, B_2, \ldots, B_s$ по хипотезите од $\mathcal{F}$, каде што

$$B_s : (\forall x)(A \Rightarrow A_i).$$

Продолжувајќи го тој доказ со формулите

$B_{s+1} : (\forall x)(A \Rightarrow A_i) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x) A_i)$ (Ax4, x не е слободна во A)

$B_{s+2} : A \Rightarrow (\forall x) A_i$ (од B_s и B_{s+1} по MP).

Така добиваме доказ $B_1, B_2, \dots, B_s, B_{s+1}, B_{s+2}$ на формулата $A \Rightarrow (\forall x) A_i$, т.е. на формулата $A \Rightarrow B$ по хипотезите од $\mathcal{F}$. Значи, $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B$.

Обратно, нека $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B$. Тогаш постои доказ $A_1, A_2, \dots, A_n$ на формулата $A \Rightarrow B$ $(\equiv A_n)$ по хипотезите од $\mathcal{F}$. Тогаш $A_1, A_2, \dots, A_n \equiv A \Rightarrow B, A, B$ е доказ на формулата B по хипотезите од $\mathcal{F} \cup \{A\}$. Значи, $\mathcal{F} \cup \{A\} \vdash B$. □

Задачи за вежбање

1. Докажи дека во предикатското сметање важи:

а) $\vdash (\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow ((\forall x)A(x) \Rightarrow (\forall x)B(x))$.

б) $\vdash (\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow ((\exists x)A(x) \Rightarrow (\exists x)B(x))$.

Решение. Во решенијата на секоја од задачите генерализацијата не се врши по променливата што е слободна во хипотезите, при примената на теоремата за дедукција.

а) Ќе покажеме дека $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)), (\forall x)A(x) \vdash (\forall x)B(x)$.

1. $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$ (хипотеза)
2. $(\forall x)A(x)$ (хипотеза)
3. $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (A(x) \Rightarrow B(x))$ (Ax5)
4. $A(x) \Rightarrow B(x)$ (од 1 и 3 по (MP))
5. $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(x)$ (Ax5)
6. $A(x)$ (од 2 и 5 по (MP))
7. $B(x)$ (од 4 и 6 по (MP))
8. $(\forall x)B(x)$ ((Gen) на 7).

б) Ќе покажеме дека $\vdash (\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\neg(\forall x)A(x) \Rightarrow \neg(\forall x)B(x))$, што е еквивалентно со $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)) \vdash \neg(\forall x)A(x) \Rightarrow \neg(\forall x)B(x)$, а тоа, пак, според Ax3 и задача 3 б) од 1.6.1, е еквивалентно со

$$(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)) \vdash (\forall x)\neg B(x) \Rightarrow (\forall x)\neg A(x).$$

Од теоремата за дедукција следува дека е доволно да покажеме дека:

$$(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)), (\forall x)\neg B(x) \vdash (\forall x)\neg A(x).$$

1. $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$ (хипотеза)
2. $(\forall x)\neg B(x)$ (хипотеза)
3. $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (A(x) \Rightarrow B(x))$ (Ax5)
4. $A(x) \Rightarrow B(x)$ (од 1 и 3 по (MP))
5. $(\forall x)\neg B(x) \Rightarrow \neg B(x)$ (Ax5)
6. $\neg B(x)$ (од 2 и 5 по (MP))
7. $(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x))$ (теорема од задача 3в) од 1.6.1.)
8. $\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)$ (од 4 и 7 по (MP))
9. $\neg A(x)$ (од 6 и 8 по (MP))
10. $(\forall x)\neg A(x)$ ((Gen) на 9).

2. Докажи дека во предикатското сметање важи:

а) $\vdash (\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$.

б) $\vdash (\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$.

Решение. а) Ќе покажеме дека $\vdash (\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$ и

$$\vdash (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \wedge B(x)).$$

Според теоремата за дедукција првото тврдење е еквивалентно со

$$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \vdash (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x).$$

Да го покажеме ова тврдење.

1. $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ (хипотеза)
2. $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (A(x) \wedge B(x))$ (Ax5)
3. $A(x) \wedge B(x)$ (од 1 и 3 по (MP))
4. $A(x) \wedge B(x) \Rightarrow A(x)$ (теорема од задача 6 б) од 1.6.1.)
5. $A(x)$ (од 3 и 4 по (MP))
6. $A(x) \wedge B(x) \Rightarrow B(x)$ (теорема од задача 6 в) од 1.6.1.)
7. $B(x)$ (од 3 и 6 по (MP))
8. $(\forall x)A(x)$ ((Gen) на 5)
9. $(\forall x)B(x)$ ((Gen) на 7)
10. $(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$ (од 8 и 9).

Слично се покажува дека $\vdash (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \wedge B(x))$, што му се остава на читателот за вежба.

б) Ќе покажеме дека $\vdash (\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$ и

$$\vdash (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x) \Rightarrow (\exists x)(A(x) \vee B(x)).$$

Првото од двете тврдења е еквивалентно со

$$\vdash \neg(\forall x)\neg(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \neg(\forall x)\neg A(x) \vee \neg(\forall x)\neg B(x),$$

што е еквивалентно со

$$\vdash \neg(\forall x)\neg(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow ((\forall x)\neg A(x) \Rightarrow \neg(\forall x)\neg B(x)).$$

Според теоремата за дедукција последното тврдење е еквивалентно со

$$\neg(\forall x)\neg(A(x) \vee B(x)), (\forall x)\neg A(x) \vdash \neg(\forall x)\neg B(x)),$$

а ова, пак, со повторна примена на теоремата за дедукција е еквивалентно со

$$(\forall x)\neg A(x) \vdash \neg(\forall x)\neg(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \neg(\forall x)\neg B(x).$$

Според Ax3 и задача 3 в) од 1.6.1., следува дека претходното тврдење е еквивалентно со

$$(\forall x)\neg A(x) \vdash (\forall x)\neg B(x) \Rightarrow (\forall x)\neg(A(x) \vee B(x)).$$

Со повторна примена на теоремата за дедукција се добива дека

$$(\forall x)\neg A(x), (\forall x)\neg B(x) \vdash (\forall x)\neg(A(x) \vee B(x)).$$

Да го покажеме ова тврдење.

1. $(\forall x)\ \neg A(x)$ (хипотеза)
2. $(\forall x)\neg B(x)$ (хипотеза)
3. $(\forall x)\neg A(x) \Rightarrow \neg A(x)$ (Ax5)
4. $\neg A(x)$ (од 1 и 3 по (MP))
5. $(\forall x)\neg B(x) \Rightarrow \neg B(x)$ (Ax5)
6. $\neg B(x)$ (од 2 и 5 по (MP))
7. $\neg A(x) \wedge \neg B(x)$ (од 4 и 6)
8. $\neg(A(x) \vee B(x))$ (се покажува дека следува од 7)
9. $(\forall x)\neg(A(x) \vee B(x))$ ((Gen) на 8).

Слично се покажува дека $\vdash (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x) \Rightarrow (\exists x)(A(x) \vee B(x))$, што му се остава на читателот за вежба.

3. Докажи дека во предикатското сметање важи:

а) $\vdash (\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$.

б) $\vdash (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$.

Решение. а) Ќе го докажеме следното:

$$\vdash \neg(\forall x)\neg\neg(A(x) \Rightarrow \neg B(x)) \Rightarrow \neg(\neg(\forall x)\neg A(x) \Rightarrow \neg\neg(\forall x)\neg B(x)).$$

Ова е еквивалентно со

$$\neg(\forall x)\neg A(x) \Rightarrow (\forall x)\neg B(x) \vdash (\forall x)(A(x) \Rightarrow \neg B(x)).$$

Да го покажеме ова тврдење.

1. $\neg(\forall x)\neg A(x) \Rightarrow (\forall x)\neg B(x)$ (хипотеза)

2. $(\forall x)\neg B(x) \Rightarrow \neg B(x)$ (Ax5)
3. $\neg(\forall x)\neg A(x) \Rightarrow \neg B(x)$ (од 1 и 2 по (MP))
4. $(\neg(\forall x)\neg A(x) \Rightarrow \neg B(x)) \Rightarrow (B(x) \Rightarrow (\forall x)\neg A(x))$ (Ax3)
5. $B(x) \Rightarrow (\forall x)\neg A(x)$ (од 3 и 4 по (MP))
6. $(\forall x)\neg A(x) \Rightarrow \neg A(x)$ (Ax5)
7. $B(x) \Rightarrow \neg A(x)$ (од 5 и 6 по (MP))
8. $(B(x) \Rightarrow \neg A(x)) \Rightarrow (\neg A(x) \Rightarrow B(x))$ (доказот на ова е за вежба)
9. $\neg A(x) \Rightarrow B(x)$ (од 7 и 8 по (MP))
10. $(\forall x)(\neg A(x) \Rightarrow \neg B(x))$ ((Gen) на 9).

б) Се докажува слично како претходните задачи.

2 ТЕОРИЈА НА МНОЖЕСТВАТА

Теоријата на множествата што ни ја создаде Кантор е рај од кој никој никогаш повеќе не смее да нè истера.
Давид Хилберт

2.1. Множества

Модерната математичка теорија на множествата е една од највпечатливите креации на човечкиот ум. Таа фасцинира со невообичаената храброст на некои од нејзините идеи, одушевува со одделни методи што се применуваат при докажувањето на некои интересни својства, но најважно од сè е што таа во огромна мера ги збогати, разјасни, прошири и обопшти многу области од математиката. Понатаму ќе зборуваме општо за множествата, за операциите што можат да се изведуваат со нив како и за релациите што постојат меѓу нив.

Поимот *множество* е најважен основен поим што се среќава во модерната математика. Интуитивно, множество е која било добро дефинирана колекција објекти. Множествата најчесто се означуваат со големите букви од латиницата: $A, B, C, ..., X, Y, Z, ..., A_1, B_1 ...$ Објектите што припаѓаат на едно множество се нарекуваат *елементи* на тоа множество. Нив ги означуваме со малите букви од латиницата: $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$ Изразот „x е елемент на A“ или, еквивалентно, „x му припаѓа на A“, со симболи се запишува во обликот $x \in A$. Изразот „x не е елемент на A“ е негација на $x \in A$, т.е. $\neg(x \in A)$, а се запишува како $x \notin A$.

Едно множество може да се претстави на два начина: табеларно и описно. На пример, со $A = \{\text{а}, \text{е}, \text{и}, \text{о}, \text{у}\}$ е претставено множеството A што ги содржи елементите а, е, и, о, у. Множеството A може да се претстави и описно со:

$$A = \{x \mid x \text{ е буква од азбуката, } x \text{ е самогласка}\}.$$

Со x обично се означува типичен елемент од множеството; вертикалната црта се чита „е таков што“ или „со својството“, а запирката како „ и“.

Множеството A има 5 елементи, но можеме да зборуваме и за множества со помал, односно со поголем број елементи од 5. На пример, можеме да зборуваме за множеството од сите ѕвезди на северното небо, или, пак, за множеството на природните броеви. Првото, иако е доста големо, сепак е конечно множество, додека второто содржи бесконечно многу елементи. Друг пример на множество што содржи бесконечно многу елементи е множеството од сите точки од една отсечка. Понекогаш е потребно да се разгледува и множество без елементи, како што е на пример множеството од сите парни прости броеви поголеми од 3. Множеството без елементи го нарекуваме *празно множество* и го означуваме со симболот $\varnothing$.

Дефиниција 1. За две множества A и B велиме дека се *еднакви* и означуваме $A = B$, ако тие имаат исти елементи, т.е. ако секој елемент што му припаѓа на множеството A му припаѓа и на множеството B и обратно, секој елемент што му припаѓа на множеството B му припаѓа и на множеството A.

Горнава дефиниција запишана со логички симболи изгледа вака:

$$A = B \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

На пример, врз основа на оваа дефиниција, имаме: $\{1\} = \{1,1\}$, а и $\{a,b\} = \{b,a\}$.

Својство 1. *За еднаквост на множества важат следниве особини:*

1) $A = A$; 2) $A = B \Rightarrow B = A$; 3) $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$.

Доказ. 1) $x \in A \Leftrightarrow x \in A$ (извод од тавтологијата $p \Leftrightarrow p$, каде што p е $x \in A$), а со обопштување се добива дека важи: $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in A)$.

2) Од дефиницијата и од тоа што $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(Q(x) \Leftrightarrow P(x))$ е закон за логичко заклучување, се добива дека:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \Leftrightarrow x \in A) \Leftrightarrow B = A.$$

3) $A = B \wedge B = C$

$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \Leftrightarrow x \in C)$ (од дефиницијата на „=“)

$\Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \Leftrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Leftrightarrow x \in C))$ (закон за логичко заклучување)

$\Rightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in C)$ (извод од транзитивност на еквиваленција)

$\Leftrightarrow A = C$ (од дефиницијата на „=“). □

Нека a и b се два објекта. Тогаш можеме да прифатиме дека постои множество, што го означуваме со $\{a,b\}$, чиишто единствени елементи се a и b. Со други зборови,

$$x \in \{a,b\} \Leftrightarrow x = a \vee x = b.$$

Единственоста на $\{a,b\}$ следува од дефиницијата за еднакви множества. Ваквото множество го нарекуваме *двоелементно* множество ако $a \neq b$. За $a = b$ имаме дека $\{a,b\} = \{a,a\} = \{a\}$ и тоа е едноелементно множество. Слично ги формираме множествата со три, четири,..., n елементи. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се n

објекти. Тогаш постои единствено множество A чиишто единствени елементи се $a_1, a_2, ..., a_n$, а го означуваме со $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Значи,

$$x \in \{a_1, a_2, ..., a_n\} \Leftrightarrow x = a_1 \vee x = a_2 \vee ... \vee x = a_n.$$

(Ако $a_i \neq a_j$ за секој пар (i, j), $i \neq j$, тогаш A се вика *n-елементно множество*.) Вака формираните множества ги нарекуваме *конечни множества*, а сите останати множества – *бесконечни множества* (овие поими ќе бидат прецизно дефинирани во Глава 5).

Дефиниција 2. За едно множество A велиме дека е *подмножество* од множество B ако секој елемент од A е елемент и на B и во тој случај пишуваме $A \subseteq B$. Покрај тоа, велиме и дека B е *надмножество* на A. Запишано со симболи:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

За едно множество A велиме дека е *вистинско подмножество* од множество B ако $A \subseteq B$ и $A \neq B$, т.е. постои елемент од B што не му припаѓа на A. Во овој случај пишуваме $A \subset B$. Значи:

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B, \text{ т.е.}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge (\exists x)(x \in B \Rightarrow x \notin A).$$

Овие релации, со ознаки $\subseteq$ и $\subset$, се нарекуваат релација за *инклузија* и релација за *стриктна инклузија*, соодветно. Негациите на $=$, $\subseteq$ и $\subset$ ќе ги означуваме со $\neq$, $\nsubseteq$ и $\not\subset$.

Како што спомнавме погоре, множество што нема елементи се нарекува празно множество и се означува со симболот $\varnothing$. Празното множество е подмножество од секое множество, а тоа ќе го покажеме во 2.2. (Лема 1).

Својство 2. *За инклузија на множества важат следниве особини*:

1) $A \subseteq A$ 2) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ 3) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

Доказ. 1) $x \in A \Rightarrow x \in A$ (извод од тавтологијата $p \Rightarrow p$), од што со обопштување се добива дека важи $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in A)$.

2) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$ (од дефиницијата на „$\subseteq$")

$\Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$ (закон за логичко заклучување)

$\Rightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ (од законот за замена на еквиваленција)

$\Leftrightarrow A = B.$ (од дефиницијата за „=")

3) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$

$\Leftrightarrow$ $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ $\wedge$ $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in C)$ (од дефиницијата на „$\subseteq$“)

$\Leftrightarrow$ $(\forall x)((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C))$ (закон за логичко заклучување)

$\Rightarrow$ $(\forall x)((x \in A \Rightarrow x \in C)$ (закон за силогизам)

$\Leftrightarrow$ $A \subseteq C$ (од дефиницијата на „$\subseteq$“). □

Овде ќе го воведеме и поимот партитивно множество.

Дефиниција 3. Нека A е дадено множество. Тогаш постои множество коешто ги содржи сите негови подмножества (го означуваме со $\mathcal{P}(A)$), т.е.

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Значи, $X \in \mathcal{P}(A)$ $\Leftrightarrow$ $X \subseteq A$. Множеството $\mathcal{P}(A)$ го нарекуваме *партитивно множество* на множеството A (или *булеан* на A – ознака: $\mathcal{B}(A)$ или 2^A).

***Пример* 1.** Нека $A = \{a,b,c\}$. Тогаш:

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}.$$

***Пример* 2.** Партитивното множество на множеството $\varnothing$ е $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, а партитивното множество на $\mathcal{P}(\varnothing)$ е $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, итн.

Да забележиме дека $\varnothing$ има 0 елементи, додека $\mathcal{P}(\varnothing)$ има 1 елемент. Поопшто, ако A има n елементи, тогаш $\mathcal{P}(A)$ има 2^n елементи. (Ова тврдење е докажано во Глава 5).

Бидејќи за произволно множество A важи $\varnothing \subseteq A$ и $A \subseteq A$, следува дека множеството $\mathcal{P}(A)$ е непразно множество и $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ и $A \in \mathcal{P}(A)$.

Историска забелешка. Основач на наивната теорија на множествата (неформална теорија, т.е. теорија којашто го користи „природниот јазик“ за да ги опише множествата и операциите со множества) е германскиот математичар Георг Кантор (Georg Cantor, 1845 – 1915). Тој работел на отстранување на непрецизностите на математичкиот јазик и воведување универзален јазик во математиката. Канторовата теорија која немала прецизирани правила на изведување, ги имала следниве три аксиоми:

Аксиома 1. *За секое својство постои множество елементи што го има тоа својство.*

Оваа аксиома се нарекува *аксиома за апстракција* и ја формулирал германскиот математичар Готлоб Фреге (Gottlob Frege, 1848 – 1925). Поимот својство бил прифатен интуитивно, а множеството A што ги содржи сите елементи коишто го имаат својството $P(x)$ се означувало со

$$A = \{x \mid P(x)\}\ .$$

Ваквото широко прифаќање на формирањето множества доведува до парадокси. Во 1903 година, Бертран Расел (Bertrand Russell, 1872 – 1970) формулирал парадокс (наречен *Раселов парадокс*) во Канторовата теорија на множествата, за кој денес неформално зборуваме како за задачата: „Во едно село берберот ги бричи сите мажи што не се бричат сами. Кој го бричи берберот?“ Всушност, парадоксот се заснова на претпоставката дека $P(x)$ е следново својство: $x \notin x$. Значи, ако претпоставиме дека $A = \{x \mid x \notin x\}$ е множество, тогаш добиваме дека $x \in A \Leftrightarrow x \notin x$. Ако наместо x ставиме A, добиваме дека $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$, што очигледно е парадокс. Очигледно е дека не за секое својство $P(x)$, $A = \{x \mid P(x)\}$ е множество. Ова е причина да се аксиоматизира теоријата на множествата, за да не се појавуваат парадокси слични на Раселовиот. Нив ги избегнуваме на тој начин што ги ограничуваме објектите x во рамки на некое множество што го имаат својството $P(x)$. Попрецизно:

Нека $P(x)$ е формула којашто го содржи x како слободна променлива. За секое множество X постои единствено множество A такво што $x \in A$ ако и само ако релациите $x \in X$ и $P(x)$ се точни.

Значи, ако X е множество, тогаш и

$$A = \{x \mid\ x \in X \wedge\ P(x)\}$$

е множество. По договор пишуваме и $A = \{x \in X \mid P(x)\}$ и читаме: A е множество што ги содржи сите $x \in X$ такви што $P(x)$.

Од вака формираните множества не може да се добие Раселовиот парадокс, зашто множеството A не мора да биде елемент на множеството X. Јасно, мора веќе да имаме некакви множества со чија помош ќе можеме да формираме нови заедно со својството $P(x)$ на овој начин. Во аксиоматската теорија на множествата таквите множества се воведуваат со помош на аксиоми.

Аксиома 2. *Две множества се еднакви ако и само ако имаат исти елементи.*

Аксиома 3. *Ако е дадена произволна фамилија $\mathscr{C}$ од непразни множества, тогаш постои пресликување f кое на секое множество A од фамилијата $\mathscr{C}$ му придружува по еден негов елемент $f(A)$, т. е. $f(A) \in A$.*

Последнава аксиома е позната под името *аксиома на избор*, додека пресликувањето f се нарекува *функција на избор*. За да ја разбереме оваа аксиома подобро, да разгледаме неколку примери.

а) Ако $\mathscr{C}$ е фамилија од непразни подмножества од множеството на природните броеви $\{1,2,3,...\}$, тогаш функцијата f можеме да ја дефинираме едноставно: нека $f(A)$ е најмалиот елемент од множеството A.

б) Ако $\mathscr{C}$ е фамилија од сите отворени (затворени) интервали од реалната права, тогаш можеме да го дефинираме $f(A)$ да биде средната точка од интервалот A.

в) Ако $\mathscr{C}$ е некоја поопшто одбрана фамилија непразни подмножества од реалната права, тогаш можеме да го дефинираме f избирајќи некое „покомплицирано“ правило.

г) Сепак, ако $\mathscr{C}$ е фамилија од *сите* непразни подмножества од реалната права, не е јасно како да се најде таква соодветна функција на изборот f.

Контроверзноста на ова прашање лежи во интерпретацијата на зборовите „да се најде“ и „постои“ во аксиомата. Ако сметаме дека „постои“ значи „да се најде“, тогаш аксиомата не е добра, зашто не можеме да најдеме конкретна функција на избор за непразните подмножества од реалните броеви. Сепак, повеќето математичари на зборот „постои“ му даваат едно послабо значење и тоа: за да се дефинира $f(A)$ едноставно „одбери кој било елемент“ од A и во тој случај, аксиомата е добра.

Неформално кажано, аксиомата на избор вели дека при дадена колекција корпи, од кои секоја содржи барем еден објект, можно е да се направи избор на точно еден објект од секоја корпа. Во многу случаи, ваков избор може да се направи без да се повикуваме на аксиомата на избор и тоа ако бројот на корпи е конечен или имаме згодно правило за избор кое ќе ни издвојува точно еден објект од секоја корпа. Еве еден неформален пример: за секоја (дури и бесконечна) колекција парови чевли, може да се одбере левиот чевел од секој пар за да се добие потребниот избор, но за бесконечна колекција од парови само црни чорапи, таков избор може да се направи само ако се повикаме на аксиомата на избор.

Да забележиме дека има и други формулации на аксиомата на избор, но овде ќе се задржиме само на оваа.

Во математичките универзуми постојат само две можности – или ќе ја прифатиме аксиомата на избор или ќе ја отфрлиме. Ние ќе ја прифатиме, зашто работата со неа е поедноставна.

2.2. Операции со множества

Познато е дека со помош на аритметичките операции собирање, одземање или множење на кои било два броја a и b им се придружуваат нови броеви, $a+b$, $a-b$ и $a\cdot b$, кои ги нарекуваме збир, разлика и производ на броевите a и b, соодветно. Во теоријата на множествата, на еден пар множества A и B може да им се придружат нови множества со помош на операциите унија, пресек или разлика на множества. Овие операции се основни операции меѓу множествата. Многу од својствата на тие операции ги докажал Џорџ Бул (George Boole, 1813 – 1864), па заради тоа се нарекуваат *Булови операции*.

2.2.1. Разлика на множества

Дефиниција 1. Нека A и B се произволни множества. *Разлика* на множествата A и B по тој редослед, со ознака $A\setminus B$, е множеството

$$A\setminus B=\{x \mid x\in A \ \wedge \ x\notin B\}.$$

Ако $A\subset X$, тогаш множеството $X\setminus A$ се нарекува *комплемент* на множеството A во однос на множеството X и пишуваме $C_X A$ или само A^c, ако е јасно за кое множество X се работи.

Да забележиме дека кај разлика на множества е битен редоследот на множествата, зашто $A\setminus B\neq B\setminus A$. Дека не важи знак за равенство меѓу $A\setminus B$ и $B\setminus A$, може да се согледа од едноставен пример.

Нека $A=\{1,2,3,4,5\}$ и $B=\{4,5,6,7\}$. Тогаш $A\setminus B=\{1,2,3\}$, а $B\setminus A=\{6,7\}$, па јасно, $A\setminus B\neq B\setminus A$.

Нека X е произволно множество. Едно од подмножествата на множеството X е самото тоа (Св. 2 во 2.1)). Да го разгледаме множеството $X\setminus X$. Тоа множество го означуваме со $\varnothing$, т.е. $X\setminus X=\varnothing$. Од дефиницијата за разлика на множества и од дефиницијата за еднакви множества, произлегува дека

$$x\in\varnothing \ \Leftrightarrow \ x\in X\setminus X \text{, т.е.}$$
$$x\in\varnothing \ \Leftrightarrow \ x\in X \ \wedge \ x\notin X.$$

Бидејќи десната страна на оваа еквиваленција е неточна за произволно x, следува дека не постои објект x таков што $x\in\varnothing$. Множеството $\varnothing$ не зависи од изборот на множеството X, т.е. важи следново својство.

Својство 1. *Празното множество е единствено.*

Доказ. Нека $X\setminus X$ и $Y\setminus Y$ се празни множества и нека a е произволен елемент. Тогаш:

$$a \in X \setminus X \;\Leftrightarrow\; a \in X \wedge a \notin X \;\Leftrightarrow\; \perp \;\Leftrightarrow\; a \in Y \wedge a \notin Y \;\Leftrightarrow\; a \in Y \setminus Y.$$

Од дефиницијата на еднакви множества следува дека $X \setminus X = Y \setminus Y$. □

Како што видовме погоре, релацијата $x \in \varnothing$ е неточна за секој x. Со следната лема даваме едно карактеристично својство на празното множество.

Лема 1. *Празното множество е подмножество од произволно множество.*

Доказ. Нека X е произволно множество. Тврдиме дека $\varnothing \subseteq X$.

$$\varnothing \subseteq X \;\Leftrightarrow\; (\forall x)(x \in \varnothing \Rightarrow x \in X) \;\Leftrightarrow\; (\forall x)(\perp \Rightarrow x \in X) \;\Leftrightarrow\; \top. \;\square$$

Својство 2. *Нека* $A, B \subseteq X$. *Тогаш:*

а) $A \setminus B \subseteq A$; б) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing$;

в) $A \setminus \varnothing = A$; г) $\varnothing \setminus A = \varnothing$.

Доказ. Својствата а), в) и г) се очигледни (произлегуваат од дефиницијата за разлика на множества). Ќе го покажеме својството б).

$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ (од дефиницијата за подмножество)

$\Leftrightarrow\; (\forall x)(\neg(x \in A) \vee x \in B)$ (закон за замена на импликацијата)

$\Leftrightarrow\; (\forall x)\neg(x \in A \wedge \neg(x \in B))$ (Де Морганови закони)

$\Leftrightarrow\; (\forall x)\neg(x \in A \wedge x \notin B)$ (промена на ознаката)

$\Leftrightarrow\; (\forall x)\neg(x \in A \setminus B)$ (од дефиницијата за разлика)

$\Leftrightarrow\; A \setminus B = \varnothing.$ □

Својство 3. *Нека* $A, B \subseteq X$. *Тогаш:*

а) $X \setminus (X \setminus A) = A$; б) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; (X \setminus B) \subseteq (X \setminus A)$.

Доказ. Нека x е произволно избран елемент.

а) $x \in X \setminus (X \setminus A)$

$\Leftrightarrow\; x \in X \;\wedge\; x \notin X \setminus A$ (од дефиницијата за разлика)

$\Leftrightarrow\; x \in X \;\wedge\; (\neg(x \in X \setminus A))$ (промена на ознаката)

$\Leftrightarrow\; x \in X \;\wedge\; (\neg(x \in X \;\wedge\; x \notin A))$ (од дефиницијата за разлика)

$\Leftrightarrow\; x \in X \;\wedge\; (\neg(x \in X) \;\wedge\; \neg(x \notin A))$ (Де Морганови закони)

$\Leftrightarrow\; x \in X \;\wedge\; (\neg(x \in X) \;\wedge\; \neg\neg(x \in A))$ (промена на ознаката)

$\Leftrightarrow\; x \in X \;\wedge\; (x \notin X \;\vee\; x \in A)$ (инволутивност на негацијата)

$\Leftrightarrow (x \in X \wedge\; x \notin X) \vee (x \in X \;\wedge\; x \in A)$ (дистрибутивен закон)

$\Leftrightarrow \perp \vee (x \in X \;\wedge\; x \in A)$ (извод од $p \wedge \neg p \Leftrightarrow \perp$)

$\Leftrightarrow\; x \in X \;\wedge\; x \in A$ (извод од $\perp \vee p \;\Leftrightarrow p$)

$\Leftrightarrow\; x \in A$. (примена на условот $A \subseteq X$).

б) Нека $A \subseteq B$ и нека $x \in X \setminus B$. Тогаш $x \in X$ и $x \notin B$. Од дефиницијата за подмножество ($x \in A \Rightarrow x \in B$) и од својството за контрапозиција имаме дека $x \notin B \Rightarrow x \notin A$. Од $x \notin A$ и од $x \in X$, имаме дека $x \in X \setminus A$, што требаше да се докаже. □

2.2.2. Унија и пресек на множества

Дефиниција 1. Нека A и B се произволни множества. *Унија* на множествата A и B е множеството што ги содржи сите елементи од A и сите елементи од B и го означуваме со $A \cup B$, т.е.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

На пример, $\{a,b,c\} \cup \{c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$.

Дефиниција 2. *Пресек* на множествата A и B е множеството што ги содржи сите елементи што припаѓаат и на множеството A и на множеството B и го означуваме со $A \cap B$, т.е.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

На пример, $\{a,b,c,e\} \cap \{c,d,e\} = \{c,e\}$.

Лесно се докажува дека $\varnothing \subseteq A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$. Навистина, од Лема 1 во 2.2 имаме дека празното множество е подмножество од секое множество, па значи и од множеството $A \cap B$. Ако $x \in A \cap B$, тогаш $x \in A$ и $x \in B$, па значи $x \in A$, т.е. $A \cap B \subseteq A$. Ако $x \in A$, тогаш јасно е дека $x \in A$ или $x \in B$, па значи $x \in A \cup B$, т.е. $A \subseteq A \cup B$.

За две множества велиме дека се *дисјунктни* ако и само ако $A \cap B = \varnothing$.

Симетрична разлика на две множества A и B, го означуваме со $A \Delta B$, е множество дефинирано на следниот начин:

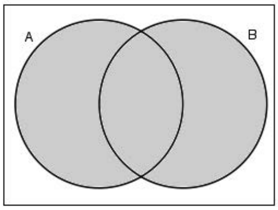
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Ќе докажеме подоцна дека операцијата Δ е комутативна и асоцијативна и дека за произволно множество A, важат и особините: $A \Delta A = \varnothing$ и $A \Delta \varnothing = A$.

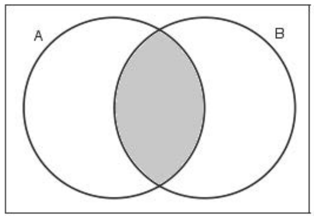
Ако сите множества што ги разгледуваме се подмножества од некое множество U, тогаш тоа множество го нарекуваме *универзално множество*. Јасно, универзалното множество е релативно, зашто го бираме во однос на проблемот што го разгледуваме. На пример, во аритметиката универзално множество е множеството на природните броеви.

Нека U е универзално множество. Сите подмножества на множеството U се елементи на партитивното множество на U, $\mathcal{P}(U)$. Значи, ако $A, B \in \mathcal{P}(U)$, тогаш $A \cup B$, $A \cap B$, $A^c \in \mathcal{P}(U)$.

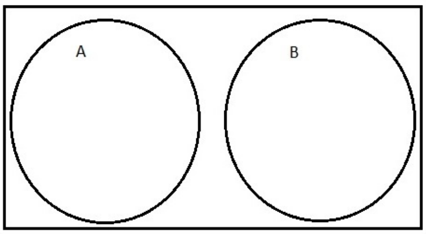
Често користиме *Венови дијаграми* (John Venn, 1834 – 1923) за да ги илустрираме множествата. Во Венов дијаграм обично се користат кружници, елипси или некои други затворени криви за да се претставаат подмножества од некое универзално множество U, кое, пак, се претставува со голем правоаголник или квадрат. Подолу се дадени Венови дијаграми што илустрираат унија и пресек на множества, дисјунктни множества, но и комплемент на множество, разлика на множества и симетрична разлика на множества (посивените делови од сликите).



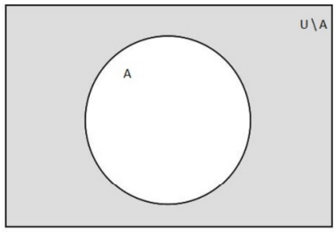
Унија на множества: $A \cup B$



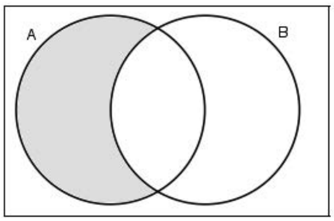
Пресек на множества: $A \cap B$



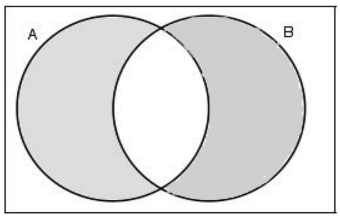
Дисјунктни множества: $A \cap B = \varnothing$.



Комплемент на множество A



Разлика на A и B: $A \setminus B$



Симетрична разлика на A и B: $A \Delta B$

Својство 1. *Нека* $A, B, C \in \mathcal{P}(U)$, *каде што* U *е универзално множество. Тогаш:*

1) $A \cup B = B \cup A$
2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4) $A \cup \varnothing = A$
5) $A \cup A^c = U$

1') $A \cap B = B \cap A$
2') $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3') $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4') $A \cap U = A$
5') $A \cap A^c = \varnothing$.

Доказ. Доказите на овие равенства со множества се релативно едноставни. Колку за илустрација ќе дадеме доказ на 3). Нека x е произволно избран елемент.

$x \in (A \cup B) \cup C$

$\Leftrightarrow\ x \in A \cup B\ \vee\ x \in C$ (од дефиницијата на унија)

$\Leftrightarrow\ (x \in A\ \vee\ x \in B)\ \vee\ x \in C$ (од дефиницијата на унија)

$\Leftrightarrow\ x \in A\ \vee\ (x \in B\ \vee\ x \in C)$ (од тавтологијата $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$)

$\Leftrightarrow\ x \in A\ \vee\ (x \in B \cup C)$ (од дефиницијата на унија)

$\Leftrightarrow\ x \in A \cup (B \cup C)$ (од дефиницијата на унија)

Равенството следува од дефиницијата за еднакви множества. □

Забелешка 1. Равенствата (идентитетите) 1) и 1') се нарекуваат *комутативни закони* за унија и пресек, соодветно, додека равенствата 2) и 2') се нарекуваат *асоцијативни закони* за унија и пресек, соодветно. Равенството 3) се вика (*лев*) *дистрибутивен закон на унија во однос на пресек*, а 3') е (*лев*) *дистрибутивен закон на пресек во однос на унија*. Да забележиме дека важи и (*десен*) *дистрибутивен закон на унија во однос на пресек* и (*десен*) *дистрибутивен закон на пресек во однос на унија*, т. е.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \text{ и } (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)\,.$$

Некои од својствата што не се покажани ќе бидат покажани во решените задачи на крајот од овој параграф, а останатите, би било добро студентот да ги покаже сам, за вежба.

Својство 2. *Нека* $A, B, C \in \mathcal{P}(U)$ *и* U *е универзално множество. Тогаш:*

1) $A \cup A = A$ 1') $A \cap A = A$

2) $A \cup U = U$ 2') $A \cap \varnothing = \varnothing$

3) $A \cap (A \cup B) = A$ 3') $A \cup (A \cap B) = A$

4) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 4') $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

5) $\varnothing^c = U$ 5') $U^c = \varnothing$

6) $(A^c)^c = A.$

Доказ. Доказот на равенството 6) е даден со доказот на Св. 3а) во 2.2. Колку за илустрација ќе дадеме доказ на 4). Останатите својства ги оставаме за вежба.

Нека x е произволно избран елемент.

$x \in (A \cup B)^c$

$\Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin A \cup B$ (од дефиницијата на комплемент)

$\Leftrightarrow x \in U \wedge \neg (x \in A \vee x \in B)$ (од дефиницијата за унија)

$\Leftrightarrow x \in U \wedge (\neg (x \in A) \wedge \neg (x \in B))$ (Де Морганови закони)

$\Leftrightarrow x \in U \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)$ (промена на ознаката)

$\Leftrightarrow (x \in U \wedge x \in U) \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)$ (од тавтологијата $p \wedge p \Leftrightarrow p$)

$\Leftrightarrow x \in U \wedge x \in U \wedge x \notin A \wedge x \notin B$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (x \in U \wedge x \notin A) \wedge (x \in U \wedge x \notin B)$ (од тавтологијата $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$)

$\Leftrightarrow (x \in U \setminus A) \wedge (x \in U \setminus B)$ (од дефиницијата за разлика)

$\Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c$ (од дефиницијата на комплемент)

$\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$ (од дефиницијата за пресек). □

Забелешка 2. Равенствата 1) и 1') во Св. 2 се нарекуваат *идемпотентни закони* за унија, односно за пресек. Равенствата 3) и 3') се *закони за апсорпција* на унија во однос на пресек и на пресек во однос на унија, соодветно. Равенствата 4) и 4') се нарекуваат *Де Морганови закони*, а равенството 6) се нарекува *равенство за инволутивност*.

Својство 3. *Нека* $A, B, C \in \mathcal{P}(U)$, *каде што U е универзално множество. Тогаш:*

1) $A \Delta B = B \Delta A$
2) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
3) $A \Delta \varnothing = A$
4) $A \Delta A = \varnothing$
5) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Доказ. Доказот на равенството 1) е очигледен. Имено,

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A.$$

Ќе го покажеме равенството 2), но прво ќе покажеме дека $A \setminus B = A \cap B^c$. Навистина, за произволен елемент x имаме:

$x \in A \setminus B$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ (од дефиницијата за разлика)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in U \wedge x \notin B)$ (од условот $B \subseteq U$)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in U \setminus B)$ (од дефиницијата за разлика)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c$ (од дефиницијата на комплемент)

$\Leftrightarrow x \in A \cap B^c$ (од дефиницијата за пресек).

Да тргнеме од десната страна на равенството:

$$A\ \Delta\ (B\ \Delta\ C) = A\ \Delta\ ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) = A\ \Delta\ ((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)) =$$

[го применивме равенството $A \setminus B = A \cap B^c$]

$$= \Big(A \setminus ((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c))\Big) \cup \Big(((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)) \setminus A\Big) =$$

[од дефиницијата за симетрична разлика]

$$= \Big(A \cap ((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c))^c\Big) \cup \Big(((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)) \cap A^c\Big) =$$

[го применивме равенството $A \setminus B = A \cap B^c$]

$$= \Big(A \cap ((B \cap C^c)^c \cap (C \cap B^c)^c)\Big) \cup \Big(((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)) \cap A^c\Big) =$$

[од Де Морганов закон во групата загради пред знакот $\cup$]

$$= \Big(A \cap ((B^c \cup (C^c)^c) \cap (C^c \cup (B^c)^c)\Big) \cup \Big(((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)) \cap A^c\Big) =$$

$$= \Big(A \cap ((B^c \cup C) \cap (C^c \cup B))\Big) \cup \Big(((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)) \cap A^c\Big) =$$

[од Св. 2. 6)]

$$= \Big((A \cap (B^c \cup C)) \cap (C^c \cup B)\Big) \cup \Big(((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)) \cap A^c\Big) =$$

[од асоцијативниот закон за пресек во заградите пред знакот $\cup$]

$$= \Big(((A \cap B^c) \cup (A \cap C)) \cap (C^c \cup B)\Big) \cup \Big(((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)) \cap A^c\Big) =$$

[од левиот дистрибутивен закон на пресек во однос на унија]

$$= \Big(((A \cap B^c) \cap (C^c \cup B)) \cup ((A \cap C) \cap (C^c \cup B)\Big) \cup$$

$$\cup \Big(((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)) \cap A^c\Big) =$$

[од десниот дистрибутивен закон на пресек во однос на унија]

$$= \Big(((A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap B)) \cup ((A \cap C \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B)\Big) \cup$$

$$\cup \Big((B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c)\Big)$$

Од тоа што $B^c \cap B = \varnothing$ и $C \cap C^c = \varnothing$, како и од Св. 2, 2'), следува дека $A \cap B^c \cap B = \varnothing$ и $A \cap C \cap C^c = \varnothing$. Со примена на асоцијативниот закон во последниот израз добиваме дека последното множество е еднакво на множеството

$$(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B) \cup (B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c),$$

или, за полесно паметење, ќе ги подредиме буквите по абецеден ред:

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c). \qquad (*)$$

Имајќи го предвид 1), за левата страна на даденото равенство имаме:

$$(A \,\Delta\, B)\,\Delta\, C = C\,\Delta\,(A\,\Delta\, B) = C\,\Delta\,(B\,\Delta\, A).$$

Резултатот (*) можеме да го примениме на множеството $C\,\Delta\,(B\,\Delta\,A)$:

$$(C\cap B\cap A)\cup(C\cap B^c\cap A^c)\cup(C^c\cap B^c\cap A)\cup(C^c\cap B\cap A^c)$$

а заради комутативноста на операцијата пресек на множества, добиеново множество се совпаѓа со множеството (*).

Бидејќи добивме дека десните страни на даденото равенство се еднакви, следува дека еднакви се и левите страни, па според тоа важи асоцијативниот закон за операцијата симетрична разлика, т.е. $(A\,\Delta\,B)\,\Delta\,C = A\ \Delta\ (B\,\Delta\,C)$.

Својствата 3) и 4) се очигледни (произлегуваат од Св. 3, в), г) од 2.2. и од дефиницијата за празно множество).

Ќе ја покажеме особината 5), т. е. дистрибутивниот закон на пресек во однос на симетрична разлика. Да тргнеме од левата страна на равенството:

$$\begin{aligned} A\cap(B\,\Delta C) &= A\cap((B\setminus C)\cup(C\setminus B)) = (A\cap(B\setminus C))\cup(A\cap(C\setminus B)) = \\ &= (A\cap(B\cap C^c))\cup(A\cap(C\cap B^c)) = \\ &= (A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C)) \qquad \text{(a)} \end{aligned}$$

Од друга страна,

$$\begin{aligned} &(A\cap B)\Delta(A\cap C) = \big((A\cap B)\setminus(A\cap C)\big)\cup\big((A\cap C)\setminus(A\cap B)\big) = \\ &= \Big((A\cap B)\cap(A\cap C)^c\Big)\cup\Big((A\cap C)\cap(A\cap B)^c\Big) = \\ &= \Big((A\cap B)\cap(A^c\cup C^c)\Big)\cup\Big((A\cap C)\cap(A^c\cup B^c)\Big) = \\ &= \Big((A\cap B\cap A^c)\cup(A\cap B\cap C^c)\Big)\cup\Big((A\cap C\cap A^c)\cup(A\cap C\cap B^c)\Big) = \\ &= (A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap C\cap B^c). \end{aligned}$$

Да забележиме дека ги применивме Де Моргановите закони, а потоа применивме лев дистрибутивен закон на $\cap$ во однос на $\cup$, како и фактот дека $A\cap A^c=\varnothing$.

Бидејќи десните страни на равенствата се еднакви, следува дека се еднакви и левите, т.е. важи $A\cap(B\,\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$. □

Својство 4. *Нека A и B се произволни множества. Следните услови се еквивалентни:*

(i) $A\subseteq B$,

(ii) $A\cap B = A$,

(iii) $A\cup B = B$.

Доказ. (i) $\Rightarrow$ (ii). Нека $A\subseteq B$. За кои било множества A и B точно е дека $A\cap B\subseteq A$. Останува да ја покажеме обратната инклузија. Затоа, нека $x\in A$. Бидејќи по претпоставка $A\subseteq B$, следува дека $x\in B$. Според тоа, $x\in A\cap B$, па значи $A\subseteq A\cap B$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Нека $A \cap B = A$. Тогаш:

$A \cup B = (A \cap B) \cup B$ (од претпоставката)

$= B$ (закон за апсорпција на $\cup$ во однос на $\cap$).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Нека $A \cup B = B$. Бидејќи $A \subseteq A \cup B$, од претпоставката следува дека $A \subseteq B$. □

Својство 5. *Нека* $A, B \in \mathcal{P}(U)$*, каде што U е универзално множество. Тогаш:*

(i) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$;

(ii) $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$;

(iii) $A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \emptyset$.

Доказ. (i) $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ (од дефиницијата за инклузија)

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg(x \in A) \vee x \in B)$ (од $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$)

$\Leftrightarrow (\forall x)\neg(x \in A \wedge (\neg(x \in B)))$ (Де Морганови закони)

$\Leftrightarrow (\forall x)\neg(x \in A \wedge x \notin B)$ (замена на ознаката)

$\Leftrightarrow (\forall x)\neg(x \in A \wedge x \in B^c)$ (замена на ознаката)

$\Leftrightarrow (\forall x)\neg(x \in A \cap B^c)$ (од дефиницијата на пресек)

$\Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$ (од деф. на празно множество).

(ii) Нека $A \cup B = \emptyset$. Јасно, $\emptyset \subseteq A$ (симетрично, $\emptyset \subseteq B$). Имајќи го предвид условот и фактот дека $A \subseteq A \cup B$ (симетрично, $B \subseteq A \cup B$), добиваме дека $A \subseteq \emptyset$ (симетрично, $B \subseteq \emptyset$). Според тоа, $A = \emptyset$ и $B = \emptyset$.

Забелешка 3. Оваа насока може да се покаже и на друг начин. Имено, имајќи го предвид условот и законот за апсорпција на $\cap$ во однос на $\cup$, можеме множеството A да го претставиме како $A = (A \cup B) \cap A$, па значи:

$$A = (A \cup B) \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset.$$

Слично, $B = (A \cup B) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$.

Обратно, нека $A = \emptyset \wedge B = \emptyset$. Тогаш, заменувајќи во $A \cup B$ и имајќи го предвид идемпотентниот закон за унија, добиваме: $A \cup B = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

(iii)

$A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$ (од деф. на операцијата Δ)

$\Leftrightarrow (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset$ (од својството $A \setminus B = A \cap B^c$)

$\Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset \wedge A^c \cap B = \emptyset$ (од (ii) од ова Својство)

$\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ (од (i) од ова Својство)

$\Leftrightarrow A = B$. □ (од $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$)

Задачи за вежбање

1. Докажи го левиот дистрибутивен закон на унија во однос на пресек, а потоа и десниот дистрибутивен закон на пресек во однос на унија, т.е. докажи дека се точни следниве равенства:

а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

б) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Решение. а) Нека x е произволно избран елемент. Тогаш:

$x \in A \cup (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \cap C$ (од дефиницијата на унија)

$\Leftrightarrow x \in A \ \vee \ (x \in B \wedge \ x \in C)$ (од дефиницијата на пресек)

$\Leftrightarrow (x \in A \ \vee \ x \in B) \wedge \ (x \in A \ \vee x \in C)$ (од $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$)

$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$ (од дефиницијата на унија)

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (од дефиницијата на пресек).

б) Нека x е произволно избран елемент. Тогаш:

$x \in (A \cup B) \cap C$

$\Leftrightarrow x \in A \cup B \ \wedge \ x \in C$ (од дефиницијата на пресек)

$\Leftrightarrow (x \in A \ \vee \ x \in B) \wedge \ x \in C$ (од дефиницијата на унија)

$\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in C) \vee (x \in B \ \wedge \ x \in C)$ (од $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$)

$\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C)$ (од дефиницијата на пресек)

$\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (од дефиницијата на унија).

2. Нека A, B, C се произволни подмножества од универзално множество U. Докажи дека се точни следниве импликации:

а) $A \subseteq B \ \Rightarrow \ A \cup C \subseteq B \cup C$;

б) $A \subseteq B \ \Rightarrow \ A \cap C \subseteq B \cap C$;

в) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \ \Rightarrow \ A \cup B \subseteq C$;

г) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \ \Rightarrow \ A \cap B \subseteq C$;

д) $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \ \Rightarrow \ C \subseteq A \cap B$.

Решение. а) Нека $A \subseteq B$ и нека x е произволно избран елемент, таков што $x \in A \cup C$. Тогаш:

$x \in A \vee x \in C$ (од дефиницијата на унија)

$\Leftrightarrow \ x \in B \vee x \in C$ (од условот $A \subseteq B$, $x \in A \Rightarrow x \in B$)

$\Leftrightarrow \ x \in B \cup C$. □

б) Задачата се решава на ист начин како а) само со примена на дефиницијата за пресек на множества.

в) Нека $A \subseteq C$, $B \subseteq C$ и $x \in A \cup B$ е произволно избран елемент. Од дефиницијата за унија, $x \in A$ или $x \in B$, а од условот на задачата следува дека $x \in C$, што требаше да се докаже.

г) Задачата се решава на ист начин како в) само со примена на дефиницијата за пресек на множества.

д) Нека $C \subseteq A, C \subseteq B$ и $x \in C$ е произволно избран елемент. Тогаш, од условот, $x \in A$ и $x \in B$, па од дефиницијата за пресек, следува дека $x \in A \cap B$.

3. Нека A и B се произволни подмножества од универзално множество U. Докажи дека:

а) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

б) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$;

в) $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Решение. а)

$$\begin{aligned} A \setminus (A \cap B) &= A \cap (A \cap B)^c && (\text{од } A \setminus B = A \cap B^c) \\ &= A \cap (A^c \cup B^c) && (\text{Де Морганови закони}) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) && (\text{дистрибутивен закон}) \\ &= \varnothing \cup (A \cap B^c) && (\text{од Св. 1, 5'}) \\ &= A \cap B^c && (\text{од Св. 1, 4}) \\ &= A \setminus B . \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus B &= (A \cup B) \cap B^c && (\text{од } A \setminus B = A \cap B^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) && (\text{дистрибутивен закон}) \\ &= (A \cap B^c) \cup \varnothing && (\text{од Св. 1, 5'}) \\ &= A \cap B^c && (\text{од Св. 1, 4}) \\ &= A \setminus B . \end{aligned}$$

в) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$$\begin{aligned} &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c && (\text{од } A \setminus B = A \cap B^c) \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) && (\text{Де Морганови закони}) \\ &= (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) && (\text{дистрибутивен закон}) \\ &= \varnothing \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \cup \varnothing && (\text{од Св. 1, 5'}) \\ &= (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) && (\text{од Св. 1, 4}) \\ &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) && (\text{од } A \setminus B = A \cap B^c) \end{aligned}$$

$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (од Св. 1, 1))

$= A \Delta B$. (од деф. на Δ)

4. Нека A, B, C се произволни подмножества од универзално множество U.
Докажи дека:

а) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

б) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

в) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

*Решение***.** а) Нека x е произволно избран елемент. Тогаш:

$$\begin{aligned}(\forall x)\, x \in A \setminus (B \setminus C) &\Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \wedge x \notin B \setminus C)\\ &\Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C))\\ &\Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C))\\ &\Leftrightarrow (\forall x)\,((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C))\\ &\Leftrightarrow (\forall x)\,((x \in A \setminus B) \vee (x \in A \cap C))\\ &\Leftrightarrow (\forall x)\, x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C).\end{aligned}$$

б) Нека x е произволно избран елемент. Тогаш:

$$\begin{aligned}(\forall x)\, x \in (A \setminus B) \setminus C &\Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \setminus B \wedge x \notin C)\\ &\Leftrightarrow (\forall x)\,((x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C)\\ &\Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C))\\ &\Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C))\\ &\Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \wedge x \notin B \cup C)\\ &\Leftrightarrow (\forall x)\, x \in A \setminus (B \cup C).\end{aligned}$$

в) Нека x е произволно избран елемент. Тогаш:

$$\begin{aligned}(\forall x)\, x \in A \cap (B \setminus C) &\Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \wedge x \in B \setminus C)\\ &\Leftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C))\\ &\Leftrightarrow (\forall x)\,((x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C)\\ &\Leftrightarrow (\forall x)\, x \in (A \cap B) \setminus C.\end{aligned}$$

5. Нека A, B, C се произволни подмножества од универзално множество U.
Докажи дека $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Решение. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = ((A \cap C) \cup B) \cap (C \cup A) =$

$= ((A \cap C) \cap (C \cup A)) \cup (B \cap (C \cup A)) =$

[од $A \cap C \subseteq C \cup A$ и од дистрибутивниот закон на $\cap$ во однос на $\cup$]

$= (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (B \cap A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

6. Нека A, B, C се произволни подмножества од универзално множество U. Докажи дека следнава импликација е точна:

$$(A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C.$$

Решение. I начин (директен доказ).

$$B = B \cap (B \cup A) = B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C) =$$
$$= (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap C = C.$$

II начин (индиректен доказ).

Нека $A \cap B = A \cap C$, $A \cup B = A \cup C$. Да го претпоставиме спротивното, т.е. $B \neq C$. Тогаш постои $b \in B$ таков што $b \notin C$. Од тоа што $b \in B$, следува дека $b \in A \cup B$, а заради условот, $b \in A \cup C$. Бидејќи $b \notin C$, следува дека $b \in A$. Според тоа, од $b \in A$ и $b \in B$ имаме дека $b \in A \cap B$, т.е. $b \in A \cap C$, од што следува дека $b \in C$, што противречи на фактот дека $b \notin C$. Значи, претпоставката дека $B \neq C$ не е добра, т.е. $B = C$.

7. Нека A и B се произволни подмножества од универзално множество U. Докажи дека:

а) $A \setminus B = A \,\Delta\, (A \cap B)$;

б) $A \setminus B = (A \,\Delta\, B) \cap A$.

Решение. а) $A \,\Delta\, (A \cap B) = (A \setminus (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \setminus A) = (A \setminus (A \cap B)) \cup \varnothing =$

$$= A \cap (A \cap B)^c = A \cap (A^c \cup B^c) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) = \varnothing \cup (A \cap B^c) = A \setminus B.$$

б) $(A \,\Delta\, B) \cap A = ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cap A = ((A \setminus B) \cap A) \cup ((B \setminus A) \cap A) =$

$$= ((A \cap B^c) \cap A) \cup ((B \cap A^c) \cap A) = (A \cap B^c) \cup \varnothing = A \setminus B.$$

2.3. Фамилии множества

Често користиме ознаки од видот $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ е множеството природни броеви) за да дефинираме едно множество, а множеството од горниот пример се совпаѓа со $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$.

Нека I е множество и нека за секој $i \in I$ имаме објект x_i. *Индексирано множество* со *индексно множество* I и елементи x_i, означено со $\{x_i \mid i \in I\}$, е множеството

$$\{a \mid (\exists i \in I)\ a = x_i\}.$$

Елементите на индексното множество I се нарекуваат *индекси*. Да забележиме дека за да го нарекуваме едно множество индексирано значи дека множеството е опишано со помош на индексно множество. Во горниот пример индексното множество е $\mathbb{N}$, а на секој $n \in \mathbb{N}$ му е придружен елемент $x_n = n^2$. Значи, $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ е друга ознака за множеството $\{a \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ a = n^2\}$.

Веќе видовме дека елемент на едно множество може да биде и множество (кај партитивно множество на дадено множество).

Фамилија множества е пресликување од некое индексно множество I во некое множество од множества, а ја означуваме со

$$\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\},$$

каде што A_i е слика на елементот $i \in I$.

Едноставно речено, на секој елемент i од множество I му е придружено множество A_i.

***Пример* 1.** $\mathcal{F} = \{\{1,2\},\{1\},\{3,5\}\}$ е фамилија множества. Таа има три елементи: $\{1,2\} \in \mathcal{F}$, $\{1\} \in \mathcal{F}$ и $\{3,5\} \in \mathcal{F}$.

Индексирана фамилија множества е индексирано множество што е исто така фамилија множества.

Да забележиме дека за да се нарекува една фамилија индексирана, значи дека тоа е фамилија множества што е опишана користејќи индексно множество. На пример, $\mathcal{F} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, каде што, за секој $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \le n\}$ е индексирана фамилија множества. Индексното множество е $\mathbb{N}$, а некои елементи на фамилијата се:

$$A_1 = \{1\},\ A_2 = \{1,2\},\ A_3 = \{1,2,3\},\ \dots,\ A_{100} = \{1,2,3,\dots,100\}.$$

***Пример* 2.** Да ја разгледаме индексираната фамилија множества

$$\mathcal{F} = \{D_k \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

каде што $D_k = \{a \in \mathbb{Z} \mid\ a \mid k\}$, т.е. D_k е множеството од сите делители на $k \in \mathbb{Z}$. На пр., $D_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $D_1 = \{-1,1\}$, $D_2 = \{-2,-1,1,2\}, \dots,$ $D_6 = \{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$.

Унија на фамилија множества (се означува со $\bigcup_{i \in I} A_i$) е дефинирана со:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I)(x \in A_i)\},$$

а *пресек на фамилија множества* (се означува со $\bigcap_{i \in I} A_i$) е дефиниран со:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I)(x \in A_i)\}.$$

***Пример* 3.** Ако фамилијата множества е зададена како во примерот 2, тогаш унија на оваа фамилија е $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, а пресек е $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} D_k = \{-1,1\}$.

Нека $\mathcal{F}=\{A_i \mid i\in I\}$ е дадена непразна фамилија множества. Постојат два вида „дисјунктност“ што може да се разгледуваат (во случај $\mathcal{F}$ да има повеќе од две множества):

1) $\bigcap_{i\in I} A_i=\varnothing$ и

2) $\mathcal{F}=\{A_i \mid i\in I\}$ е *пар по пар дисјунктна фамилија множества* ако и само ако $(\forall i,j\in I)\,(A_i\neq A_j \Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing)$.

Теорема 1. *Нека* $\mathcal{F}=\{A_i \mid i\in I\}$ *е фамилија множества во универзалното множество U и нека B е множество во U. Тогаш:*

(i) $B\cup\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(B\cup A_i)$; (ii) $B\cap\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(B\cap A_i)$;

(iii) $B\cap\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$; (iv) $B\cup\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(B\cup A_i)$.

Доказ. Ќе го докажеме само тврдењето (iii). Останатите тврдења се оставаат на читателот за вежба.

Нека $x\in U$. Тогаш:

$$x\in B\cap\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow x\in B \wedge x\in\bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow x\in B \wedge (\exists i\in I)\, x\in A_i$$
$$\Leftrightarrow (\exists i\in I)(x\in B \wedge x\in A_i) \Leftrightarrow (\exists i\in I)(x\in B\cap A_i) \Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i).\ \square$$

Теорема 2. *Нека* $\mathcal{F}=\{A_i \mid i\in I\}$ *е фамилија множества во универзалното множество U. Тогаш:*

(i) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c=\bigcap_{i\in I} A_i^c$; (ii) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c=\bigcup_{i\in I} A_i^c$.

Доказ. Ќе го докажеме само тврдењето (i). Другото тврдење се остава на читателот за вежба.

Нека $x\in U$. Тогаш:

$$x\in\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c \Leftrightarrow x\in U \wedge x\notin\bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow x\in U \wedge \neg((\exists i\in I)\, x\in A_i)$$
$$\Leftrightarrow x\in U \wedge (\forall i\in I)\,\neg(x\in A_i) \Leftrightarrow x\in U \wedge (\forall i\in I)\, x\notin A_i$$
$$\Leftrightarrow (\forall i\in I)(x\in U \wedge x\notin A_i) \Leftrightarrow (\forall i\in I) x\in A_i^c \Leftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I} A_i^c.\ \square$$

Задачи за вежбање

1. Нека $\mathcal{F} = \{\{1,2,3,4\},\{2,3,4,5\},\{3,4,5,6\},\{3,4,7,8,9\}\}$ е (конечна) фамилија множества. Да се најдат унијата и пресекот на оваа фамилија множества.

Решение. а) $\bigcup \mathcal{F} = \{1,2,3,...,8,9\}$; б) $\bigcap \mathcal{F} = \{3,4\}$.

2. Нека $A_n = \{n,2n,3n,...\,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Да се најдат:

а) $A_3 \cap A_5$; б) $A_4 \cap A_6$; в) $A_5 \cup A_{15}$;

г) $\bigcup_{n\in P} A_n$, каде што P е множеството прости броеви.

Решение. а) $A_3 = \{3,6,9,12,15,...\}$ - множество броеви деливи со 3;

$A_5 = \{5,10,15,20,25,...\}$ - множество броеви деливи со 5;

$A_3 \cap A_5 = \{15,30,45,...\} = A_{15}$ - множество броеви деливи со 15.

б) $A_4 = \{4,8,12,16,20,24,...\}$ - множество броеви деливи со 4;

$A_6 = \{6,12,18,24,30,...\}$ - множество броеви деливи со 6;

$A_4 \cap A_6 = \{12,24,36,...\} = A_{12}$ - множество броеви деливи со 12.

в) $A_5 \cup A_{15} = A_5$ - множество броеви деливи со 12.

г) Секој природен број освен 1 е производ од некој природен број во множеството $A_n = \{n,2n,3n,...\,|\, n \in P\}$, каде што P е множеството прости броеви. Значи, $\bigcup_{n\in P} A_n = \{2,3,4,5,...\} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

3. Да се најдат пресекот и унијата на фамилијата множества $\mathcal{F} = \{A_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$, каде што:

а) $A_i = \{1,2,3,....,i\}$;

б) $A_i = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ 0 \le x < i\}$;

в) $A_i = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\ \frac{i-1}{i} \le x < i\}$.

Решение. а) $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1,2\}$, …, $A_i = \{1,2,3,....,i\}$, ...

Очигледно, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_i \subseteq ...$, па според тоа $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = A_1$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$.

б) $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le x < 1\} = [0,1)$, $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le x < 2\} = [0,2)$,…,

$A_i = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le x < i\} = [0,i)$, …

Оттука следува дека $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = [0,1)$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = [0,+\infty)$.

в) $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\} = [0,1)$, $A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \le x < 2\} = \left[\frac{1}{2}, 2\right)$,

$A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \le x < 3\} = \left[\frac{2}{3}, 3\right)$, …

Прво, $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}\setminus\{1\}} A_i = \{1\}$, зашто $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$, а $\min\{1, 2, ..., n, ...\} = 1$. Значи, $A_1 \cap \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}\setminus\{1\}} A_i = [0,1) \cap \{1\} = \varnothing$. За унијата добиваме дека $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i = [0, +\infty)$.

4. Нека $I = [1, \infty)$, $i \in I$ и нека $A_i = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \frac{-1}{i} \le x \le 2 - \frac{1}{i}\}$. Да се најдат пресекот и унијата на фамилијата множества $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$.

Решение. За да стекнеме некаква претстава за тоа кои се унијата и пресекот, слично како во претходната задача ќе испишеме неколку примери за A_i. Значи, $A_1 = [-1, 1]$, $A_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $A_3 = \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$,… Оттука $\bigcap\limits_{i \in [1,\infty)} A_i = [0,1]$, зашто $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0$ и $\min\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, ..., 2 - \frac{1}{n}, ...\right\} = 1$, додека $\bigcup\limits_{i \in [1,\infty)} A_i = [-1, 2)$, зашто $\min\left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, ..., -\frac{1}{n}, ...\right\} = -1$, а $\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$.

5. Нека $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ е произволна фамилија множества. Да се покаже дека $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \subseteq A_i \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

Решение. Нека $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$. Тогаш: $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I)\, x \in A_i \Rightarrow x \in A_i$, за некој фиксен $i \in I$, па значи $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \subseteq A_i$. Нека $x \in A_i \Rightarrow (\exists i \in I)\, x \in A_i \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, од што следува дека $A_i \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

2.4. Подредени парови и Декартов производ на множества

Покрај двоелементно множество, каде што редоследот на елементите не е важен, го воведуваме и поимот подреден пар од два објекти a и b како математички објект кој го означуваме со (a, b), каде што е прецизирано кој објект е прв, а кој е втор. Така, за (a,b), објектот a е прв, т.е. *прва компонента*, а објектот b е втор, т. е. *втора компонента*. Потребата за дефинирање на поимот подреден пар, прв ја увидел американскиот математичар Норберт Винер (Norbert Wiener, 1894 – 1964), кој во 1914 година ја дал следнава дефиниција:

$$(a,b)=\{\{\{a\},\varnothing\},\{\{b\}\}\}.$$

Речиси во исто време, во 1914 година, Феликс Хаусдорф (Felix Hausdorff, 1868 – 1942) ја предложил следнава дефиниција за подреден пар

$$(a,b)=\{\{a,1\},\{b,2\}\},$$

каде што 1 и 2 се два различни објекти од a и b.

Дефиницијата на подреден пар што е дадена подолу, денес е прифатена во теоријата на множествата, а потекнува од Казимјеж Куратовски (Kazimierz Kuratowski, 1896 – 1980) кој ја поставил во 1921 година.

Дефиниција 1. Нека a и b се два објекти. Тогаш:

$$(a,b)=\{\{a\},\{\mathrm{a},b\}\}.$$

Значи, *подреден пар* (a,b) е множество од најмногу два елементи и тоа множеството $\{a\}$ и множеството $\{a,b\}$.

Јасно, ако $a\neq b$, тогаш $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}\neq\{\{b\},\{b,a\}\}=(b,a)$. Ако $a=b$, тогаш $(a,a)=\{\{a\},\{a,a\}\}=\{\{a\}\}$.

Следната теорема го дава основното својство на подредените парови.

Теорема 1. $(a,b)=(c,d)\ \Leftrightarrow\ a=c\ \wedge\ b=d$.

Доказ. Ако $a=c$ и $b=d$, тогаш тврдењето е тривијално исполнето.

Обратно, нека $(a,b)=(c,d)$. Тогаш од дефиницијата на подреден пар и дефиницијата за еднакви множества имаме дека:

$$(\forall x)\,(x\in\{\{a\},\{a,b\}\}\ \Leftrightarrow\ x\in\{\{c\},\{c,d\}\}),$$

па од дефиницијата за двоелементно множество имаме дека:

$$(\forall x)\,(x=\{a\}\ \vee\ x=\{a,b\}\ \Leftrightarrow\ x=\{c\}\ \vee\ x=\{c,d\}). \tag{*}$$

Ставајќи $x=\{a\}$, левата страна на еквивалентноста станува точна ($\{a\}=\{a\}$), па значи точна е и десната страна, т.е.

$$\{a\}=\{c\}\ \vee\ \{a\}=\{c,d\}.$$

И во двата случаја важи $a=c$. Ако го замениме овој резултат во (*) добиваме дека

$$(\forall x)\,(x=\{a\} \ \vee \ x=\{a,b\} \ \Leftrightarrow \ x=\{a\} \ \vee \ x=\{a,d\})\,. \qquad (**)$$

Ставајќи во формулата (**) $x=\{a,b\}$, левата страна на еквивалентноста (**) станува точна, па значи точна е и десната страна, т.е.

$$\{a,b\}=\{a\} \ \vee \ \{a,b\}=\{a,d\}\,, \qquad (***)$$

а за $x=\{a,d\}$, добиваме дека десната страна на еквивалентноста (**) станува точна, па значи точна е и левата страна, т.е.

$$\{a,d\}=\{a\} \ \vee \ \{a,d\}=\{a,b\}\,.$$

Ако $a=b$, тогаш од последново добиваме дека $\{a,d\}=\{a\}$, па значи $d=a=b=c$.

Ако $a\neq b$, тогаш не е точно дека $\{a,b\}=\{a\}$, па од (***) добиваме дека $\{a,b\}=\{a,d\}$, т.е. $b=d$. Според тоа, и во двата случаја $a=c$ и $b=d$, што требаше да се докаже. □

Како последица од оваа теорема имаме дека: $(a,b)=(b,a) \ \Leftrightarrow \ a=b.$

Со следната рекурзивна дефиниција го воведуваме поимот подредена n-ка.

Дефиниција 2. *Подредена n-ка* се дефинира со помош на подреден пар:

(i) $(a_1)=a_1$

(ii) $(a_1,a_2,...,a_n)=((a_1,a_2,...,a_{n-1}),\,a_n)$.

Од оваа дефиниција имаме дека $(a_1,a_2)=((a_1),\,a_2)=(a_1,\,a_2)$, а подреден пар веќе го дефиниравме. Подредена тројка претставува

$$(a_1,a_2,a_3)=((a_1,a_2),\,a_3)\,,$$

а подредена четворка е $(a_1,a_2,a_3,a_4)=((a_1,a_2,a_3),\,a_4)=(((a_1,a_2),a_3),\,a_4)$, итн.

Дефиниција 3. Нека A и B се непразни множества. *Декартов* (или *директен*) *производ* на множествата A и B, земени по тој редослед, е множеството што ги содржи сите подредени парови чија прва компонента е елемент од множеството A, а втора компонента е елемент од множеството B и се означува со $A\times B$, т.е.

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,\ b\in B\}\,.$$

Ако $A=\varnothing$ или $B=\varnothing$, тогаш по дефиниција $A\times B=\varnothing$.

***Пример* 1.** $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{1,2,3\}$. Тогаш

$$A\times B=\{(2,1),(4,1),(6,1),(8,1),(2,2),(4,2),(6,2),(8,2),(2,3),(4,3),(6,3),(8,3)\}$$

Да забележиме дека $A\times B$ има 12 елементи.

Декартов (т.е. директен) производ на конечен број множества се дефинира слично.

Дефиниција 4. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се непразни множества. *Декартов* (или *директен*) *производ* на множествата $A_1, A_2, ..., A_n$, земени по тој редослед, е множеството што ги содржи сите подредени *n*-ки кај кои *i*-тата компонента е елемент од множеството A_i ($i = 1, ..., n$) и го означуваме со $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, т.е. $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$.

Специјално, ако сите множества A_i ($i = 1, 2, ..., n$) се еднакви меѓу себе, т.е. $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, тогаш тој производ го означуваме со A^n и го нарекуваме *n-ти Декартов степен* на множеството *A*.

За Декартовиот производ во општ случај не важи комутативниот закон, т.е.

$$A \times B \neq B \times A,$$

а не важи ниту асоцијативниот закон, т.е.

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C).$$

Задачи за вежбање

1. Нека $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 5\}$. Најди ги множествата:

а) $A \times B$ и $B \times A$;

б) Дали $(A \times B) \times A = (B \times A) \times B$?

Решение. а) $A \times B = \{(1,1), (1,5), (2,1), (2,5), (3,1), (3,5)\}$,

$B \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$. Очигледно, $A \times B \neq B \times A$.

б) $(A \times B) \times A = \{((1,1),1), ((1,1),2), ((1,1),3), ((1,5),1), ((1,5),2), ((1,5),3)$
$((2,1),1), ((2,1),2), ((2,1),3), ((2,5),1), ((2,5),2), ((2,5),3)$
$((3,1),1), ((3,1),2), ((3,1),3), ((3,5),1), ((3,5),2), ((3,5),3)\}$

$(B \times A) \times B = \{((1,1),1), ((1,1),5), ((1,2),1), ((1,2),5), ((1,3),1), ((1,3),5),$
$((5,1),1), ((5,1),5), ((5,2),1), ((5,2),5), ((5,3),1), ((5,3),5)\}$.

Очигледно, $(A \times B) \times A \neq (B \times A) \times B$, зашто, на пример, $((1,1),2) \in (A \times B) \times A$, но $((1,1),2) \notin (B \times A) \times B$.

2. Да се докаже дека следните равенства се точни.

а) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

б) $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$.

Решение. а) Нека (x, y) е произволно избран елемент. Тогаш:

$(x, y) \in A \times (B \cup C) \iff x \in A \wedge y \in B \cup C$

$$\Leftrightarrow\ x\in A \wedge (y\in B \vee y\in C) \qquad \text{(дистрибутивен закон)}$$
$$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B)\vee(x\in A \wedge y\in C)$$
$$\Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \vee (x,y)\in A\times C$$
$$\Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \cup A\times C .$$

б) Нека (x,y) е произволно избран елемент. Тогаш:

$$(x,y)\in(A\times B)\setminus(C\times D) \Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \wedge (x,y)\notin C\times D$$
$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B) \wedge \neg(x\in C\wedge y\in D)$$
$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B) \wedge (x\notin C\vee y\notin D)$$
$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B \wedge x\notin C)\vee(x\in A\wedge y\in B \wedge y\notin D)$$
$$\Leftrightarrow ((x\in A\wedge x\notin C)\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge(y\in B\wedge y\notin D))$$
$$\Leftrightarrow (x\in A\setminus C\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in B\setminus D)$$
$$\Leftrightarrow (x,y)\in(A\setminus C)\times B\vee(x,y)\in A\times(B\setminus D)$$
$$\Leftrightarrow (x,y)\in(A\setminus C)\times B\cup A\times(B\setminus D).$$

3. Нека A, B и C се произволни множества. Докажи дека:

а) $A\times B=B\times A$ ако и само ако $A=B$ или ($A=\varnothing$ или $B=\varnothing$).

б) $A\times B=A\times C$ ако и само ако $B=C$ или $A=\varnothing$.

в) $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$ ако и само ако барем едно од множествата A, B и C е празното множество.

Решение. а) Нека $A\times B=B\times A$ и да претпоставиме дека $A\neq\varnothing$ и $B\neq\varnothing$. Тогаш постои $a\in A$ и постои $b\in B$, па $(a,b)\in A\times B$. Но, $A\times B=B\times A$, па значи $(a,b)\in B\times A$. Оттука следува дека $a\in B$ и $b\in A$. Според тоа, $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$, т.е. $A=B$. Обратно, ако $A=B$, тогаш $A\times B=B\times B=B\times A$. Ако $A=\varnothing$ или $B=\varnothing$, следува дека $A\times B=\varnothing=B\times A$, од што следува дека $A\times B=B\times A$.

б) Нека $A\times B=A\times C$ и да претпоставиме дека $A\neq\varnothing$ (ако $A=\varnothing$, тогаш немаме што да докажуваме). Ако $B\neq\varnothing$, тогаш постои $b\in B$, таков што за секој $a\in A$, $(a,b)\in A\times B$. Но, $A\times B=A\times C$, па $(a,b)\in A\times C$. Оттука, $b\in C$, па $B\subseteq C$. На сличен начин (претпоставувајќи дека $C\neq\varnothing$) може да се изведе заклучок дека $C\subseteq B$. Според тоа, $B=C$. Обратно, нека $B=C$ или $A=\varnothing$. Ако $B=C$, тогаш тврдењето е очигледно. Ако $A=\varnothing$, тогаш $A\times B=\varnothing=A\times C$.

в) Нека $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$. Ако $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$ и $C\neq\varnothing$, тогаш постои најмалку еден елемент $(x,y)\in(A\times B)\times C$, а оттука $x\in A\times B$ и $y\in C$. Но, $(x,y)\in A\times(B\times C)$, а оттука $x\in A$, што е контрадикција бидејќи x не може да биде елемент и на A и на $A\times B$. Значи, претпоставката дека $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$ и $C\neq\varnothing$ не е добра, па според тоа мора барем едно од множествата A, B и C да е празното множество. Обратно, ако барем едно од множествата A, B и C е празно, тогаш $(A\times B)\times C=\varnothing=A\times(B\times C)$.

4. Нека A и B се непразни множества. Докажи дека $A\times B\cup B\times A=C\times D$ за некои множества C и D ако и само ако $A=B=C=D$.

Решение. Ако $A=B=C=D$, тогаш равенството $A\times B\cup B\times A=C\times D$ очигледно важи зашто $A\times A\cup A\times A=A\times A$.

Обратно, да претпоставиме дека $A\times B\cup B\times A=C\times D$ за некои множества C и D. Од тоа што A и B се непразни множества, следува дека $A\times B\cup B\times A$ е непразно множество, т.е. $C\times D$ е непразно множество. Нека $(x,y)\in C\times D$. Оттука следува дека $x\in C$ и $y\in D$. Од условот имаме дека $(x,y)\in A\times B$ или $(x,y)\in B\times A$. Ако $(x,y)\in A\times B$, тогаш $x\in A$ и $y\in B$. Добиваме:

$$x\in C\Rightarrow x\in A \text{ и } y\in D\Rightarrow y\in B, \text{ т.е. } C\subseteq A \text{ и } D\subseteq B.$$

Слично, ако $(x,y)\in B\times A$, тогаш $x\in B$ и $y\in A$, па добиваме:

$$x\in C\Rightarrow x\in B \text{ и } y\in D\Rightarrow y\in A, \text{ т.е. } C\subseteq B \text{ и } D\subseteq A.$$

Од тоа што $C\subseteq A$ или $C\subseteq B$ следува дека $C\subseteq A\cup B$, а од $D\subseteq B$ или $D\subseteq A$, следува дека $D\subseteq A\cup B$.

Од друга страна, ако $(x,y)\in A\times B$, тогаш $(x,y)\in C\times D$, па значи имаме:

$$x\in A\Rightarrow x\in C \text{ и } y\in B\Rightarrow y\in D, \text{ т.е. } A\subseteq C \text{ и } B\subseteq D.$$

Ако $(x,y)\in B\times A$, тогаш $(x,y)\in C\times D$, па значи имаме:

$$x\in B\Rightarrow x\in C \text{ и } y\in A\Rightarrow y\in D, \text{ т.е. } B\subseteq C \text{ и } A\subseteq D.$$

Од тоа што $A\subseteq C$ и $B\subseteq C$, следува дека $A\cup B\subseteq C$, а од $A\subseteq D$ и $B\subseteq D$, следува дека $A\cup B\subseteq D$.

Од $C\subseteq A\cup B$ и $A\cup B\subseteq C$, следува дека $A\cup B=C$; а од $D\subseteq A\cup B$ и $A\cup B\subseteq D$, следува дека $A\cup B=D$. Значи, $A\cup B=C=D$.

Останува да покажеме дека $A=B$. Нека $x\in A$. Од $A\subseteq C$ следува дека $x\in C$, а од $C=D$, следува дека $(x,x)\in C\times D$. Значи, $(x,x)\in A\times B$ или $(x,x)\in B\times A$. Оттука добиваме дека $x\in B$, од што следува дека $A\subseteq B$. Слично се покажува дека $B\subseteq A$. Според тоа, $A=B=A\cup B$, а бидејќи $A\cup B=C=D$, добиваме дека $A=B=C=D$, што требаше да се докаже.

2.5*. Аксиоми на теоријата на множествата

Од причини на комплетност, овде ќе ги формулираме аксиомите на теоријата на множествата формулирани од Ернст Цермело (Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, 1871 – 1953) и Абрахам Френкел (Abraham Fraenkel, 1891 – 1965).

Една од основните цели на аксиоматиката на множествата е да се спречат можните парадокси, каков што е, на пример, Раселовиот парадокс. Овде само ќе ги наведеме аксиомите на Цермело-Френкеловата теорија на множествата.

Аксиома за екстензионалност. Ако две множества имаат исти елементи, тогаш тие се еднакви, т.е. $(\forall z)(z \in A \Leftrightarrow z \in B) \Rightarrow A = B$.

Аксиома за регуларност. За секое непразно множество A постои барем еден негов елемент кој нема заеднички елементи со множеството A.

(Ова значи дека ниту едно множество не се содржи само во себе.)

Аксиома за спецификација. Секоја поткласа од едно множество што е дефинирана со предикат е множество, т.е. ако A е множество и P е формула во јазикот на теоријата на множествата, тогаш $\{x \in A \mid P(x)\}$ е исто така множество.

Аксиома за празно множество. Постои B такво што за секој A, $A \notin B$.

(Со други зборови, постои множество што нема елементи.)

Аксиома за пар. За секои две множества A и B постои множество S чии елементи се точно A и B.

(Според оваа аксиома постои множество S, а според аксиомата за екстензионалност, множеството S е единствено, па можеме да ја воведеме дефиницијата $S = \{A, B\} \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in S \Leftrightarrow x = A \lor x = B)$. Ако $A = B$, тогаш ставаме $\{A, A\} = \{A\}$, за произволно A. Подреден пар (A, B) дефинираме со: $(A, B) \overset{def}{=} \{\{A\}, \{A, B\}\}$.)

Аксиома за унија. За секое множество $\mathcal{A}$ од множества, колекцијата

$$\{x \in B \mid B \in \mathcal{A}\}$$

е множество.

Аксиома за партитивно множество. За секое множество A постои множество чии членови се сите подмножества на множеството A.

Аксиома за подмножество. За секое множество A постои подмножество коешто ги содржи точно оние елементи од A што задоволуваат одредена формула $P(x)$.

(Врз основа на претходните аксиоми, а со соодветен избор на формулата $P(x)$, може да се докаже постоење на пресек, разлика и директен производ на множества.)

Аксиома за замена (***супституција***). Сликата на кое било множество во однос на пресликување што може да се дефинира, е исто така множество.

Аксиома за бесконечност. Постои непразно множество кое во секој свој елемент содржи уште еден елемент.

(Со други зборови, постои множество што има бесконечно многу елементи.)

Од аксиомата за бесконечност за некое множество A имаме дека $\varnothing \in A$, па $\varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} \in A$. Оттука $\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in A$, итн. Со други зборови, оваа аксиома овозможува постоење на множество A што ги содржи сите множества $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, ...$ Ако со дефиниција ги воведеме

$$\varnothing = 0\,,\ \{\varnothing\} = 1\,,\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = 2\,,\ \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = 3\,,\ \ldots$$

тогаш A обично го означуваме со $\mathbb{N}$. Значи, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Со следната теорема се дава едно значајно својство на теоријата на множествата коешто следува непосредно од аксиомите на Цермело-Френкеловата теорија, кое ние ќе го прифатиме без доказ.

Теорема 1. *Ниедно множество не е елемент на самото себе.* □

Покрај аксиомите на Цермело-Френкеловата теорија (која обично се означува со ZF) во математиката се користи и аксиомата на изборот (која обично се означува со AC).

Аксиома на избор. За секое непразно множество A чии елементи се непразни дисјунктни множества, постои множество B кое содржи точно по еден елемент од секое множество (член) од множеството A.

Теоријата ZF со аксиомата на изборот обично се означуваат со ZFC.

Постојат и разни други аксиоматики на теоријата на множествата.

3 РЕЛАЦИИ

Подредувањето што го создава нашиот ум е како мрежа или како скала, изградена за да постигне нешто.

Умберто Еко

3.1. Поим за релација во множество

Поимот релација е еден од најважните поими во современата математика. Овој поим е основа за разни други важни математички поими како што се: пресликување, операција и други.

Со $\mathcal{R}(A)$ (наместо со $\mathcal{P}(A\times A)$) ќе го означиме множеството од сите подмножества на множеството $A\times A$, т. е.

$$\mathcal{R}(A)=\{\alpha \mid \alpha\subseteq A^2\}.$$

Елементите на множеството $\mathcal{R}(A)$ ги нарекуваме *бинарни релации во множеството A*, или, само *релации во множеството A*. За еден елемент $x\in A$ велиме дека *е во релација* α *со* елемент $y\in A$ ако и само ако $(x,y)\in\alpha$. Пишуваме $x\alpha y$. Значи, $x\alpha y$ ако и само ако $(x,y)\in\alpha$.

Од посебен интерес се релациите кои имаат некоја од следниве особини.

За една релација α во множество A велиме дека е:

(Р) *рефлексивна* акко $(\forall x\in A)\ (x,x)\in\alpha$.

(АР) *антирефлексивна* акко $(\forall x\in A)\ (x,x)\notin\alpha$.

(С) *симетрична* акко $(\forall x,y\in A)\ ((x,y)\in\alpha\Rightarrow(y,x)\in\alpha)$.

(АС) *антисиметрична* акко $(\forall x,y\in A)\ ((x,y)\in\alpha\wedge(y,x)\in\alpha\ \Rightarrow\ x=y)$.

(Т) *транзитивна* акко $(\forall x,y\in A)\ ((x,y)\in\alpha\ \wedge(y,z)\in\alpha\ \Rightarrow\ (x,z)\in\alpha)$.

***Пример* 1.** Нека $A=\{a,b,c\}$ и нека $\alpha=\{(a,b),(b,a)\}$. Со непосредна проверка се утврдува дека релацијата α не е рефлексивна, е антирефлексивна, е симетрична, но не е антисиметрична и не е транзитивна.

За една релација α во дадено множество A велиме дека е:

(Е) *релација за еквивалентност* (или кратко: *еквивалентност*) во A ако и само ако таа е рефлексивна, симетрична и транзитивна;

(П) *релација за подредување* (или кратко: *подредување*) во A ако и само ако таа е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

За една релација α во множество A велиме дека е *претподредување* ако таа е рефлексивна и транзитивна, а *строго подредување* ако таа е антирефлексивна и транзитивна.

Две специјални релации во дадено множество A се *празната* релација $\varnothing$ и *полната* релација A^2.

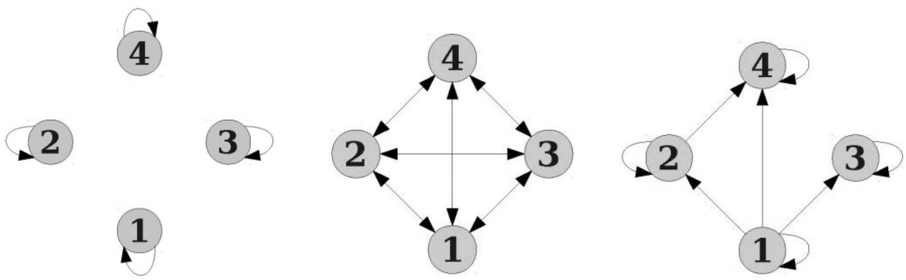
Една релација во множество A може да се претстави со помош на граф. Притоа, секој елемент од A се претставува како точка, а секој подреден пар $(x, y) \in \alpha$ со стрелка од x кон y. Да разгледаме неколку примери.

***Пример* 2.** Нека $A = \{1,2,3,4\}$. Да го нацртаме графот:

а) на релацијата „$=$ “ во A;

б) на релацијата „$\neq$“ во A;

в) на релацијата „... е делител на ...“ во A.



а) б) в)

Релацијата $\Delta_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$ се нарекува *дијагонална релација* (или *дијагонала*) во множеството A. *Инверзна релација* на релацијата α (ја означуваме со α^{-1}) се вика релацијата $\alpha^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in \alpha\}$.

Производ на две релации $\alpha, \beta \in \mathcal{R}(A)$ (го означуваме со $\beta \circ \alpha$) е релација во A дефинирана со:

$$\beta \circ \alpha = \big\{(x, y) \mid (\exists z \in A)\big((x,z) \in \alpha \wedge (z, y) \in \beta\big)\big\}.$$

Ако $\beta = \alpha$, тогаш наместо $\alpha \circ \alpha$ пишуваме кратко α^2; општо, со α^n го означуваме производот $\underbrace{\alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{n-\text{пати}}$, $n \geq 2$.

***Пример* 3.** Нека $A = \{1,2,\ldots,9,10\}$, $\alpha = \{(2,6),(2,10),(3,3),(3,6),(6,1),(6,4)\}$ и $\beta = \{(3,10),(6,7),(7,6),(10,3)\}$. Тогаш:

$\beta \circ \alpha = \{(2,7),(2,3),(3,10),(3,7)\}$, $\alpha \circ \beta = \{(7,1),(7,4),(10,3),(10,6)\}$.

Очигледно, множењето релации не е комутативна операција.

Бидејќи релациите се множества, природно можеме да ги воведеме операциите унија, пресек и комплемент на релации.

Нека $\alpha, \beta \in \mathcal{R}(A)$ и нека $x, y \in A$ се произволно избрани елементи. Операциите *унија*, *пресек* и *комплемент на релации* ги дефинираме, соодветно, со:

$$\alpha \cup \beta = \{(x,y) \mid (x,y) \in \alpha \vee (x,y) \in \beta\}$$

$$\alpha \cap \beta = \{(x,y) \mid (x,y) \in \alpha \wedge (x,y) \in \beta\}$$

$$\alpha^c = \{(x,y) \mid (x,y) \notin \alpha\} \quad (= \neg\alpha).$$

Структурата ($\mathcal{R}(A)$, $\cup, \cap,\ ^c, \circ,\ ^{-1}, \varnothing, \Delta_A, A^2$) се нарекува *алгебра на бинарни релации*.

Полскиот математичар и логичар Алфред Тарски (Alfred Tarski, 1901 – 1983), во педесетите години од XX век, покажал дека алгебрата на бинарни релации задоволува бесконечено многу правилности коишто не се добиваат како последици на едни од други. Тоа го отежнува процесот на апстракција на алгебрата на бинарни релации. Обично се издвојуваат некои правилности кои се сметаат за поважни и се изведуваат последици од нив. Така настанале Клиниеви, релациони и динамички алгебри, коишто се користат во теориската информатика. Бидејќи бинарните релации се множества, на нив можеме да ги примениме особините коишто важат за множествата.

Својство 1. *Нека* $\alpha, \beta, \gamma \subseteq A^2$ *се произволни релации. Тогаш:*

а) $(\beta \cup \gamma) \circ \alpha = (\beta \circ \alpha) \cup (\gamma \circ \alpha)$ б) $\alpha \circ (\beta \cup \gamma) = (\alpha \circ \beta) \cup (\alpha \circ \gamma)$

в) $(\beta \cap \gamma) \circ \alpha \subseteq (\beta \circ \alpha) \cap (\gamma \circ \alpha)$ г) $\alpha \circ (\beta \cap \gamma) \subseteq (\alpha \circ \beta) \cap (\alpha \circ \gamma)$.

Доказ. а) $(x,y) \in (\beta \cup \gamma) \circ \alpha \Leftrightarrow (\exists t \in A)((x,t) \in \alpha \ \wedge \ (t,y) \in \beta \cup \gamma)$

$$\Leftrightarrow (\exists t \in A)((x,t) \in \alpha \wedge ((t,y) \in \beta \vee (t,y) \in \gamma))$$

$$\Leftrightarrow (\exists t \in A)(((x,t) \in \alpha \wedge (t,y) \in \beta) \vee ((x,t) \in \alpha \wedge (t,y) \in \gamma)))$$

$$\Leftrightarrow (\exists t \in A)((x,t) \in \alpha \wedge (t,y) \in \beta) \vee (\exists t \in A)((x,t) \in \alpha \wedge (t,y) \in \gamma)$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in \beta \circ \alpha \vee (x,y) \in \gamma \circ \alpha$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in (\beta \circ \alpha) \cup (\gamma \circ \alpha).$$

Тврдењето б) се покажува на сличен начин.

в) $(x,y) \in (\beta \cap \gamma) \circ \alpha \Leftrightarrow (\exists t \in A)((x,t) \in \alpha \ \wedge \ (t,y) \in \beta \cap \gamma)$

$$\Leftrightarrow (\exists t \in A)((x,t) \in \alpha \wedge ((t,y) \in \beta \wedge (t,y) \in \gamma))$$

$$\Leftrightarrow (\exists t \in A)((x,t) \in \alpha \wedge (t,y) \in \beta \wedge (t,y) \in \gamma)$$

$$\Leftrightarrow (\exists t \in A)((x,t) \in \alpha \wedge (t,y) \in \beta \wedge (x,t) \in \alpha \wedge (t,y) \in \gamma)$$

$$\Rightarrow (\exists t \in A)((x,t) \in \alpha \wedge (t,y) \in \beta) \wedge (\exists t \in A)((x,t) \in \alpha \wedge (t,y) \in \gamma)$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in \beta \circ \alpha \wedge (x,y) \in \gamma \circ \alpha$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in (\beta \circ \alpha) \cap (\gamma \circ \alpha).$$

Обратната инклузија не важи. На пример, нека $A=\{1,2,3,4\}$, а $\alpha,\beta,\gamma\subseteq A^2$ се дефинирани со: $\alpha=\{(1,3),(1,4)\}$, $\beta=\{(3,2)\}$, $\gamma=\{(4,2)\}$. Тогаш $\beta\cap\gamma=\varnothing$ и $(\beta\cap\gamma)\circ\alpha=\varnothing$, но $\beta\circ\alpha=\{(1,2)\}$, $\gamma\circ\alpha=\{(1,2)\}$, па $(\beta\circ\alpha)\cap(\gamma\circ\alpha)=\{(1,2)\}$, што значи дека $(\beta\circ\alpha)\cap(\gamma\circ\alpha)$ не е подмножество од $(\beta\cap\gamma)\circ\alpha$.

Тврдењето г) се покажува на сличен начин како в). □

Последица 1. *Нека* $\alpha,\beta,\gamma\subseteq A^2$. *Тогаш:*

(i) $\alpha\subseteq\beta\Rightarrow\gamma\circ\alpha\subseteq\gamma\circ\beta$; (ii) $\alpha\subseteq\beta\Rightarrow\alpha\circ\gamma\subseteq\beta\circ\gamma$.

Доказ. (i) Нека $\alpha\subseteq\beta$ и нека $(x,y)\in\gamma\circ\alpha$. Тогаш постои $t\in A$, таков што $(x,t)\in\alpha$ и $(t,y)\in\gamma$. Бидејќи $\alpha\subseteq\beta$ по услов, следува дека $(x,t)\in\beta$, па од дефиницијата за производ на релации се добива дека $(x,y)\in\gamma\circ\beta$, што требаше да се докаже. (ii) Аналогно на (i). □

Својство 2. *Нека* $\alpha,\beta,\gamma\subseteq A^2$. *Тогаш:*

1) $(\beta\circ\alpha)^{-1}=\alpha^{-1}\circ\beta^{-1}$;
2) $(\alpha\cup\beta)^{-1}=\alpha^{-1}\cup\beta^{-1}$;
3) $(\alpha\cap\beta)^{-1}=\alpha^{-1}\cap\beta^{-1}$;
4) $(\alpha^{-1})^{-1}=\alpha$;
5) $(\alpha^c)^{-1}=(\alpha^{-1})^c$;
6) $(\gamma\circ\beta)\circ\alpha=\gamma\circ(\beta\circ\alpha)$;
7) $\alpha\circ\Delta_A=\Delta_A\circ\alpha=\alpha$.

Доказ. 1) $(x,y)\in(\beta\circ\alpha)^{-1}\Leftrightarrow(y,x)\in\beta\circ\alpha$

$$\Leftrightarrow(\exists t\in A)((y,t)\in\alpha\wedge(t,x)\in\beta)$$
$$\Leftrightarrow(\exists t\in A)((t,y)\in\alpha^{-1}\wedge(x,t)\in\beta^{-1})$$
$$\Leftrightarrow(\exists t\in A)((x,t)\in\beta^{-1}\wedge(t,y)\in\alpha^{-1})$$
$$\Leftrightarrow(x,y)\in\alpha^{-1}\circ\beta^{-1}.$$

2) $(x,y)\in(\alpha\cup\beta)^{-1}\Leftrightarrow(y,x)\in\alpha\cup\beta\Leftrightarrow(y,x)\in\alpha\vee(y,x)\in\beta\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(x,y)\in\alpha^{-1}\vee(x,y)\in\beta^{-1}\Leftrightarrow(x,y)\in\alpha^{-1}\cup\beta^{-1}.$$

3) Се покажува на сличен начин како 2).

4) $(x,y)\in(\alpha^{-1})^{-1}\Leftrightarrow(y,x)\in\alpha^{-1}\Leftrightarrow(x,y)\in\alpha$.

5) $(x,y)\in(\alpha^c)^{-1}\Leftrightarrow(y,x)\in\alpha^c\Leftrightarrow(y,x)\in A^2\wedge(y,x)\notin\alpha\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(x,y)\in A^2\wedge(x,y)\notin\alpha^{-1}\Leftrightarrow(x,y)\in(\alpha^{-1})^c.$$

6) $(x,y)\in(\gamma\circ\beta)\circ\alpha\Leftrightarrow(\exists t\in A)((x,t)\in\alpha\wedge(t,y)\in\gamma\circ\beta)$

$$\Leftrightarrow(\exists t\in A)((x,t)\in\alpha\wedge(\exists u\in A)((t,u)\in\beta\wedge(u,y)\in\gamma)).$$

Користејќи ја формулата $P \wedge (\exists u)Q(u) \Leftrightarrow (\exists u)(P \wedge Q(u))$, каде што променливата u не е слободна во формулата P, добиваме дека

$$\Leftrightarrow (\exists t \in A)(\exists u \in A)\ ((x,t) \in \alpha\ \wedge\ ((t,u) \in \beta \wedge (u,y) \in \gamma)).$$

Користејќи ја формулата $(\exists x)(\exists y)P \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P$, добиваме дека

$$\Leftrightarrow (\exists u \in A)(\exists t \in A)\ ((x,t) \in \alpha\ \wedge\ ((t,u) \in \beta \wedge (u,y) \in \gamma)).$$

Од асоцијативноста на конјункција, горната формула се трансформира во

$$\Leftrightarrow (\exists u \in A)(\exists t \in A)\ (((x,t) \in \alpha\ \wedge\ (t,u) \in \beta) \wedge (u,y) \in \gamma).$$

Користејќи ја формулата $(\exists t)(P(t) \wedge Q) \Leftrightarrow (\exists t)P(t) \wedge Q$, каде што променливата t не е слободна во формулата Q, добиваме дека

$$\Leftrightarrow (\exists u \in A)\ ((\exists t \in A)((x,t) \in \alpha \wedge (t,u) \in \beta)\ \wedge\ (u,y) \in \gamma)$$

$$\Leftrightarrow (\exists u \in A)\ ((x,u) \in \beta \circ \alpha \wedge (u,y) \in \gamma)$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in \gamma \circ (\beta \circ \alpha).$$

Значи, важи својството на асоцијативност за производ на релации.

7) Нека (x, y) е произволно избран елемент од A^2. Тогаш:

$$(x,y) \in \alpha \circ \Delta_A \Leftrightarrow\ (\exists t \in A)\ ((x,t) \in \Delta_A\ \wedge\ (t,y) \in \alpha)$$

$$\Rightarrow\ (\exists t \in A)\ (x,t) \in \Delta_A\ \wedge\ (\exists t \in A)\ (t,y) \in \alpha.$$

Бидејќи $(x,t) \in \Delta_A$, следува дека $t = x$, па значи за $t = x$ имаме дека претходниот ред е еквивалентен со:

$$\Leftrightarrow\ (x,x) \in \Delta_A\ \wedge\ (x,y) \in \alpha$$

$$\Leftrightarrow\ (x,y) \in \alpha.$$

Според тоа, $\alpha \circ \Delta_A \subseteq \alpha$.

Слично се покажува дека $\Delta_A \circ \alpha \subseteq \alpha$, т. е. дека $(x,y) \in \Delta_A \circ \alpha \Rightarrow (x,y) \in \alpha$.

Иако е „скоро“ очигледно, ќе ја покажеме обратната инклузија, т. е. дека $\alpha \subseteq \alpha \circ \Delta_A$ (а слично се покажува и дека $\alpha \subseteq \Delta_A \circ \alpha$). Нека $(x,y) \in \alpha$. Тврдиме дека $(x,y) \in \alpha \circ \Delta_A$, т. е. дека постои $t \in A$, такво што $(x,t) \in \Delta_A\ \wedge\ (t,y) \in \alpha$. Такво t лесно се наоѓа. Да ставиме $t = x$. Тогаш $(x,x) \in \Delta_A\ \wedge\ (x,y) \in \alpha$, па значи $(x,y) \in \alpha \circ \Delta_A$. □

Задачи за вежбање

1. Нека $\alpha, \beta, \gamma \subseteq (\mathcal{P}(M))^2$, т. е. α, β, γ се релации во множеството $\mathcal{P}(M)$ дефинирани на следниов начин:

а) $A\,\alpha\,B \Leftrightarrow A \subseteq B$;

б) $A\,\beta\,B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$;

в) $A\,\gamma\,B\ \Leftrightarrow\ |A| = |B|\ \wedge\ A, B$ се конечни множества.

Притоа, со $|X|$ е означен кардиналниот број на множеството *X*, т.е. бројот на елементите во множеството *X*.

Да се испитаат својствата на секоја од дефинираните релации.

Решение. а) (Р) Нека $A \in \mathcal{P}(M)$ е произволно избран елемент. Бидејќи за секое множество *A* важи инклузијата $A \subseteq A$, следува дека $A \, \alpha \, A$, т. е. дека α е рефлексивна релација.

(С) Нека $A, B \in \mathcal{P}(M)$ се произволно избрани елементи и нека $A \, \alpha B$. Тоа значи дека $A \subseteq B$, но одовде не следува дека $B \subseteq A$. Значи, α не е симет–рична релација.

(АС) Нека $A, B \in \mathcal{P}(M)$ се произволно избрани елементи и нека $A \, \alpha B$ и $B \, \alpha A$. Тогаш $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, од што следува дека $A = B$. Значи, α е антисиметрична релација.

(Т) Нека $A, B, C \in \mathcal{P}(M)$ се произволно избрани елементи и нека $A \, \alpha B$ и $B \, \alpha C$. Тогаш $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, од што следува дека $A \subseteq C$, т. е. $A \, \alpha C$. Значи, α е транзитивна релација.

б) (Р) Да забележиме дека ако $A = \varnothing$, тогаш $A \cap A = \varnothing$, заради што *A* не е во релација β со *A*. Значи, постои $A \in \mathcal{P}(M)$ за кој не важи $A \cap A \neq \varnothing$, па β не е рефлексивна релација.

(С) Дека β е симетрична релација е очигледно. Имено, за кои било $A, B \in \mathcal{P}(M)$ за кои важи $A \, \beta B$, т.е. $A \cap B \neq \varnothing$, следува дека $B \cap A \neq \varnothing$, т.е. $B \, \beta A$.

(Т) Нека $A, B, C \in \mathcal{P}(M)$ се произволно избрани елементи и нека $A \, \beta B$ и $B \, \beta C$. Тогаш $A \cap B \neq \varnothing$ и $B \cap C \neq \varnothing$, но одовде не мора да следува дека $A \cap C \neq \varnothing$, т.е. дека $A \, \beta C$. На пример, нека $M = \{1, 2, 3, 4\}$ и нека $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$. Јасно е дека $A \cap B \neq \varnothing$ и $B \cap C \neq \varnothing$, но $A \cap C = \varnothing$. Значи, β не е транзитивна релација.

в) (Р) Нека $A \in \mathcal{P}(M)$ е произволно избран елемент. Ќе разгледаме два случаја: 1) M е конечно множество и 2) M е бесконечно множество.

1) Ако M е конечно множество, тогаш и секое подмножество од *M* е конечно, а тривијално е исполнето дека $|A| = |A|$, па значи $A \, \gamma \, A$, т. е. γ е рефлексивна релација.

2) Ако M е бесконечно множество, тогаш постои $A \in \mathcal{P}(M)$ што е бесконечно подмножество од *M*, па значи *A* не е во релација γ со *A*, т. е. γ не е рефлексивна релација.

(С) Дека γ е симетрична релација е очигледно. Имено, за кои било $A,B \in \mathcal{P}(M)$ за кои важи $A\gamma B$, т.е. $|A|=|B|$ и A,B се конечни множества важи и $|B|=|A|$ и B,A се конечни множества, па значи $B\,\gamma\, A$.

(Т) Транзитивноста на γ произлегува од транзитивноста на еднаквоста на кардинални броеви, т. е. ако $A,B,C \in \mathcal{P}(M)$ се произволно избрани елементи такви што $A\gamma B$ и $B\gamma C$, тогаш $|A|=|B|$ и A,B се конечни множества и $|B|=|C|$ и B,C се конечни множества, па значи $|A|=|C|$ и A, C се конечни множества. Според тоа, γ е транзитивна релација.

2. Нека $\alpha \subseteq A^2$. Докажи дека важи следново тврдење:

$$\alpha \cap \alpha\circ\alpha = \varnothing \Leftrightarrow (\forall a,b,c \in A)(a\,\alpha\, b \wedge b\,\alpha\, c \Rightarrow a\,(\alpha^c)c).$$

Решение. Нека $\alpha \cap \alpha\circ\alpha = \varnothing$ и $a,b,c \in A$ се произволно избрани елементи за кои важи $a\alpha b \wedge b\alpha c$. Оттука, од дефиницијата за производ на релации и од формулата $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$, следува дека $a(\alpha\circ\alpha)c$, т. е. $(a,c)\in\alpha\circ\alpha$. Тврдиме дека $a\,(\alpha^c)c$, т. е. дека $(a,c)\notin\alpha$. Да го претпоставиме спротивното, т. е. $(a,c)\in\alpha$. Тогаш $(a,c)\in\alpha\cap\alpha\circ\alpha$, од што следува дека $\alpha\cap\alpha\circ\alpha \neq \varnothing$, што противречи на претпоставката. Според тоа $a\,(\alpha^c)c$.

Обратно, нека е исполнета импликацијата $a\alpha b \wedge b\alpha c \Rightarrow a\,(\alpha^c)\,c$, за секои $a,b,c \in A$. Тврдиме дека $\alpha\cap\alpha\circ\alpha = \varnothing$.

Да го претпоставиме спротивното, т. е. дека $\alpha\cap\alpha\circ\alpha \neq \varnothing$. Тогаш постои $(x,y)\in A^2$, таков што $(x,y)\in\alpha\cap\alpha\circ\alpha$. Оттука добиваме:

$$\begin{aligned}(x,y)\in\alpha\cap\alpha\circ\alpha &\Rightarrow (x,y)\in\alpha \wedge (x,y)\in\alpha\circ\alpha\\ &\Rightarrow (x,y)\in\alpha\wedge(\exists t\in A)((x,t)\in\alpha\wedge(t,y)\in\alpha)\\ &\Rightarrow (x,y)\in\alpha\wedge(x,y)\notin\alpha \text{ (од условот),}\end{aligned}$$

што е противречност. Според тоа, $\alpha\cap\alpha\circ\alpha = \varnothing$.

3. Нека бројот $n\in\mathbb{N}_0$ е фиксиран, а $\alpha_n \subseteq \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ е релација дефинирана со:

$$(x,y)\in\alpha_n \;\Leftrightarrow\; x+n\le y.$$

а) Докажи дека α_n е транзитивна.

б) Докажи дека $m\le n$ ако и само ако $\alpha_n\subseteq\alpha_m$.

в) Докажи дека $\alpha_n\circ\alpha_m\subseteq\alpha_{m+n}$.

Решение. а) Нека $(x,y),(y,z)\in\alpha_n$. Тогаш $x+n\le y$ и $y+n\le z$. Бидејќи, за секој $n\in\mathbb{N}_0$, $y\le y+n$, следува дека $x+n\le z$, т. е. $(x,z)\in\alpha_n$.

б) Нека $m \leq n$. Ако $(x,y) \in \alpha_n$, тогаш $x+n \leq y$, па значи: $x+m \leq x+n \leq y$, т. е. $(x,y) \in \alpha_m$. Обратно, нека $\alpha_n \subseteq \alpha_m$. Од $n \leq n$, следува дека $0+n \leq n$, т. е. $(0,n) \in \alpha_n$, па од условот $\alpha_n \subseteq \alpha_m$, добиваме дека $(0,n) \in \alpha_m$, т.е. $m \leq n$.

в) Ако $(x,y) \in \alpha_n \circ \alpha_m$, тогаш постои $z \in \mathbb{N}_0$, $(x,z) \in \alpha_m$ и $(z,y) \in \alpha_n$. Тоа значи дека $x+m \leq z$ и $z+n \leq y$. Оттука следува дека $x+m+n \leq z+n \leq y$, т. е. $(x,y) \in \alpha_{m+n}$.

Забелешка. Обратната насока на б) може да се докаже и поинаку. Нека $\alpha_n \subseteq \alpha_m$. Тоа значи дека $(x,y) \in \alpha_n \Rightarrow (x,y) \in \alpha_m$. Користејќи го законот за замена на импликацијата имаме дека $\neg((x,y) \in \alpha_n) \vee (x,y) \in \alpha_m$. Од дефиницијата на α_n добиваме: $x+n > y \vee x+m \leq y$, т.е. $x+m \leq y < x+n$, т.е. $m < n$. Очигледно е дека ако $\alpha_n = \alpha_m$, тогаш $m = n$. Според тоа, $m \leq n$.

4. Нека α и β се релации на A и B, соодветно. Дефинираме релација γ на $A \times B$ со: $(a_1,b_1)\,\gamma\,(a_2,b_2) \Leftrightarrow a_1\,\alpha\,a_2 \wedge b_1\,\beta\,b_2$.

Докажи дека:

а) ако α и β се релации за еквивалентност во A и B, соодветно, тогаш γ е релација за еквивалентност во $A \times B$.

б) ако α и β се релации за подредување во A и B, соодветно, тогаш γ е релација за подредување на $A \times B$.

Решение. а) (Р) Нека $(x,y) \in A \times B$ е произволно избран елемент. Тогаш $x \in A$, $y \in B$. Од условот имаме дека α и β се рефлексивни релации во A и B, соодветно, па $x\,\alpha\,x$ и $y\,\beta\,y$. Од дефиницијата на γ следува дека $(x,y)\,\gamma\,(x,y)$, па значи γ е рефлексивна.

(С) Нека $(a,b),(x,y) \in A \times B$ се произволно избрани елементи и $(a,b)\gamma(x,y)$. Тогаш $a\,\alpha\,x \wedge b\,\beta\,y$, па од условот дека α и β се симетрични релации во A и B, соодветно, следува дека $x\,\alpha\,a \wedge y\,\beta\,b$. Од дефиницијата на γ следува дека $(x,y)\,\gamma\,(a,b)$, па значи γ е симетрична.

(Т) Нека $(a,b),(x,y),(t,u) \in A \times B$ се произволно избрани елементи.

$(a,b)\,\gamma\,(x,y) \wedge (x,y)\,\gamma\,(t,u)$

$\Rightarrow (a\,\alpha\,x \wedge b\,\beta\,y) \wedge (x\,\alpha\,t \wedge y\,\beta\,u)$ (од дефиницијата на γ)

$\Rightarrow a\,\alpha\,x \wedge b\,\beta\,y \wedge x\,\alpha\,t \wedge y\,\beta\,u$ (од асоцијативноста на $\wedge$)

$\Rightarrow a\,\alpha\,x \wedge x\,\alpha\,t \wedge b\,\beta\,y \wedge y\,\beta\,u$ (од комутативноста на $\wedge$)

$\Rightarrow a\,\alpha\,t \wedge b\,\beta\,u$ (од транзитивноста на α и β)

$\Rightarrow (a,b)\,\gamma\,(t,u)$, што требаше да се докаже.

б) Рефлексивноста и транзитивноста се покажуваат како во задачата а).

(AC) Нека α и β се релации за подредување на A и B, соодветно. Тврдиме дека γ е антисиметрична релација во $A \times B$.

Нека $(a,b),(x,y) \in A \times B$ се произволно избрани елементи и

$(a,b)\ \gamma\ (x,y) \wedge (x,y)\ \gamma\ (a,b)$

$\Rightarrow (a\,\alpha\, x \wedge b\,\beta\, y) \wedge (x\,\alpha\, a \wedge y\,\beta\, b)$ (од асоцијативноста на $\wedge$)

$\Rightarrow a\,\alpha\, x \wedge b\,\beta\, y \wedge x\,\alpha\, a \wedge y\,\beta\, b$ (од комутативноста на $\wedge$)

$\Rightarrow a\,\alpha\, x \wedge x\,\alpha\, a \wedge b\,\beta\, y \wedge y\,\beta\, b$ (од антисиметричноста на α и β)

$\Rightarrow a = x \wedge b = y$ (од својството за еднаквост на подредени парови)

$\Rightarrow (a,b) = (x,y)$, што требаше да се докаже.

5. Нека $\mathcal{F} = \{\alpha_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ е фамилија релации на множеството на природните броеви $\mathbb{N}$, каде што α_k е дефинирана со:

$$x\,\alpha_k\, y \Leftrightarrow x + k = y.$$

а) Докажи дека ако $\alpha_k, \alpha_n \in \mathcal{F}$, тогаш $\alpha_n \circ \alpha_k \in \mathcal{F}$ и $\alpha_n \circ \alpha_k = \alpha_{k+n}$.

б) Најди потребен и доволен услов, за дадени $k,n \in \mathbb{N}$, да постои $\beta \in \mathcal{F}$, така што $\alpha_k \circ \beta = \alpha_n$.

в) Најди потребен и доволен услов, за дадени $k,n \in \mathbb{N}$, да постои $\beta \in \mathcal{F}$, така што $\beta^n = \alpha_k$.

Решение. а) Нека $\alpha_k, \alpha_n \in \mathcal{F}$. Тврдиме дека $\alpha_n \circ \alpha_k \in \mathcal{F}$.

$$\begin{aligned}(x,y) \in \alpha_n \circ \alpha_k &\Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{N})\,((x,t) \in \alpha_k \wedge (t,y) \in \alpha_n)\\ &\Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{N})\,(x + k = t \wedge t + n = y)\\ &\Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{N})\,(x + k + n = t + n \wedge t + n = y)\\ &\Leftrightarrow x + (k+n) = y\\ &\Leftrightarrow (x,y) \in \alpha_{k+n}.\end{aligned}$$

Оттука, $\alpha_{k+n} \in \mathcal{F}$ и $\alpha_n \circ \alpha_k = \alpha_{k+n}$.

б) Нека $k,n \in \mathbb{N}$ се дадени и нека постои $\beta \in \mathcal{F}$, така што важи $\alpha_k \circ \beta = \alpha_n$. Бидејќи $\beta \in \mathcal{F}$, постои $m \in \mathbb{N}$ за кој $\beta = \alpha_m$, па од $\alpha_k \circ \beta = \alpha_n$ имаме дека $\alpha_k \circ \alpha_m = \alpha_n$. Од а) имаме дека $\alpha_k \circ \alpha_m = \alpha_{m+k}$, па значи $\alpha_{m+k} = \alpha_n$ од што следува дека $m + k = n$, а од тоа следува дека $k < n$.

Според тоа, за дадени $k,n \in \mathbb{N}$, ако постои $\beta \in \mathcal{F}$, така што $\alpha_k \circ \beta = \alpha_n$, тогаш $k < n$.

Ќе покажеме дека ако $k < n$, тогаш постои $\beta \in \mathcal{F}$, така што $\alpha_k \circ \beta = \alpha_n$.

Нека $k<n$. Тогаш постои $m\in\mathbb{N}$ таков што $n=k+m$. Можеме да избереме $\beta=\alpha_m$, зашто $\alpha_k\circ\alpha_m=\alpha_{m+k}=\alpha_n$.

в) Нека $k,n\in\mathbb{N}$ се дадени и нека постои $\beta\in\mathcal{F}$, така што $\beta^n=\alpha_k$. Бидејќи $\beta\in\mathcal{F}$, постои $m\in\mathbb{N}$ за кој $\beta=\alpha_m$, па $(\alpha_m)^n=\alpha_k$. Ова значи дека $\underbrace{\alpha_m\circ\alpha_m\circ\ldots\circ\alpha_m}_{n}=\alpha_k$. Заради а) следува дека $\alpha_{mn}=\alpha_k$, т.е. $mn=k$. Според тоа, за дадени $k,n\in\mathbb{N}$, ако постои $\beta\in\mathcal{F}$ така што $\beta^n=\alpha_k$, тогаш постои $m\in\mathbb{N}$ таков што $m\,|\,k$. Обратното тврдење се покажува директно.

3.2. Транзитивно затворање на релација

Една релација α во дадено множество A може, но и не мора да има одредено својство, како што е на пример, рефлексивност, симетричност или транзитивност. Сепак, α може да се прошири до релација којашто го има тоа одредено својство. Да се *прошири* α значи да се најде подмножество од A^2 (т. е. релација) што ја содржи α и што ја има потребната особина. За таа цел, обично се користи „затворач“ на релацијата α во A во однос на таа одредена особина, којшто всушност го претставува најмалото проширување што ја има таа особина. Затворања на релација α што обично се користат се: рефлексивно, симетрично и транзитивно затворање.

Рефлексивно затворање на релација α во A се добива со „додавање“ на сите парови (a,a) на α за секој $a\in A$, т. е. се зема $\alpha\cup\Delta_A$.

Симетрично затворање на релација α во A се добива со „додавање“ на сите парови (b,a) на α, за секој пар $(a,\ b)\in\alpha$, т. е. се зема $\alpha\cup\alpha^{-1}$.

Пред да продолжиме со поимот транзитивно затворање, ќе разгледаме еден пример, а потоа ќе го воведеме поимот транзитивен производ на фамилија релации.

Нека α е релација во A што не е транзитивна. Се прашуваме како да ја прошириме релацијата α за да добиеме транзитивна релација. Да забележиме дека унија од транзитивни релации не мора да биде транзитивна релација, како што покажува следниов пример.

***Пример* 1.** Нека $A=\{1,2,3,4\}$ и нека α,β се релации во A дефинирани со: $\alpha=\{(1,1),(1,2),(2,3),(1,3)\}$, $\beta=\{(2,3),(3,1),(2,1)\}$. Со директна проверка се утврдува дека α и β се транзитивни, но дека $\alpha\cup\beta$ не е. Имено, $(3,1)\in\alpha\cup\beta$ и $(1,3)\in\alpha\cup\beta$, но $(3,3)\notin\alpha\cup\beta$.

Поимот „транзитивно затворање“ ќе го воведеме со помош на поимот „транзитивен производ“ на фамилија релации.

Дефиниција 1. Нека $\mathcal{F}=\{\alpha_i \mid i\in I\}$ е фамилија релации во множеството A. *Транзитивен производ* на фамилијата $\mathcal{F}$ е релација τ дефинирана со:

$$a\tau b \Leftrightarrow (\exists a_1,...,a_k\in A)(\exists\, \beta_0,\beta_1,...,\beta_k\in\mathcal{F})\,(a\beta_0 a_1\wedge a_1\beta_1 a_2\wedge ...\wedge a_k\beta_k b)$$

за $k\in\{0,1,2,...\}$.

Својство 1. *Транзитивниот производ τ на фамилијата релации $\mathcal{F}$ е:*

(1) *транзитивна релација во А*;

(2) $\alpha_i\subseteq\tau$, *за секој* $\alpha_i\in\mathcal{F}$;

(3) *ако ρ е транзитивна релација во А таква што, за секој $\alpha_i\in\mathcal{F}$, $\alpha_i\subseteq\rho$, тогаш $\tau\subseteq\rho$ (т.е. τ е најмалата транзитивна релација која ги содржи сите релации од $\mathcal{F}$).*

Доказ. (1) Нека $a\tau b$ и $b\tau c$. Тогаш од дефиницијата на релацијата τ, за $a\tau b$ имаме дека постојат $a_1,...,a_k\in A$ и постојат $\beta_0,\beta_1,...,\beta_k\in\mathcal{F}$, такви што $a\beta_0 a_1\wedge a_1\beta_1 a_2\wedge...\wedge a_k\beta_k b$, а за $b\tau c$ дека постојат $b_1,...,b_m\in A$ и постојат релации $\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_k\in\mathcal{F}$, такви што $b\gamma_0 b_1\wedge b_1\gamma_1 b_2\wedge...\wedge b_m\gamma_m c$. Според тоа, имаме дека постојат елементи $a_1,...,a_k,b_1,...,b_m\in A$ и постојат релации $\beta_0,\beta_1,...,\beta_k,\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_m\in\mathcal{F}$ за кои важи

$$a\beta_0 a_1\wedge a_1\beta_1 a_2\wedge...\wedge a_k\beta_k b\wedge b\gamma_0 b_1\wedge b_1\gamma_1 b_2\wedge...\wedge b_m\gamma_m c,$$

што од дефиницијата на τ значи дека $a\tau c$.

(2) Нека $\alpha_i\in\mathcal{F}$ е произволно избрана релација и нека $a,b\in A$ се произволно избрани елементи такви што $a\alpha_i b$. Тогаш, од дефиницијата на релацијата τ, за $k=0$ и $\beta_0=\alpha_i$, добиваме дека $a\tau b$.

(3) Нека ρ е транзитивна релација во A таква што за секој $\alpha_i\in\mathcal{F}$, $\alpha_i\subseteq\rho$ и нека $a,b\in A$ се произволно избрани елементи такви што $a\tau b$. Тогаш

$$(\exists a_1,...,a_k\in A)(\exists\,\beta_0,\beta_1,...,\beta_k\in\mathcal{F})\,(a\beta_0 a_1\wedge a_1\beta_1 a_2\wedge...\wedge a_k\beta_k b),$$

а од тоа што $\beta_i\subseteq\rho$ следува дека $a\rho a_1\wedge a_1\rho a_2\wedge...\wedge a_k\rho b$. Од транзитивноста на релацијата ρ следува дека $a\rho b$. □

Ако $\mathcal{F}=\{\alpha\}$, тогаш τ го нарекуваме *транзитивно затворање* на релацијата α и пишуваме $\tau=\alpha^*$.

Бидејќи транзитивноста е сврзана со производ на релации, следува дека транзитивното затворање на една релација може да се изрази преку производ на релации.

Теорема 1. *Нека* α *е релација во A. Тогаш* $\alpha^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha^k$ *е транзитивно затворање на* α*, каде што степените на релацијата* α *се дефинирани со:*

$$\alpha^1 = \alpha \ , \ \alpha^{k+1} = \alpha^k \circ \alpha .$$

Доказ. Нека τ е транзитивното затворање на α. Тогаш $\alpha \subseteq \tau$, па $\alpha^k \subseteq \tau^k$, за секој $k \in \{1,2,...\}$, што се покажува со индукција по k. Навистина, за $k=1$, $\alpha^1 \subseteq \tau^1$, зашто $\alpha \subseteq \tau$ по услов. За $k=2$ имаме:

$$\alpha \subseteq \tau \Rightarrow \alpha \circ \alpha \subseteq \alpha \circ \tau \subseteq \tau \circ \tau \Rightarrow \alpha^2 \subseteq \tau^2 .$$

Да претпоставиме дека тврдењето е точно до некое k, т. е. $\alpha^k \subseteq \tau^k$. Тогаш, $\alpha^{k+1} = \alpha^k \circ \alpha \subseteq \tau^k \circ \alpha \subseteq \tau^k \circ \tau = \tau^{k+1}$. Бидејќи τ^k е транзитивна релација, следува дека $\tau^k \subseteq \tau$, па значи $\alpha^* \subseteq \tau$. За да покажеме дека важи знакот за равенство, доволно е да покажеме дека α^* е транзитивна релација. Така, применувајќи го Св. 1 а), б) од претходната лекција, но и Св. 1 од следната лекција (α е транзи– тивна релација ако и само ако $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$), имаме дека:

$$\alpha^* \circ \alpha^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha^k \circ \bigcup_{m=1}^{\infty} \alpha^m = \bigcup_{k,m \in \mathbb{N}} \alpha^{k+m} = \alpha^2 \cup \alpha^3 \cup ... \subseteq \alpha^* .$$

Оттука следува дека релацијата α^* е транзитивна, па според тоа $\alpha^* = \tau$. □

***Пример* 2.** Нека $A = \{1,2,3,4\}$ и $\alpha = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$. Тогаш:

$$\alpha^2 = \{(1,3),(2,4)\} , \ \alpha^3 = \{(1,4)\} , \ \alpha^4 = \varnothing ,$$

па од Теоремата 1, добиваме дека

$$\alpha^* = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

е транзитивното затворање на релацијата α.

Својство 2. *Ако постои* $\alpha_i \in \mathcal{F}$ *што е рефлексивна релација, тогаш и* τ *е рефлексивна.*

Доказ. Нека $a \in A$. Бидејќи α_i е рефлексивна, следува дека $(a,a) \in \alpha_i$, а бидејќи $\alpha_i \subseteq \tau$ за секој $\alpha_i \in \mathcal{F}$, па и за некој $\alpha_i \in \mathcal{F}$, следува дека $(a,a) \in \tau$. Значи и τ е рефлексивна релација. □

Својство 3. *Ако секоја од релациите* $\alpha_i \in \mathcal{F}$ *е симетрична, тогаш и* τ *е симетрична.*

Доказ. Нека $a, b \in A$ се произволно избрани елементи такви што $a \tau b$. Тогаш

$$a \beta_0 a_1 \wedge a_1 \beta_1 a_2 \wedge ... \wedge a_k \beta_k b$$

за некои $a_1, ..., a_k \in A$ и $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k \in \mathcal{F}$. Бидејќи сите $\alpha_i \in \mathcal{F}$ се симетрични, следува дека

$a_k \beta_k b \wedge a_{\kappa-1} \beta_{\kappa-1} a_{\kappa-1} \wedge ... \wedge a_1 \beta_1 a_2 \wedge a \beta_0 a_1$, т.е. $b \beta_k a_k \wedge ... \wedge a_2 \beta_1 a_1 \wedge a_1 \beta_0 a$,

па од дефиницијата на τ следува дека $b \tau a$, т.е. τ е симетрична релација. □

Последица 1. *Нека $\mathcal{F}$ е фамилија релации за еквиваленшносш во А. Тоғаш τ е најмалаша релација за еквиваленшносш шшо ғи содржи сише релации од $\mathcal{F}$.*

Својство 4. *Нека $\mathcal{F} = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ е фамилија релации за еквиваленшносш во множесшвошо А. Тоғаш $\bigcap_{i \in I} \alpha_i$ е релација за еквиваленшносш во А.*

Доказ. Да ставиме $\alpha = \bigcap_{i \in I} \alpha_i$.

(Р) $(x, x) \in \alpha \Leftrightarrow (\forall i \in I)\,(x, x) \in \alpha_i$, а ова е точно, зашто сите релации α_i се рефлексивни.

(С) $(x, y) \in \alpha \Leftrightarrow (\forall i \in I)\,(x, y) \in \alpha_i \Leftrightarrow (\forall i \in I)\,(y, x) \in \alpha_i \Leftrightarrow (y, x) \in \alpha.$

(Т) $(x, y) \in \alpha \wedge (y, z) \in \alpha \Leftrightarrow (\forall i \in I)\,(x, y) \in \alpha_i \wedge (\forall i \in I)\,(y, z) \in \alpha_i$. Имајќи ја предвид формулата $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$, добиваме дека $(\forall i \in I)\,((x, y) \in \alpha_i \wedge (y, z) \in \alpha_i)$. Од тоа што релацијата α_i е транзитивна за секој $i \in I$, следува дека $(\forall i \in I)\,(x, z) \in \alpha_i$, а оттука $(x, z) \in \alpha$. □

Задачи за вежбање

1. Да се најде: а) рефлексивното, б) симетричното затворање на релацијата $\alpha = \{(a, a), (b, a), (a, c)\}$ определена во множеството $A = \{a, b, c, d\}$.

Решение. а) Рефлексивното затворање β на релацијата α го добиваме со „додавање“ на сите парови (x, x), каде што $x \in A$. Така,

$$\beta = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, a), (a, c)\}.$$

б) Симетричното затворање γ на релацијата α го добиваме со „додавање“ на сите парови (y, x), каде што $(x, y) \in \alpha$. Така,

$$\gamma = \{(a, a), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a)\}.$$

2. Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и нека α е релација во A, дефинирана со:

$$\alpha = \{(1,3), (1,5), (1,7), (1,9), (2,4), (3,1), (4,2), (5,3), (7,1)\}.$$

Да се најде транзитивното затворање на α.

Решение. За решението на оваа задача ќе ја користиме Теоремата 1. Со директно пресметување на производот $\alpha\circ\alpha$ добиваме дека:

$$\alpha\circ\alpha=\{(1,1),(1,3),(2,2),(3,3),(3,5),(3,7),(3,9),(4,4),(5,1),(7,3),(7,5),(7,7),(7,9)\}$$

$$(\alpha\circ\alpha)\circ\alpha=\alpha\circ(\alpha\circ\alpha)=$$
$$=\{(1,3),(1,5),(1,7),(1,9),(3,3),(4,2),(5,3),(5,5),(5,7),(5,9),(7,1),(7,3)\},$$
$$((\alpha\circ\alpha)\circ\alpha)\circ\alpha=\alpha\circ(\alpha\circ(\alpha\circ\alpha))=$$
$$=\{(1,1),(1,3),(3,1),(4,4),(5,1),(5,3),(7,1),(7,3),(7,5),(7,7),(7,9)\},$$

итн. Забележуваме дека елементите на α^k, за $k\geq 5$ почнуваат да се повторуваат. Земајќи ја унијата на сите овие степени, добиваме дека

$$\alpha^*=\{(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(1,9),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(3,7),(3,9),(4,2),$$
$$(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(5,7),(5,9),(7,1),(7,3),(7,5),(7,7),(7,9)\}.$$

Транзитивното затворање на релацијата α може да се добие и со цртање граф на релацијата. Тоа му го оставаме на читателот сам да го спроведе, а само ќе ги објасниме чекорите на конструкцијата.

Чекор 1. Да ја разгледаме релацијата α. Бидејќи $(1,3),(3,1)\in\alpha$, за да постои транзитивност следува дека треба $(1,1)\in\alpha$; слично:

$(2,4),(4,2)\in\alpha\Rightarrow(2,2)\in\alpha$, $(4,2),(2,4)\in\alpha\Rightarrow(4,4)\in\alpha$,

$(5,3),(3,1)\in\alpha\Rightarrow(5,1)\in\alpha$;

$(7,1),(1,3)\in\alpha\Rightarrow(7,3)\in\alpha$; $(7,1),(1,5)\in\alpha\Rightarrow(7,5)\in\alpha$;

$(7,1),(1,7)\in\alpha\Rightarrow(7,7)\in\alpha$; $(7,1),(1,9)\in\alpha\Rightarrow(7,9)\in\alpha$.

Чекор 2. Веќе имаме релација α_1 во која припаѓаат сите парови од α и сите новодобиени парови. Значи, $\alpha\subseteq\alpha_1$, но α_1 не е транзитивна, зашто недостигаат некои парови. На пример, $(5,1),(1,7)\in\alpha_1$, но $(5,7)\notin\alpha_1$, па за да биде релацијата транзитивна ќе го додадеме парот (5,7), итн.

Со продолжување на постапката ги добиваме сите парови од транзитивното затворање на α.

3. Докажи дека ако $\alpha,\ \beta$ се релации во *A* такви што $\alpha\subseteq\beta$, тогаш $\alpha^*\subseteq\beta^*$.

Решение. Нека $(x,y)\in\alpha^*$. Тогаш постојат $a_0,a_1,...,a_n\in A$ такви што $a_0=x$, $a_n=y$ и за секој $i\in\{0,1,...,n-1\}$, $(a_i,a_{i+1})\in\alpha$. Бидејќи $\alpha\subseteq\beta$, следува дека за секој $i\in\{0,1,...,n-1\}$, $(a_i,a_{i+1})\in\beta$, што значи дека $(x,y)\in\beta^*$.

4. Ако α,β се релации во *A*, тогаш важат следниве три инклузии:

$$(\alpha\cap\beta)^*\subseteq\alpha^*\cap\beta^*\subseteq\alpha^*\cup\beta^*\subseteq(\alpha\cup\beta)^*.$$

Решение. Прво ќе покажеме дека $(\alpha\cap\beta)^*\subseteq\alpha^*\cap\beta^*$. Нека $(x,y)\in(\alpha\cap\beta)^*$. Тоа значи дека постојат $a_0,a_1,...,a_n\in A$ такви што $a_0=x$, $a_n=y$ и за секој $i\in\{0,1,...,n-1\}$, $(a_i,a_{i+1})\in\alpha\cap\beta$. Тогаш $(a_i,a_{i+1})\in\alpha$, за секој $i\in\{0,1,...,n-1\}$, па $(x,y)\in\alpha^*$. Аналогно, $(a_i,a_{i+1})\in\beta$, за секој $i\in\{0,1,...,n-1\}$, па $(x,y)\in\beta^*$. Според тоа, $(x,y)\in\alpha^*\cap\beta^*$.

Втората инклузија е тривијално исполнета, зашто $\alpha^*\cap\beta^*\subseteq\alpha^*\subseteq\alpha^*\cup\beta^*$.

За да покажеме дека важи $\alpha^*\cup\beta^*\subseteq(\alpha\cup\beta)^*$, да претпоставиме дека $(x,y)\in\alpha^*\cup\beta^*$. Тогаш $(x,y)\in\alpha^*$ или $(x,y)\in\beta^*$. Нека $(x,y)\in\alpha^*$. Тогаш постојат $a_0,a_1,...,a_n\in A$ такви што $a_0=x$, $a_n=y$ и $(a_i,a_{i+1})\in\alpha$ за секој $i\in\{0,1,...,n-1\}$. Затоа, $(a_i,a_{i+1})\in\alpha\cup\beta$ за секој $i\in\{0,1,...,n-1\}$, што значи дека $(x,y)\in(\alpha\cup\beta)^*$. Слично се покажува случајот кога $(x,y)\in\beta^*$.

5. Да се даде пример за:

а) антисиметрична релација што не може да се прошири до подредување.

б) транзитивна релација што не може да се прошири до подредување.

Решение. а) Нека $A=\{1,2,3\}$ и нека $\alpha=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$. Очигледно, α е антисиметрична релација. Кога би постоело подредување β што е проширување на α, од $(1,2),(2,3)\in\alpha$ би имале $(1,2),(2,3)\in\beta\Rightarrow(1,3)\in\beta$; но и $(3,1)\in\beta$, па би добиле дека β не е антисиметрична. Според тоа, дадената антисиметрична релација α не може да се прошири до подредување.

б) Нека $A=\{1,2,3\}$ и нека $\alpha=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$. Очигледно, α е тран–зитивна релација што не може да се прошири до подредување.

3.3. Релации за еквивалентност

Во првиот параграф 3.1. од оваа глава го дефиниравме поимот релација за еквивалентност како рефлексивна, симетрична и транзитивна релација. Подолу се наведени неколку примери на релации за еквивалентност.

***Пример* 1.** Релации за еквивалентност се:

1) Релацијата „= “ во една фамилија множества (Св. 1 во Гл.2.1.).

2) Полната релација во едно непразно множество.

3) Дијагоналната релација во едно множество.

4) Релацијата „е паралелна со“ во множеството од сите прави во евклидска рамнина.

5) Релацијата „има ист остаток при делење со 3“ во множеството природни броеви.

Ќе докажеме неколку својства во врска со релациите за еквивалентност.

Својство 1. *Нека A е непразно множество и* $\alpha \subseteq A^2$. *Релацијата* α *е еквивалентност во A ако и само ако* $\Delta_A \subseteq \alpha,\ \alpha^{-1} \subseteq \alpha$ *и* $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$.

Доказ. Нека α е релација за еквивалентност во A.

1) Бидејќи α е рефлексивна, следува дека за секој $x \in A$, $(x,x) \in \alpha$, што значи дека $\Delta_A \subseteq \alpha$.

2) Нека $(x,y) \in \alpha^{-1}$. Тогаш $(y,x) \in \alpha$, а бидејќи α е симетрична, следува дека $(x,y) \in \alpha$. Значи, $\alpha^{-1} \subseteq \alpha$.

3) Нека $(x,y) \in \alpha \circ \alpha$. Тогаш постои $z \in A$ таков што $(x,z) \in \alpha$ и $(z,y) \in \alpha$. Бидејќи α е транзитивна, следува дека $(x,y) \in \alpha$, па според тоа $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$.

Обратно, нека за α важат инклузиите $\Delta_A \subseteq \alpha,\ \alpha^{-1} \subseteq \alpha$ и $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$.

(Р) Нека $x \in A$ произволно избран елемент. Бидејќи $(x,x) \in \Delta_A$ и $\Delta_A \subseteq \alpha$ (по услов), следува дека $(x,x) \in \alpha$, па значи α е рефлексивна.

(С) Нека $(x,y) \in \alpha$ за произволни $x,y \in A$. Тогаш $(y,x) \in \alpha^{-1}$, па од условот $\alpha^{-1} \subseteq \alpha$, следува дека $(y,x) \in \alpha$. Значи, α е симетрична.

(Т) Нека $x,y,z \in A$ се произволно избрани елементи и нека $(x,y) \in \alpha$ и $(y,z) \in \alpha$. Бидејќи условот важи за секој $y \in A$, следува дека важи и за некој $y \in A$, па од дефиницијата за производ на релации, следува дека $(x,z) \in \alpha \circ \alpha$. Бидејќи $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$ (по услов), следува дека $(x,z) \in \alpha$, што значи дека α е транзитивна. □

Својство 2. *Релација* α *во множество A е еквивалентност во A ако и само ако* $\Delta_A \subseteq \alpha,\ \alpha^{-1} = \alpha$ *и* $\alpha \circ \alpha = \alpha$.

Доказ. Нека α е релација за еквивалентност во A. Од Св. 1 следува дека $\Delta_A \subseteq \alpha,\ \alpha^{-1} \subseteq \alpha$ и $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$. Останува да покажеме дека: 1) $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$ и 2) $\alpha \subseteq \alpha \circ \alpha$.

За 1), нека $(x,y) \in \alpha$ за произволни $x,y \in A$. Тогаш $(y,x) \in \alpha^{-1}$, а бидејќи $\alpha^{-1} \subseteq \alpha$, следува дека $(y,x) \in \alpha$. Оттука, $(x,y) \in \alpha^{-1}$.

За 2), нека $(x,y) \in \alpha$ за произволни $x,y \in A$. Тогаш:

$$\begin{aligned} (x,y) \in \alpha &\Rightarrow (x,x) \in \alpha \wedge (x,y) \in \alpha && (\alpha \text{ е рефлексивна, па } (x,x) \in \alpha) \\ &\Leftrightarrow (\exists t \in A)((x,t) \in \alpha \wedge (t,y) \in \alpha) && (\text{за } t = x) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in \alpha \circ \alpha. \end{aligned}$$

Значи, $\alpha \subseteq \alpha \circ \alpha$.

Забелешка. Тврдењето $\alpha \subseteq \alpha \circ \alpha$, може да се докаже и на следниов начин. Ако левата и десната страна на инклузијата $\Delta_A \subseteq \alpha$ ги помножиме со α, тогаш $\alpha \circ \Delta_A \subseteq \alpha \circ \alpha$, а од $\alpha = \alpha \circ \Delta_A$, следува дека $\alpha \subseteq \alpha \circ \alpha$.

Обратно, нека за α се исполнети условите: $\Delta_A \subseteq \alpha$, $\alpha^{-1} = \alpha$ и $\alpha \circ \alpha = \alpha$. Тогаш важи и $\Delta_A \subseteq \alpha$, $\alpha^{-1} \subseteq \alpha$ и $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$, па според Својство 1, имаме дека α е релација за еквивалентност. □

Својство 3. *Нека α и β се релации за еквивалентност во множеството А. Тогаш $\alpha \circ \beta$ е релација за еквивалентност во А ако и само ако $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.*

Доказ. Нека $\alpha \circ \beta$ е релација за еквивалентност во *А*. Од симетричноста на релациите α, β и $\alpha \circ \beta$ следува дека $\alpha \circ \beta = (\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} = \beta \circ \alpha.$

Обратно, нека $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

(Р) По услов α и β се рефлексивни, па од Св. 1, следува дека $\Delta_A \subseteq \alpha$ и $\Delta_A \subseteq \beta$. Користејќи ја Посл. 1 од 3.1, добиваме дека $\Delta_A \circ \Delta_A \subseteq \alpha \circ \Delta_A \subseteq \alpha \circ \beta$, па од Св. 2. 7) од 3.1. добиваме дека $\Delta_A \subseteq \alpha \circ \beta$, што значи дека $\alpha \circ \beta$ е рефлексивна.

(С) Од условот $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ добиваме $(\alpha \circ \beta)^{-1} = (\beta \circ \alpha)^{-1} = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1} = \alpha \circ \beta,$ па $\alpha \circ \beta$ е симетрична.

(Т) Бидејќи по услов $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ и α и β се транзитивни релации, следува дека $(\alpha \circ \beta) \circ (\alpha \circ \beta) = \alpha \circ (\beta \circ \alpha) \circ \beta = \alpha \circ (\alpha \circ \beta) \circ \beta = (\alpha \circ \alpha) \circ (\beta \circ \beta) = \alpha \circ \beta$, па $\alpha \circ \beta$ е транзитивна.

Според тоа, $\alpha \circ \beta$ е релација за еквивалентност. □

Својство 4. *Нека α и β се релации за еквивалентност во множеството А.*

(*а*) *Тогаш $\alpha \subseteq \alpha \circ \beta$ и $\beta \subseteq \alpha \circ \beta$.*

(*б*) *Ако γ е релација за еквивалентност во А таква што $\alpha \subseteq \gamma$ и $\beta \subseteq \gamma$, тогаш $\alpha \circ \beta \subseteq \gamma$.*

Доказ. (а) Нека α и β се релации за еквивалентност во *А*. Тогаш $\Delta_A \subseteq \alpha$ и $\Delta_A \subseteq \beta$, па со примена на Посл. 1 од 3.1., множејќи ги двете страни на инклу–зиите оддесно со β и одлево со α, соодветно, според Св. 2. 7) од 3.1., доби–ваме дека $\beta = \Delta_A \circ \beta \subseteq \alpha \circ \beta$ и $\alpha = \alpha \circ \Delta_A \subseteq \alpha \circ \beta$, што требаше да се докаже.

(б) Нека γ е релација за еквивалентност во A таква што $\alpha \subseteq \gamma$ и $\beta \subseteq \gamma$. Множејќи ја инклузијата $\alpha \subseteq \gamma$ оддесно со γ, добиваме дека $\alpha \circ \gamma \subseteq \gamma \circ \gamma$, а множејќи ја инклузијата $\beta \subseteq \gamma$ одлево со α, добиваме дека $\alpha \circ \beta \subseteq \alpha \circ \gamma$. Значи, $\alpha \circ \beta \subseteq \alpha \circ \gamma \subseteq \gamma \circ \gamma = \gamma$. □

Задачи за вежбање

1. Нека $\alpha \subseteq A^2$. Докажи дека релацијата $\alpha \circ \alpha^{-1}$ е симетрична релација во A.

Решение. Нека $(x, y) \in \alpha \circ \alpha^{-1}$. Тогаш постои $t \in A$ таков што $(x,t) \in \alpha^{-1}$ и $(t, y) \in \alpha$. Оттука, $(t, x) \in (\alpha^{-1})^{-1}$ и $(y,t) \in \alpha^{-1}$, па од комутативноста на конјункција, дефиницијата за производ на релации и од Својство 2. 4) во 3.1, добиваме дека $(y, x) \in \alpha \circ \alpha^{-1}$. Според тоа, $\alpha \circ \alpha^{-1}$ е симетрична релација во A.

2. Нека $\alpha \subseteq A^2$ е рефлексивна и транзитивна релација. Докажи дека $\alpha \cap \alpha^{-1}$ е релација за еквивалентност во A.

Решение. Ќе ги искористиме Св. 1 и Св. 2.

(Р) Бидејќи α е рефлексивна по услов, следува дека $\Delta_A \subseteq \alpha$. Од Св. 2. 4) во 3.1., имаме дека $\Delta_A^{-1} \subseteq \alpha^{-1}$, т.е. $\Delta_A \subseteq \alpha^{-1}$. Од својството на множества $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \cap B$, добиваме дека:

$$\Delta_A \subseteq \alpha \wedge \Delta_A \subseteq \alpha^{-1} \Rightarrow \Delta_A \subseteq \alpha \cap \alpha^{-1}.$$

Значи, $\alpha \cap \alpha^{-1}$ е рефлексивна релација.

(С) Од Св. 2, Св. 2. 3) и 2. 4) во 3.1., како и од комутативноста на опера–цијата $\cap$, имаме:

$$(\alpha \cap \alpha^{-1})^{-1} = \alpha^{-1} \cap (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha^{-1} \cap \alpha = \alpha \cap \alpha^{-1}.$$

Значи, $\alpha \cap \alpha^{-1}$ е симетрична релација.

(Т) Бидејќи α е транзитивна по услов, следува дека $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$.

Доволно е да покажеме дека $(\alpha \cap \alpha^{-1}) \circ (\alpha \cap \alpha^{-1}) \subseteq \alpha \cap \alpha^{-1}$. За таа цел ќе ги користиме Св. 1 и Св. 2 од 3.1, како и својства на пресекот:

$$\begin{aligned}(\alpha \cap \alpha^{-1}) \circ (\alpha \cap \alpha^{-1}) &\subseteq \alpha \circ \alpha \cap \alpha \circ \alpha^{-1} \cap \alpha^{-1} \circ \alpha \cap \alpha^{-1} \circ \alpha^{-1} \\ &\subseteq \alpha \cap \alpha \circ \alpha^{-1} \cap \alpha^{-1} \circ \alpha \cap (\alpha \circ \alpha)^{-1} \\ &\subseteq \alpha \cap \alpha \circ \alpha^{-1} \cap \alpha^{-1} \circ \alpha \cap \alpha^{-1} \\ &\subseteq \alpha \cap \alpha^{-1}.\end{aligned}$$

Значи, $\alpha \cap \alpha^{-1}$ е транзитивна релација.

Според тоа, $\alpha \cap \alpha^{-1}$ е релација за еквивалентност во A.

3. Нека α и β се релации за еквивалентност во множеството A, такви што $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$. Докажи дека $\alpha \circ \beta$ е најмалата релација за еквивалентност која ја содржи релацијата $\alpha \cup \beta$.

Решение. Од Св. 3 имаме дека $\alpha \circ \beta$ е релација за еквивалентност во A. Од тоа што $\Delta_A \subseteq \alpha$ и $\Delta_A \subseteq \beta$, применувајќи ја Посл. 1 од 3.1, имаме дека:

$$\beta = \Delta_A \circ \beta \subseteq \alpha \circ \beta \quad \text{и} \quad \alpha = \alpha \circ \Delta_A \subseteq \alpha \circ \beta,$$

а од својството $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$, следува дека $\alpha \cup \beta \subseteq \alpha \circ \beta$. Треба уште да покажеме дека $\alpha \cup \beta$ е најмалата таква релација. Нека ρ е релација за еквивалентност која ја содржи $\alpha \cup \beta$, т. е. $\alpha \cup \beta \subseteq \rho$. Тогаш $\alpha \subseteq \alpha \cup \beta \subseteq \rho$ и $\beta \subseteq \alpha \cup \beta \subseteq \rho$, па $\alpha \circ \beta \subseteq \rho \circ \rho = \rho$, што требаше да се докаже.

4. Нека A и B се непразни множества, $B \subseteq A$ и $\beta \subseteq B^2$ е релација за еквивалентност во B. Докажи дека постои релација за еквивалентност $\alpha \subseteq A^2$ таква што $\alpha \cap B^2 = \beta$.

Решение. Целта на оваа задача е да се увиди како една релација за еквивалентност во множество B може да се прошири до релација за еквивалентност во неговото надмножество A. Дефинираме релација α во A со:

$$\alpha = \beta \cup \Delta_{A \backslash B}.$$

Всушност, го земаме рефлексивното затворање на релацијата β во множеството A. Ќе покажеме дека вака дефинираната релација α е релација за еквивалентност во A.

(Р) Јасно, $\Delta_B \subseteq \beta$ и $\Delta_{A\backslash B} \subseteq \Delta_{A\backslash B}$. Тогаш, од својството на множества $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup D$ имаме дека $\Delta_B \cup \Delta_{A\backslash B} \subseteq \beta \cup \Delta_{A\backslash B}$, а бидејќи $\Delta_A = \Delta_B \cup \Delta_{A\backslash B}$, следува дека $\Delta_A \subseteq \alpha$.

(С) $\alpha^{-1} = (\beta \cup \Delta_{A\backslash B})^{-1} = \beta^{-1} \cup \Delta_{A\backslash B}{}^{-1} = \beta \cup \Delta_{A\backslash B} = \alpha$.

(Т) $\alpha \circ \alpha = (\beta \cup \Delta_{A\backslash B}) \circ (\beta \cup \Delta_{A\backslash B}) = \beta \circ \beta \cup \beta \circ \Delta_{A\backslash B} \cup \Delta_{A\backslash B} \circ \beta \cup \Delta_{A\backslash B} \circ \Delta_{A\backslash B} =$
$= \beta \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \Delta_{A\backslash B} = \alpha$.

Останува да покажеме дека $\alpha \cap B^2 = \beta$. Навистина,

$\alpha \cap B^2 = (\beta \cup \Delta_{A\backslash B}) \cap B^2 = (\beta \cap B^2) \cup (\Delta_{A\backslash B} \cap B^2) = \beta \cup \varnothing = \beta$.

5. Нека $\mathcal{A} = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ е фамилија релации за еквивалентност во множество A. Докажи дека $\bigcap\limits_{i \in I} \alpha_i$ е релација за еквивалентност во A, но дека тоа за $\bigcup\limits_{i \in I} \alpha_i$ не мора да важи.

Решение. (Р) Нека $a \in A$. Бидејќи за секој $i \in I$, α_i е рефлексивна, следува дека $(a,a) \in \alpha_i$, а оттука $(a,a) \in \bigcap_{i\in I} \alpha_i$.

(С) Ако $(a,b) \in \bigcap_{i\in I} \alpha_i$, тогаш за секој $i \in I$, $(a,b) \in \alpha_i$. Бидејќи α_i е симетрична, следува дека $(b,a) \in \alpha_i$, а оттука $(b,a) \in \bigcap_{i\in I} \alpha_i$.

(Т) Нека $(a,b),(b,c) \in \bigcap_{i\in I} \alpha_i$. Тогаш за секој $i \in I$, $(a,b) \in \alpha_i$ и $(b,c) \in \alpha_i$. Бидејќи α_i е транзитивна, следува дека $(a,c) \in \alpha_i$. Според тоа, $(a,c) \in \bigcap_{i\in I} \alpha_i$.

Значи, $\bigcap_{i\in I} \alpha_i$ е релација за еквивалентност во A.

За да покажеме дека $\bigcup_{i\in I} \alpha_i$ не мора да биде еквивалентност, доволно е да најдеме пример за тоа. Во 3.1. имаме пример (*Пример* 1) дека унија на транзитивни релации не мора да е транзитивна релација, па според тоа, унија на релации за еквивалентност не мора да е релација за еквивалентност.

Задачата може да се покаже и со помош на конкретен контрапример.

Нека $A = \{1,2,3\}$, $\alpha = \Delta_A \cup \{(1,2),(2,1)\}$ и $\beta = \Delta_A \cup \{(1,3),(3,1)\}$. Тогаш $\alpha \cup \beta = \Delta_A \cup \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$ не е еквивалентност во A, зашто од $(3,1) \in \alpha \cup \beta$ и $(1,2) \in \alpha \cup \beta$, не следува дека $(3,2) \in \alpha \cup \beta$. Според тоа $\alpha \cup \beta$ не мора да биде еквивалентност во A.

6. Нека $\mathcal{A} = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ е фамилија релации за еквивалентност во множество A такви што за секој $i \in I$, $\alpha_i \subseteq \alpha_{i+1}$. Докажи дека $\bigcup_{i\in I} \alpha_i$ е релација за еквивалентност во A.

Решение. (Р) Нека $a \in A$. Бидејќи за секој $i \in I$, α_i е рефлексивна, следува дека $(a,a) \in \alpha_i$, а оттука $(a,a) \in \bigcup_{i\in I} \alpha_i$.

(С) Ако $(a,b) \in \bigcup_{i\in I} \alpha_i$, тогаш постои $i \in I$ такво што $(a,b) \in \alpha_i$. Бидејќи α_i е симетрична, следува дека $(b,a) \in \alpha_i$, а оттука $(b,a) \in \bigcup_{i\in I} \alpha_i$.

(Т) Нека $(a,b) \in \bigcup_{i\in I} \alpha_i$ и $(b,c) \in \bigcup_{i\in I} \alpha_i$. Тогаш постојат $i, j \in I$ такви што $(a,b) \in \alpha_i$ и $(b,c) \in \alpha_j$. Можеме да земеме $i < j$. Тогаш од условот $\alpha_i \subseteq \alpha_{i+1}$, за секој $i \in I$, следува дека, $\alpha_i \subseteq \alpha_j$, па $(a,b) \in \alpha_j$. Бидејќи α_j е транзитивна, од $(a,b)\in\alpha_j$ и $(b,c)\in\alpha_j$, следува дека $(a,c)\in\alpha_j$. Според тоа, $(a,c)\in\bigcup_{i\in I}\alpha_i$.

Значи, $\bigcup_{i\in I}\alpha_i$ е релација за еквивалентност во *A*.

3.4. Фактор-множества

Претходно изучените својства на релациите за еквивалентност ќе ни овозможат да направиме „класирање" на објектите од едно множество во групи според некои нивни заеднички својства. На пример, правите од една рамнина можат да се „разделат" во групи од паралелни прави. Правите од една група не мора да се совпаѓаат со една права, туку тие во оваа смисла, се еквивалентни. Исто така, триаголниците можат да се „класираат" во групи од триаголници што се складни. Во таа смисла, овие триаголници се еквивалентни. Во модуларна аритметика велиме дека два броја се конгруентни ако при нивното делење со даден број се добива ист остаток. На пример, броевите $...,-12,-5,\ 2,\ 9,\ 16,\ 23,\ 30,...$ при делење со 7 даваат остаток 2 (конгруентни се со 2 по модул 7), па во таа смисла тие се еквивалентни.

За да можеме да правиме вакви „класирања", прво ќе воведеме еден важен поим познат под името разбивање (или партиција) на непразно множество. Но, да разгледаме еден пример.

***Пример* 1.** Нека $A=\{1,2,3,4,5\}$ и $\alpha=\Delta_A\cup\{(1,3),(3,1),(2,5),(5,2)\}$ е релација во *A*. Со директна проверка се утврдува дека α е релација за еквивалентност во *A*. Да забележиме дека паровите од релацијата α се распределени во 3 групи (класи): првата $(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)$, втората $(2,2),(2,5),(5,2),(5,5)$ и третата $(4,4)$. Елементите од секоја класа се меѓусебно еквивалентни. Значи, со релацијата α, множеството *A* се разбива на три класи (подмножества) од *A*: $\{1,3\}$, $\{2,5\}$ и $\{4\}$.

Овие класи ги викаме *класи на еквивалентност* (попрецизно: „класи на еквивалентноста α"). Од тие класи може да се образува ново множество кое го нарекуваме *фактор-множество,* чиишто елементи се токму тие класи. Обично, фактор-множество се означува со A/α, а се чита: „*A* над алфа". Според тоа, во нашиов пример, $A/\alpha=\{\{1,3\},\{2,5\},\{4\}\}$.

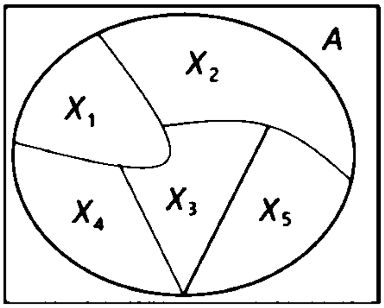
Сега и формално ќе ги дефинираме поимите разбивање (партиција) на множество, класа и фактор-множество.

Дефиниција 1. Нека *A* е непразно множество. *Разбивање* (*партиција*) на множеството *A* е множество $\pi\subseteq\mathcal{P}(A)$ кое ги има следниве особини:

(i) $X \in \pi \Rightarrow X \neq \varnothing$;

(ii) $A = \bigcup_{X \in \pi} X$;

(iii) $X, Y \in \pi \Rightarrow X = Y \vee X \cap Y = \varnothing$.



Венов дијаграм на пример за разбивање на множество.

Специјално, има две разбивања на непразно множество *A*, коишто се нарекуваат *тривијални разбивања* на *A*:

1) *едноелементно разбивање*, дефинирано со $\pi = \{A\}$, т. е. разбивање со само една класа;

2) *разбивање на единки*, дефинирано со $\pi = \{\{x\} : x \in A\}$, т. е. разбивање такво што секоја класа е едноелементно множество.

На пример, $\{\{1,2,3\}\}$ и $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ се тривијалните разбивања на множеството $A = \{1,2,3\}$.

***Пример* 2.** Нека $\mathbb{R}$ е множеството на реалните броеви, а $\mathbb{Z}$ е множеството на целите броеви. Тогаш, множеството полуинтервали $\{ [k, k+1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ е едно разбивање на множеството $\mathbb{R}$.

Бројот на начини на којшто може да се разбие едно множество со *n* елементи на непразни подмножества се нарекува *Белов број* (Eric Temple Bell, 1883 – 1960) и се означува со B_n. На пример, постојат 5 начини на кои може да се разбие едно триелементно множество, на пример $\{1,2,3\}$:

$$\{\{1\},\{2\},\{3\}\},\ \{\{1,2\},\{3\}\},\ \{\{1\},\{2,3\}\},\ \{\{1,3\},\{2\}\} \text{ и } \{\{1,2,3\}\},$$

па значи $B_3 = 5$. (Исто така се добива: $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$.)

Има различни формули и начини со кои се пресметува, односно се добива, овој број, но ние ќе ја спомнеме само рекурзивната формула во која се јавуваат биномни коефициенти и Пирсовиот триаголник.

Формулата гласи: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$, а *Пирсовиот триаголник* изгледа вака:

1					
1	2				
2	3	5			
5	7	10	15		
15	20	27	37	52	
52	67	87	114	151	203

………

Да забележиме дека, иако заслугата за Беловите броеви традиционално му се припишува на Е. Т. Бел (по негов труд од 1934 година), сепак, прв којшто систематски ги разгледувал овие броеви бил *Рамануџан* (Srinivasa Ramanujan, 1887–1920), скоро четврт век пред работата на Бел.

Дефиниција 2. Нека α е релација за еквивалентност во множеството A. Множеството $x^{\alpha} = \{y \in A \mid x\alpha y\}$ се вика *класа* на еквивалентноста α за елементот $x \in A$. (Се користат и ознаките C_x или $\overline{x}$ ако се знае за која релација се работи.) Множеството, пак,

$$A/\alpha = \{x^{\alpha} \mid x \in A\}$$

се вика *фактор-множество* на множеството A по еквивалентноста α.

Елементот x се нарекува *претставник* на класата x^{α}. Кој било елемент од множеството x^{α} може да биде претставник на таа класа, т. е. y е претставник на x^{α} ако и само ако $x\alpha y$.

***Пример* 3.** Нека $A = \{1, 2, ..., 10\}$ и нека α е релација во A дефинирана со:

$$x\,\alpha\,y \;\Leftrightarrow\; 3 \mid (x-y)$$

Му оставаме на читателот да покаже (како едноставна вежба) дека α е релација за еквивалентност во A. Нејзините класи се овие:

$$1^{\alpha} = 4^{\alpha} = 7^{\alpha} = 10^{\alpha} = \{1, 4, 7, 10\},$$

$$2^{\alpha} = 5^{\alpha} = 8^{\alpha} = \{2, 5, 8\},$$

$$3^{\alpha} = 6^{\alpha} = 9^{\alpha} = \{3, 6, 9\}.$$

Да забележиме дека класите немаат ист број елементи. Фактор-множеството е:

$$A/\alpha = \{1^{\alpha}, 2^{\alpha}, 3^{\alpha}\}.$$

Својство 1. *Нека α е релација за еквивалентност во множеството A. Тогаш за секои $x, y \in A$ важи:* а) $x \in x^{\alpha}$; б) $x\,\alpha\,y$ *ако и само ако* $x^{\alpha} = y^{\alpha}$.

Доказ. а) Следува од рефлексивноста на α.

б) Нека $x\,\alpha\,y$. Ќе покажеме дека $x^{\alpha} \subseteq y^{\alpha}$ и $y^{\alpha} \subseteq x^{\alpha}$. За да покажеме дека $x^{\alpha} \subseteq y^{\alpha}$, да претпоставиме дека $z \in x^{\alpha}$. Тогаш $z\,\alpha\,x$, а од условот $x\,\alpha\,y$ и од транзитивноста на α имаме дека $z\,\alpha\,y$, т.е. $z \in y^{\alpha}$. Значи, $x^{\alpha} \subseteq y^{\alpha}$. Слично се покажува дека $y^{\alpha} \subseteq x^{\alpha}$ (што се остава на читателот за вежба).

Обратно, нека $x^{\alpha} = y^{\alpha}$. Од рефлексивноста на α имаме дека за секој $x \in A$, $x\,\alpha\,x$, т.е. $x \in x^{\alpha}$, па од условот $x^{\alpha} = y^{\alpha}$ добиваме $x \in y^{\alpha}$, од што следува дека $x\,\alpha\,y$. □

Својство 2. *Нека α е релација за еквивалентност во множество А, а x^{α}, y^{α} се две произволни класи на еквивалентноста α. Тогаш важи точно едно од следниве две тврдења*: (i) $x^{\alpha} = y^{\alpha}$; (ii) $x^{\alpha} \cap y^{\alpha} = \varnothing$.

Со други зборови: *две класи на дадена еквивалентност или се совпаѓаат или се дисјунктни.*

Доказ. Ако $x^{\alpha} \cap y^{\alpha} = \varnothing$, тогаш не е можно да биде $x^{\alpha} = y^{\alpha}$. Навистина, кога би било така, би имале $\varnothing = x^{\alpha} \cap x^{\alpha} = x^{\alpha}$, а тоа не е можно зашто од $x\,\alpha\,x$ следува дека $x \in x^{\alpha}$, т.е. $x^{\alpha} \neq \varnothing$.

Да претпоставиме дека $x^{\alpha} \cap y^{\alpha} \neq \varnothing$. Тогаш постои $z \in x^{\alpha} \cap y^{\alpha}$, што повлекува дека $z \in x^{\alpha}$ и $z \in y^{\alpha}$, т. е. $x\,\alpha\,z$ и $y\,\alpha\,z$. Од симетричноста и транзитивноста на α следува дека $x\,\alpha\,y$, па од Св. 1 добиваме дека $x^{\alpha} = y^{\alpha}$. Значи, класите се или еднакви или се дисјунктни. □

Својство 3. *Нека α е релација за еквивалентност во непразното множество А. Тогаш A/α е разбивање на множеството А.*

Доказ. Нека α е релација за еквивалентност во A. Треба да покажеме дека класите се непразни, дисјунктни и нивната унија го дава целото множество A.

1. Нека $x^{\alpha} \in A/\alpha$ е произволно избран елемент. Бидејќи $x \in x^{\alpha}$ (Својство 1 а)), следува дека $x^{\alpha} \neq \varnothing$ за секој $x \in A$.

2. Од Својство 2 следува дека или $x^{\alpha} = y^{\alpha}$ или $x^{\alpha} \cap y^{\alpha} = \varnothing$.

3. Бидејќи за секоја класа x^{α} важи $x^{\alpha} \subseteq A$, следува дека

$$\bigcup_{x \in A} x^{\alpha} \subseteq A \ .$$

Од друга страна, јасно е дека $\{x\} \subseteq x^{\alpha}$ за секој $x \in A$, па значи

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} x^{\alpha} .$$

Од овие две инклузии добиваме дека $\bigcup_{x \in A} x^{\alpha} = A$. □

Својство 4. *Нека A е нейразно множесѿво и нека* π *е разбивање на A. Тоїаш релацијаѿа* α *дефинирана со*

$$x\alpha y \Leftrightarrow (\exists C \in \pi)(x \in C \wedge y \in C)$$

е релација за еквиваленѿносѿ во множесѿвоѿо A. Приѿоа важи дека $\pi = A/\alpha$ *.*

Доказ. Ќе покажеме дека α е релација за еквивалентност во A.

(Р) Нека $x \in A$ е произволно избран елемент. Бидејќи π е разбивање на A, следува дека постои множество $C \in \pi$, такво што $x \in C$. Од $x \in C$ и $x \in C$, се добива дека $x \alpha x$.

(С) Нека $x \alpha y$. Тогаш постои $C \in \pi$ такво што $x \in C$ и $y \in C$. Јасно, постои $C \in \pi$ такво што $y \in C$ и $x \in C$, па $y \alpha x$.

(Т) Нека $x \alpha y$ и $y \alpha z$. Тогаш постои $C \in \pi$ такво што $x \in C$ и $y \in C$ и постои $D \in \pi$ такво што $y \in D$ и $z \in D$. Од тоа што $y \in C$ и $y \in D$, следува дека $C \cap D \neq \varnothing$, па од дефиницијата за разбивање на множество следува дека мора $C = D$. Заради тоа, $x \in C$ и $z \in C$, што значи $x \alpha z$.

Останува да покажеме дека $\pi = A/\alpha$. Нека π е произволно разбивање на A и нека A/α е разбивање на множеството A определено од релацијата α. Прво ќе покажеме дека: *ако* $X \in \pi$ *и* $y \in X$*, тогаш* $X = y^{\alpha}$.

Нека $z \in X$ е произволно избран елемент. Тогаш $z, y \in X$, па $z \alpha y$, од што следува дека $z \in y^{\alpha}$. Значи, $X \subseteq y^{\alpha}$. Обратно, нека $z \in y^{\alpha}$. Тогаш од $z \alpha y$, следува дека постои $C \in \pi$ такво што $z, y \in C$. Бидејќи $y \in X$ и $y \in C$, следува дека $X \cap C \neq \varnothing$, па од дефиницијата за разбивање следува дека $X = C$. Тоа значи дека $z \in X$. Значи, $y^{\alpha} \subseteq X$. Од $X \subseteq y^{\alpha}$ и $y^{\alpha} \subseteq X$, следува $X = y^{\alpha}$.

Сега сме подготвени да покажеме дека $\pi = A/\alpha$.

Нека $X \in \pi$ е произволно избран елемент. Бидејќи $X \neq \varnothing$, следува дека постои $y \in X$. Од претходното тврдење имаме дека $X = y^{\alpha}$, а $y^{\alpha} \in A/\alpha$, па значи $X \in A/\alpha$. Според тоа, $\pi \subseteq A/\alpha$.

Обратно, нека $y^{\alpha} \in A/\alpha$. Од тоа што π е разбивање на A, следува дека $\bigcup_{X \in \pi} X = A$, па постои $X \in \pi$ такво што $y \in X$. Тогаш $X = y^{\alpha}$, па $y^{\alpha} \in \pi$. Според тоа, $A/\alpha \subseteq \pi$. Од $\pi \subseteq A/\alpha$ и $A/\alpha \subseteq \pi$, следува дека $\pi = A/\alpha$. □

Со Св. 3 покажавме дека за секоја релација за еквивалентност во непразно множество A, можеме да конструираме разбивање на множеството A, а со Св. 4 покажавме дека за секое разбивање на непразно множество A, можеме да конструираме релација за еквивалентност во множеството A. Овие две конс–трукции се заемно инверзни. Имено, нека α е релација за еквивалентност во A. Од Св. 4 имаме дека ако π е произволно разбивање на A, тогаш $\pi = A / \alpha$. Па, нека A / α е едно разбивање на множеството A. Нека β е еквивалентност во A одредена со ова разбивање:

$$x \, \beta \, y \;\Leftrightarrow\; (\exists C \in A / \alpha)\,(x, y \in C)\,.$$

Ќе покажеме дека $x\beta y \;\Leftrightarrow\; x\alpha y$. Нека $x\beta y$. Тогаш постои $C \in A / \alpha$, такво што $x, y \in C$. Од дефиницијата на A / α, следува дека $C = z^{\alpha}$, за некој $z \in A$. Бидејќи $x \in z^{\alpha}$ и $y \in z^{\alpha}$, следува дека $x \alpha z$ и $y \alpha z$. Од симетричноста и транзитивноста на α, следува дека $x \alpha y$. Значи, $x\beta y$ повлекува $x \alpha y$.

Обратно, нека $x \alpha y$. Тогаш $x^{\alpha} = y^{\alpha}$, па $x, y \in x^{\alpha}$. Од тоа што $x^{\alpha} \in A / \alpha$, следува дека $x\beta y$. Според тоа, $x\beta y \;\Leftrightarrow\; x\alpha y$.

Со ова покажавме дека од една релација за еквивалентност доаѓаме до истата релација за еквивалентност. □

Својствата 3 и 4, како и дискусијата по нив, претставуваат *Теорема за претставување на еквивалентност во множество.* Таа всушност кажува дека еден објект може да се прикаже на два начина: како релација за еквивалентност и како разбивање на множество.

Задачи за вежбање

1. Најди ги сите разбивања на множеството $A = \{a, b, c, d\}$.

Решение. Беловиот број за четириелементно множество е 15, па значи треба да најдеме 15 множества. Тоа се:

(i) $\{\{a, b, c, d\}\}$ – тривијално едноелементно разбивање;

(ii) $\{\{a\}, \{b, c, d\}\}, \{\{b\}, \{a, c, d\}\}, \{\{c\}, \{a, b, d\}\}, \{\{d\}, \{a, b, c\}\},$
$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}, \{\{a, c\}, \{b, d\}\}, \{\{a, d\}, \{b, c\}\};$

(iii) $\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}, \{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\}, \{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\}, \{\{b\}, \{c\}, \{a, d\}\},$
$\{\{b\}, \{d\}, \{a, c\}\}, \{\{c\}, \{d\}, \{a, b\}\};$

(iv) $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ – тривијално разбивање по единки.

2. Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Определи кои од следниве множества претставуваат разбивање на A:

а) $\pi_1 = \{\{1,2,3\},\{1,4,5,6\}\}$; б) $\pi_2 = \{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$;

в) $\pi_3 = \{\{1,2\},\{3,5,6\}\}$; г) $\pi_4 = \{\{1,3,5\},\{2,4,6,7\}\}$.

Решение. а) π_1 не е разбивање, затоа што $\{1,2,3\} \cap \{1,4,5,6\} \neq \varnothing$, т. е. не е исполнет условот (iii) од дефиницијата за разбивање на множество.

б) π_2 е разбивање, зашто се исполнети сите три услови од дефиницијата за разбивање на множество.

в) π_3 не е разбивање, затоа што 4 не се наоѓа во ниту едно од множествата $\{1,2\}$ и $\{3,5,6\}$.

г) π_4 не е разбивање, затоа што $\{2,4,6,7\}$ не е подмножество од A.

3. Нека n и m се фиксирани ненегативни цели броеви такви што $0 \leq m \leq n-1$, и нека со $\mathbb{N}_0$ е означено множеството ненегативни цели броеви (природните броеви заедно со нулата). Да го означиме со $n\mathbb{N}_0 + m$ подмножеството од $\mathbb{N}_0$ дефинирано со:

$$n\mathbb{N}_0 + m = \{nk + m \mid k \in \mathbb{N}_0\}.$$

а) Да се докаже дека $\pi = \{n\mathbb{N}_0 + m \mid m \in \{0,1,\ldots,n-1\}\}$ е разбивање на $\mathbb{N}_0$.

б) Да се дефинира соодветна релација за еквивалентност во $\mathbb{N}_0$.

Решение. а) Да забележиме дека $n\mathbb{N}_0 + m = \{nk + m \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ е множеството од сите природни броеви коишто при делењето со n даваат остаток m, каде што $0 \leq m \leq n-1$. Притоа, исполнети се условите:

(i) Ако $X \in \pi$, тогаш постои m, $0 \leq m \leq n-1$, за кој $X = n\mathbb{N}_0 + m$, а бидејќи $\mathbb{N}_0 \neq \varnothing$, следува дека и $X \neq \varnothing$.

(ii) Множеството $\mathbb{N}_0$ може да се претстави на следниов начин:

$$\mathbb{N}_0 = n\mathbb{N}_0 \cup (n\mathbb{N}_0 + 1) \cup \ldots \cup (n\mathbb{N}_0 + (n-1)),$$

зашто ако $x \in \mathbb{N}_0$, тогаш при делење на x со n се добива некој остаток m, за $0 \leq m \leq n-1$, па значи $x \in n\mathbb{N}_0 + m$ за некој $m \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Според тоа, $\mathbb{N}_0 \subseteq n\mathbb{N}_0 \cup (n\mathbb{N}_0 + 1) \cup \ldots \cup (n\mathbb{N}_0 + (n-1))$. Обратната инклузија е очигледна.

(iii) Нека $X, Y \in \pi$. Тогаш $X = n\mathbb{N}_0 + m_1$ и $Y = n\mathbb{N}_0 + m_2$. Можни се само два случаја: $m_1 = m_2$ или $m_1 \neq m_2$. Ако $m_1 = m_2$, тогаш $X = Y$. Нека $m_1 \neq m_2$. Тврдиме дека $X \cap Y = \varnothing$. Кога би постоел $z \in X \cap Y$, тогаш би имале дека $z \in n\mathbb{N} + m_1$ и $z \in n\mathbb{N} + m_2$, т. е. $z = nk + m_1$ и $z = nk + m_2$, а оттука би следувало дека $m_1 = m_2$, што противречи на претпоставката $m_1 \neq m_2$. Значи, $X \cap Y = \varnothing$.

Според тоа π е партиција на $\mathbb{N}_0$.

б) Дефинираме релација α во $\mathbb{N}_0$ со:

$$x\alpha y \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{N}_0)(x \in n\mathbb{N}_0 + m \ \wedge \ y \in n\mathbb{N}_0 + m).$$

Дека таа е релација за еквивалентност е јасно заради Св. 4.

4. Нека α е еквивалентност во множеството $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ определена со:

$$\alpha = \{(1,1),(1,5),(2,2),(2,3),(2,6),(3,2),(3,3),(3,6),$$
$$(4,4),(5,1),(5,5),(6,2),(6,3),(6,6)\}.$$

Најди го разбивањето на A *индуцирано* од α, т. е. сите класи на еквивалентност на релацијата α.

Решение. Сите елементи што се во релација со 1 се 1 и 5, т.е. $1^\alpha = \{1,5\}$. Избираме елемент што не припаѓа на 1^α, на пример 2. Елементите што се во релација со 2 се 2, 3 и 6, па значи $2^\alpha = \{2,3,6\}$. Единствен елемент што не припаѓа на 1^α и 2^α е 4, па значи $4^\alpha = \{4\}$. Според тоа, разбивањето на A индуцирано од α е $\pi = \{\{1,5\},\{2,3,6\},\{4\}\}$.

5. Во множеството $\mathbb{R}$ на реалните броеви дефинирана е релација α со:

$$x\alpha y \Leftrightarrow x^2 = y^2.$$

Докажи дека α е релација за еквивалентност во $\mathbb{R}$ и најди го фактор-множеството $\mathbb{R}/\alpha$.

Решение. (Р) Нека $x \in \mathbb{R}$ е произволно избран елемент. Бидејќи $x^2 = x^2$ за секој x, следува дека $x\alpha x$, па α е рефлексивна релација.

(С) Нека $x, y \in \mathbb{R}$ се произволно избрани елементи и нека $x\alpha y$. Тогаш $x^2 = y^2$, па $y^2 = x^2$, од што следува дека $y\alpha x$, па α е симетрична релација.

(Т) Нека $x, y, z \in \mathbb{R}$ се произволно избрани елементи и нека $x\alpha y$, $y\alpha z$. Тогаш $x^2 = y^2$ и $y^2 = z^2$, од што добиваме дека $x^2 = z^2$, т. е. $x\alpha z$, па α е тран–зитивна релација.

Значи, α е релација за еквивалентност во $\mathbb{R}$. Бидејќи $x^2 = x^2$ и $x^2 = (-x)^2$, следува дека $x^\alpha = \{x, -x\}$ за секој $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а $0^\alpha = \{0\}$, па $\mathbb{R}/\alpha = \{x^\alpha \mid x \in \mathbb{R}\}$.

6. Нека $\mathbb{N}^2$ е множеството од сите подредени парови природни броеви. Во $\mathbb{N}^2$ дефинираме релација α со:

$$(a,b)\,\alpha\,(c,d) \Leftrightarrow a + d = c + b.$$

а) Покажи дека α е еквивалентност во $\mathbb{N}^2$.

б) Најди ја класата на еквивалентност $(a,b)^\alpha$, а потоа и $(2,5)^\alpha$.

Решение. а) (Р) Нека $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ е произволно избран елемент. Бидејќи равенството $a+b=a+b$ е секогаш точно, следува дека $(a,b)\ \alpha\ (a,b)$, т.е. α е рефлексивна релација.

(С) Нека $(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}^2$ се произволно избрани и нека $(a,b)\ \alpha\ (c,d)$. Тогаш $a+d=c+b$. Јасно, $c+b=a+d$, па $(c,d)\alpha(a,b)$. Значи, α е симетрична релација.

(Т) Нека $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{N}^2$ се произволно избрани и нека $(a,b)\ \alpha\ (c,d)$ и $(c,d)\ \alpha(e,f)$. Тогаш $a+d=c+b$ и $c+f=e+d$. Ако на двете страни од равенството $a+d=c+b$ додадеме f, добиваме:

$$a+d+f=c+b+f=c+f+b=e+d+b\,.$$

Поништувајќи го d од двете страни на равенството $a+d+f=e+d+b$, се добива $a+f=e+b$, а оттука $(a,b)\ \alpha\ (e,f)$. Значи α е транзитивна релација.

б) $(a,b)^{\alpha}=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid (a,b)\ \alpha\ (x,y)\}=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid a+y=x+b\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid y-x=|b-a|\}$.

Јасно, $(2,5)^{\alpha}=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid (2,5)\ \alpha\ (x,y)\}=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid 2+y=x+5\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid y-x=|5-2|\}=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid y-x=3\}$.

7. Нека $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ и $A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ и нека α е релација во A дефинирана со:

$$(a,b)\ \alpha\ (c,d)\ \Leftrightarrow\ ad=bc\,.$$

а) Покажи дека α е релација за еквивалентност во A.

б) Најди ја класата на еквивалентност $(a,b)^{\alpha}$, а потоа и $(-3,6)^{\alpha}$.

Решение. а) (Р) Нека $(a,b)\in A$ е произволно избран елемент. Бидејќи важи комутативниот закон за множење на целите броеви, $ab=ba$ е секогаш точно, следува дека $(a,b)\ \alpha\ (a,b)$, т.е. α е рефлексивна релација.

(С) Нека $(a,b),(c,d)\in A$ се произволно избрани и нека $(a,b)\ \alpha\ (c,d)$. Тогаш $ad=bc$. Бидејќи важи комутативниот закон за множење на целите броеви, $cb=da$, па $(c,d)\ \alpha\ (a,b)$. Значи, α е симетрична релација.

(Т) Нека $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{N}^2$ се произволно избрани и нека $(a,b)\ \alpha\ (c,d)$ и $(c,d)\ \alpha(e,f)$. Тогаш $ad=bc$ и $cf=de$. Ако равенството $ad=bc$ го помножиме со f, дбиваме $adf=bcf=bde$. Бидејќи $d\neq 0$, равенството $adf=bde$ можеме да го поделиме со d, па добиваме дека $af=be$, т.е. $(a,b)\ \alpha\ (e,f)$. Значи, α е транзитивна. Според тоа и претходното, α е еквивалентност во A.

б) $(a,b)^{\alpha}=\{(x,y)\in A \mid (a,b)\alpha(x,y)\}=\{(x,y)\in A \mid ay=bx\}=$

$$=\left\{(x,y)\in A \mid \frac{x}{y}=\frac{a}{b}\right\}.$$

Јасно, $(-3,6)^{\alpha}=\{(x,y)\in A \mid (-3,6)\,\alpha\,(x,y)\}=$

$$=\{(x,y)\in A \mid (-3)y=6x\}=\{(x,y)\in A \mid y=-2x\}.$$

3.5. Релации за подредување

Во првиот параграф од оваа глава го дефиниравме поимот релација за подредување на множество како рефлексивна, антисиметрична и транзитивна релација. Овде ќе се запознаеме со некои нејзини својства, со поимот подредено множество и ќе дефинираме неколку видови специјални елементи во врска со овој поим.

Подолу се наведени неколку примери на релации за подредување.

***Пример* 1.** Релации за подредување се:

1) Релацијата „$\subseteq$“ во една фамилија множества (Св.2. во 2.1.);

2) Релацијата „$\leq$“ („е помал или еднаков на“) во множеството $\mathbb{R}$ од реалните броеви;

3) Релацијата „е делител на“ во множеството на природните броеви $\mathbb{N}$.

4) Дијагоналната релација.

Својство 1. *Нека A е непразно множество. Релацијата* α *е подредување на A ако и само ако* $\Delta_A\subseteq\alpha$, $\alpha\cap\alpha^{-1}\subseteq\Delta_A$ *и* $\alpha\circ\alpha\subseteq\alpha$.

Доказ. Нека α е подредување на *A*. Од рефлексивноста на α следува дека $\Delta_A\subseteq\alpha$, а од транзитивноста на α следува дека $\alpha\circ\alpha\subseteq\alpha$ (види го Св.1 и неговиот доказ од 3.3.). Натаму, нека α е антисиметрична релација. Тврдиме дека $\alpha\cap\alpha^{-1}\subseteq\Delta_A$, т.е. дека $(x,y)\in\alpha\cap\alpha^{-1}\;\Rightarrow\;(x,y)\in\Delta_A$. Имаме:

$$(x,y)\in\alpha\cap\alpha^{-1}\;\Rightarrow\;(x,y)\in\alpha\;\wedge\;(x,y)\in\alpha^{-1}$$

$\Rightarrow\;(x,y)\in\alpha\;\wedge\;(y,x)\in\alpha$, па од антисиметричноста на α

$\Rightarrow\; x=y$

$\Rightarrow\;(x,y)\in\Delta_A$, што требаше да се докаже.

Обратно, нека $\Delta_A\subseteq\alpha$, $\alpha\cap\alpha^{-1}\subseteq\Delta_A$ и $\alpha\circ\alpha\subseteq\alpha$. Тогаш, од $\Delta_A\subseteq\alpha$ имаме дека релацијата α е рефлексивна. Од $\alpha\circ\alpha\subseteq\alpha$ следува транзитивност на α (види го доказот на Св.1 во 3.3). Нека $\alpha\cap\alpha^{-1}\subseteq\Delta_A$. Тогаш, за произволни $x,y\in A$ имаме:

$$(x,y)\in\alpha\cap\alpha^{-1} \Rightarrow (x,y)\in\Delta_A \Rightarrow x=y .$$

Тоа значи: $(x,y)\in\alpha \wedge (x,y)\in\alpha^{-1} \Rightarrow x=y$, т. е.

$$(x,y)\in\alpha \wedge (y,x)\in\alpha \Rightarrow x=y .$$

Значи, релацијата α е антисиметрична.

Според тоа, α е релација за подредување. □

Својство 2. *Релацијата α е релација за подредување на непразно множество A ако и само ако $\Delta_A\subseteq\alpha$, $\alpha\cap\alpha^{-1}=\Delta_A$ и $\alpha\circ\alpha=\alpha$.* □

Доказот на ова тврдење е едноставен и му го оставаме на читателот за вежба.

Како ознака за релација за подредување во множество *A* често ја користиме ознаката $\leq$. Ако $x,y\in A$ и $\leq$ е релација за подредување на множество *A*, тогаш читаме: „*x* е помало или еднакво на *y*“ или „*x* му претходи на *y* “.

Инверзната релација на релацијата $\leq$ ја означуваме со $\geq$. Значи, $\leq^{-1}=\geq$,

$$\text{т. е. } x\leq y \Leftrightarrow y\leq^{-1} x \Leftrightarrow y\geq x .$$

Таа се нарекува *дуално подредување* во *A*.

Својство 3. *Нека $\leq$ е релација за подредување на непразно множество A. Дуалното подредување $\geq$ на $\leq$ е релација за подредување на множеството A.*

Доказ. (Р) Нека $x\in A$ е произволно избран елемент. Тогаш, од рефлексивноста на $\leq$ имаме $x\leq x$, па $x\leq^{-1} x$, т.е. $x\geq x$, што значи дека $\geq$ е рефлексивна релација.

(АС) Нека $x,y\in A$ се произволно избрани елементи. Тогаш,

$$\begin{aligned} x\geq y \wedge y\geq x &\Leftrightarrow x\leq^{-1} y \wedge y\leq^{-1} x && \text{(од дефиницијата на } \geq)\\ &\Rightarrow y\leq x \wedge x\leq y && \text{(од дефиницијата на } \leq^{-1})\\ &\Rightarrow x=y && \text{(од антисиметричноста на } \leq) \end{aligned}$$

(Т) Нека $x,y,z\in A$ се произволно избрани елементи. Тогаш,

$$\begin{aligned} x\geq y \wedge y\geq z &\Leftrightarrow x\leq^{-1} y \wedge y\leq^{-1} z && \text{(од дефиницијата на } \geq)\\ &\Rightarrow y\leq x \wedge z\leq y && \text{(од дефиницијата на } \leq^{-1})\\ &\Rightarrow z\leq y \wedge y\leq x && \text{(од комутативноста на } \wedge)\\ &\Rightarrow z\leq x && \text{(од транзитивноста на } \leq)\\ &\Rightarrow x\leq^{-1} z && \text{(од дефиницијата на } \leq^{-1})\\ &\Rightarrow z\geq x && \text{(од дефиницијата на } \geq). \end{aligned}$$

□

Дефиниција 1. Паротот $(A,\leq)$ се нарекува *делумно подредено множество* или, кратко, *подредено множество.*

***Пример* 2.** Убав пример за делумно подредено множество е партитивното множество $\mathcal{P}(A)$ на дадено множество A подредено со $\subseteq$ (инклузија). Исто така, секоја непразна фамилија подмножества од дадено множество A подредена со инклузија е подредено множество.

За претставување на едно подредено множество погодно е да се направи *Хасеов дијаграм* на релацијата. При цртање на дијаграмот треба да бидат запазени две основни правила и тоа:

(i) Ако за произволно множество важи релацијата $x\leq y$, тогаш точката којашто одговара на x мора да се најде пониско на цртежот од точката која одговара на y;

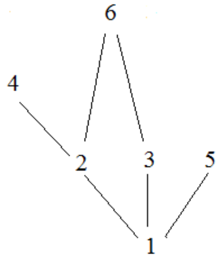
(ii) Цртаме отсечка ако и само ако крајните точки на отсечката се во релација.

***Пример* 3.** а) Нека $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ е подредено со релацијата „ | “ – „е делител на“ во A. Таа може да се претстави со Хасеов дијаграм како на црт. 1.

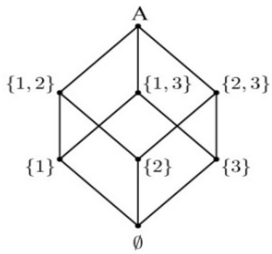
б) Ако $A=\{1,2,3\}$, тогаш $\mathcal{P}(A)$ со релацијата $\subseteq$ може да се претстави со Хасеов дијаграм како на црт. 2.

Дефиниција 2. За една релација за подредување $\leq$ во непразно множество A велиме дека е релација за *потполно подредување* (или *линеарно подредување*) на A ако за секои $x,y\in A$ важи $x\leq y \lor y\leq x$.

За елементите $x,y\in A$ за кои важи условот $x\leq y \lor y\leq x$ велиме дека се *споредливи*, т. е. едниот му претходи на другиот. За елементите $x,y\in A$ за кои важи $x\nleq y \land y\nleq x$ (пишуваме $x\parallel y$) велиме дека се *неспоредливи*.



Црт. 1



Црт. 2

Ако $\leq$ е релација за потполно подредување во непразно множество A, тогаш подредениот пар $(A,\leq)$ го нарекуваме *потполно подредено множество* (или *линеарно подредено множество*, или *верига*).

***Пример* 4.** 1) Ако $\mathbb{N}$ е множеството на природните броеви, а $\leq$ вообичаеното подредување на природните броеви, тогаш $(\mathbb{N}, \leq)$ е потполно подредено множество.

2) Ако A е множество со барем два елемента, тогаш (делумно) подреденото множество $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ не е потполно подредено.

3) Ако „|" е релацијата „е делител на" во множеството на природните броеви, тогаш $(\mathbb{N}, |)$ е делумно подредено множество, што исто така не е потполно подредено.

Задачи за вежбање

1. Нека $A = \{1,2,3,4,6\}$ и нека α е релација во A дефинирана со „*x* е делител на *y*", т.е. $x \mid y$.

а) Претстави ја релацијата α со помош на подредени парови;

б) Најди ја инверзната релација α^{-1}. Опиши ја α^{-1} со зборови!

в) Нацртај го нејзиниот граф.

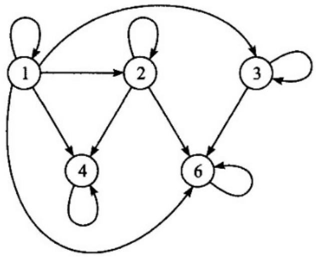
Решение. а) Ги наоѓаме сите парови *x* и *y* за кои важи „*x* е делител на *y*". Тоа се: $1|1$, $1|2$, $1|3$, $1|4$, $1|6$, $2|2$, $2|4$, $2|6$, $3|3$, $3|6$, $4|4$, $6|6$. Значи:

$$\alpha = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(6,6)\}.$$

б) $\alpha^{-1} = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(6,1),(2,2),(4,2),(6,2),(3,3),(6,3),(4,4),(6,6)\}$.

Оваа релација со зборови се опишува како: „*x* е содржател на *y*".

в) Види го цртежот подолу.



2. Најди ги сите релации во множеството $\mathbb{N}$ на природните броеви кои се истовремено и релации за еквивалентност и релации за подредување на $\mathbb{N}$.

Решение. Нека $\alpha \in \mathbb{N}^2$ е истовремено релација за еквивалентност и за подредување. Тогаш $\Delta_{\mathbb{N}} \subseteq \alpha$, $\alpha = \alpha^{-1}$, $\alpha \cap \alpha^{-1} = \Delta_{\mathbb{N}}$ и $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$. Од $\alpha = \alpha^{-1}$ и $\alpha \cap \alpha^{-1} = \Delta_{\mathbb{N}}$ добиваме дека $\alpha = \Delta_{\mathbb{N}}$. Значи, дијагоналата е единствената релација со тоа својство.

3. Нека $\alpha,\beta \subseteq A^2$ се антисиметрични релации. Докажи дека:

а) $\alpha \cap \beta$ е антисиметрична релација;

б) $\alpha \cup \beta$ е антисиметрична ако и само ако $\alpha \cap \beta^{-1} \subseteq \Delta_A$.

Решение. а) Ако $(x,y) \in \alpha \cap \beta$ и $(y,x) \in \alpha \cap \beta$, повлекува $(x,y) \in \alpha$ и $(x,y) \in \beta$, и, $(y,x) \in \alpha$ и $(y,x) \in \beta$. Од комутативноста на конјункција, следува дека $(x,y) \in \alpha$ и $(y,x) \in \alpha$, и, $(x,y) \in \beta$ и $(y,x) \in \beta$. Од антисиметричноста на α и β следува дека $x = y$. Значи, $\alpha \cap \beta$ е антисиметрична релација.

б) Нека $\alpha \cup \beta$ е антисиметрична релација. Тврдиме дека $\alpha \cap \beta^{-1} \subseteq \Delta_A$, т.е. дека за секои $x, y \in A$, $(x,y) \in \alpha \cap \beta^{-1} \Rightarrow x = y$. Па, нека $(x,y) \in \alpha \cap \beta^{-1}$. Тоа значи дека $(x,y) \in \alpha$ и $(x,y) \in \beta^{-1}$. Оттука, $(x,y) \in \alpha$ и $(y,x) \in \beta$. Имајќи предвид дека $\alpha \subseteq \alpha \cup \beta$, $\beta \subseteq \alpha \cup \beta$, добиваме дека $(x,y) \in \alpha \cup \beta$ и $(y,x) \in \alpha \cup \beta$, а од антисиметричноста на $\alpha \cup \beta$, следува дека $x = y$, што требаше да се докаже. За да го покажеме обратното тврдење ќе го користиме својството: α е подредување во *A* ако и само ако $\alpha \cap \alpha^{-1} \subseteq \Delta_A$.

Нека $\alpha \cap \beta^{-1} \subseteq \Delta_A$. Прво, да забележиме дека ако $\alpha \cap \beta^{-1} \subseteq \Delta_A$, тогаш и $(\alpha \cap \beta^{-1})^{-1} \subseteq \Delta_A^{-1}$, т.е. $\alpha^{-1} \cap \beta \subseteq \Delta_A$ (од Св. 2). Доволно е да покажеме дека $(\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \beta)^{-1} \subseteq \Delta_A$. Да тргнеме од левата страна:

$$(\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \beta)^{-1} = (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha^{-1} \cup \beta^{-1}) =$$
$$= (\alpha \cap \alpha^{-1}) \cup (\alpha \cup \beta^{-1}) \cup (\alpha^{-1} \cap \beta) \cup (\beta \cap \beta^{-1}).$$

По претпоставка, α и β се антисиметрични релации, т.е. $\alpha \cap \alpha^{-1} \subseteq \Delta_A$ и $\beta \cap \beta^{-1} \subseteq \Delta_A$. Имајќи го предвид условот, добиваме дека

$$(\alpha \cap \alpha^{-1}) \cup (\alpha \cup \beta^{-1}) \cup (\alpha^{-1} \cap \beta) \cup (\beta \cap \beta^{-1}) \subseteq \Delta_A,$$

што требаше да се докаже.

4. Докажи дека едно делумно подредено множество (A, α) е потполно подредено ако и само ако $\alpha \cup \alpha^{-1} = A^2$.

Решение. Нека (A, α) е потполно подредено множество и нека $(x,y) \in A^2$. Од тоа што $x, y \in A$ и α е потполно подредување во *A*, следува дека $x \,\alpha\, y$ или $y \,\alpha\, x$. Оттука, $x \,\alpha\, y$ или $x \alpha^{-1} y$, т. е. $x (\alpha \cup \alpha^{-1}) y$. Значи, $A^2 \subseteq \alpha \cup \alpha^{-1}$. Обратната инклузија се покажува тривијално.

Обратно, нека $\alpha \cup \alpha^{-1} = A^2$. Тогаш за секои $x, y \in A$, важи $x(\alpha \cup \alpha^{-1})y$, т.е. $x\,\alpha\,y$ или $x\alpha^{-1}y$. Значи, $x\,\alpha\,y$ или $y\,\alpha\,x$, што значи дека α е потполно подредување во *A*.

5. Нека α и β се потполни подредувања во *A*. Докажи дека $\beta \circ \alpha$ е потполно подредување во *A* ако и само ако $\alpha = \beta$.

Решение. Нека $\beta \circ \alpha$ е потполно подредување во *A*. Тврдиме дека $\alpha = \beta$. Да го претпоставиме спротивното, т.е. $\alpha \neq \beta$. Тогаш постои $(x, y) \in \alpha \setminus \beta$ и $x \neq y$ (кога би било $x = y$ би имале дека $(x, y) \in \beta$, бидејќи β е потполно подредување во *A*). Од тоа што $(x, y) \in \alpha$ и $(y, y) \in \beta$, следува дека $(x, y) \in \beta \circ \alpha$. Од $(y, y) \in \alpha$ и $(y, x) \in \beta$ (бидејќи $(x, y) \notin \beta$), имаме дека $(y, x) \in \beta \circ \alpha$. Бидејќи $\alpha \circ \beta$ е подредување во *A*, следува дека $x = y$, што е контрадикција.

Обратно, нека $\alpha = \beta$. Од транзитивноста на α и β следува дека $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \alpha = \alpha$, па $\beta \circ \alpha$ е потполно подредување во *A*, што требаше да се докаже.

6. Нека α е подредување на *A* и нека $S \subseteq A$. Докажи дека:

а) ако $\beta = \alpha \cap S^2$, тогаш β е подредување во *S*.

б) ако α е потполно подредување на *A*, тогаш β е потполно подредување и во *S*.

в) може да се случи β да е линеарно подредување на *S*, а α да не е потполно подредување во *A*.

Решение. а) (Р) $\Delta_S \subseteq \Delta_A \subseteq \alpha$ и $\Delta_S \subseteq S^2$, па значи $\Delta_S \subseteq \alpha \cap S^2 = \beta$, т.е. β е рефлексивна релација.

(АС) Од антисиметричноста на α следува дека $\alpha \cap \alpha^{-1} \subseteq \Delta_A$. Тогаш:

$$\beta^{-1} = (\alpha \cap S^2)^{-1} = \alpha^{-1} \cap (S^2)^{-1} = \alpha^{-1} \cap S^2 \quad \text{и}$$

$$\beta \cap \beta^{-1} = \alpha \cap S^2 \cap \alpha^{-1} \cap S^2 = \alpha \cap \alpha^{-1} \cap S^2 \subseteq \Delta_A \cap S^2 = \Delta_S,$$

па според тоа β е антисиметрична релација.

(Т) Од транзитивноста на α имаме дека $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$, па од Св.3.2 6) и од особините на пресек на множества имаме:

$$\beta \circ \beta = (\alpha \cap S^2) \circ (\alpha \cap S^2) = \alpha \circ \alpha \cap \alpha \circ S^2 \cap S^2 \circ \alpha \cap S^2 \circ S^2 \subseteq \alpha \cap S^2 = \beta,$$

па според тоа β е транзитивна релација.

б) Нека α е потполно подредување во *A* и нека $x, y \in S$ се произволно избрани елементи. Тогаш $x, y \in A$, а од условот имаме дека $(x, y) \in \alpha$ или $(y, x) \in \alpha$.

Од друга страна, $(x,y)\in S^2$ или $(y,x)\in S^2$. Според тоа, $(x,y)\in\alpha\cap S^2$ или $(y,x)\in\alpha\cap S^2$, т. е. $(x,y)\in\beta$ или $(y,x)\in\beta$.

в) Нека $A=\{1,2,3,4,5\}$, $\alpha=\Delta_A\cup\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(4,5)\}$ и $S=\{1,2,3\}$. Јасно, α не е потполно подредено (види во зад. 1 а) во следната лекција 3.6), но $\beta=\alpha\cap S^2$ е потполно подредено множество.

3.6. Супремум и инфимум

Натаму ќе сметаме дека $(A,\leq)$ е произволно делумно подредено множество и дека $S\subseteq A$.

Дефиниција 1. За еден елемент $a\in A$ велиме дека е *горна меѓа* (или *мајорант*) на S во A ако

$$(\forall x\in S)\ x\leq a.$$

Ако притоа $a\in S$, тогаш a е *најголем елемент* во S.

Дуално се воведува и поимот долна меѓа (минорант) на S. За еден елемент $a\in A$ велиме дека е *долна меѓа* (или *минорант*) на S во A ако

$$(\forall x\in S)\ a\leq x.$$

Ако притоа $a\in S$, тогаш a е *најмал елемент* во S.

За S велиме дека е *мајорирано* или *ограничено одозгора* во A ако има барем еден мајорант во A. Ако S има барем еден минорант во A, тогаш велиме дека S е *минорирано* или *ограничено одоздола*.

Својство 1. *Ако подмножеството $S\subseteq A$ има најголем (најмал) елемент, тогаш тој е единствен.*

Доказ. Нека $a_1,a_2\in A$ се два најголеми елементи во множеството S. Тогаш $a_1\leq a_2$ и $a_2\leq a_1$, па од антисиметричноста на $\leq$, следува дека $a_1=a_2$. Единственоста на најмалиот елемент се покажува аналогно. □

Дефиниција 2. Нека $S\subseteq A$ е произволно множество. Ако множеството од сите мајоранти (миноранти) на множеството S има најмал (најголем) елемент a, тогаш a се нарекува *супремум* (*инфимум*) на множеството S и го означуваме со $\sup S$ ($\inf S$).

Секое множество не мора да има супремум. На пример, множеството од позитивните рационални броеви $\mathbb{Q}^+\subset\mathbb{Q}$ во однос на вообичаената релација за подредување $\leq$ нема ниту еден мајорант, па според тоа, нема ни супремум. Дуално, секое множество не мора да има инфимум.

***Пример* 1.** 1) Нека $\mathbb{N}$ е множеството на природните броеви.

Најголем заеднички делител на a и b во $\mathbb{N}$, означен со НЗД(a,b), е најголемиот природен број којшто е делител и на a и на b.

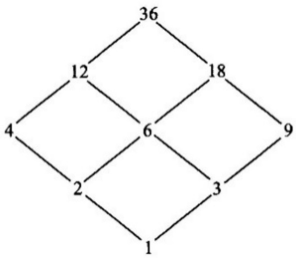
Најмал заеднички содржател на a и b во $\mathbb{N}$, означен со НЗС(a,b), е најмалиот природен број којшто е делив и со a и со b.

Едно својство од теоријата на броеви вели дека секој заеднички делител на a и b е делител и на НЗД(a,b), а исто така НЗС(a,b) е делител на кој било производ од a и b.

Да претпоставиме дека $\mathbb{N}$ е подредено со релацијата „... е делител на..“. Тогаш НЗД(a,b) $= \inf(a,b)$ и НЗС(a,b) $= \sup(a,b)$.

Со други зборови, $\inf(a,b)$ и $\sup(a,b)$ постојат за секој пар (a,b) кога $\mathbb{N}$ е подредено на ваков начин.

2) Во $\mathbb{N}$, подредено со релацијата „...е делител на..“, со D_m го означуваме множеството од сите делители на m. Така $D_{36} == \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$. Хасеовиот дијаграм на ова множество е:



Повторно, $\inf(a,b)$ и $\sup(a,b)$ постојат за секој пар $(a,b) \in D_m$.

Дефиниција 3. Со $<$ ја означуваме релацијата за *стриктно подредување* којашто ја дефинираме со: $a < b$ ако и само ако $a \leq b$ и $a \neq b$.

Порано спомнавме дека таа е антирефлексивна и транзитивна.

Дефиниција 4. За еден елемент $a \in S \subseteq A$ велиме дека е *максимален елемент* во множеството S ако ниеден елемент од S е поголем од a, т.е. не постои $x \in S$ таков што $x \geq a$ и $x \neq a$.

Со други зборови, $a \in S \subseteq A$ е максимален елемент во множеството S ако и само ако $(\forall x \in S)(a \leq x \Rightarrow x = a)$.

Дуално се дефинира и поимот минимален елемент во множеството S.

За еден елемент $a \in S \subseteq A$ велиме дека е *минимален елемент* во множеството S ако ниеден елемент од S е помал од a, т. е. не постои $x \in S$ таков што $x \leq a$ и $x \neq a$.

Со други зборови, $a \in S \subseteq A$ е минимален елемент во множеството S ако и само ако $(\forall x \in S)\,(x \leq a \;\Rightarrow\; x = a)$.

Во примерот 3 а), максимални елементи се 4, 5 и 6, а најмал елемент кој истовремено е и минимален елемент е 1, додека во примерот 2 б) најмал елемент (и минимален) е $\varnothing$, а најголем елемент (и максимален) е A.

Забелешка. Најголем елемент во множество S и максимален елемент во множество S се два различни поими. Ако множеството S има најголем елемент, како што видовме во Св. 1, тогаш тој е единствен, додека S може да има повеќе максимални елементи. Дуално за најмал и минимален елемент во S.

Својство 2. *Ако подмножеството $S \subseteq A$ има најголем елемент a, тогаш a е единствен максимален елемент во S.*

Доказ. Нека a е најголем елемент во множеството S. Нека за $x \in S$ важи $a \leq x$. Бидејќи a е најголем елемент, следува дека $x \leq a$. Оттука следува дека $x = a$. Значи a е максимален елемент во S. Останува да покажеме дека a е единствен таков елемент. Нека $m \in S$ е произволен максимален елемент во множеството S. Бидејќи $m \in S$, следува дека $m \leq a$, а од тоа што m е максимален елемент, следува дека $m = a$. Значи, a е единствен максимален елемент во S. □

Дефиниција 5. За еден елемент c велиме дека е *помеѓу* a и b ако и само ако $a < c < b$. Ако $a < b$ и не постои елемент помеѓу a и b, тогаш велиме дека b *го покрива* a и запишуваме $a << b$.

Дефиниција 6. За едно подредено множество A велиме дека е *добро подредено* ако секое негово непразно подмножество има најмал елемент.

На пример, множеството $\mathbb{N}$ е добро подредено множество во однос на вообичаената релација за подредување $\leq$. Множеството $\mathbb{Q}$ не е добро подре-дено множество.

Својство 3. *Секое добро подредено множество A е потполно подредено.*

Доказ. Ако a и b се два различни елементи од A, тогаш во $S = \{a, b\}$ има најмал елемент, па ако е тоа, на пример, a, имаме дека $a \leq b$. Значи, кои било два елементи од S се споредливи, па A е потполно подредено множество. □

Лема на Цорн. *Нека A е делумно подредено множество. Ако секоја верига во A е мајорирана во A, тогаш за секој* $x \in A$ *постои барем еден максимален елемент* $m \in A$ *таков што* $x \le m$.

Оваа теорема е позната и под името Лема на Куратовски − Цорн, според германскиот математичар *Макс Цорн* (Max Zorn, 1906 − 1993) и полскиот математичар *Казимјеж Куратовски* (Kazimierz Kuratowski, 1896 − 1980). Лемата била покажана прво од Куратовски во 1922 година, а потоа од Цорн во 1935 година. Таа е еквивалентна со Аксиомата на изборот и со теоремата за потполно подредување на *Цермело* (Ernst Zermelo, 1871 − 1953) (формалните докази може да се најдат во [11]) и има голема примена во доказите на многу важни теореми од математичката анализа и апстрактната алгебра. Овде нема да го дадеме нејзиниот формален доказ, туку само ќе дадеме објаснување коешто ќе ни помогне да ја разбереме нејзината природа.

Нека $x_0 \in A$ е произволно избран елемент. Ако тој е максимален, тогаш доказот е готов. Да претпоставиме дека x_0 не е максимален. Тогаш постои $x_1 \in A$ таков што $x_0 \le x_1$. Ако x_1 е максимален, тогаш доказот е готов. Да претпоставиме дека x_1 не е максимален. Тогаш постои $x_2 \in A$ таков што $x_0 \le x_1 \le x_2$. Продолжувајќи ја постапката на овој начин, заклучуваме дека постои верига $x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots$, а по претпоставка таа е мајорирана. Тоа значи дека постои $t_0 \in A$ таков што $x_i \le t_0$ за секој $i \in \mathbb{N}$. Ако t_0 не е максимален елемент, тогаш постои $t_1 \in A$ таков што $t_0 \le t_1$. Кога не би постоел максимален елемент, тогаш би имале $x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le t_0 \le t_1 \le \ldots$, т. е. повторно би добиле верига, којашто по претпоставка мора да е мајорирана. Оваа постапка мора некаде да заврши со максимален елемент. Последнава реченица е слабата точка на овој „доказ“.

Задачи за вежбање

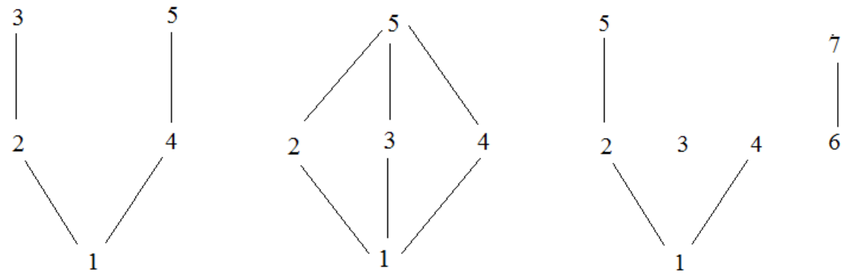
1. Да се направат Хасеовите дијаграми на подредените множества, а потоа да се одредат (ако постојат) најмалиот, односно најголемиот елемент во A и максималните и минималните елементи во A, во задачите:

а) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $\alpha = \Delta_A \cup \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(4,5)\}$.

б) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $\beta = \Delta_A \cup \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5)\}$.

в) $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $\gamma = \Delta_A \cup \{(1,2),(1,4),(1,5),(2,5),(6,7)\}$.

Решение.



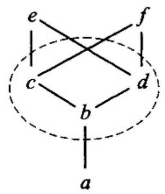
а) б) в)

а) 1 е најмал елемент во A, а со тоа и минимален елемент во A; 3 и 5 се максимални елементи во A, а најголем елемент во A нема.

б) 1 е најмал и минимален елемент во A, а 5 е најголем и максимален елемент во A.

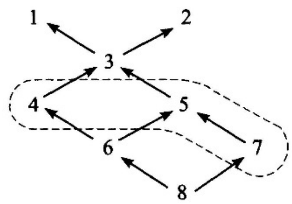
в) минимални елементи се 1,3,6; максимални елементи се 3,4,5,7; нема ни најмал ни најголем елемент.

2. а) Нека $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ и нека A е подредено како што е дадено со Хасеовиот дијаграм подолу (црт. а)). Нека $S\subseteq A$ и $S=\{b,c,d\}$. Најди ги горната и долната меѓа на S во A (ако постојат), најголемиот и најмалиот елемент во S, како и супремумот и инфимумот на S во A (ако постојат).



Црт. а)

б) Нека $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и нека A е подредено како што е дадено со Хасеовиот дијаграм подолу (црт. (б)). Нека $S\subseteq A$ и $S=\{4,5,7\}$. Најди ги горната и долната меѓа на S во A (ако постојат), најголемиот и најмалиот елемент во S, како и супремумот и инфимумот на S во A (ако постојат).



Црт. б)

в) Нека $\mathbb{Q}$ е множеството од рационални броеви и нека B ги содржи сите рационални броеви од интервалот $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, т.е.

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \ \wedge \ 2 < x^2 < 3\}.$$

Најди ги горната и долната меѓа на S во A (ако постојат), најголемиот и најмалиот елемент во B, како и супремумот и инфимумот на B во $\mathbb{Q}$ (ако постојат).

Решение. а) Горни меѓи на S во A се e и f, зашто само e и f се елементи што следат по кој било елемент од S. Бидејќи $e, f \notin S$ следува дека S нема најголем елемент. Да забележиме дека e и f не се споредливи, па значи $\sup_A S$ не постои.

Долни меѓи на S во A се a и b, зашто само a и b се елементи што се помали или еднакви на кој било елемент од S. Притоа, $a \notin S$, па значи a не е најмал елемент во S, но затоа $b \in S$, па b е најмал елемент во S. Очигледно, a и b се споредливи и тоа $a \leq b$, па значи $\inf_A S = b$ (b е најголемата долна меѓа).

б) Горни меѓи на S во A се 1, 2 и 3, а најголем елемент во S е 3 ($3 \leq 1, 3 \leq 2$), а и $\sup_A S = 3$, зашто 3 е најмалата горна меѓа. Долна меѓа на S во A е само 8, а 8 не е најмал елемент, зашто $8 \notin S$. Да забележиме дека 7 не е долна меѓа, зашто 7 не е помало или еднакво на 4 (не е пред 4). Од досегашните заклучоци имаме дека $\inf_A S = 8$ (8 е (единствена) најголема долна меѓа).

в) Множеството B има бесконечно многу горни и долни меѓи, но $\inf_{\mathbb{Q}} B$ и $\sup_{\mathbb{Q}} B$ не постојат (нема најголема долна меѓа и најмала горна меѓа, зашто $\sqrt{2}, \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$). Јасно е дека B нема ниту најмал ни најголем елемент.

3. Да се покаже дека во секое подредено конечно множество има барем еден максимален (барем еден минимален елемент). Дали тврдењето е точно и за бесконечните множества?

Решение. Нека $(A, \leq)$ е произволно подредено множество. Ако A е едноелементно множество, т.е. $A = \{x\}$, тогаш x е максимален (минимален) елемент.

Да претпоставиме дека множеството A има $n+1$ елементи, $A = \{x_1, ..., x_{n+1}\}$ и дека тврдењето е точно за подредени множества што имаат n елементи и помалку од n елементи. Да избереме еден елемент од A, на пример x_i и да го означиме со a. Ако a е максимален, тогаш доказот е готов. Ако a не е максимален, тогаш постои елемент $x_j \in A$, таков што $a \leq x_j$. Нека $B = \{x_k \in A \mid a < x_k\}$. Тогаш B, заедно со индуцираната релација за подредување, е конечно множество такво што $a \notin B$ и B има помалку елементи од A. Од индуктивната претпоставка имаме дека B има максимален елемент (да го означиме со c). Ќе покажеме дека c е исто така максимален елемент во A. Ако $d \in A$ и $c < d$, тогаш $a < c < d$, па $a < d$, од што добиваме дека $d \in B$, што противречи на претпоставката дека c е максимален елемент во B. Значи, c е максимален елемент во A. Слично се изведува доказот за минимален елемент.

Во бесконечните множества ова тврдење не мора да важи. На пример, множеството на реалните броеви $\mathbb{R}$ со вообичаеното подредување нема ниту максимален, ниту минимален елемент.

4. Нека A е подредено множество и нека $S \subseteq A$. Ако S содржи два различни максимални (минимални) елементи од A, тогаш не постои $\sup S$ ($\inf S$). Дали овој исказ е точен и во случајот кога S содржи само еден максимален (минимален) елемент во A?

Решение. Ако a и b се два различни максимални елементи, тогаш тие не се споредливи, па множеството $\{a,b\}$ нема мајорант. Според тоа нема ни супремум. Ако $S \subseteq A$ и S содржи само еден максимален елемент, тогаш супремум на S може, но и не мора да постои. На пример, нека $\mathbb{N}_0$ е подредено со релацијата $\alpha = \Delta_{\mathbb{N}_0} \cup \{(2,0),(2,1),(2,3),(3,4),\ldots,(n,n+1),\ldots\}$. Тогаш множеството $S_1 = \{0,2\}$ има точно еден максимален елемент (тоа е 0) и $\sup S_1 = 0$, а за множеството $S_2 = \{0,2,4,6,\ldots\}$ супремум не постои.

3.7. Бинарни и *n*-арни релации

Нека A и B се множества. Секое подмножество α од Декартовиот производ $A \times B$ се вика *бинарна релација* (или *кореспонденција*) на множествата A и B (по тој редослед), т.е. α е бинарна релација на множествата A и B (по тој редослед) ако и само ако $\alpha \subseteq A \times B$. За еден елемент $x \in A$ велиме дека *е во релација* α *со* елемент $y \in B$ ако и само ако $(x, y) \in \alpha$. Пишуваме $x\alpha y$. Значи, $x\alpha y$ ако и само ако $(x, y) \in \alpha$.

Бинарните релации на две множества натаму ќе бидат важни за дефинирање на поимот пресликување.

***Пример* 1.** а) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ е бинарна релација каде што секој реален број е во релација со секој рационален број.

б) Нека $A = B = \mathbb{R}$, каде што $\mathbb{R}$ е множеството на реалните броеви. Тогаш:

$$\alpha = \left\{ (x,y) \middle| \; x,y \in \mathbb{R} \;\wedge\; x^2+y^2=2 \;\wedge\; xy=1 \right\} = \left\{ (1,1),(-1,-1) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

е една (бинарна) релација од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$ (т.е. во множеството $\mathbb{R}$).

Кај една бинарна релација $\alpha \subseteq A\times B$ не мора да бидат употребени сите елементи од множествата A и B. Од таа причина, важно е да се идентификуваат множествата што се составени од сите можни вредности за секоја од двете компоненти на релацијата.

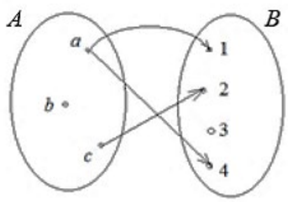
Дефиниција 1. Нека $\alpha \subseteq A\times B$ е бинарна релација. Дефинираме множества D_α и R_α на следниов начин:

$$D_\alpha = \{x \in A \,|\, (\exists y \in B)\,(x,y) \in \alpha\}$$
$$R_\alpha = \{y \in B \,|\, (\exists x \in A)\,(x,y) \in \alpha\}.$$

Множествата D_α и R_α ги нарекуваме *домен* и *ранг на релацијата* α, соодветно. Просто речено, доменот на релацијата α ги содржи сите први компоненети на релацијата α, додека рангот ги содржи сите втори компоненти на релацијата α. Очигледно, $D_\alpha \subseteq A$, а $R_\alpha \subseteq B$.

***Пример* 2.** а) Нека $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ и нека $\alpha \subseteq A \times B$ е бинарна релација дефинирана со $\alpha = \{(1,a), (2,b), (2,c)\}$. Тогаш, доменот на релацијата α е $D_\alpha = \{1,2\}$, а рангот е $R_\alpha = \{a, b, c\}$.

б) Една релација $\alpha \subseteq A\times B$ може да се претстави и графички. На пример, нека $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ и нека $\alpha=\{(a,1),(c,2),(a,4)\}$. На сликата подолу е даден графички приказ на релацијата α.



Елементите од множеството A што се во релација α со елементите од множеството B се поврзани со помош на стрелки. Очигледно е дека на секој ваков графички приказ одговара множество подредени парови чиишто компо–ненти им припаѓаат на множествата A и B, соодветно, т. е. на релација α и обратно.

в) Доменот и рангот на една релација може да бидат еднакви на исто множество. На пример, нека $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sqrt{x^2+y^2} \geq 1\}$ е релација во $\mathbb{R}$. Тогаш $D_\alpha = \mathbb{R} = R_\alpha$. Да забележиме дека од дефиницијата на α е јасно дека

$D_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ и $R_\alpha \subseteq \mathbb{R}$. За обратната инклузија, нека $x \in \mathbb{R}$. Бидејќи $(x,1) \in \alpha$, следува дека $x \in D_\alpha$, па $\mathbb{R} \subseteq D_\alpha$. Бидејќи $(1,x) \in \alpha$, следува дека $x \in R_\alpha$, па $\mathbb{R} \subseteq R_\alpha$.

Дефиниција 1. Две бинарни релации $\alpha \subseteq A \times B$ и $\beta \subseteq C \times D$ се *еднакви* ако се исполнети следниве услови: $A = C,\ B = D,\ \alpha = \beta$.

Дефиниција 2. Бинарните релации $\alpha = A \times B$ и $\alpha = \varnothing$, се нарекуваат *полна* и *празна* релација, соодветно.

Да забележиме дека, ако α е полна релација меѓу множествата A и B, тогаш кои било два елементи $x \in A$ и $y \in B$ се во релација. Ако α е празна релација, тогаш ниту еден пар елементи $x \in A$ и $y \in B$ не е во релација.

Да го означиме со $\mathcal{B}\,(A,B)$ множеството од сите релации на множествата A и B, т.е. $\mathcal{B}(A,B) = \{\alpha \mid \alpha \subseteq A \times B\}$.

Слично како и кај релациите во едно множество A, така и во множеството $\mathcal{B}\,(A,B)$, природно можеме да ги воведеме операциите унија, пресек и комплемент на релации.

Нека $\alpha, \beta \in \mathcal{B}\,(A,B)$ и нека $x \in A$ и $y \in B$ се произволно избрани елементи. Оперциите *унија, пресек* и *комплемент* на релации ги дефинираме на ист начин како што ги дефинираме операциите со релации на едно множество A:

$$\alpha \cup \beta = \{(x,y) \in A \times B \mid (x,y) \in \alpha \vee (x,y) \in \beta\}$$

$$\alpha \cap \beta = \{(x,y) \in A \times B \mid (x,y) \in \alpha \wedge (x,y) \in \beta\}$$

$$\alpha^c = \{(x,y) \in A \times B \mid (x,y) \notin \alpha\} \quad (= \neg\alpha)$$

или, запишано поинаку:

$$x\,(\alpha \cup \beta)\,y \Leftrightarrow x\alpha y \vee x\beta y$$

$$x\,(\alpha \cap \beta)\,y \Leftrightarrow x\alpha y \wedge x\beta y$$

$$x\,\alpha^c\,y \Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \notin \alpha.$$

Слично како што се дефинира инверзна релација на релација α во едно множество A, така се дефинира и *инверзна бинарна релација* на релација $\alpha \subseteq A \times B$. И неа ја означуваме со α^{-1}, а ја дефинираме со:

$$\alpha^{-1} = \{(y,x) \in B \times A \mid (x,y) \in \alpha\}.$$

Дефиниција 3. Нека $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq C \times D$ се бинарни релации. *Производот* на релациите α и β се означува со $\alpha \circ \beta$, каде што $\alpha \circ \beta \subseteq A \times D$ е бинарна релација дефинирана на следниов начин:

$$\beta \circ \alpha = \{(x,y) \in A \times D \mid (\exists t \in B \cap C)((x,t) \in \alpha \ \wedge \ (t,y) \in \beta)\}.$$

Ако $B \cap C = \varnothing$, тогаш $\beta \circ \alpha = \varnothing$.

***Пример* 2.** Нека $A = \{a,b\}$, $B = \{a,b,c\}$, $C = \{a,b,c,d\}$ и нека $\alpha \subseteq A \times B$ и $\beta \subseteq B \times C$ се бинарни релации зададени со:

$$\alpha = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}, \ \beta = \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,c)\}.$$

Да ги најдеме бинарните релации, $\beta \circ \alpha$, $\alpha \circ \beta$ и $(\beta \circ \alpha)^{-1}$. Имаме:

$$\beta \circ \alpha = \{(a,b),(a,a),(a,c)\}, \alpha \circ \beta = \{(b,a),(b,b),(b,c)\},$$

$$(\beta \circ \alpha)^{-1} = \{(b,a),(a,a),(c,a)\}.$$

***Пример* 3.** Нека $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{3,6,7,10\}$, а α е бинарна релација во $A \times B$ дефинирана со $x \alpha y \Leftrightarrow x \mid y$, а β е релација во B дефинирана со $x \beta y \Leftrightarrow x + y = 13$. Тогаш

$\alpha = \{(2,6),(2,10),(3,3),(3,6),(5,10)\}$, $\beta = \{(3,10),(6,7),(7,6),(10,3)\}$ и

$\beta \circ \alpha = \{(2,7),(2,3),(3,10),(3,7),(5,3)\}$, а $\alpha \circ \beta = \{(10,3),(10,6)\}$.

Очигледно, за производ на две бинарни релации не важи комутативниот закон, но важи асоцијативниот закон, што е формулиран со следната теорема.

Теорема 1. *Нека* $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq C \times D$ *и* $\gamma \subseteq E \times F$ *се три бинарни релации. Тогаш* $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$.

Доказ. Од дефиницијата за производ на бинарни релации, имаме дека $\gamma \circ \beta \subseteq C \times F$ и $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha \subseteq A \times F$. Слично, $\beta \circ \alpha \subseteq A \times D$ и $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) \subseteq A \times F$. Ќе покажеме дека подмножествата $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha$, $\gamma \circ (\beta \circ \alpha)$ од множеството $A \times F$ се еднакви. Нека $(x,y) \in A \times F$ е произволно избран елемент. Тогаш:

$$(x,y) \in (\gamma \circ \beta) \circ \alpha \Leftrightarrow (\exists t \in B \cap C)\big((x,t) \in \alpha \wedge (t,y) \in \gamma \circ \beta\big)$$

$$\Leftrightarrow (\exists t \in B \cap C)\big((x,t) \in \alpha \wedge \big(\exists u \in D \cap E\big)\big((t,u) \in \beta \wedge (u,y) \in \gamma\big)\big) \qquad (1)$$

Како последица од формулата $(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$, имаме дека (1) е еквивалентно со

$$(\exists u \in D \cap E)(\exists t \in B \cap C)\big((x,t) \in \alpha \wedge \big((t,u) \in \beta \wedge (u,y) \in \gamma\big)\big). \qquad (2)$$

Користејќи ја формулата $(\exists t)(P(t) \wedge Q) \Leftrightarrow (\exists t)P(t) \wedge Q$, каде што t не е слободна променлива во Q и од асоцијативноста на конјункцијата, добиваме дека (2) е еквивалентно со:

$$(\exists u \in D \cap E)(\exists t \in B \cap C)\big(((x,t) \in \alpha \wedge (t,u) \in \beta) \wedge (u,y) \in \gamma\big)$$

$$\Leftrightarrow (\exists u \in D \cap E)\big((x,u) \in \beta \circ \alpha \wedge (u,y) \in \gamma\big)$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in \gamma \circ (\beta \circ \alpha). \ \square$$

Својство 1. *Нека* $\alpha \subseteq A \times B$ *е бинарна релација и* $\Delta_A \subseteq A^2$, $\Delta_B \subseteq B^2$ *се дијагоналните релации во множествата A и B, соодветно. Тогаш:*

$$\alpha = \alpha \circ \Delta_A = \Delta_B \circ \alpha.$$

Доказ. Од дефиницијата за производ имаме дека $\alpha = \alpha \circ \Delta_A \subseteq A \times B$, како и $\alpha = \Delta_B \circ \alpha \subseteq A \times B$. Понатаму, за произволен пар $(x,y) \in A \times B$ имаме дека:

$$(x,y) \in \alpha \circ \Delta_A \Leftrightarrow (\exists t \in A)\big((x,t) \in \Delta_A \wedge (t,y) \in \alpha\big)$$

$$\Leftrightarrow (x,x) \in \Delta_A \wedge (x,y) \in \alpha \quad \text{за } t = x \in A$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in \alpha.$$

Слично, $(x,y) \in \Delta_B \circ \alpha \Leftrightarrow (\exists t \in B)\big((x,t) \in \alpha \wedge (t,y) \in \Delta_B\big)$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in \alpha \wedge (y,y) \in \Delta_B \quad \text{за } t = y \in B$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in \alpha. \ \square$$

За операциите со бинарни релации меѓу две множества A и B важат истите својства како за операциите со релации во множество A, како што се, на пример, Св. 1 и Посл. 1 во 3.1.

Покрај бинарни релации, во математиката се проучуваат и n-арни релации помеѓу n множества. Поимот n-арна релација го дефинираме слично како поимот бинарна релација.

Дефиниција 4. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се множества. Секое подмножество α од Декартовиот производ $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, т.е. $\alpha \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, се вика *n-арна релација* на множествата $A_1, A_2, ..., A_n$, земени по тој редослед.

За елементите $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$, земени по тој редослед, велиме дека се во релација α и пишуваме $\alpha(a_1, ..., a_n)$ ако и само ако $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \alpha$.

Ако $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, тогаш велиме дека релацијата α е *n-арна релација во множеството* A, т.е. α е n-арна релација во множеството A ако и само ако $\alpha \subseteq A^n$.

Специјално, за $n=1$, релацијата $\alpha \subseteq A$ ја викаме *унарна релација* во множеството A. На пример, $\alpha = \{2,4,6,...\} \subset \mathbb{N}$ е унарна релација во множеството на природните броеви $\mathbb{N}$.

Јасно, за $n=2$, n-арната релација е бинарна.

***Пример* 4.** а) Множеството $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ е тернарна релација во $\mathbb{R}$, која геометриски претставува единична сфера, т.е. сфера со центар во (0, 0, 0) и радиус 1.

б) $\alpha = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4 \mid (\exists k \in \mathbb{N})\ b=a+k,\ c=a+2k,\ d=3k\}$ кватернарна релација во $\mathbb{N}^4$.

Забелешка. n-арните релации имаат голема примена кај релационите бази на податоци. На пример, ако A е множество студенти, нивните податоци можат да се претстават во подредени четворки на следниов начин: име и презиме на студентот, број на индекс, насока, просек. Всушност, податоците се претставуваат како множество од подредени n-ки коишто обично се претставени со табела. Табелата претставува визуелно претставување на релацијата, а податоците се организирани во редици и колони. Податоците што се внесуваат во колоните се од ист тип.

Задачи за вежбање

1. Нека $A=\{1,2,...,13,14,15\}$.

а) Нека α е тернарна релација во A дефинирана со равенката $x^2+5y=z$. Претстави ја α како множество од подредени тројки.

б) Нека β е кватернарна (4-арна) релација во A дефинирана со

$$\beta = \{(x,y,z,t) \mid 4x+3y+z^2=t\}.$$

Претстави ја β како множество од подредени четворки.

Решение. а) За $x>3$ имаме дека $x^2>15$. Треба да ги најдеме само решенијата за y и z, кога $x=1,2,3$. Според тоа, го добиваме следново множество:

$$\alpha = \{(1,1,6),(1,2,1),(2,1,9),(2,2,14),(3,1,14)\}.$$

б) Слично како во задачата а) имаме дека за $z>3$, $z^2>15$. Треба да ги најдеме решенијата за x, y и t, кога $z=1,2,3$. Според тоа, го добиваме следново множество:

$$\beta = \{(1,1,1,8),(1,1,2,11),(1,2,1,11),(1,2,2,14),$$
$$(1,3,1,14),(2,1,1,12),(2,1,2,15),(2,2,1,15)\}.$$

2. Нека $A = \{1, 2, ..., 13, 14, 15\}$.

а) Нека α е тернарна релација во A дефинирана со равенката $x^3 + y = 5z$. Претстави ја α како множество од подредени тројки.

б) Нека β е кватернарна (4-арна) релација во A дефинирана со равенката

$$x^2 + 4y + 5z - t = 0$$

Претстави ја β како множество од подредени четворки.

Решение. а) За $x = 1$ ги имаме следниве решенија за y и z:

$$y = 4,\ z = 1; \quad y = 9,\ z = 2; \quad y = 14,\ z = 3.$$

За $x = 2$ ги имаме следниве решенија по y и z:

$$y = 2,\ z = 2; \quad y = 7,\ z = 3; \quad y = 12,\ z = 4.$$

За $x = 3$ ги имаме следниве решенија по y и z:

$$y = 3,\ z = 6; \quad y = 8,\ z = 7; \quad y = 13,\ z = 8.$$

За $x = 4$ ги имаме следниве решенија по y и z:

$$y = 1,\ z = 13; \quad y = 6,\ z = 14; \quad y = 11,\ z = 15.$$

За $x > 5$ имаме дека $x^3 = 125$, додека за $z = 15$ имаме дека $5z = 75$, што значи дека за y и за t не можеме да добиеме решение. Според тоа, го добиваме следново множество:

$$\alpha = \{(1,4,1),(1,9,2),(1,14,3),(2,2,2),\}(2,7,3),(2,12,4),(3,3,6),(3,8,7),$$
$$(3,13,8),(4,1,13),(4,6,14),(4,11,15)\}.$$

б) Равенката $x^2 + 4y + 5z - t = 0$ ќе ја трансформираме во $x^2 + 4y + 5z = t$.

За $x = 1$ ги имаме следниве решенија за y, z и t:

$$y = 1,\ z = 1,\ t = 10; \quad y = 2,\ z = 1,\ t = 14.$$

За $x = 2$ ги имаме следниве решенија за y, z и t: $y = 1,\ z = 1,\ t = 13$.

За $x > 3$ равенката нема решенија за y, z и t.

Според тоа, го добиваме следново множество:

$$\beta = \{(1,1,1,10),(1,2,1,14),(2,1,1,13)\}.$$

4 ПРЕСЛИКУВАЊА

Суштината на математиката не е во тоа
простите нешта да ги направи сложени,
туку сложените – прости.
Стенли Гудер

4.1. Дефиниција на поимот пресликување

Еден од основните поими во математиката, кој е значаен и за самата математика, но и за нејзината примена во разни области, е поимот пресликување или функција. Преку овој поим се пренесуваат неколку идеи: идејата за пресликување на едни објекти во други (на пример, операцијата собирање на природни броеви пресликува пар од природни броеви во нивниот збир); идејата за трансформации (на пример, трансформации во рамнина на геометриски фигури), како и идејата за зависност на едни величини од други (на пример, зависност на одреден физички процес од времето). Пресликувањата се важен елемент кај математичките структури: така на пример, математичката анализа разгледува теорија на непрекинати функции, на диференцијабилни функции, на интеграбилни функции; основен поим во линеарна алгебра се линеарни пресликувања; во основата на теоријата на диференцијалните равенки лежи практичниот начин на опис на функциите во природата и техниката, итн.

Описно кажано, пресликување од множество A во множество B претставува „правило“ („пропис“ или „постапка“) според кое на секој елемент од множеството A му се придружува еден и само еден елемент од множеството B. Подолу ќе наведеме дефиниција на поимот пресликување која не ги вклучува зборовите правило, пропис, постапка, кои всушност, не се многу прецизни. Со други зборови, поимот пресликување ќе го воведеме со помош на поимот релација.

Дефиниција 1. *Пресликување* (*функција*) од множество A во множество B е бинарна релација $f \subseteq A \times B$, којашто ги задоволува следниве услови:

(i) Доменот на релацијата f се совпаѓа со A, т. е. $D_f = A$;

(ii) $(\forall (x,y),(x',y') \in A \times B)\left(x = x' \Rightarrow y = y'\right)$.

Условот (i) за $f \subseteq A \times B$ значи дека за секој $x \in A$ постои $y \in B$ така што $(x,y) \in f$. Условот (ii), познат и како *услов за функционалност на релацијата* f, ни кажува дека ако се исти првите компоненти на релацијата f, тогаш се исти и вторите компоненти. Со други зборови, f не може да содржи елементи со исти први компоненти, а различни втори компоненти.

Ако $f \subseteq A \times B$ е пресликување од множеството A во множеството B, тогаш него го означуваме со $f : A \to B$ или со $A \xrightarrow{f} B$.

Ако $(x, y) \in f$ и $f \subseteq A \times B$ е пресликување, тогаш елементот $x \in A$ го нарекуваме *оригинал* или *аргумент* на f, а елементот $y \in B$ го нарекуваме *слика* на елементот (оригиналот) x и пишуваме $y = f(x)$ (или $f : x \mapsto y$, или само $x \mapsto y$).

***Пример* 1.** Нека $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и нека f и g се бинарни релации во $A \times B$ зададени со:

$$f = \{(a,1), (b,2), (c,3), (d,3)\}, \quad g = \{(a,1), (b,2), (c,1), (b,3)\}.$$

Тогаш со f е дефинирано пресликување, а со g – не е.

Множеството A се вика *домен* или *дефинициона област* на пресликувањето f и пишуваме $A = \mathrm{dom}(f)$. Множеството B се нарекува *кодомен* или *област на вредности* на пресликувањето f и пишуваме $B = \mathrm{codom}(f)$. Множеството од сите вредности на пресликувањето $f \subseteq A \times B$ е множеството R_f, кое го означуваме и со $f(A)$ или со $\mathrm{Im}(f)$, а се нарекува *ранг* или *опсег* на пресликувањето f. Значи, $f(A) = \{y \in B \mid (\exists x \in A) \ y = f(x)\}$.

Забелешка 2. Ако $A = \varnothing$, тогаш единствена релација меѓу множествата A и B е празната релација и таа е пресликување, коешто го нарекуваме *празно пресликување*. Ако $A \neq \varnothing$ и $B = \varnothing$, тогаш единствена релација на множес–твата A и B е празната релација, но оваа релација не е пресликување. Да забележиме дека кодоменот може да биде празен само во случај кога доменот е празен.

Дефиниција 2. За две пресликувања $f : A \to B$ и $g : C \to D$ велиме дека се *еднакви* ако $A = C$, $B = D$ и $f(x) = g(x)$, за секој $x \in A$, т. е.

$$f = g \iff A = C \wedge B = D \wedge (\forall x \in A)\big(f(x) = g(x)\big).$$

Во современата математика постојат различни начини на опишување на пресликувањата. Некои може да се дефинираат со формула или со алгоритам, некои се претставуваат со помош на слика, т. е. график, а некои може да бидат зададени имплицитно. Во некои случаи е погодно дадено пресликување да се претстави таблично или со дијаграм. Така, пресликувањето $f : A \to B$ од примерот 1 можеме да го претставиме како $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Подолу ќе дадеме неколку карактеристични примери.

***Пример* 2.** Пресликувањето $1_A : A \to A$ дефинирано со $1_A(x) = x$, за секој $x \in A$, се вика *идентично пресликување* на множеството A.

Дефиниција 3. Секое пресликување $f : A \to A$ се нарекува *трансформација* на A. Множеството од сите трансформации на A се означува со A^A, додека множеството од сите пресликувања од A во B се означува со B^A.

***Пример* 3.** Ако $A = \{a,b\}$, $B = \{1,2,3\}$, тогаш:

$$A^A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} \right\}$$

$$B^A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

***Пример* 4.** Низа е специјално пресликување. Имено, секое пресликување од множеството на природните броеви $\mathbb{N}$ во некое (дадено) множество A го нарекуваме *низа* (во множеството A). Ако $f : \mathbb{N} \to A$ е низа, тогаш подредениот пар $(i,a) \in f$ обично го означуваме со a_i. Низата ја означуваме со $(a_i \mid i \in \mathbb{N})$ или само со (a_i).

***Пример* 5.** За секоја релација може да се дефинира специјално пресликување. Нека $\alpha \subseteq A^2$ е релација во множеството A. Дефинираме пресликување $f_\alpha : A^2 \to \{\top, \bot\}$ на следниов начин:

$$f_\alpha(a,b) = \top \text{ ако и само ако } (a,b) \in \alpha .$$

На тој начин можеме релацијата α да ја идентификуваме со пресликувањето f_α.

***Пример* 6.** Нека A е множество и нека $S \subset A$. Нека $B = \{0,1\}$. Тогаш функцијата $\chi_S : A \to B$ дефинирана со:

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \in S \\ 0, & \text{ако } x \notin S \end{cases}$$

се нарекува *карактеристична функција* на подмножеството S.

***Пример* 7.** Нека $\{A_i \mid i \in I\}$ е фамилија подмножества од множество B. Пресликувањето $f : \{A_i : i \in I\} \to B$ се нарекува *функција на избор* ако, за секој $i \in I$, $f(A_i) \in B$, т. е. ако сликата на секое множество A_i е елемент на тоа множество. За функцијата на избор повеќе зборувавме во првата лекција од втората глава.

Дефиниција 4. За едно пресликување $f : A \to B$ велиме дека е

(i) *инјекција* ако $(\forall x, y \in A)(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$.

(ii) *сурјекција* ако $(\forall y \in B)(\exists x \in A)\ f(x) = y$.

(iii) *биекција* ако f е инјекција и сурјекција.

Условот за инјективност е еквивалентен со

$$(\forall x, y \in A)(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

што се добива со користење на правилото за контрапозиција на импликацијата во условот (i) и често се користи при решавање разни задачи.

Да резимираме: пресликувањето коешто го исполнува условот, ако оригиналите се различни, тогаш и нивните слики се различни, е инјективно пресликување, додека пресликувањето коешто го исполнува условот, секој елемент од кодоменот е слика на барем еден елемент од доменот, е сурјективно пресликување. Да забележиме дека празното пресликување е инјекција за секое множество B, а биекција само ако $B = \varnothing$.

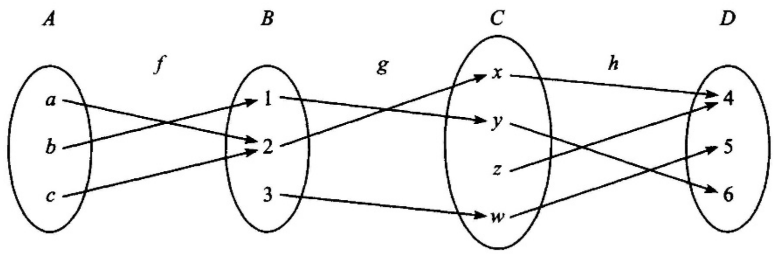
Биективно пресликување од едно множество во само себе се нарекува *пермутација* на тоа множество. Очигледен пример за биективно пресликување е идентичното пресликување.

Да разгледаме уште еден конкретен пример.

***Пример* 8.** На цртежот подолу дефинирани се пресликувања $f : A \to B$, $g : B \to C$ и $h : C \to D$.

а) Да определиме кое од пресликувањата е инјекција, а кое не е.

б) Да определиме кое од пресликувањата е сурјекција, а кое не е.



а) Пресликувањето f не е инјекција, бидејќи $a \neq c$, но $f(a) = f(c)$. Слично, h не е инјекција, бидејќи $x \neq z$, но $h(x) = h(z)$. Пресликувањето g е инјекција, затоа што елементите $1,2,3 \in B$ имаат различни слики во C.
б) Пресликувањето f не сурјекција, зашто $3 \in B$ не е слика на ниту еден елемент од A. Слично, g не е сурјекција зашто $z \in C$ не е слика на ниту еден елемент од B. Пресликувањето h е сурјекција, затоа што секој елемент од D е слика на некој елемент од C.

Дефиниција 5. Нека $f : A \to B$ и $\varnothing \neq X \subseteq A$. Пресликувањето $f_X : X \to B$ дефинирано со $f_X(x) = f(x)$ за секој $x \in X$ се нарекува *рестрикција* на пресликувањето f на множеството X. (Наместо f_X се пишува и $f\,|_X$.)

Ако f_X е рестрикција на пресликувањето $f : A \to B$ на множеството X, тогаш пресликувањето f го нарекуваме *екстензија* на пресликувањето f_X.

***Пример* 9.** Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ и нека $X = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Тогаш $f_X(x) = 0$, за секој $x \in X$.

Задачи за вежбање

1. Нека $A = \{1,2,3,4\}$. Определи дали дадената релација е пресликување од A во A:
а) $f = \{(2,3),(1,4),(2,1),(3,2),(4,4)\}$;
б) $g = \{(3,1),(4,2),(1,1)\}$;
в) $h = \{(2,1),(3,4),(1,4),(2,1),(4,4)\}$.

Решение. Да се потсетиме дека $f \subseteq A^2$ е пресликување ако и само ако секој $a \in A$ се појавува како прва компонента во точно еден подреден пар во f. Според тоа, релацијата f не е пресликување, зашто (2,3) и (2,1) имаат исти први компоненти; б) релацијата g не е пресликување зашто $2 \in A$ не се појавува како прва компонента во ниту еден подреден пар; в) релацијата h е пресликување иако 2 се појавува во два подредени парови (тие подредени парови се исти).

2. Нека A е непразно множество и $f : \mathcal{P}(A^3) \to \mathcal{P}(A^3)$ е пресликување дефинирано со $f(X) = \{(a,b,c) \in A^3 \mid (\exists d \in A)\,(d,b,c) \in X\}$. Докажи дека ако $C = \{(a,a,b) \mid a,b \in A\}$, тогаш $f(C \cap X) \cap f(C \cap X^c) = \varnothing$, за секој $X \subseteq A^3$.

Решение. Да го претпоставиме спротивното, т. е. $f(C \cap X) \cap f(C \cap X^c) \neq \varnothing$.

Тогаш постои $(x,y,z)\in f(C\cap X)\cap f(C\cap X^c)$. Од дефиницијата на f следува дека постојат $t,u\in A$ такви што $(t,y,z)\in C\cap X$ и $(u,y,z)\in C\cap X^c$. Оттука, $(t,y,z)\in C$ и $(u,y,z)\in C$, па од дефиницијата на C следува дека $t=y$ и $u=y$. Според тоа, $(y,y,z)\in X$ и $(y,y,z)\in X^c$, што не е можно.

3. Нека $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ е пресликување дефинирано со $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$, за секој $x\in\mathbb{N}$. Покажи дека ова пресликување е инјекција, но не е сурјекција.

Решение. Нека $x,y\in\mathbb{N}$ се произволно избрани елементи и нека $f(x)=f(y)$. Тогаш $\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{y}{2y+1}$, од што $x(2y+1)=y(2x+1)$, а оттука се добива дека $x=y$, т. е. дека f е инјекција.

Пресликувањето f не е сурјекција. Навистина, нека $y\in\mathbb{Q}$ е произволно избран елемент. Да ставиме $x=\dfrac{y}{1-2y}$. Тогаш

$$f(x)=f\left(\frac{y}{1-2y}\right)=\frac{\frac{y}{1-2y}}{2\frac{y}{1-2y}+1}=\frac{\frac{y}{1-2y}}{\frac{2y+1-2y}{1-2y}}=y\cdot$$

Но, $x=\dfrac{y}{1-2y}$ не е секогаш природен број. На пример, за $y=1$ се добива $x=-1\notin\mathbb{N}$. Според тоа, f не е сурјекција.

4. Нека $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ е пресликување дефинирано со $f(a+ib)=a^2+b^2$. Да се покаже дека ова пресликување е сурјекција, но не е инјекција.

Решение. Нека $c\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ е произволно избран елемент. Се прашуваме дали постои елемент $z=a+ib\in\mathbb{C}$ таков што $f(a+ib)=c$? Да ставиме $a=\sqrt{c}$, $b=0$. Тогаш $f(a+ib)=f(\sqrt{c}+i0)=(\sqrt{c})^2+0^2=c$, па f е сурјекција. За да покажеме дека f не е инјекција, да претпоставиме дека $a+ib$, $c+id\in\mathbb{C}$ се произволно избрани елементи такви што $a+ib\neq c+id$. Тогаш, $a\neq c$ или $b\neq d$, но оттука не следува дека $a^2+b^2\neq c^2+d^2$, т. е. $f(a+ib)\neq f(c+id)$. На пример, ако $a=1$, $c=-1$, $b=2$, $d=-2$, тогаш $a^2+b^2=5=c^2+d^2$, т. е. $f(a+ib)=f(c+id)$, а $1+2i\neq-1-2i$. Значи, f не е инјекција.

5. Нека $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ е пресликување дефинирано со $f(x)=x^2+1$. Да се покаже дека ова пресликување не е ниту инјекција, ниту сурјекција.

Решение. Имено, нека $x,y\in\mathbb{Z}$ се произволно избрани елементи и нека $f(x)=f(y)$. Тогаш $x^2+1=y^2+1$, т.е. $x^2=y^2$, од што не следува дека $x=y$. На пример, $(-1)^2=1^2$, но $-1\neq 1$. Според тоа, f не е инјекција.

За да покажеме дека f не е сурјекција ќе избереме произволен елемент $n\in\mathbb{N}$. Се прашуваме дали постои таков елемент $m\in\mathbb{Z}$ за кој важи $f(m)=n$? Да ставиме $m=\sqrt{n-1}$. Тогаш $f(\sqrt{n-1})=(\sqrt{n-1})^2+1=n-1+1=n$, но m не мора да биде елемент од $\mathbb{Z}$. На пример, за $n=3$, $m=\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}$.

6. Нека $f:A\to B$ е инјекција и нека β е релација за подредување во B.

Докажи дека:

а) Ако α е релација во A дефинирана со $x\,\alpha\,y\Leftrightarrow f(x)\,\beta\,f(y)$, тогаш α е подредување во A.

б) Ако (A,α) е линеарно подредено множество, тогаш дали и (B,β) е линеарно подредено множество?

Решение. (Р) Нека $x\in A$ е произволно избран елемент. Од рефлексивноста на β, следува дека $f(x)\,\beta\,f(x)$, а од дефиницијата на α, следува дека $x\,\alpha\,x$.

(АС) Нека $x,y\in A$ се произволно избрани елементи и нека $x\alpha y$ и $y\alpha x$. Тогаш $f(x)\,\beta\,f(y)$ и $f(y)\,\beta\,f(x)$, па од антисиметричноста на β следува дека $f(x)=f(y)$. Од инјективноста на пресликувањето f следува дека $x=y$.

(Т) Нека $x,y,z\in A$ се произволно избрани елементи и нека $x\,\alpha\,y$ и $y\,\alpha\,z$. Тогаш $f(x)\,\beta\,f(y)$ и $f(y)\,\beta\,f(z)$, па од транзитивноста на β следува дека $f(x)\,\beta\,f(z)$. Од дефиницијата на β, следува дека $x\,\alpha\,z$.

б) Нека $A=\{a\}$, $B=\{b,c\}$, $f(a)=b$ и $\beta=\Delta_B$. Тогаш $\alpha=\{(a,a)\}$. Јасно, (A,α) е линеарно подредено множество, но (B,β) не е.

7. а) Ако $f:A\to B$ е инјекција, тогаш и секоја рестрикција f_X на пресликувањето f на $\varnothing\neq X\subseteq A$ е инјекција.

б) Ако рестрикцијата $f_X:X\to B$ на пресликувањето $f:A\to B$ на множеството X, $\varnothing\neq X\subseteq A$, е сурјекција, тогаш и пресликувањето f е сурјекција.

в) Најди примери од кои се гледа дека обратните тврдења на а) и б) не важат.

Решение. а) Нека $x_1, x_2 \in X$ се произволно избрани елементи, такви што $x_1 \neq x_2$. Од тоа што $X \subseteq A$, следува дека $x_1, x_2 \in A$, а бидејќи f е инјекција, следува дека $f_X(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = f_X(x_2)$, т.е. f_X е инјекција.

б) Нека $X \subseteq A$ и $f_X : X \to B$ е сурјекција и нека $y \in B$. Тогаш постои $x \in X \subseteq A$ таков што $y = f_X(x) = f(x)$, па значи и f е сурјекција.

в) Нека $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c\}$.

1) Пресликувањето $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & b & c \end{pmatrix}$ не е инјекција, додека рестрикцијата на пресликувањето f на множеството $X = \{1,2\}$, $f_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ е инјекција.

2) Пресликувањето $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & b & c \end{pmatrix}$ е сурјекција, додека рестрикцијата на пресликувањето f на множеството $X = \{1,2,3\}$, $f_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & b \end{pmatrix}$ не е сурјекција зашто елементот c не е слика на ниту еден оригинал.

8. Нека $B = \{1,2,3,4,5\}$ и нека A_1, A_2, A_3, A_4 се следниве подмножества од B:

$$A_1 = \{1,2,3\},\ A_2 = \{1,5\},\ A_3 = \{2,4,5\},\ A_4 = \{3,4\}.$$

Утврди која е, а која не е, функција на избор, од функциите што се зададени подолу:

а) $f_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $f_2 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $f_3 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; г) $f_4 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. а) f_1 не е функција на изборот, зашто $f_1(A_2) = 2 \notin A_2$.

б) f_2 е функција на избор, зашто за секој $i \in \{1,2,3,4\}$, $f_2(A_i) \in A_i$.

в) f_3 е функција на избор, зашто за секој $i \in \{1,2,3,4\}$, $f_3(A_i) \in A_i$.

г) $f_4(A_3) = 1 \notin A_3$, па f_4 не е функција на избор.

4.2. Композиција на пресликувања

Составувањето на две или повеќе пресликувања со цел да се добие едно пресликување се вика композиција (или: состав, производ) на пресликувања.

Дефиниција 1. Нека $f : A \to B$ и $g : B \to C$ се пресликувања. *Композиција* (*состав*) на пресликувањата f и g е пресликувањето $g \circ f : A \to C$ дефини–

рано со $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, за секој $x \in A$.

Нека $f : A \to B$, $g : B \to C$ и $h : A \to C$ се пресликувања коишто ги претставуваме со дијаграмот

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Ако $h = g \circ f$, тогаш велиме дека дијаграмот е *комутативен* (или дека *комутира*). Слично, за дијаграмот

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "q"'] & D \end{tikzcd}$$

велиме дека е *комутативен* ако е исполнето равенството $g \circ f = q \circ h$.

Да забележиме дека композицијата на пресликувања во општ случај *не е комутативна*.

***Пример* 1.** Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ се пресликувања дефинирани со:

$$f(x) = 2x + 3 \text{ и } g(x) = x^2 + 2 .$$

Тогаш:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = 2(x^2 + 2) + 3 = 2x^2 + 7 ;$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 + 2 = 4x^2 + 12x + 11 .$$

Значи, $f \circ g \neq g \circ f$. Во овој случај и двете композиции се дефинирани. Но, може да се случи едната композиција да е дефинирана, а другата да не е.

Значењето на инјективните и сурјективните пресликувања, како и на композицијата на пресликувања, се гледа од следнава теорема.

Теорема 1. *Секое пресликување може да се разложи на композиција од две пресликувања од кои едното е инјекција, а другото е сурјекција.*

Доказ. Нека $f : A \to B$ е дадено пресликување. Дефинираме пресликување $f_1 : A \to f(A)$ со:

$$(\forall x \in A) \quad f_1(x) = f(x) ,$$

и пресликување $i : f(A) \to B$ со:

$$(\forall y \in f(A)) \quad i(y) = y .$$

Тогаш $i \circ f_1 : A \to B$ и $f = i \circ f_1$. Навистина, за секој $x \in A$ важи:

$$(i \circ f_1)(x) = i(f_1(x)) = f_1(x) = f(x).$$

За $y \in f(A)$ постои $x \in A$ таков што $y = f(x)$, зашто $f(A)$ е множеството од сите слики на пресликувањето f . Бидејќи $f_1(x) = f(x)$, следува дека и $y = f_1(x)$. Значи, f_1 е сурјекција. Од дефиницијата на пресликувањето i имаме дека $i(y_1) = i(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$, т. е. i е инјекција. □

Да забележиме дека, ако $X \subseteq Y$, тогаш пресликувањето $i : X \to Y$ дефи–нирано со $i(x) = x$, за секој $x \in X$ се нарекува *сместување* на множеството X во множеството Y .

Теорема 2. (за асоцијативност на композицијата)

Нека $f : A \to B$, $g : B \to C$ и $h : C \to D$ *се три пресликувања. Тогаш*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Доказ. Од дефиницијата за композиција на пресликувања имаме дека $(h \circ g) \circ f : A \to D$ и $h \circ (g \circ f) : A \to D$, што значи дека двете пресликувања имаат исти домени и исти кодомени. Нека $x \in A$ е произволно избран елемент. Тогаш:

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Слично,

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

Бидејќи десните страни на горните две равенства се еднакви, следува дека и нивните леви страни се еднакви, т. е. $\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x)$, за секој $x \in A$. Оттука следува дека $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, со што теоремата е докажана. □

Од докажаната теорема имаме дека композицијата на кои било три пресликувања за кои таа е дефинирана, е *асоцијативна* операција.

Својство 1. *Ако* $f : A \to B$ *е пресликување,* 1_A *е идентичното пресликување на множеството A и* 1_B *е идентичното пресликување на множеството B, тогаш* $f = f \circ 1_A$ *и* $f = 1_B \circ f$.

Доказ. Бидејќи $1_A : A \to A$ и $f : A \to B$, следува дека композицијата $f \circ 1_A$ постои и дека $f \circ 1_A : A \to B$. Слично, од $f : A \to B$ и $1_B : B \to B$, следува дека композицијата $1_B \circ f$ постои и дека $1_B \circ f : A \to B$. Значи,

$$\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(f\circ 1_A)=\mathrm{dom}(1_B\circ f)=A, \text{ додека}$$
$$\mathrm{codom}(f)=\mathrm{codom}(f\circ 1_A)=\mathrm{codom}(1_B\circ f)=B.$$

Ако $x\in A$ е произволно избран елемент, тогаш:

$$(f\circ 1_A)(x)=f\left(1_A(x)\right)=f(x), \text{ па значи } f\circ 1_A=f.$$
$$(1_B\circ f)(x)=1_B\left(f(x)\right)=f(x), \text{ па значи } 1_B\circ f=f. \ \square$$

Својство 2. *Нека* $f:A\to B$ *и* $g:B\to C$ *се пресликувања.*

(i) *Ако* f *и* g *се инјекции, тогаш и* $g\circ f$ *е инјекција.*

(ii) *Ако* f *и* g *се сурјекции, тогаш и* $g\circ f$ *е сурјекција.*

(iii) *Ако* f *и* g *се биекции, тогаш и* $g\circ f$ *е биекција.*

Доказ. (i) Нека f и g се инјекции и нека $x_1,x_2\in A$ се произволно избрани елементи за кои е исполнет условот $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$. Тогаш:

$$g(f(x_1))=g(f(x_2)) \qquad \text{(од дефиницијата за композиција)}$$
$$\Rightarrow\ f(x_1)=f(x_2) \qquad (g \text{ е инјекција})$$
$$\Rightarrow\ x_1=x_2 \qquad (f \text{ е инјекција})$$

(ii) Нека $z\in C$ е произволно избран елемент. Од тоа што g е сурјекција, следува дека постои $y\in B$ така што $g(y)=z$. Бидејќи f е сурјекција, следува дека постои $x\in A$ таков што $f(x)=y$. Значи, $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(y)=z$, т. е. $g\circ f$ е сурјекција.

(iii) Произлегува од (i) и (ii). $\square$

Својство 3. *Нека* $f:A\to B$ *и* $g:B\to C$.

(i) *ако* $g\circ f$ *е инјекција, тогаш* f *е инјекција*

(ii) *ако* $g\circ f$ *е сурјекција, тогаш* g *е сурјекција.*

Доказ. (i) Нека $g\circ f$ е инјекција. Да го претпоставиме спротивното, т. е. дека f не е инјекција. Тогаш постојат $x_1,x_2\in A$ за кои $f(x_1)=f(x_2)$ и $x_1\neq x_2$. Тогаш, за овие x_1 и x_2 имаме дека:

$$x_1\neq x_2 \quad \text{и} \quad g(f(x_1))=g(f(x_2)), \quad \text{т. е.}$$
$$(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2),$$

што противречи на претпоставката дека $g\circ f$ е инјекција. Според тоа, f е инјекција.

(ii) Нека $g \circ f$ е сурјекција. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека g не е сурјекција. Тогаш постои елемент $c \in C$ таков што за секој $b \in B$, $g(b) \neq c$. Нека $a \in A$ е произволно избран елемент. Бидејќи $f(a) \in B$, следува дека $g(f(a)) \neq c$, т. е. $(g \circ f)(a) \neq c$. Според тоа $g \circ f$ не е сурјекција, што противречи на претпоставката, па значи f е сурјекција. □

***Пример* 2.** Ќе покажеме дека во претходното тврдење не важат обратните насоки.

а) Нека $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$, $C = \{5\}$. Нека $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $g = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$. Пресликувањето f е инјекција, но $g \circ f$ не е, зашто

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 5, \quad (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 5,$$

т. е. $(g \circ f)(1) = (g \circ f)(2)$, но $1 \neq 2$.

б) Нека $A = \{5\}$, $B = \{3,4\}$, $C = \{1,2\}$ и нека $f = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Пресликувањето g е сурјекција, но $g \circ f$ не е, зашто $(g \circ f)(x) \neq 1$, за секој $x \in A$.

Во следните две теореми се дава карактеризација на инјективните, односно на сурјективните пресликувања.

Теорема 3. *Пресликувањето $f : A \to B$ е инјекција ако и само ако за секое непразно множество S и кои било пресликувања $g,h : S \to A$ важи импликацијата $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$.*

Доказ. Нека $f : A \to B$ е инјекција, нека S е произволно непразно множество и $g,h : S \to A$ се произволни пресликувања такви што $f \circ g = f \circ h$. Од условот $f \circ g = f \circ h$ следува дека за произволен $x \in S$, $(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x)$. Оттука, $f(g(x)) = f(h(x))$, а од инјективноста на f, имаме дека $g(x) = h(x)$, од што следува дека $g = h$.

Обратно, да го претпоставиме спротивното, т. е. дека постојат $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) = f(x_2)$. (Ако A е едноелементно множество, тогаш тврдењето е тривијално исполнето.) Нека $S = \{x_1, x_2\} \subseteq A$. Дефинираме пресликувања $g,h : S \to A$ со

$$g = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad h = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix},$$

па $g \neq h$. Тогаш:

$$(f\circ g)(x_1)=f(g(x_1))=f(x_1)=f(h(x_1))=(f\circ h)(x_1),$$
$$(f\circ g)(x_2)=f(g(x_2))=f(x_2)=f(x_1)=f(h(x_2))=(f\circ h)(x_2),$$
т. е. $(f\circ g)(x)=(f\circ h)(x)$ за секој $x\in S$, т. е. $f\circ g=f\circ h$, па од претпоставката следува дека $g=h$, што е контрадикција со изборот на пресликувањата g и h. Според тоа, f е инјекција. □

Теорема 4. *Пресликувањето* $f:A\to B$ *е сурјекција ако и само ако за секое непразно множество* S *и кои било пресликувања* $g,h:B\to S$ *важи импликацијата* $g\circ f=h\circ f\ \Rightarrow\ g=h$.

Доказ. Нека $f:A\to B$ е сурјекција. Тогаш, за произволен $y\in B$ постои $x\in A$ таков што $y=f(x)$. Според условот $g\circ f=h\circ f$ имаме дека
$$g(y)=g(f(x))=(g\circ f)(x)=(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(y),$$
т. е. дека $g=h$.

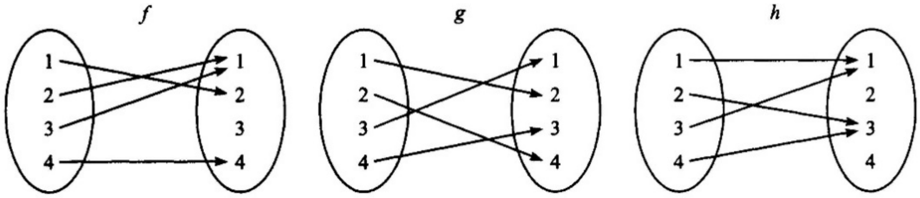
За обратното, да го претпоставиме спротивното, т. е. дека f не е сурјекција. Тоа значи дека постои $b\in B$ таков што $b\notin f(A)$, т.е. $B\setminus f(A)\neq\varnothing$. Дефинираме пресликувања $g,h:B\to B$, при што земаме $S=B$, на следниов начин:
$$g=1_B \quad \text{и} \quad h(y)=\begin{cases} y, & \text{ако } y\neq b \\ b_0\in f(A), & \text{ако } y=b \end{cases}.$$
(Ако B е едноелементно множество, тогаш тврдењето е очигледно.) За произволно $x\in A$ имаме:
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=f(x)=h(f(x))=(h\circ f)(x),$$
па $g\circ f=h\circ f$. Од претпоставката следува дека $g=h$, што противречи на изборот на g и h. Според тоа, f е сурјекција. □

Задачи за вежбање

1. На цртежот подолу се дефинирани пресликувања *f*, g и h од множеството $A=\{1,2,3,4\}$ во себе.

а) Најди ги композициите: $f\circ g$, $h\circ f$, $g^2=g\circ g$.

б) Најди ги композициите: $h\circ g\circ f$, $f\circ g\circ h$.



Решение. а) $f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&1&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&1\end{pmatrix}$;

$$h\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&1&3\end{pmatrix};$$

$$g^2=g\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

б) $h\circ g\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&3&3&1\end{pmatrix}$;

$$f\circ g\circ h=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&1&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&1&2\end{pmatrix}.$$

2. Дадени се пресликувањата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинирани со:

$$f(x)=x^2+3x+1,\ g(x)=2x-3.$$

Најди ги композициите $f\circ g$ и $g\circ f$.

Решение. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-3)=(2x-3)^2+3(2x-3)+1=$

$$=4x^2-12x+9+6x-9+1=4x^2-6x+1.$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+3x+1)=2(x^2+3x+1)-3=2x^2+6x-1.$$

3. Ако $f:A\to B$, $g:B\to C$ и $h:C\to D$ се пресликувања и $h\circ g\circ f$ е биекција, тогаш кои од пресликувањата f,g или h мораат да бидат инјекции, а кои сурјекции? Да се наведат примери кога останатите пресликувања ги немаат тие својства.

Решение. Според Св. 4, следува дека ако $h\circ g\circ f$ (притоа, $h\circ g\circ f:A\to D$) е биекција, тогаш f е инјекција, а h е сурјекција. Еве пример кој покажува дека ништо повеќе од ова не мора да важи. Нека $A=\{a\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{3,4\}$ и $D=\{d\}$, а пресликувањата се дефинирани со:

$$f = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ d & d \end{pmatrix}.$$

Да забележиме дека f не е сурјекција, h не е инјекција, а g не е ниту инјекција ниту сурјекција.

4. За еден елемент $x \in A$ велиме дека е *фиксна точка* на пресликувањето $f: A \to A$ ако и само ако $f(x) = x$. Нека S е множеството од сите фиксни точки на пресликувањето f. Ако $g: A \to A$ е пресликување за кое важи $f \circ g = g \circ f$, тогаш $g(S) \subseteq S$.

Решение. Нека $x \in g(S)$ е произволно избран елемент. Тогаш постои $s \in S$ таков што $g(s) = x$. Бидејќи $s \in S \subseteq A$, следува дека $f(s) = s$. Од тоа што $f \circ g = g \circ f$, следува дека

$$x = g(s) = g(f(s)) = (g \circ f)(s) = (f \circ g)(s) = f(g(s)) = f(x).$$

Значи, x е фиксна точка за пресликувањето f, па $x \in S$. Според тоа, $g(S) \subseteq S$.

5. Нека $f: A \to A$ е пресликување и нека $f^n = 1_A$ (притоа, $f^{n+1} = f^n \circ f$ и n е природен број). Докажи дека f е биекција.

Решение. За $n = 1$ имаме дека $f^2 = 1_A$, т.е. $f \circ f = 1_A$. Бидејќи 1_A е биекција, од Св. 4 следува дека f е инјекција и f е сурјекција, т.е. f е биекција. Да претпоставиме дека тврдењето дека f е биекција е точно до некој $n = k$, т.е. за $f^k = 1_A$. За $n = k + 1$ имаме: $f^{k+1} = f^k \circ f$, па од Св. 4, следува дека f е инјекција. Од друга страна, важи асоцијативниот закон за композиција на пресликувања, па $1_A = f^{k+1} = f^k \circ f = (\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k}) \circ f = f \circ (\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k}) = f \circ f^k$.

Од Св. 4, следува дека f е сурјекција. Бидејќи f е инјекција и сурјекција, следува дека f е биекција.

4.3. Инверзни пресликувања

Во претходната глава го дефиниравме поимот инверзна релација и разгледувавме некои својства во врска со неа. Бидејќи секое пресликување е релација, очигледно постои инверзна релација на едно пресликување $f: A \to B$. Да забележиме дека инверзната релација на дадена релација не мора да биде пресликување.

Дефиниција 1. За едно пресликување $f: A \to B$ велиме дека има *инверзно*, ако постои пресликување $f^*: B \to A$ такво што $f^* \circ f = 1_A$ и $f \circ f^* = 1_B$.

Својство 1. *Ако едно пресликување $f: A \to B$ има инверзно, тогаш тоа е единствено.*

Доказ. Нека $f: A \to B$ има инверзно пресликување. Да претпоставиме дека $f^*: B \to A$ и $f_1^*: B \to A$ се инверзни пресликувања на пресликувањето f. Тогаш:

$$f^* = f^* \circ 1_B = f^* \circ (f \circ f_1^*) = (f^* \circ f) \circ f_1^* = 1_A \circ f_1^* = f_1^* .$$

Според тоа, инверзното пресликување на f е единствено. □

Инверзното пресликување на дадено пресликување $f: A \to B$ (ако постои) го означуваме со f^{-1}. Според тоа, за $f: A \to B$, пресликувањето $f^{-1}: B \to A$ е такво што $f^{-1} \circ f = 1_A$ и $f \circ f^{-1} = 1_B$.

Теорема 1. *Нека $f: A \to B$ е пресликување. Тогаш f има инверзно пресликување ако и само ако f е биекција.*

Доказ. Нека f^{-1} е инверзно пресликување на f. Тврдиме: f е биекција.

1) Прво ќе докажеме дека f е инјекција. Нека $x, y \in A$ се произволни и нека $f(x) = f(y)$. Тогаш

$$f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) \;\Rightarrow\; (f^{-1} \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(y) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 1_A(x) = 1_A(y) \;\Rightarrow\; x = y .$$

Според тоа, f е инјекција.

2) Ќе докажеме дека f е сурјекција. Нека $y \in B$ е произволен елемент. Тврдиме дека постои $x \in A$ така што $f(x) = y$. Да ставиме $x = f^{-1}(y)$. Тогаш

$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) = 1_B(y) = y .$$

Според тоа, f е сурјекција.

Обратно, нека f е биекција. Тогаш за произволен $y \in B$ постои $x \in A$ таков што $f(x) = y$, заштo f е сурјекција. Од тоа што f е инјекција, следува дека тоа $x \in A$ е единствено. Дефинираме пресликување $g: B \to A$ со:

$$g(y) = x ,$$

каде што x и y се одбрани според горните услови. Ќе покажеме дека g е инверзно пресликување на f. Бидејќи

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x = 1_A(x)$$
$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = 1_B(y) ,$$

за $x \in A$, $y \in B$ следува дека $g \circ f = 1_A$ и $f \circ g = 1_B$, па значи $g = f^{-1}$. □

Својство 2. *Нека* $f : A \to B$ *и* $g : B \to C$ *се биекции. Тогаш*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Доказ. Од $g \circ f : A \to C$ следува дека $(g \circ f)^{-1} : C \to A$, а од $f^{-1} : B \to A$ и $g^{-1} : C \to B$ следува дека $f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$ (f^{-1} и g^{-1} постојат зашто f и g се биекции, па и производот $f^{-1} \circ g^{-1}$ постои). Исто така, дефинирани се и производите:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) : C \to C, \quad (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) : A \to A.$$

Тогаш важат равенствата

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ 1_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = 1_C$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ 1_B \circ f = f^{-1} \circ f = 1_A.$$

Значи, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Својство 3. *Нека* f^{-1} *е инверзно пресликување за* $f : A \to B$. *Тогаш* f^{-1} *е биекција.*

Доказ. Бидејќи $f \circ f^{-1} = 1_B$ и 1_B е инјекција, следува дека и f^{-1} е инјекција. Од тоа што $f^{-1} \circ f = 1_A$ и 1_A е сурјекција, следува дека f^{-1} е сурјекција. Значи, f^{-1} е биекција. □

Својство 4. *Нека* $f : A \to B$ *е биекција. Тогаш* $(f^{-1})^{-1} = f$.

Доказ. Бидејќи $f : A \to B$ е биекција, следува дека постои инверзно пресликување $f^{-1} : B \to A$ (од Теорема 1), а од Св. 3, следува дека и f^{-1} е биекција. Од Теорема 1 следува дека f^{-1} има инверзно пресликување $(f^{-1})^{-1} : A \to B$. Значи, f и f^{-1} имаат исти домени и кодомени. Понатаму,

$$(f^{-1})^{-1} = (f^{-1})^{-1} \circ 1_A = (f^{-1})^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) = ((f^{-1})^{-1} \circ f^{-1}) \circ f = 1_B \circ f = f. \ \square$$

Задачи за вежбање

1. Најди го инверзното пресликување (ако постои) на пресликувањето $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинирано со:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-3}, & \text{ако } x \neq 3 \\ 1, & \text{ако } x = 3. \end{cases}$$

Решение. Ако $x \neq 3$, тогаш $y = \dfrac{x-1}{x-3}$. Оттука:

$$y = \frac{x-1}{x-3} \Leftrightarrow (x-3)y = x-1 \Leftrightarrow xy - 3y = x-1 \Leftrightarrow xy - x = 3y-1$$

$$\Leftrightarrow x(y-1) = 3y-1 \Leftrightarrow x = \frac{3y-1}{y-1},$$

при што $y \neq 1$ (не е можно $y = 1$, зашто во тој случај би имале $x-3 = x-1$, т. е. $1 = 3$). Според тоа,

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{3y-1}{y-1}, & \text{ако } y \neq 1 \\ 3, & \text{ако } y = 1. \end{cases}$$

Забелешка. Да забележиме дека $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$, т. е. дека не смееме да ја мешаме ознаката за инверзно пресликување со вообичаеното значење на негативен експонент (со чија помош се изразува реципрочна вредност).

2. Нека A е конечно множество, а $f : A \to A$ е биекција таква што $f^{-1} = f$ и f нема фиксни точки, т. е. за ниту еден $a \in A$ не важи $f(a) = a$. Докажи дека множеството A има парен број елементи.

Решение. Да забележиме дека $f^{-1} = f$ значи: $f(a) = b$ ако и само ако $f(b) = a$. Тоа значи дека можеме да ги ставиме во ист пар елементите кои се пресликуваат еден во друг. Бидејќи f нема фиксни точки, ниту еден елемент не се повторува во еден пар, т.е. не е во пар сам со себе. Значи A има парен број елементи.

3. Нека $(A, \leq_A)$ е линеарно подредено множество, $(B, \leq_B)$ е делумно подредено множество, а $f : A \to B$ е биекција, за која важи импликацијата:

$$x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_B f(y).$$

Докажи дека важи импликацијата: $x \leq_B y \Rightarrow f^{-1}(x) \leq_A f^{-1}(y)$.

Решение. Нека $x \leq_B y$. Ако $x = y$, тврдењето е тривијално исполнето, зашто f е биекција. Ако $x \neq y$, тогаш од тоа што $(A, \leq_A)$ е линеарно подредено множество, следува дека $f^{-1}(x) \leq_A f^{-1}(y)$ или $f^{-1}(y) \leq_A f^{-1}(x)$. Да претпоставиме дека $f^{-1}(y) \leq_A f^{-1}(x)$. Тогаш

$$f(f^{-1}(y)) \leq_B f(f^{-1}(x)), \text{ т. е. } (f \circ f^{-1})(y) \leq_B (f \circ f^{-1})(x),$$

а од тоа што $f \circ f^{-1} = 1_B$, следува дека $y \leq_B x$. Бидејќи по претпоставка важи и $x \leq_B y$, од антисиметричноста на $\leq_B$ следува дека $x = y$, што е контрадикција. Според тоа, мора $f^{-1}(x) \leq_A f^{-1}(y)$.

4.4. Потполни инверзни слики на пресликувања

Нека $f: A \to B$ е пресликување и $X \subseteq A$ и $Y \subseteq B$. Да ставиме:

$$f(X) = \{y \in B \mid (\exists x \in X) \ \ y = f(x)\},$$

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}.$$

Да забележиме дека $f(X) \subseteq B$, а $f^{-1}(Y) \subseteq A$. Притоа, $f(X)$ го нарекуваме *слика* на множеството X, а $f^{-1}(Y)$ го нарекуваме *инверзна слика* на множеството Y или *потполна инверзна слика* на множеството Y со пресликувањето f. Специјално, наместо $f^{-1}(\{y\})$ ќе пишуваме $f^{-1}(y)$. Значи,

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}.$$

***Пример* 1.** Нека $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & c & c \end{pmatrix}$ е пресликување од $A = \{1,2,3,4\}$ во $B = \{a,b,c\}$. Тогаш:

$f^{-1}(a) = \{1,2\}$, $f^{-1}(b) = \varnothing$, $f^{-1}(c) = \{3,4\}$,

$f^{-1}(\{a,b\}) = \{1,2\}$, $f^{-1}(\{a,c\}) = A$, $f^{-1}(\{b,c\}) = \{3,4\}$,

$f^{-1}(B) = A$ и $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Забелешка. Ознаката за инверзно пресликување на дадено пресликување f и инверзна слика на пресликување f е иста, т. е. f^{-1}, но овие два поима се различни. Главно, разликата во поимите што се јавуваат во одредена задача ја утврдуваме од контекстот. Всушност, потполна инверзна слика f^{-1} на дадено пресликување $f: A \to B$ е пресликување $f^{-1}: \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$.

Својство 1. *Нека* $f: A \to B$ *е пресликување и нека* $X \subseteq A$ и $Y \subseteq B$. *Тогаш*

$$X \subseteq f^{-1}(f(X)) \quad \text{и} \quad Y \supseteq f(f^{-1}(Y)).$$

Доказ. Нека $x \in X$. Тогаш $f(x) \in f(X)$, од што следува дека $x \in f^{-1}(f(X))$. Значи, $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

Нека $y \in f(f^{-1}(Y))$. Тогаш постои $x \in f^{-1}(Y)$ таков што $y = f(x)$. Бидејќи $f(x) \in Y$, следува дека $y \in Y$. Значи, $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$. □

Теорема 1. *Нека* $f : A \to B$ *е пресликување и нека* $X \subseteq A$ *и* $Y \subseteq B$ *се произволни подмножества. Тогаш:*

(i) f *е инјекција ако и само ако* $X = f^{-1}(f(X))$.

(ii) f *е сурјекција ако и само ако* $Y = f(f^{-1}(Y))$.

Доказ. (i) Нека f е инјекција и нека $X \subseteq A$ е произволно избрано подмножество. Директната инклузија е покажана во претходното својство, па ќе ја покажеме обратната инклузија. Нека $x \in f^{-1}(f(X))$. Тогаш $f(x) \in f(X)$. Оттука следува дека постои $x_1 \in X$ таков што $f(x) = f(x_1)$. Бидејќи f е инјекција, следува дека $x = x_1$. Значи, $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$.

Обратно, нека $X = f^{-1}(f(X))$ за произволно $X \subseteq A$. Тогаш за едноелементното подмножество $X = \{x\}$ се добива дека

$$\{x\} = f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(\{f(x)\}) = f^{-1}(f(x)),$$

за произволен $x \in A$. Потоа, за произволни $x, y \in A$ имаме дека:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) \Rightarrow \{x\} = \{y\} \Rightarrow x = y.$$

Значи, f е инјекција.

(ii) Нека f е сурјекција. Според Св.1 имаме дека $Y \supseteq f(f^{-1}(Y))$. Ќе покажеме дека важи и обратната инклузија, т. е. дека $Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$. Нека $y \in Y \subseteq B$. Тогаш постои $x \in A$ таков што $f(x) = y$. Оттука следува дека $x \in f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(Y)$. Значи,

$$y = f(x) \in f(f^{-1}(Y)), \text{ т. е. } Y \subseteq f(f^{-1}(Y)).$$

Обратно, нека $Y = f(f^{-1}(Y))$ за секое подмножество $Y \subseteq B$. Нека $y \in B$ е произволно избран елемент. Тогаш $\{y\} = f(f^{-1}(\{y\})) = f(f^{-1}(y))$. Оттука следува дека постои $x \in f^{-1}(y) \subseteq A$, таков што $f(x) = y$. Значи, f е сурјек–ција. □

Својство 2. *Нека* $f : A \to B$ *е пресликување и* $\{Y_i \mid i \in I\}$ *е непразна фамилија подмножества од B. Тогаш* $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} Y_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(Y_i)$.

Доказ. За произволно $x \in A$ имаме:

$$x \in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} Y_i) \;\Leftrightarrow\; f(x) \in \bigcap_{i\in I} Y_i \;\Leftrightarrow\; (\forall i \in I)\,(f(x) \in Y_i)$$

$$\Leftrightarrow\; (\forall i \in I)\,(x \in f^{-1}(Y_i)) \;\Leftrightarrow\; x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(Y_i). \;\square$$

Теорема 2. *Нека* $f : A \to B$ *е инјективно пресликување и* $\{X_i \mid i \in I\}$ *е непразна фамилија подмножества од A. Тогаш* $f(\bigcap_{i\in I} X_i) = \bigcap_{i\in I} f(X_i)$.

Доказ. Видовме (Теорема 1 во 4.2) дека секое пресликување $f : A \to B$ може да се претстави како композиција од две пресликувања од кои едното е инјек–ција, а другото сурјекција, т. е. $f = i \circ f_1$, каде што $f_1 : A \to f(A)$ и $f_1(x) = f(x)$, за секој $x \in A$ и $i : f(A) \to B$ е сместување. Бидејќи f е инјек–ција, следува дека и f_1 е инјекција, па значи и биекција. Тогаш постои $f_1^{-1} : f(A) \to A$. Според тоа, за секое подмножество $X \subseteq A$ имаме дека $f(X) = (f_1^{-1})^{-1}(X)$. Користејќи го претходното својство, добиваме:

$$f(\bigcap_{i\in I} X_i) = (f_1^{-1})^{-1}(\bigcap_{i\in I} X_i) = \bigcap_{i\in I} (f_1^{-1})^{-1}(X_i) = \bigcap_{i\in I} f(X_i) . \quad \square$$

Задачи за вежбање

1. Нека $f : A \to B$ и нека $X_1, X_2 \subseteq A$. Тогаш:

а) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$ б) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f(X_1) \subseteq f(X_2)$.

Решение. а) $y \in f(X_1 \cup X_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\exists x)((x \in X_1 \cup X_2) \wedge f(x) = y)$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)\big((x \in X_1 \vee x \in X_2) \wedge f(x) = y\big)$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)\big(x \in X_1 \wedge f(x) = y\big) \vee \big(x \in X_2 \wedge f(x) = y\big)$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)\big(x \in X_1 \wedge f(x) = y\big) \vee (\exists x)\big(x \in X_2 \wedge f(x) = y\big)$$
$$\Leftrightarrow y \in f(X_1) \vee y \in f(X_2)$$
$$\Leftrightarrow y \in f(X_1) \cup f(X_2) .$$

б) Нека $X_1 \subseteq X_2$. Тогаш $X_1 \cup X_2 = X_2$. Од а) следува дека

$$f(X_2) = f\left(X_1 \cup X_2\right) = f(X_1) \cup f(X_2) ,$$

а оттука $f(X_1) \subseteq f(X_2)$. $\square$

2. Нека $f : A \to B$ и нека $Y_1, Y_2 \subseteq B$. Тогаш $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

Решение. Нека $x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$. Тогаш $f(x) \in Y_1 \cup Y_2$, па $f(x) \in Y_1 \vee f(x) \in Y_2$. Оттука $x \in f^{-1}(Y_1) \vee x \in f^{-1}(Y_2)$, од што следува дека $x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

3. Нека $f : A \to B$ е пресликување и $X \subseteq A$. Ако g е рестрикцијата од f на X и ако $Y \subseteq B$, тогаш $g^{-1}(Y) = X \cap f^{-1}(Y)$.

Решение. Нека $Y \subseteq B$ и нека $x \in g^{-1}(Y)$. Бидејќи g е рестрикција од f на X, следува дека $g(x) = f(x)$, за секој $x \in X$. Значи,

$$x \in g^{-1}(Y) \Rightarrow g(x) \in Y \Rightarrow g(x) = f(x) \in Y \Rightarrow x \in f^{-1}(Y).$$

Значи, $x \in X$ и $x \in f^{-1}(Y)$, па $x \in X \cap f^{-1}(Y)$, од што $g^{-1}(Y) \subseteq X \cap f^{-1}(Y)$.

За обратната инклузија, да претпоставиме дека $x \in X \cap f^{-1}(Y)$. Тогаш $x \in X$ и $x \in f^{-1}(Y)$, од што следува дека $x \in X$ и $f(x) \in Y$. Од условот, $g(x) = f(x)$ за секој $x \in X$, се добива $g(x) \in Y$, од што $x \in g^{-1}(Y)$. Според тоа, $X \cap f^{-1}(Y) \subseteq g^{-1}(Y)$.

4. Нека $f : A \to B$ е пресликување, $Y_1, Y_2 \subseteq B$ и $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) \neq \varnothing$. Тогаш

$$f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2).$$

Решение. Нека x е произволно избран елемент од $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2)$. Тогаш

$$x \in f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) \Leftrightarrow f(x) \in Y_1 \setminus Y_2 \Leftrightarrow f(x) \in Y_1 \wedge f(x) \notin Y_2$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \wedge x \notin f^{-1}(Y_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2). \ \square$$

5. Нека $f : A \to B$ е инјективно пресликување и $X_1, X_2 \subseteq A$. Тогаш

$$f(X_1 \setminus X_2) = f(X_1) \setminus f(X_2).$$

Решение. Во доказот на Теорема 2 имаме дека $f_1 : A \to f(A)$, $f_1(x) = f(x)$ за секој $x \in A$, е биекција, а $f = i \circ f_1$. Значи, $f(X) = (f_1^{-1})^{-1}(X)$, за произволно подмножество $X \subseteq A$. Користејќи ја претходната задача, добиваме дека

$$f(X_1 \setminus X_2) = (f_1^{-1})^{-1}(X_1 \setminus X_2) = (f_1^{-1})^{-1}(X_1) \setminus (f_1^{-1})^{-1}(X_2) = f(X_1) \setminus f(X_2).$$

4.5. Претставување на еквивалентност преку пресликување

Во претходната глава видовме како може да се претстави една релација за еквивалентност на едно множество преку разбивањето на тоа множество. Овде ќе дадеме претставување на релација за еквивалентност со помош на пресликување.

Теорема 1. *Релација $\alpha \subseteq A^2$ е еквивалентност во A ако и само ако постои множество B и постои пресликување $f : A \to B$ такво што за секои $x, y \in A$ важи: $x \alpha y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.*

Доказ. Нека α е релација за еквивалентност во A. Тогаш постои разбивање $A/\alpha = \{x^\alpha \mid x \in A\}$, каде што $x^\alpha = \{y \in A \mid x\alpha y\}$ е класа на еквивалентност на елементот $x \in A$. Да ставиме $B = A/\alpha$ и да дефинираме пресликување $f: A \to A/\alpha$ со $f(x) = x^\alpha$. Тогаш, од Св. 1, Глава 3.4, следува дека

$$x\alpha y \Leftrightarrow x^\alpha = y^\alpha \text{, т. е. } x\alpha y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Обратно, нека постои множество B и пресликување $f: A \to B$, такво што $x\alpha y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, за секои $x, y \in A$. Тврдиме дека α е релација за еквивалентност во A.

(P) Очигледно, од $f(x) = f(x)$ за секој $x \in A$, следува дека $x\,\alpha\,x$.

(C) Нека $x\,\alpha\,y$. Тогаш $f(x) = f(y)$, т.е. $f(y) = f(x)$, па $y\alpha x$.

(T) Нека $x\,\alpha\,y$ и $y\,\alpha\,z$. Тогаш $f(x) = f(y)$ и $f(y) = f(z)$, од што следува дека $f(x) = f(z)$, т. е. $x\,\alpha\,z$. □

Оваа теорема ни овозможува при дадено пресликување $f: A \to B$ да дефинираме еден специјален вид релација, која ја означуваме со $\ker f$ (доаѓа од зборот *kernel* што значи *јадро*).

Дефиниција 1. Нека $f: A \to B$. Дефинираме релација $\ker f \subseteq A^2$ со

$$x \ker f\ y \Leftrightarrow f(x) = f(y),$$

која ја нарекуваме *јадро на пресликувањето* f.

Како што видовме од доказот на Теорема 1, $\ker f$ е релација за еквивалентност во A. Користејќи го терминот јадро на пресликување, Теоремата 1 може да се преформулира на следниов начин.

Теорема 1'. *Секоја релација за евиваленшносш е јадро на некое пресликување и обрашно, секое јадро на пресликување е релација за еквиваленшносш.* □

Дефиниција 2. Нека α е релација за еквивалентност во множество A. Пресликувањето $\varphi: A \to A/\alpha$ дефинирано со:

$$(\forall x \in A)\ \ \varphi(x) = x^\alpha,$$

се вика *природно пресликување* кое го означуваме со nat_α. (Значи, $\varphi = \mathrm{nat}_\alpha$.)

Својство 1. *Ако α е релација за еквиваленшносш, шогаш nat_α е сурјекција.*

Доказ. Нека $\mathrm{nat}_\alpha : A \to A/\alpha$ е природното пресликување и нека $x^\alpha \in A/\alpha$ е произволно избран елемент. Бидејќи $x \in x^\alpha$ за секој $x \in A$, следува дека постои $x \in A$, таков што $\mathrm{nat}_\alpha(x) = x^\alpha$. Според тоа, nat_α е сурјекција. □

Теорема 2. *Нека* $f : A \to B$ *е пресликување и* $\varphi = \mathrm{nat}_{\ker f}$. *Тогаш постои единствено инјективно пресликување* $\psi : A/\ker f \to B$ *такво што дијаграмот*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & B \\ & A/\ker f \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

е комутативен, т. е. $\psi \circ \varphi = f$.

Доказ. Пресликувањето $\psi : A/\ker f \to B$ го дефинираме на следниов начин:

$$\psi(x^{\ker f}) = f(x).$$

Пресликувањето ψ е добро дефинирано. Навистина,

$$x^{\ker f} = y^{\ker f} \Rightarrow x \ker f\ y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow \psi(x^{\ker f}) = \psi(y^{\ker f}).$$

Во горнава низа импликации важат и обратните импликации, па според тоа ψ е инјективно пресликување. Потоа, за произволно $x \in A$ имаме дека

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(x^{\ker f}) = f(x).$$

Значи, $\psi \circ \varphi = f$, т. е. дијаграмот е комутативен.

Останува да ја покажеме единственоста на пресликувањето ψ. Нека постои пресликување $\psi_1 : A/\ker f \to B$ такво што $\psi_1 \circ \varphi = f$. Тогаш:

$$\psi_1(x^{\ker f}) = \psi_1(\varphi(x)) = (\psi_1 \circ \varphi)(x) = f(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(x^{\ker f}),$$

за секој $x^{\ker f} \in A/\ker f$. Значи, $\psi_1 = \psi$. □

Од оваа теорема можеме да заклучиме дека секое пресликување $f : A \to B$ може да се разложи на производ од две пресликувања (овде ψ и φ), при што едното (ψ) е инјекција, а другото (φ) е сурјекција. (Овде доказот е поинаков од оној во Теорема 1 од 4.2.)

Општо, секое пресликување $f : A \to B$ може да се претстави во облик на производ $f = i \circ \psi \circ \varphi$, каде што $\varphi : A \to A/\ker f$ е природното пресликување, $\psi : A/\ker f \to f(A)$ и $\psi(x^{\ker f}) = f(x)$ е биекција, а $i : f(A) \to B$ е сместување. Ваквото претставување на пресликувањето f се нарекува *канонично разложување* на f. Во тој случај, дијаграмот

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ A/\ker f \arrow[r, "\psi"'] & f(A) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

е комутативен.

Задачи за вежбање

1. Да се најде јадрото на пресликувањето $f:\mathbb{Z}^*\to\mathbb{Z}^*$ ($\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$), дефинирано со: $f(x)=\begin{cases}3x+1, & \text{ако } x \text{ е непарен број}\\ \dfrac{x}{2}, & \text{ако } x \text{ е парен број}\end{cases}$.

Решение. Да се потсетиме: $\ker f=\{(x,y)\,|\,f(x)=f(y)\}$. За да го најдеме јадрото на ова пресликување ќе разгледаме два случаја. Прво, ако $x=y$ и второ, ако $x\neq y$.

Ако $x=y$, тогаш, јасно, $f(x)=f(y)$.

Да претпоставиме дека $x\neq y$. Имаме 4 случаи:

1) ако x и y се непарни, тогаш $f(x)=f(y)\Rightarrow 3x+1=3y+1 \Rightarrow x=y$.

2) ако x и y се парни, тогаш $f(x)=f(y)\Rightarrow \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}\Rightarrow x=y$.

3) ако x е непарен, а y е парен, тогаш $f(x)=f(y)\Rightarrow 3x+1=\dfrac{y}{2}\Rightarrow y=6x+2$.

4) ако x е парен, а y е непарен, тогаш $f(x)=f(y)\Rightarrow \dfrac{x}{2}=3y+1\Rightarrow x=6y+2$.

Значи, $\ker f=\{(x,y)\,|\,x=y \;\vee\; y=6x+2 \;\vee\; x=6y+2\}=$

$=\Delta_{\mathbb{Z}^*}\cup\{(x,6x+2)\,|\,x\in\mathbb{Z}^*, x \text{ е непарен}\}\cup\{(6y+2,y)\,|\,y\in\mathbb{Z}^*, y \text{ е непарен}\}$.

2. Нека $f:A\to B$ и $g:B\to C$ се пресликувања.

а) Покажи дека $\ker f\subseteq\ker(g\circ f)$.

б) Најди пример со кој ќе покажеш дека обратната инклузија не важи.

Решение. а) Нека $(x,y)\in\ker f$. Тогаш $f(x)=f(y)$, па $g(f(x))=g(f(y))$, т. е. $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(y)$, од што следува дека $(x,y)\in\ker(g\circ f)$. Според тоа, $\ker f\subseteq\ker(g\circ f)$.

б) Нека $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{m\}$ и $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&b&a\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}a&b\\m&m\end{pmatrix}$. Тогаш $g\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3\\m&m&m\end{pmatrix}$, па $\ker(g\circ f)=\Delta_A\cup\{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$, а $\ker f=\Delta_A\cup\{(1,3),(3,1)\}$, па значи $\ker(g\circ f)$ не е подмножество од $\ker f$.

3. Нека $f:A\to B$ е пресликување. Докажи дека f е инјекција ако и само ако $\ker f=\Delta_A$.

Решение. Нека f е инјекција и нека $(x,y) \in \ker f$. Тогаш $f(x) = f(y)$, па $x = y$, т.е. $(x,y) \in \Delta_A$. Значи, $\ker f \subseteq \Delta_A$. За обратната инклузија, нека $(x,y) \in \Delta_A$. Тогаш $x = y$, па $f(x) = f(y)$, од што следува дека $(x,y) \in \ker f$, т. е. $\Delta_A \subseteq \ker f$. Значи, $\ker f = \Delta_A$.

Обратно, нека $\ker f = \Delta_A$ и нека за секои $x, y \in A$, $f(x) = f(y)$. Оттука следува дека $(x,y) \in \ker f$ што значи дека $(x,y) \in \Delta_A$, па $x = y$. Според тоа, f е инјекција.

4. Нека A и B се непразни множества и нека α и β се релации за еквивалентност во A и B, соодветно. Нека $f: A \to B$ е пресликување и $\mathrm{nat}_\alpha : A \to A/\alpha$ и $\mathrm{nat}_\beta : B \to B/\beta$ се природните пресликувања. Докажи дека постои пресликување $g: A/\alpha \to B/\beta$ такво што дијаграмот

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{nat}_\alpha"'] & B \arrow[d, "\mathrm{nat}_\beta"] \\ A/\alpha \arrow[r, "g"] & B/\beta \end{tikzcd}$$

е комутативен (т. е. $g \circ \mathrm{nat}_\alpha = \mathrm{nat}_\beta \circ f$) ако и само ако $x \alpha y \Rightarrow f(x) \beta f(y)$, за секои $x, y \in A$.

Решение. Нека $g: A/\alpha \to B/\beta$ е пресликување за кое важи $g \circ \mathrm{nat}_\alpha = \mathrm{nat}_\beta \circ f$, т. е. за секој $x^\alpha \in A/\alpha$, $g(x^\alpha) = (f(x))^\beta$. Нека $x \alpha y$. Тогаш, $x^\alpha = y^\alpha$, па $g(x^\alpha) = g(y^\alpha)$, т. е. $(f(x))^\beta = (f(y))^\beta$, од што следува дека $f(x) \beta f(y)$.

Обратно, нека $x \alpha y \Rightarrow f(x) \beta f(y)$ за секои $x, y \in A$. Дефинираме пресликување $g: A/\alpha \to B/\beta$ со:

$$(\forall x^\alpha \in A/\alpha) \ \ g(x^\alpha) = (f(x))^\beta .$$

Пресликувањето g е добро дефинирано. Навистина,

$$x^\alpha = y^\alpha \Rightarrow x \alpha y \Rightarrow f(x) \beta f(y) \Rightarrow (f(x))^\beta = (f(y))^\beta \Rightarrow g(x^\alpha) = g(y^\alpha) .$$

Притоа, $(g \circ \mathrm{nat}_\alpha)(x) = g(\mathrm{nat}_\alpha(x)) = g(x^\alpha) = (f(x))^\beta = \mathrm{nat}_\beta(f(x)) = (\mathrm{nat}_\beta \circ f)(x)$.

5. Нека A е непразно множество и нека α и β се релации за еквивалентност во A такви што $\alpha \subseteq \beta$. Покажи дека постои единствено пресликување $f: A/\alpha \to A/\beta$ такво што $f \circ \mathrm{nat}_\alpha = \mathrm{nat}_\beta$.

Решение. Дефинираме пресликување $f: A/\alpha \to A/\beta$ со:

$$(\forall x^{\alpha} \in A/\alpha)\ \ f(x^{\alpha}) = x^{\beta}\ .$$

Пресликувањето f е добро дефинирано. Навистина, од условот $\alpha \subseteq \beta$ имаме:

$$x^{\alpha} = y^{\alpha} \Rightarrow x\alpha y \Rightarrow x\beta y \Rightarrow x^{\beta} = y^{\beta} \Rightarrow f(x^{\alpha}) = f(y^{\alpha})\ .$$

Притоа, за секој $x \in A$ важи: $(f \circ \mathrm{nat}_{\alpha})(x) = f(\mathrm{nat}_{\alpha}(x)) = f(x^{\alpha}) = x^{\beta} = \mathrm{nat}_{\beta}(x)$. Значи, $f \circ \mathrm{nat}_{\alpha} = \mathrm{nat}_{\beta}$.

Останува да покажеме дека f е единствено пресликување со тие особини. Да претпоставиме дека постои пресликување $g : A/\alpha \to B/\beta$ такво што $g \circ \mathrm{nat}_{\alpha} = \mathrm{nat}_{\beta}$. Тогаш, за секој секој $x^{\alpha} \in A/\alpha$ важи:

$$g(x^{\alpha}) = g(\mathrm{nat}_{\alpha}(x)) = (g \circ \mathrm{nat}_{\alpha})(x) = \mathrm{nat}_{\beta}(x) = x^{\beta} = f(x^{\alpha})\ .$$

Значи, $g = f$, т. е. f е единствено.

4.6. Еквивалентни множества

Природно е да се прашаме дали две множества имаат ист број елементи или не. Ако множеството е конечно, тогаш бројот на елементи во тоа множество можеме да го одредиме со броење на елементите. На пример, секое од множествата $\{а, б, в, г, д\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ има 5 елементи, па значи овие множества имаат ист број елементи. Некогаш дури и не е потребно да ги броиме елементите. На пример, ако знаеме дека на едно столче може да седи само еден човек, а во просторијата седат сите, тогаш знаеме дека во таа просторија има онолку луѓе колку што има столчиња. Овој едноставен начин на заклучување може да се пренесе и на бесконечните множества. Но, оттука произлегуваат неколку „зачудувачки“ резултати за кои ќе зборуваме подетално во наредната глава.

Прво ќе го воведеме поимот еквивалентни множества.

За две множества A и B велиме дека се *еквивалентни* и пишуваме $A \sim B$ ако и само ако постои биекција од A во B.

Теорема 1. *Нека* A, B, C *се произволни множества. Тогаш:*

(i) $A \sim A$,

(ii) $A \sim B \ \Rightarrow\ B \sim A$,

(iii) $A \sim B\ \wedge\ B \sim C \ \Rightarrow\ A \sim C$,

т. е. релацијата $\sim$ *е релација за еквивалентност.*

Доказ. (i) За секое множество A идентичното пресликување $1_A : A \to A$ е биекција, па $A \sim A$.

(ii) Нека $A \sim B$ и нека $f : A \to B$ е биекција. Тогаш постои инверзно пресликување $f^{-1} : B \to A$ коешто исто така е биекција. Значи, $B \sim A$.

(iii) Нека $A \sim B$ и $B \sim C$. Тогаш постојат биекции $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Композицијата $g \circ f : A \to C$ е исто така биекција. Значи, $A \sim C$. □

***Пример* 1.** Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ е пресликување дефинирано со:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x \in 2\mathbb{N} \\ -\dfrac{x-1}{2}, & x \in 2\mathbb{N}-1 \end{cases}$$

каде што со $2\mathbb{N}-1$ е означено множеството непарни природни броеви, т.е. $\{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$, а со $2\mathbb{N}$ – множеството парни броеви, т.е. $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ова пресликување е биекција, па според тоа $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

***Пример* 2.** а) Пресликувањето $f : (0,1] \to [0,1)$, дефинирано со: $f(x) = 1-x$ е биекција, па следува дека $(0,1] \sim [0,1)$.

б) $[0,1] \sim [0,1)$, бидејќи пресликувањето $f : [0,1] \to [0,1)$ дефинирано со: $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ за $x = \dfrac{1}{n}$ и $f(x) = x$ за $x \neq \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, е биекција.

Својство 1. $A \times B \sim B \times A$.

Доказ. Дефинираме пресликување $f : A \times B \to B \times A$ со $f(x,y) = (y,x)$. Пресликувањето f е добро дефинирано, зашто од $(x,y) = (t,u)$ имаме дека $x = t$ и $y = u$, па $(y,x) = (u,t)$, од што добиваме дека $f(x,y) = f(t,u)$.

Пресликувањето f е инјекција, зашто ако $f(x,y) = f(t,u)$ за кои било $(x,y),(t,u) \in A \times B$, тогаш $(y,x) = (u,t)$, т. е. $y = u$ и $x = t$, од што следува дека $(x,y) = (t,u)$. Пресликувањето f е сурјекција, зашто ако $(b,a) \in B \times A$ е произволен елемент и ако ставиме $x = b$ и $y = a$, тогаш добиваме дека $f(x,y) = (y,x) = (a,b)$, што требаше да се докаже. □

Својство 2. $(A \times B) \times C \sim A \times B \times C \sim A \times (B \times C)$.

Доказ. Дефинираме пресликување $f : (A \times B) \times C \to A \times B \times C$ со:

$$f\big(((x,y),z)\big) = (x,y,z) \text{, за секој } \big((x,y),z\big) \in (A \times B) \times C .$$

Пресликувањето f е добро дефинирано, зашто од $\big((x,y),z\big) = ((t,u),v)$ и од еднаквоста на подредени парови, имаме дека $(x,y) = (t,u)$ и $z = v$, т. е. $x = t$,

$y = u$ и $z = v$. Според тоа, $(x, y, z) = (t, u, v)$, т. е. $f\big(((x, y), z)\big) = f\big(((t, u), v)\big)$.

Пресликувањето f е инјекција. Нека $\big((x, y), z\big), ((t, u), v) \in (A \times B) \times C$ се произволно избрани елементи и нека $f\big(((x, y), z)\big) = f\big(((t, u), v)\big)$. Тогаш:

$$\begin{aligned} f\big(((x, y), z)\big) = f\big(((t, u), v)\big) &\Rightarrow (x, y, z) = (t, u, v) \\ &\Rightarrow x = t,\ y = u,\ z = v \\ &\Rightarrow (x, y) = (t, u) \ \wedge\ z = v \\ &\Rightarrow \big((x, y), z\big) = ((t, u), v). \end{aligned}$$

Дека пресликувањето f е сурјекција е очигледно. Имено, за кој било елемент $((a, b), c) \in (A \times B) \times C$, постои елемент $\big((x, y), z\big) \in (A \times B) \times C$, при што $x = a,\ y = b,\ z = c$, за кој важи $f\big(((x, y), z)\big) = (a, b, c)$, што требаше да се докаже.

Слично се покажува дека $A \times (B \times C) \sim A \times B \times C$, што на читателот му го оставаме да го покаже сам. □

Теорема 2. *Нека A е дадено множество. Множеството A и неговото партитивно множество $\mathcal{P}(A)$ не се еквивалентни.*

Доказ. Да го претпоставиме спротивното, т. е. дека $A \sim \mathcal{P}(A)$. Тогаш постои биекција $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Нека $B = \{x \mid x \in A \ \wedge\ x \notin f(x)\}$ е избрано така што $B \in \mathcal{P}(A)$. Од тоа што f е биекција, следува дека постои елемент $a \in A$ таков што $f(a) = B$. За елементот $a \in A$ имаме две можности: или $a \in B$ или $a \notin B$. Нека $a \in B = f(a)$. Тогаш $a \notin B$, зашто во B се само оние елементи $x \in B$ за кои важи $x \notin f(x)$. Нека $a \notin B = f(a)$. Тогаш $a \in B$. Значи, $a \in B$ ако и само ако $a \notin B$, што претставува контрадикција. □

За полесно да го разбереме горниот доказ, ќе ги разгледаме следниве примери.

***Пример* 3.** Нека $A = \{1, 2, 3\}$ и нека $f : A \to \mathcal{P}(A)$ е пресликување дефини–рано со: $f(1) = \{1, 2\}$, $f(2) = \{1, 3\}$, $f(3) = \{1\}$.

Тогаш, $1 \in f(1)$, $2 \notin f(2)$ и $3 \notin f(3)$. Во овој пример, множеството $B = \{x \mid x \in A \ \wedge\ x \notin f(x)\} = \{2, 3\}$. Очигледно е дека не постои $x \in A$ таков што $f(x) = B$, па значи f не е сурјекција. Според тоа, A и $\mathcal{P}(A)$ не се еквивалентни. (Да забележиме дека не постои пресликување од A во $\mathcal{P}(A)$ што би било сурјекција.)

***Пример* 4.** Според теоремата, $\mathbb{N}$ и $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ не се еквивалентни. Да забележиме дека постои пресликување $f:\mathbb{N}\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$ што е инјекција, но не и сурјекција. На пример, нека $f:n\mapsto\{n\}$. Во тој случај $f\left(\mathbb{N}\right)\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{N})$, па $\mathbb{N}$ е секогаш еквивалентно со некое подмножество од $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, но никогаш не е еквивалентно со целото $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Интуитивно, ова значи дека $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ е „поголемо“ бесконечно множество од $\mathbb{N}$.

Можеме да продолжиме со примената на оваа теорема наместо врз множеството $\mathbb{N}$, на множеството $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Така добиваме:

$$\mathbb{N}\nsim\mathcal{P}(\mathbb{N}),\quad \mathcal{P}(\mathbb{N})\nsim\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})),\quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\nsim\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))),\dots$$

и на тој начин да создадеме низа од „поголеми“ и „поголеми“ нееквивалентни бесконечни множества.

Видовме дека $\mathbb{N}$ и $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ не се еквивалентни. Ќе покажеме дека $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ е еквивалентно со едно друго множество – множеството $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, т. е. со множеството од сите пресликувања $f:\mathbb{N}\to\{0,1\}$. Овие пресликувања се низи од нули и единици. На пример, $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots\end{pmatrix}$. Со други зборови, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ е множеството од сите низи составени само од нули или единици (натаму ќе ги нарекуваме „*бинарни низи*“).

Теорема 3. $\mathcal{P}(\mathbb{N})\sim\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Доказ. Дефинираме пресликување $\varphi:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$ со:

$$(\forall f\in\{0,1\}^{\mathbb{N}})\ \ \varphi(f)=\{n\in\mathbb{N}\mid f(n)=1\}.$$

Јасно, $\varphi(f)\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ако f е „бинарна низа“, тогаш $\varphi(f)$ е подмножеството од $\mathbb{N}$ што се состои од оние n за кои n-тиот член од низата е 1.

На пример, да претпоставиме дека f има вредности

$$\begin{array}{cccccc} f(1), & f(2), & f(3), & f(4), & f(5), & f(6),\dots\\ \| & \| & \| & \| & \| & \|\\ 0, & 1, & 1, & 0, & 0, & 1,\dots\end{array}$$

Тогаш, $\varphi(f)=\{2,3,6,\dots\}$.

Пресликувањето φ е инјекција. Имено, нека $f,g\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ и нека $f\neq g$. Тогаш постои $n\in\mathbb{N}$ таков што $f(n)\neq g(n)$. Да претпоставиме дека $f(n)=1$ и $g(n)=0$. Тогаш, $n\in\varphi(f)$, но $n\notin\varphi(g)$, па $\varphi(f)\neq\varphi(g)$.

Слично покажуваме дека ако $f(n)=0$ и $g(n)=1$, тогаш $\varphi(f)\neq\varphi(g)$.

Пресликувањето φ е сурјекција. Имено, нека $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, т.е. $A \subseteq \mathbb{N}$. Дефинираме „бинарна низа“ f со:

$$f(n) = \begin{cases} 1, \text{ ако } n \in A \\ 0, \text{ ако } n \notin A \end{cases}.$$

Тогаш $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, па од дефиницијата на φ, следува дека $\varphi(f) = A$. □

Задачи за вежбање

1. Нека $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ и $a < b$, $c < d$. Докажи дека:

(а) $(0,1) \sim (a,b)$; (б) $(a,b) \sim (c,d)$;

(в) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R}$; (г) $\mathbb{R} \sim (0,\infty)$.

Решение. (а) Дефинираме пресликување $f:(0,1) \to (a,b)$ со:

$$f(x) = a + (b-a)\,x,$$

за секој $x \in (0,1)$. Ова пресликување е биекција.

За да покажеме прво дека е инјекција, да претпоставиме дека $x_1, x_2 \in (0,1)$ се произволно избрани елементи и $f(x_1) = f(x_2)$. Тогаш

$$a + (b-a)\,x_1 = a + (b-a)\,x_2 \;\Rightarrow\; (b-a)\,x_1 = (b-a)\,x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

($a \neq b$, па можеме да го скратиме $b-a$ од двете страни на претпоследното равенство). Значи, f е инјекција.

За да покажеме дека f е сурјекција, да претпоставиме дека $y \in (a,b)$ е произволно избран елемент. Треба да најдеме елемент $x \in (0,1)$ така што да важи $f(x) = y$. Да ставиме $x = \frac{y-a}{b-a}$. (Изборот на x произлегува од решението на равенката $a + (b-a)\,x = y$ по променливата x). Тогаш

$$f\left(\frac{y-a}{b-a}\right) = a + (b-a)\frac{y-a}{b-a} = a + y - a = y.$$

Значи, f е сурјекција.

(б) Да претпоставиме дека $c,d \in \mathbb{R}$ и $c < d$. Од (а) имаме дека $(0,1) \sim (c,d)$, па од симетричноста и транзитивноста на $\sim$, следува дека $(a,b) \sim (c,d)$.

(в) Дефинираме пресликување $f:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ со $f(x) = \operatorname{tg} x$. Пресликувањето f е биекција. Од својствата на функцијата $y = \operatorname{tg} x$, следува дека ако

$x_1 \neq x_2$, тогаш $\text{tg}\, x_1 \neq \text{tg}\, x_2$, т.е. $f(x_1) \neq f(x_2)$, па f е инјекција. За произволно избран $y \in \mathbb{R}$, ставаме $x = \text{arctg}\, y$, па $f(x) = f(\text{arctg}\, y) = \text{tg}\,(\text{arctg}\, y) = y$, од што следува дека f е сурјекција.

(г) Дефинираме пресликување $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ со $f(x) = e^x$. Пресликувањето f е биекција. Нека $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ се произволно избрани елементи и нека $f(x_1) = f(x_2)$. Тогаш:

$$e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = 1 \Rightarrow e^{x_1 - x_2} = e^0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

па f е инјекција. За произволно избран $y \in (0, \infty)$, ставаме $x = \ln y$, па

$$f(x) = f(\ln y) = e^{\ln y} = y.$$

Значи, f е сурјекција.

2. Нека $A \sim C$, $B \sim D$ и $A \cap B = C \cap D = \varnothing$. Докажи дека $A \cup B \sim C \cup D$.

Решение. Нека $A \sim C$, $B \sim D$ и $A \cap B = C \cap D = \varnothing$.

Тогаш, постојат биективни пресликувања $f : A \to C$ и $g : B \to D$.

Дефинираме пресликување $h : A \cup B \to C \cup D$ со:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ако } x \in A \\ g(x), & \text{ако } x \in B. \end{cases}$$

Пресликувањето h е добро дефинирано. Имено, нека $x, y \in A \cup B$ и $x = y$. Тогаш можни се следниве случаи: 1) $x, y \in A$, 2) $x, y \in B$. (Да забележиме дека случаите $x \in A, y \in B$ и $y \in A, x \in B$ не се можни, заради условот $A \cap B = \varnothing$). И двата случаја се очигледни, но сепак ќе ги запишеме:

1) $x = y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow h(x) = h(y)$

2) $x = y \Rightarrow g(x) = g(y) \Rightarrow h(x) = h(y)$

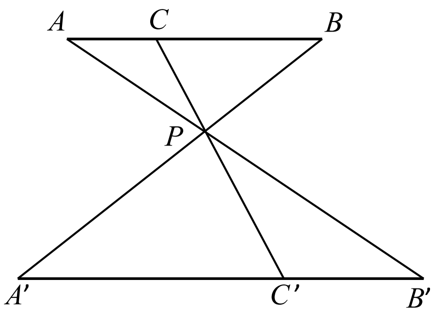
Пресликувањето h е инјекција. Имено, нека $x, y \in A \cup B$ се произволно избрани елементи и нека $h(x) = h(y)$. Ако $h(x) \in C$, тогаш $x, y \in A$, па $h(x) = h(y) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (од тоа што f е инјекција). Ако $h(x) \in D$, тогаш $x, y \in B$, па $h(x) = h(y) \Rightarrow g(x) = g(y) \Rightarrow x = y$ (од тоа што g е инјекција). Според тоа, h е инјекција.

Пресликувањето h е сурјекција. Нека $y \in C \cup D$ е произволно избран. Треба да најдеме елемент $x \in A \cup B$ така што $h(x) = y$. Ако $y \in C$, тогаш од тоа што f е сурјекција следува дека постои $x \in A$, а со тоа и $x \in A \cup B$, така што $h(x) = f(x) = y$. Ако $y \in D$, тогаш од тоа што g е сурјекција следува дека постои $x \in B$, а со тоа и $x \in A \cup B$, така што $h(x) = g(x) = y$.

Според тоа, h е биекција. □

3. Докажи дека две отсечки се еквивалентни, т. е. дека имаат ист број точки.

Решение. Нека AB и $A'B'$ се две отсечки како на цртежот. Ќе покажеме дека секогаш може да се „воспостави“ биекција меѓу точките од двете отсечки. Да го означиме пресекот на отсечките AB' и $A'B$ со P.



Избираме точка C на отсечката AB и со C' го означуваме пресекот на правата CP со отсечката $A'B'$. Пресликувањето

$$C \to C'$$

е бараната биекција, зашто секоја точка од AB има единствена слика на $A'B'$ и секоја точка од $A'B'$ е слика на единствена точка од отсечката AB.

4. Докажи дека ако $A \sim C$ и $B \sim D$, тогаш $A \times B \sim C \times D$.

Решение. Ако $A \sim C$ и $B \sim D$, тогаш постојат биекции $f : A \to C$ и $g : B \to D$. Дефинираме пресликување $h : A \times B \to C \times D$ со:

$$\big(\forall (x, y) \in A \times B\big) \quad h(x, y) = \big(f(x), g(y)\big).$$

Пресликувањето h е добро дефинирано, зашто од $(x, y) = (x_1, y_1)$, имаме дека $x = x_1$ и $y = y_1$, а оттука $f(x) = f(x_1)$ и $g(y) = g(y_1)$, па значи

$$h(x_1, y_1) = (f(x_1), g(y_1)) = (f(x), g(y)) = h(x, y).$$

Ќе покажеме дека h е инјекција. Нека $(x, y), (t, u) \in A \times B$ се произволно избрани елементи и нека $h(x, y) = h(t, u)$. Тогаш $(f(x), g(y)) = (f(t), g(u))$, па од еднаквоста на подредени парови $f(x) = f(t)$ и $g(y) = g(u)$. Од тоа што f и g се инјекции, следува дека $x = t,\ y = u$, а оттука $(x, y) = (t, u)$, што требаше да се докаже.

Останува да покажеме дека h е сурјекција. Нека $(c, d) \in C \times D$ е произволно избран елемент. Тврдиме дека постои елемент $(a, b) \in A \times B$ таков што $h(a, b) = (c, d)$. Бидејќи $c \in C$ и $f : A \to C$ е сурјекција, следува дека постои $a \in A$ таков што $f(a) = c$. Слично, $d \in D$ и $g : B \to D$ е сурјекција, следува дека постои $b \in B$ таков што $g(b) = d$. Оттука, $h(a,b) = (f(a), g(b)) = (c,d)$, што значи дека h е сурјекција.

Според тоа, h е биекција.

На пример, $(0,1) \sim \mathbb{R}$ и $(0,1) \sim \mathbb{R}$, па според тоа и $(0,1)\times(0,1) \sim \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Геометриски гледано ова значи дека еден „отворен“ квадрат од рамнината е еквивалентен со целата рамнина. □

5. Нека A е множество со n елементи. Да се покаже дека:

а) бројот на различни релации во A е 2^{n^2} .

б) бројот на различни рефлексивни (антирефлексивни) релации во A е 2^{n^2-n} .

в) бројот на различни симетрични релации во A е $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Решение. Нека $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Да го разгледаме множеството

$$A \times A = \{(x,y) \mid x, y \in A\} .$$

Бидејќи x може да прима n вредности од множеството A, а исто толку и y, следува дека има n^2 можни подредени парови во $A\times A$. Нека α е релација во A. За секој од тие подредени парови (x,y) имаме дека $(x,y)\in\alpha$ или $(x,y)\notin\alpha$. Така, за секој пар (x,y) имаме два избора. Според тоа бројот на различни релации во A изнесува 2^{n^2} .

б) Слично како во а) го разгледуваме множеството $A\times A$ во кое има n^2 можни подредени парови. Од тоа што α е рефлексивна релација, следува дека $(x,x)\in\alpha$ за секој $x\in A$. Имаме точно n подредени парови $(a_i,a_i)\in\alpha$, за $i\in\{1,2,...,n\}$. Од n^2-n подредени парови што остануваат имаме дека $(x,y)\in\alpha$ или $(x,y)\notin\alpha$. Така, за секој пар (x,y) имаме два избора. Според тоа, бројот на различни рефлексивни релации во A изнесува 2^{n^2-n} . Слично се покажува дека бројот на антирефлексивни релации во A изнесува 2^{n^2-n} .

в) Да забележиме дека има онолку симетрични релации колку што има елементи во множеството $\Delta_A \cup \{(x,y)\in A^2 \mid x\neq y\}$. Во првото множество има n елементи, додека во второто има $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ елементи. Значи, вкупно има $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ елементи (овде и празната релација ја сметаме за симетрична релација). За секој од подредените парови (x,y) имаме дека

$(x,y)\in\alpha$ или $(x,y)\notin\alpha$. Така, за секој пар (x,y) имаме два избора. Според тоа бројот на различни симетрични релации во A изнесува $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

6. Докажи дека ако $A\cap B=\varnothing$, тогаш $C^{A\cup B}\sim C^A\times C^B$.

Решение. Дефинираме пресликување $h:C^A\times C^B\to C^{A\cup B}$ со:

$$h(f,g)=\varphi,$$

каде што $\varphi:A\cup B\to C$ е пресликување дефинирано со:

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & \text{ако } x\in A \\ g(x), & \text{ако } x\in B. \end{cases}$$

Од условот $A\cap B=\varnothing$, следува дека пресликувањето φ е добро дефинирано.

Пресликувањето h е инјекција. Нека $(f_1,g_1),(f_2,g_2)\in C^A\times C^B$ се произволно избрани елементи и нека $h(f_1,g_1)=h(f_2,g_2)$. Тогаш $\varphi_1=\varphi_2$, каде што

$$\varphi_1(x)=\begin{cases} f_1(x), & \text{ако } x\in A \\ g_1(x), & \text{ако } x\in B \end{cases} \quad \text{и} \quad \varphi_2(x)=\begin{cases} f_2(x), & \text{ако } x\in A \\ g_2(x), & \text{ако } x\in B \end{cases}.$$

За секој $x\in A$, $f_1(x)=f_2(x)$ и за секој $x\in B$, $g_1(x)=g_2(x)$ (произлегува од условот $A\cap B=\varnothing$), па значи $(f_1,g_1)=(f_2,g_2)$, што требаше да се докаже.

Дека пресликувањето h е сурјекција, следува од неговата дефиниција и дефиницијата на φ.

Значи, h е биекција, па $C^{A\cup B}\sim C^A\times C^B$.

7. Докажи дека ако $A\sim B$, тогаш $C^A\sim C^B$.

Решение. Нека $A\sim B$. Тогаш постои биекција $f:A\to B$. Дефинираме пресликување $\varphi:C^B\to C^A$ со $\varphi(g)=g\circ f$, за секој $g\in C^B$, т. е. $g:B\to C$. Пресликувањето φ е инјекција, зашто ако $\varphi(g_1)=\varphi(g_2)$, за секои $g_1,g_2\in C^B$, тогаш $g_1\circ f=g_2\circ f$. Бидејќи f е биекција, следува дека $g_1=g_2$. Пресликувањето φ е сурјекција. Нека $h\in C^A$ е произволно избран. Да ставиме $g=h\circ f^{-1}$. Тогаш $\varphi(h\circ f^{-1})=(h\circ f^{-1})\circ f=h\circ(f^{-1}\circ f)=h\circ 1_A=h$, што требаше да се докаже. Според тоа, постои биекција од C^B во C^A, па $C^A\sim C^B$.

5 КАРДИНАЛНИ И ОРДИНАЛНИ БРОЕВИ

Со нашите сетила не можеме да ја видиме бесконечноста; сетилата не можат да го достигнат заклучокот што го бараме, бидејќи бесконечноста не е објект за сетилата.

Џордано Бруно

5.1. Конечни и бесконечни множества

Идејата две множества да се споредуваат „по големина“ ако и само ако тие се еквивалентни, т. е. да постои биекција од едното во другото множество, потекнува од Кантор (Georg Cantor, 1845 – 1918). Ова е во согласност со нашето искуство со конечните множества. Просто, не мора да го знаеме бројот на елементи во едно конечно множество, туку само да го споредиме со некое друго. Ако во една сала, на пример во театар, секој седи во своето седиште и сите седишта се пополнети, тогаш знаеме дека има онолку луѓе во салата колку што има седишта во неа. Како што веќе спомнавме во претходната глава, овој начин на заклучување може да се пренесе и на бесконечните множества и притоа да произлезат некои зачудувачки резултати, како на пример:

1) Бесконечните множества не мора да имаат ист број елементи; имено, некои множества се „побесконечни“ од другите.

2) Има онолку природни броеви колку што има цели броеви, а колку што има цели броеви има и рационални броеви.

3) Има „повеќе“ точки на реалната права отколку што има природни броеви; има „повеќе“ криви во рамнината $\mathbb{R}^2$ отколку што има точки во $\mathbb{R}^2$.

Во оваа глава ќе ги разгледуваме и ќе ги докажеме претходно искажаните тврдења.

Прво ќе дефинираме кога две множества, конечни или бесконечни, имаат ист број елементи, или, со други зборови, кога две множества имаат иста кардиналност. Потоа ќе ги дефинираме поимите конечно множество и бесконечно множество и прецизно ќе докажеме неколку својства во врска со кардиналните броеви на конечните и бесконечните множества што интуитивно ги знаеме.

Дефиниција 1. За множествата A и B велиме дека имаат ист *кардинален број* (или иста *моќ*) и пишуваме $|A| = |B|$ ако A и B се еквивалентни множества.

Со други зборови, на секое множество A му придружуваме објект $|A|$ кој го нарекуваме кардинален број на множеството A така што да важи

$$|A| = |B| \quad \Leftrightarrow \quad A \sim B.$$

Значи, *кардинален број* на едно множество A е класата од сите множества што се еквивалентни со него. Пишуваме: $|A| = A/\sim$.

Специјално, на празното множество $\varnothing$ му доделуваме кардинален број 0, т. е. $|\varnothing| = 0$. На множеството $\{1,2,...,k\}$ (натаму ќе го означуваме со $\mathbb{N}_k$) му доделуваме кардинален број k, т. е. $|\mathbb{N}_k| = k$.

Дефиниција 2. За едно множество A велиме дека е *конечно* ако е празно или ако $A \sim \mathbb{N}_k$, каде што $k \in \mathbb{N}$ (види и во Гл. 4.6.).

Својство 1. *Секое множество што е еквивалентно со конечно непразно множество A е конечно множество со иста кардиналност како A.*

Доказ. Да претпоставиме дека A е конечно непразно множество, B е множество и $A \sim B$. Бидејќи A е конечно, постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $A \sim \mathbb{N}_k$. Од симетричноста и транзитивноста на $\sim$ следува дека $B \sim \mathbb{N}_k$. Според тоа, B е конечно и $|B| = |A|$. □

Ќе ги искористиме следните две леми за да покажеме дека секое подмножество од конечно множество е конечно.

Лема 1. *Ако A е конечно множество и $x \notin A$, тогаш $A \cup \{x\}$ е конечно множество и $|A \cup \{x\}| = |A| + 1$.*

Доказ. Нека A е конечно множество и $|A| = k$, каде што $k = 0$ или $k \in \mathbb{N}$. Да претпоставиме дека $x \notin A$.

Ако $A = \varnothing$, тогаш $|A| = 0$ и $A \cup \{x\} = \{x\}$, а $\{x\} \sim \mathbb{N}_1$. Значи, $A \cup \{x\}$ е конечно множество со кардиналност 1, па $|A \cup \{x\}| = |A| + 1$.

Ако $A \neq \varnothing$, тогаш $A \sim \mathbb{N}_k$ за некое $k \in \mathbb{N}$. Тоа значи дека постои биекција $f : A \to \mathbb{N}_k$. Дефинираме пресликување $g : A \cup \{x\} \to \mathbb{N}_{k+1}$ со:

$$g(t) = \begin{cases} f(t), \text{ ако } t \in A \\ k+1, \text{ ако } t = x. \end{cases}$$

Ќе покажеме дека ова пресликување е биекција.

1) Нека $x_1, x_2 \in A \cup \{x\}$ и нека $x_1 \neq x_2$. Ако $x_1, x_2 \in A$, тогаш од дефиницијата на g и од тоа што f е биекција, $g(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = g(x_2)$, па g е инјекција. Ако $x_1 = x$, тогаш од $x_1 \neq x_2$ следува дека $x_2 \neq x$, па значи $x_2 \in A$. Оттука, $g(x_1) = k+1$, а од тоа што $f(x_2) \in \mathbb{N}_k$ и $g(x_2) = f(x_2)$, следува дека $g(x_1) \neq g(x_2)$. Според тоа, g е инјекција.

2) Нека $m \in \mathbb{N}_{k+1}$ е произволно избран елемент. Тогаш можни се следниве случаи: $m = k+1$ или $m \leq k$. Ако $m = k+1$, тогаш постои $t \in A \cup \{x\}$ таков што $t = x$ и $g(t) = g(x) = k+1 = m$. Ако $m \leq k$, тогаш постои $t \in A \cup \{x\}$ таков што $t \neq x$, па $g(t) = m$. Според тоа, g е сурјекција.

Од тоа што g е биекција, следува дека $A \cup \{x\} \sim \mathbb{N}_{k+1}$, па одовде и од $|A| = k$ имаме дека $|A \cup \{x\}| = k+1 = |A|+1$, што требаше да се докаже. □

Лема 2. *Ако* $A \subseteq \mathbb{N}_m$*, за секој* $m \in \mathbb{N}$*, тогаш A е конечно множество и* $|A| \leq m$.

Доказ. Тврдењето ќе го покажеме со индукција по *m*. Прво ќе покажеме дека тврдењето е точно за $m = 1$. Нека $A \subseteq \mathbb{N}_1$. Тогаш $A = \varnothing$ или $A = \{x\}$. И во двата случаја множеството *A* е конечно и $|A| \leq 1$.

Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $m = k$, т. е. ако *B* е множество такво што $B \subseteq \mathbb{N}_k$, тогаш *B* е конечно и $|B| \leq k$. За да го покажеме тврдењето за $m = k+1$, да претпоставиме дека $A \subseteq \mathbb{N}_{k+1}$. Тогаш $A \setminus \{k+1\} \subseteq \mathbb{N}_k$. Од индуктивната претпоставка имаме дека $A \setminus \{k+1\}$ е конечно множество и $|A \setminus \{k+1\}| \leq k$. Ќе разгледаме два случаја: $k+1 \in A$ или $k+1 \notin A$.

Ако $k+1 \in A$, тогаш $A = (A \setminus \{k+1\}) \cup \{k+1\}$. Според Лема 1, *A* е конечно множество и $|A| = |A \setminus \{k+1\}| + 1 \leq k+1$.

Ако $k+1 \notin A$, тогаш $A = A \setminus \{k+1\}$. Значи, *A* е конечно и $|A| \leq k < k+1$. □

Теорема 1. *Ако S е конечно множество и* $A \subseteq S$*, тогаш A е конечно множество и* $|A| \leq |S|$.

Доказ. Нека *S* е конечно множество и нека $A \subseteq S$. Ако $A = \varnothing$, тогаш *A* е конечно множество и $|A| \leq |S|$. Да претпоставиме дека $A \neq \varnothing$. Бидејќи *S* е конечно, следува дека постои биекција $f : S \to \mathbb{N}_k$ за некој $k \in \mathbb{N}$. Во тој случај $|S| = k$. Ќе покажеме дека *A* е еквивалентно со конечно множество. За таа цел, дефинираме пресликување $g : A \to f(A)$ со $g(x) = f(x)$, за секој $x \in A$. Бидејќи f

е инјекција, следува дека и g е инјекција. Нека $y \in f(A)$ е произволно избран елемент. Тогаш постои $a \in A$ таков што $f(a) = y$. Од дефиницијата на g имаме дека $g(a) = y$, што значи дека g е сурјекција. Според тоа g е биекција, па $A \sim f(A)$. Бидејќи $f(A) \subseteq \mathbb{N}_k$, од Лема 2 следува дека $f(A)$ е конечно множес–тво и $|f(A)| \leq k$. Дополнително, од Св.1 следува дека A е конечно множество и $|A| = |f(A)|$. Оттука следува дека A е конечно множество и $|A| \leq |S|$. □

Од Лема 1 имаме дека со придружување еден елемент на конечно мно–жество, неговата кардиналност се зголемува за 1. Исто така, точно е дека со отстранување на еден елемент од конечно непразно множество, неговата кардиналност се намалува за 1, т. е. важи:

Последица 1. *Ако A е конечно множество и $x \in A$, тогаш $A \setminus \{x\}$ е конечно и $|A \setminus \{x\}| \leq |A| - 1$.* □

Следната последица ќе ја користиме понатаму за да направиме разлика меѓу конечните и бесконечните множества.

Последица 2. *Конечно множество не е еквивалентно со кое било свое вистинско подмножество.*

Доказ. Нека B е конечно множество и нека A е вистинско подмножество од B. Тогаш постои елемент $x \in B \setminus A$. Тоа значи дека $A \subseteq B \setminus \{x\}$. Од Теоремата 1 следува дека $|A| \leq |B \setminus \{x\}|$. Исто така, од Посл. 1 имаме дека $|B \setminus \{x\}| \leq |B| - 1$. Значи, $|A| \leq |B| - 1 < |B|$. Од Св. 1 следува дека B не е еквивалентно со A. Оттука следува дека едно конечно множество не е еквивалентно со ниту едно свое вистинско подмножество. □

Својство 2. *Нека A и B се конечни множества.*

а) Ако $A \cap B = \varnothing$, тогаш $|A \cup B| = |A| + |B|$.

б) Ако A и B се произволни множества, тогаш:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Доказ. Нека A и B се конечни множества такви што $|A| = m$ и $|B| = n$.

а) Нека $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ и нека $A \cap B = \varnothing$. Тоа значи дека сите елементи од множествата A и B се меѓусебно различни, па

$$A \cup B = \{a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n\}.$$

Дефинираме пресликување $\varphi : \mathbb{N}_{m+n} \to A \cup B$ со:

$$\varphi(i) = a_i \text{, за секој } 1 \le i \le m \qquad \text{и}$$
$$\varphi(m + j) = b_j \text{, за секој } 1 \le j \le n \text{ .}$$

Вака дефинираното пресликување е биекција, па значи $\mathbb{N}_{m+n} \sim A \cup B$, т.е. $|A \cup B| = m + n = |A| + |B|$.

б) Ќе тргнеме од равенството $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Да забележиме дека $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. Од а) следува дека $|A \cup (B \setminus A)| = |A| + |B \setminus A|$. Од друга страна, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, при што $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \varnothing$. Од а) следува дека $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$. Оттука, $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$, па заменувајќи во равенството $|A \cup (B \setminus A)| = |A| + |B \setminus A|$, добиваме:

$$|A \cup B| = |A \cup (B \setminus A)| = |A| + |B \setminus A| = |A| + |B| - |A \cap B| \text{ .} \square$$

***Пример* 1.** Секој граѓанин на Женева зборува француски или германски. Од нив 80% зборуваат француски, а 70% зборуваат англиски. Колку проценти од граѓаните ги зборуваат двата јазика?

Решение. Очигледно, треба да го најдеме кардиналниот број на $A \cap B$, каде што A е множеството женевјани што го зборуваат францускиот јазик, а B е множеството женевјани што го зборуваат германскиот јазик. Од условот на задачата имаме дека $|A| = \frac{8}{10} \cdot |A \cup B|$, а $|B| = \frac{7}{10} \cdot |A \cup B|$, па од Св. 2 б) имаме дека

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \tfrac{8}{10} \cdot |A \cup B| + \tfrac{7}{10} \cdot |A \cup B| - |A \cap B| \text{, т. е.}$$
$$|A \cap B| = \tfrac{8}{10} \cdot |A \cup B| + \tfrac{7}{10} \cdot |A \cup B| - |A \cup B| = (\tfrac{8}{10} + \tfrac{7}{10} - 1) \cdot |A \cup B| = \tfrac{5}{10} \cdot |A \cup B| \text{,}$$

што значи дека 50% од граѓаните на Женева ги зборуваат и двата јазика.

За три конечни множества A, B и C равенството б) од Св. 2 има малку поинаков облик:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \left(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|\right) + |A \cap B \cap C| \text{.}$$

***Пример* 2.** Одреди колку има природни броеви помали од 1000 коишто се деливи барем со еден од броевите 3, 5 или 7.

Решение. Очигледно, треба да го најдеме кардиналниот број на $A \cup B \cup C$, каде што:

A е множеството природни броеви < 1000 деливи со 3,
B е множеството природни броеви < 1000 деливи со 5,
C е множеството природни броеви < 1000 деливи со 7,

$A \cap B$ е множеството природни броеви < 1000 деливи со 3 и 5,

$A \cap C$ е множеството природни броеви < 1000 деливи со 3 и 7,

$B \cap C$ е множеството природни броеви < 1000 деливи со 5 и 7

$A \cap B \cap C$ е множеството природни броеви < 1000 деливи со 3, 5 и 7.

Бидејќи:

$|A| = \left[\frac{999}{3}\right] = 333$, $|B| = \left[\frac{999}{5}\right] = 199$, $|C| = \left[\frac{999}{7}\right] = 142$,

$|A \cap B| = \left[\frac{999}{3 \cdot 5}\right] = 66$, $|A \cap C| = \left[\frac{999}{3 \cdot 7}\right] = 47$, $|B \cap C| = \left[\frac{999}{5 \cdot 7}\right] = 28$,

$|A \cap B \cap C| = \left[\frac{999}{3 \cdot 5 \cdot 7}\right] = 9$, каде што со $[\ \ ]$ е означена операцијата „цел дел“.

Тогаш $|A \cup B \cup C| = 333 + 199 + 142 - (66 + 47 + 28) + 9 = 542$.

Значи, има 542 природни броеви помали од 1000 коишто се деливи барем со еден од броевите 3, 5 или 7.

Можеме да го обопштиме овој резултат во следната теорема.

Теорема 2 (Принцип на вклучување и исклучување) *За фамилијата множества* $\{A_i \mid i \in \{1, 2, ..., n\}\}$ *важи равенството:*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|. \tag{1}$$

Доказ. Доказот ќе го изведеме со помош на математичка индукција.

Имајќи го предвид Св. 2 б), следува дека тврдењето е точно за $n = 2$.

Да претпоставиме дека равенството (1) е точно за секој i од 2 до $n-1$, т. е.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n-1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ - \ldots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}|.$$

Од равенството $\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)$ и од индуктивната претпоставка имаме дека:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right| = \sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| - \sum_{1 \le i < j \le n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| + \ldots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|,$$

па значи дека

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\cup A_n\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\cap A_n\right| =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n-1}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n-1}|A_i\cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-2}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}|\right) + |A_n| -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n-1}|A_i\cap A_n| - \sum_{1\le i<j\le n-1}|A_i\cap A_j\cap A_n| + \ldots + (-1)^{n-2}|A_1\cap\ldots\cap A_n|\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1}|A_1\cap\ldots\cap A_n|. \quad \square$$

Следната теорема, којашто е позната како *принцип на Дирихле* или како *Дирихлеов принцип за кутии* (на англиски: Dirichlet drawer principle, Pigeonhole principle) и има примена при решавање комбинаторни задачи, тврди дека ниту едно пресликување од множество со најмалку $k+1$ елементи во множество со k елементи не е инјекција.

Теорема 3 (Принцип на Дирихле). *Нека A и B се конечни множества. Ако $|A|>|B|$, тогаш кое било пресликување $f: A\to B$ не е инјекција.*

Доказ. Нека A и B се конечни множества такви што $|A|>|B|$. Да го претпоставиме спротивното, т. е. нека постои пресликување $f: A\to B$ што е инјекција. Ќе покажеме дека $|A|\le|B|$. За таа цел, дефинираме пресликување $g: A\to f(A)$ со: $g(x)=f(x)$ за секој $x\in A$. Дека g е биекција се покажува исто како во доказот на Теорема 1. Но, тогаш $A\sim f(A)$ и $f(A)\subseteq B$. Значи,

$$|A| = |f(A)| \le |B|,$$

што противречи на претпоставката дека $|A|>|B|$. Според тоа, $f: A\to B$ не е инјекција. $\square$

Забелешка. Принципот на Дирихле може да се формулира и вака: во произволна фамилија од n множества, коишто заедно содржат повеќе од n елементи, има барем едно множество што содржи не помалку од два елемента. Најпопуларната форма на овој принцип гласи: ако во n кутии се распоредат повеќе од n предмети, тогаш барем во една кутија ќе има повеќе од еден предмет.

***Пример* 3.** Како и да се изберат седум различни броеви од множеството $\{1,2,...,11\}$ барем два од нив ќе имаат збир 12.

Решение. Бидејќи се избрани седум броеви, принципот на Дирихле ни гарантира дека два од нив се избрани од едно од следниве шест подмножества $\{1,11\}$, $\{2,10\}$, $\{3,9\}$, $\{4,8\}$, $\{5,7\}$, $\{6\}$. Да забележиме дека во првите 5 множества има по два броја, додека во последното има само еден број, зашто во даденото множество нема број што е различен од 6 кој дава збир 12. Кога се избира некој број, тогаш тој се сместува во соодветно подмножество според даденото барање (збирот на броевите да е 12). Бидејќи се избрани 7 броеви кои се сместени во соодветни подмножества, следува дека меѓу избраните броеви ќе постојат барем два броја коишто ќе имаат збир 12. (На пример, ако се избрани броевите 1,2,4,5,7,8 и 9, тогаш 4 и 8, 5 и 7 го задоволуваат поставениот услов.)

Дефиниција 3. За едно множество A велиме дека е *бесконечно* ако не е конеч–но, т. е. ако $A \neq \varnothing$ и за секој $k \in \mathbb{N}$ и A не е еквивалентно со $\mathbb{N}_k$.

Забелешка. Бесконечните множества се разликуваат по тоа што некои се пребројливи, а некои се непребројливи, што ќе го разгледаме поподробно во понатамошните лекции.

Својство 3. *Множеството* $\mathbb{N}$ *е бесконечно.*

Доказ. Да претпоставиме дека $\mathbb{N}$ е конечно множество. Тогаш постои биективно пресликување $f:\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}$. Оттука следува дека постои број $m \in \mathbb{N}$ таков што $m = \max\{ f(x) \mid x \in \{1,2,..,n\}\}$. Знаеме дека $m+1 \in \mathbb{N}$ и дека $f(k) < m+1$ за секој $k \in \{1,2,\dots,n\}$. Бидејќи f е биекција, следува дека постои инверзна биекција $f^{-1}:\mathbb{N} \to \mathbb{N}_n$, па $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$, за секој $y \in \mathbb{N}$. Значи, $m+1 = f\left(f^{-1}(m+1)\right)$ $< m+1$, што е контрадикција. □

Својство 4. *Секое бесконечно множество може биективно да се преслика во свое вистинско подмножество.*

Доказ. Нека S е бесконечно множество. Тогаш постои елемент $a_1 \in S$. Го разгледуваме множеството $S \setminus \{a_1\}$. Кога $S \setminus \{a_1\}$ би било празно, тогаш множеството S би имало само еден елемент, па S би било конечно. Според тоа, постои $a_2 \in S \setminus \{a_1\}$. Понатаму ќе го разгледуваме множеството $S \setminus \{a_1, a_2\}$. Кога $S \setminus \{a_1, a_2\}$ би било празно, тогаш би постоела биекција помеѓу множеството S и множеството $\{1,2\}$, па затоа постои $a_3 \in S \setminus \{a_1, a_2\}$. Ако ја продолжиме оваа постапка, ќе добиеме низа елементи $a_1, a_2, \dots$ коишто припаѓаат на множеството S.

Сите елементи се различни затоа што $a_i \in S \setminus \{a_1, a_2, ..., a_{i-1}\}$. Нека $P = S \setminus \{a_1, a_2, ...\}$. Дефинираме пресликување $f : S \to S \setminus \{a_1\}$ на следниов на–чин:

$$f(x) = \begin{cases} a_{i+1}, \text{ ако } x = a_i \\ x, \text{ ако } x \in P. \end{cases}$$

Ќе докажеме дека f е биекција. Нека $x \neq y$ се произволни елементи од S. Ќе ги разгледаме следните случаи:

1. $x = a_i$ и $y = a_j$. Тогаш $f(x) = a_{i+1}$ и $f(y) = a_{j+1}$. Бидејќи $x \neq y$, следува дека и $i \neq j$. Затоа и $i+1 \neq j+1$, а бидејќи елементите од низата се различни, следува дека $a_{i+1} \neq a_{j+1}$.

2. $x = a_i$ и $y \in P$. Тогаш $f(x) = a_{i+1}$ и $f(y) = y \in P$, па бидејќи $a_{i+1} \notin P$, следува дека $a_{i+1} \neq y$.

3. $x \in P$ и $y = a_i$. Слично, добиваме дека $f(x) = x \neq a_{i+1} = f(y)$.

4. $x \in P$ и $y \in P$. Тогаш $f(x) = x \neq y = f(y)$.

Во сите случаи е исполнета импликацијата $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, па значи f е инјекција.

Останува да покажеме дека f е сурјекција. Нека $x \in S \setminus \{a_1\}$ е произволно избран елемент. Ако $x = a_i$, тогаш $i \in \{2, 3, ...\}$, па $a_{i-1} \in \{a_1, a_2, ...\}$. Затоа $f(a_{i-1}) = a_i$. Ако, пак, $x \in P$, тогаш $f(x) = x$. Значи, f е сурјекција, т. е. f е биекција од множеството S во неговото вистинско подмножество $S \setminus \{a_1\}$. □

Својство 5. *Секое множество што може биективно да се преслика во свое вистинско подмножество е бесконечно.*

Доказ. Нека S е множество коешто може биективно да се преслика во свое вистинско подмножество P и нека $f : S \to P$ е биекција. Множеството $S \setminus P$ е непразно, па значи постои елемент $a_1 \in S \setminus P$. Дефинираме (бесконечна) низа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ со: $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Сите елементи од оваа низа се раз–лични. Тоа ќе го покажеме со индукција дека за секој $n \in \mathbb{N}$ елементите $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ се различни.

За $n = 1$, тврдењето е тривијално исполнето. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за n и да го разгледаме множеството $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$. Треба да покажеме дека a_{n+1} е различен од останатите елементи. Бидејќи $a_{n+1} = f(a_n)$, следува дека $a_{n+1} \in P$. Бидејќи $a_1 \in S \setminus P$, следува дека $a_1 \neq a_{n+1}$.

Ако $i > 1$, тогаш од индуктивната претпоставка имаме дека $a_{i-1} \neq a_{n+1}$. Од тоа што f е биекција следува дека $f(a_{i-1}) \neq a_n$, т. е. дека $a_i \neq a_{n+1}$. Значи, множеството $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ е бесконечно. Бидејќи S содржи бесконечно подмножество, следува дека и S е бесконечно. □

***Пример* 3.** Ако $\mathbb{N}$ е множеството природни броеви, а $2\mathbb{N}$ е множеството од сите парни природни броеви, тогаш пресликувањето $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ зададено со $f(n) = 2n$ е биекција. Бидејќи $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$, множеството $\mathbb{N}$ мора да е бесконечно.

Задачи за вежбање

1. Докажи дека ако се изберат 10 броеви од множеството {1,2,…,18}, тогаш изборот ќе вклучи броеви *a* и *b* такви што $a \mid b$ (т.е. постои природен број *k* таков што $ak = b$).

Решение. Нека множеството *A* се состои од избраните 10 броеви. Дефинираме 9 подмножества, секое од кои ги содржи непарните броеви од даденото множество: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 и 17. На секој избран број му се придружува неговиот најголем непарен делител (којшто мора да е еден од броевите 1,3,...,17). Да забележиме дека ако на *x* му се придружува соодветниот непарен делител *m*, тогаш $x = 2^k m$ за некој број $k \geq 0$. Бидејќи се избрани 10 броја кои се сместуваат во 9 подмножества, некое подмножество ќе содржи барем 2 броја *a* и *b*, при што $a < b$. Да претпоставиме дека непарниот број *t* е делител на броевите *a* и *b*. Тогаш $a = 2^r \cdot t$ и $b = 2^s \cdot t$ при што $r < s$, па $b = 2^r 2^{s-r} \cdot t$ $= a \cdot 2^{s-r}$. Бидејќи $s - r > 0$, следува дека $a \mid b$.

2. Докажи дека постои природен број чиишто цифри се само единици и е делив со 7777.

Решение. Нека множеството *A* содржи 7778 броја што се состојат само од единици: 1, 11, 111, ..., $\underbrace{11....11}_{7778}$. На секој број од оваа листа му го придружуваме остатокот при делењето со бројот 7777. Постојат точно 7777 можни остатоци: 0,1,2,...,7776, па според приципот на Дирихле следува дека два од избраните 7778 броја имаат ист остаток. Да претпоставиме дека тие броеви се *a* и *b* и притоа $a < b$. Тогаш $b \equiv a \pmod{7777}$, па значи $b - a$ е делив со 7777. Но, не сите цифри од бројот $b - a$ се единици: $b - a$ на крајот ќе содржи онолку нули колку што има единици во *a*. Значи, ако има s единици во *b* и *k* едници во *a*, тогаш $b - a$ има $s - k$ единици по кои следуваат *k* нули. Ако $b - a$ го поделиме со 10^k ќе добиеме природен број $\dfrac{b-a}{10^k}$ кој ќе се состои само од единици. Тој ќе биде делив со 7777. Имено $b-a$ е делив со 7777, па ќе постои $m\in\mathbb{N}$, таков што $b-a=7777\cdot m$, т. е. $b-a=7\cdot 1111\cdot m=7\cdot 11\cdot 101\cdot m$, а оттука $\frac{b-a}{10^k}=\frac{7\cdot 11\cdot 101\cdot m}{2^k\cdot 5^k}=q$ (знаеме дека $\frac{b-a}{10^k}$ е природен број, па значи 2^k и 5^k се делители на m (а не се делители на 7,11 и 101, зашто тие се прости броеви). Според тоа, $\frac{b-a}{10^k}$ е природен број што се состои само од единици и е делив со 7777.

3. На една забава присуствувале $n\geq 2$ гости. Докажи дека двајца од присутните имаат ист број пријатели на забавата. (Притоа, ќе сметаме дека релацијата „е пријател на“ е симетрична, т. е. ако *x* е пријател на *y*, тогаш и *y* е пријател на *x*.)

Решение. Секој гостин е или не е пријател со останатите $n-1$ гости на забавата. Значи, можните вредности на бројот на пријатели што може да ги има еден гостин од присутните на забавата е $0,1,\ldots,n-1$. Сепак, не може да се случи некој на забавата да има 0 пријатели и некој да има $n-1$ пријатели: ако некому сите присутни на забавата му се пријатели, тогаш (од тоа што релацијата „е пријател на“ е симетрична) следува дека секој на забавата има барем еден пријател. Значи, можните вредности за бројот на пријатели по лице се $0,1,2,\ldots,n-2$ или $1,2,\ldots,n-1$. Во кој било од овие два случаја, има *n* броеви на кои може да им се придружат најмногу $n-1$ различни вредности. Според принципот на Дирихле, два од броевите се еднакви. Значи, некои двајца гости имаат ист број пријатели на забавата.

4. (а) Ако *A* е бесконечно множество и $A\sim B$, тогаш *B* е бесконечно.
(б) Ако *A* е бесконечно множество и $A\subseteq B$, тогаш *B* е бесконечно.

Решение. (а) Да го претпоставиме спротивното, т. е. дека *B* е конечно множество. Тогаш од $A\sim B$ и од Св.1 следува дека и *A* е конечно множество, што противречи на претпоставката дека *A* е бесконечно.

(б) Нека *A* е бесконечно множество и $A\subseteq B$. Да го претпоставиме спротивното, т. е. дека *B* е конечно множество. Тогаш секое негово подмножество е конечно (Теорема 1), што противречи на претпоставката дека *A* е бесконечно.

5. Докажи дека *X* е бесконечно множество ако и само ако постојат бесконечно многу релации за еквивалентност во *X*.

Решение. Да претпоставиме дека постојат бесконечно многу релации за еквивалентност во *X*. Ако *X* е конечно, тогаш постојат најмногу конечен број различни подмножества од X^2. Значи, ако *X* е конечно, тогаш постојат конечен број релации за еквивалентност во X, што противречи на претпоставката. Според тоа, X е бесконечно множество.

Обратно, да претпоставиме дека X е бесконечно множество. За секој пар $a, b \in X$, $a \neq b$, дефинираме релација $\alpha_{(a,b)}$ со:

$$\alpha_{(a,b)} = \Delta_X \cup \{(x,y) \in X^2 \mid (x,y) = (a,b) \text{ или } (x,y) = (b,a)\}.$$

За забележиме дека $\alpha_{(a,b)} = \alpha_{(c,d)}$ ако и само ако $\{a,b\} = \{c,d\}$. Бидејќи X е бесконечно, можеме да најдеме бесконечен број парови $a, b \in X$, при што секој дава различно множество $\alpha_{(a,b)}$. Дополнително, секој $\alpha_{(a,b)}$ е еквивалентност во X. Релацијата $\alpha_{(a,b)}$ е рефлексивна, зашто $\Delta_X \subseteq \alpha_{(a,b)}$. Симетрична е зашто ако $(x,y) \in \alpha_{(a,b)}$, тогаш $(x,y) = (a,b)$ или $(x,y) = (b,a)$, од што следува дека $(y,x) = (b,a)$ или $(y,x) = (a,b)$, па $(y,x) \in \alpha_{(a,b)}$. Релацијата $\alpha_{(a,b)}$ е транзитив–на. Имено, нека $(x,y) \in \alpha_{(a,b)}$ и $(y,z) \in \alpha_{(a,b)}$. Да забележиме дека (x,y) може да биде само (a,b), (b,a) или (x,x). Од $(x,y) = (a,b)$ следува дека $(y,z) = (b,a)$ или $(y,z) = (b,b)$. Значи, $(x,z) = (a,a)$ или $(x,z) = (a,b)$, па значи $(x,z) \in \alpha_{(a,b)}$. Слично се покажува случајот кога $(x,y) = (b,a)$. Случајот кога $(x,y) = (x,x)$ е очигледен (тогаш $(y,z) = (x,z) \in \alpha_{(a,b)}$).

5. 2. Подредување на кардинални броеви

Понекогаш сакаме да ја споредиме „големината“ на две множества. Затоа, дефинираме релација „$\leq$“ меѓу кардинални броеви на множества.

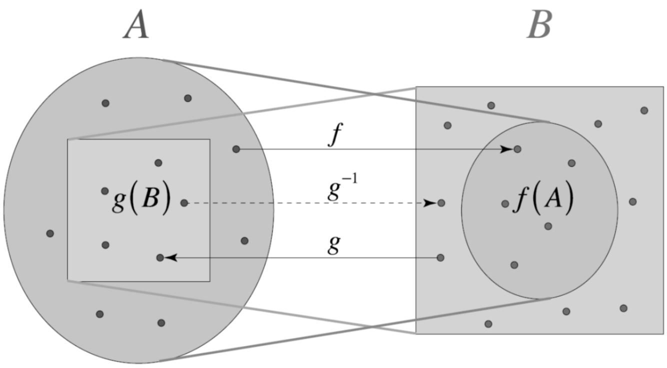
Дефиниција 1. Нека A и B се множества. Велиме дека $|A| \leq |B|$ ако постои инјективно пресликување $f : A \to B$.

Ќе покажеме дека оваа релација е релација за подредување, но претходно, за да може да го спроведеме доказот за антисиметричност, ќе ја покажеме следнава теорема, позната под името теорема на Кантор-Бернштајн.

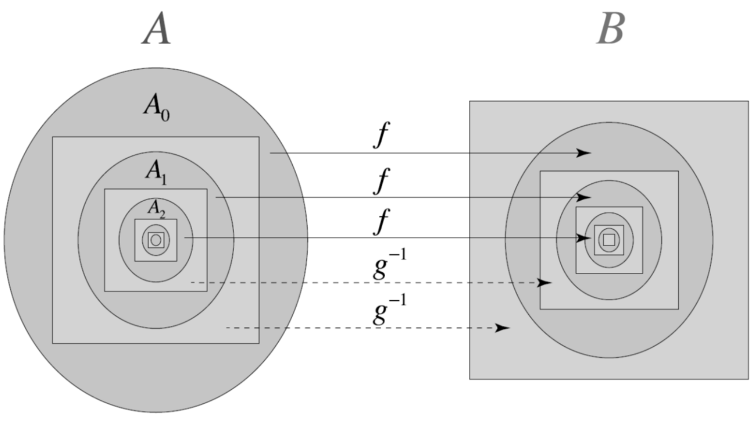
Во теоријата на множествата, теоремата на Кантор-Бернштајн, именувана по Георг Кантор и *Феликс Бернштајн* (Felix Bernstein, 1878 – 1956), кажува дека ако постојат инјективни пресликувања $f : A \to B$ и $g : B \to A$ помеѓу множествата A и B, тогаш постои пресликување $h : A \to B$ кое е биекција, т.е. $A \sim B$. Оваа теорема се именува и како теорема на Шредер-Бернштајн или како теорема на Кантор-Шредер-Бернштајн. Како хипотеза, оваа теорема ја поставил Кантор во 1887 година (а таа особина на кардиналните броеви ја забележал уште во 1882, односно 1883 година), но не ја докажал. Математичарите, коишто први, независно еден од друг, објавиле два докази на оваа теорема во 1898 година биле *Ернст Шредер* (Ernst Schröder, 1841 – 1902) и Феликс Бернштајн. Извесно време подоцна се покажало дека Шредеровиот доказ содржи грешки. Интересно е дека оваа теорема прв ја докажал *Рихард Дедекинд* (Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831 – 1916) во јули 1887, но не го објавил доказот. Доказот на Дедекинд го открил Цермело во 1908 година, но покрај доказот на Дедекинд објавил и свој доказ на оваа теорема.

Теорема на Кантор-Бернштајн. *Ако* $f: A \to B$ *е инјекција и* $g: B \to A$ *е инјекција, тогаш постои биекција* $h: A \to B$ *.*

Доказ. По претпоставка, пресликувањата f и g се инјекции, што значи дека нивните инверзни пресликувања не мора да постојат. Но, пресликувањето $g: B \to g(B)$ е биекција, па според тоа постои инверзно пресликување $g^{-1}: g(B) \to B$.



Последователно применувајќи ги инјективните пресликувања f и g ја добиваме следнава слика:



Нека $A_0 = A \setminus g(B)$ е комплементот на $g(B)$. Кога со следниот чекор се враќаме во A добиваме множество $A_1 = (g \circ f)(A_0)$. Да забележиме дека $A_0 \supseteq A_1$. Со секој нареден чекор создаваме низа множества $A_0, A_1, ..., A_n, A_{n+1}, ...$, каде што

$$A_{n+1} = (g \circ f)(A_n),$$

такви што $A_0 \supseteq A_1 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq ...$. Со A_∞ ја означуваме унијата од сите множества A_i, т.е. $A_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (g \circ f)^n (A_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (g \circ f)^n (A \setminus g(B))$. На вториот цртеж, множеството A_∞ е темносивата област во множеството A. Останатиот дел (светлосивата област во A) е $A \setminus A_\infty$. На тој начин, го разбивме множеството A на две (дисјунктни) множества коишто имаат различни „особини“. Така, множеството A_∞ со f ја пресликува темносивата област од A во темносивата област од B. Множеството $A \setminus A_\infty$ со g^{-1} ја пресликува светлосивата област од A во светлосивата област од B.

Сега, можеме да дефинираме пресликување $h: A \to B$ на следниов начин:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ ако } x \in A_\infty \\ g^{-1}(x), \text{ ако } x \in A \setminus A_\infty \end{cases}.$$

Останува да утврдиме дека вака дефинираното пресликување е биекција. Прво ќе покажеме дека h е инјекција. Затоа, нека $x, y \in A$ се произволно избрани елементи и нека $h(x) = h(y)$. Тврдиме дека $x = y$. Ќе разгледаме три случаи.

1) Ако $x, y \in A_\infty$, тогаш: $h(x) = h(y) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

2) Ако $x, y \in A \setminus A_\infty$, тогаш:

$$\begin{aligned} h(x) = h(y) &\Rightarrow g^{-1}(x) = g^{-1}(y) \Rightarrow g(g^{-1}(x)) = g(g^{-1}(y)) \\ &\Rightarrow (g \circ g^{-1})(x) = (g \circ g^{-1})(y) \Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

3) Ако $x \in A_\infty$, а $y \in A \setminus A_\infty$, тогаш постои $n \in \mathbb{N}$, за кој $x \in A_n$. Оттука:

$$\begin{aligned} h(x) = h(y) &\Rightarrow f(x) = g^{-1}(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(g^{-1}(y)) \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ g^{-1})(y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = (g \circ f)(x) \in (g \circ f)(A_n) = A_{n+1}. \end{aligned}$$

Значи, $y \in A_{n+1}$, па значи имаме контрадикција со $y \in A \setminus A_\infty$. Според тоа, овој случај е невозможен.

Да покажеме дека h е сурјекција. Затоа, нека $b \in B$ е произволно избран елемент. Тврдиме дека постои $x \in A$ таков што $h(x) = b$. Ќе разгледаме два случаја.

1) Ако $x = g(b) \notin A_\infty$, тогаш $h(x) = g^{-1}(x) = g^{-1}(g(b)) = (g^{-1} \circ g)(b) = b$.

2) Ако $x = g(b) \in A_\infty$, тогаш постои $n \in \mathbb{N}$, за кој $x \in A_n$. Од тоа што $x \in g(B)$, следува дека $n > 0$. Бидејќи $A_n = (g \circ f)(A_{n-1})$, можеме да ставиме дека $x \in (g \circ f)(A_{n-1})$. Нека $z \in A_{n-1}$. Тогаш $x = (g \circ f)(z) = g(f(z))$. Пресликувањето g е инјекција, па од $x = g(b)$ и од $x = g(f(z))$, имаме дека $b = f(z)$. Да ставиме $x = z$. Тогаш $h(x) = f(x) = f(z) = b$. Значи, за секој $b \in B$ постои $x \in A$ таков што $h(x) = b$, па значи h е сурјекција.

Бидејќи h е инјекција и сурјекција, следува дека h е биекција. □

Својство 1. *Релацијата* $"\leq"$ *на кардиналните броеви е релација за подредување.*

Доказ. (P) Нека A е произволно множество. Бидејќи идентичното пресликување $1_A : A \to A$ е инјективно, следува дека $|A| \leq |A|$.

(AC) Нека A и B се произволни множества такви што $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$. Тогаш постојат инјективни пресликувања $f : A \to B$ и $g : B \to A$. Од теоремата на Кантор-Бернштајн следува дека $A \sim B$, т. е. $|A| = |B|$.

(T) Нека A, B, C се произволни множества такви што $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C|$. Тоа значи дека постојат инјективни пресликувања $f : A \to B$ и $g : B \to A$. Тогаш пресликувањето $g \circ f : A \to C$ е исто така инјекција, па $|A| \leq |C|$. □

Веќе видовме дека ако A е конечно множество, тогаш неговото партитивно множество има повеќе елементи од A. Знаеме дека $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$, т. е. дека $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. Ова го навело Кантор да се запраша дали истото неравенство е точно и за бесконечните множества. Тој го претставил доказот на ова тврдење во 1891 година.

Пред да го разгледаме ова прашање, ќе ја дефинираме релацијата „<" меѓу кардинални броеви на множества:

$$|A| < |B| \text{ ако и само ако } |A| \leq |B| \text{ и } |A| \neq |B|.$$

Теорема на Кантор. *За секое множество А, кардиналноста на А е строго помала од кардиналноста на неговото партитивно множество* $\mathcal{P}(A)$ *, т. е.* $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Доказ. Прво ќе покажеме дека $|A| \le |\mathcal{P}(A)|$. Нека $f: A \to \mathcal{P}(A)$ е пресликување дефинирано со $f(a) = \{a\}$, за секој $a \in A$. Ако $f(a_1) = f(a_2)$, тогаш $\{a_1\} = \{a_2\}$, па $a_1 = a_2$. Според тоа, f е инјективно пресликување, од што следува дека $|A| \le |\mathcal{P}(A)|$.

Останува да покажеме дека $|A| \ne |\mathcal{P}(A)|$. Нека $f: A \to \mathcal{P}(A)$ е пресликување и нека $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Значи, $B \in \mathcal{P}(A)$. Да претпоставиме дека постои $a \in A$ таков што $f(a) = B$. Тогаш $a \in B$ или $a \notin B$. Ако $a \in B$, тогаш од дефиницијата на B следува дека $a \notin f(a) = B$. Ако, пак, $a \notin B$, тогаш $a \notin f(a) = B$, па од дефиницијата на B следува дека $a \in B$. Значи, $a \in B$ ако и само ако $a \notin B$, што е контрадикција. Според тоа, претпоставката дека постои $a \in A$ таков што $f(a) = B$ е погрешна, па значи пресликувањето f не е сурјекција, а со тоа не е биекција. Бидејќи не постои биекција од множеството A во множеството $\mathcal{P}(A)$, а постои инјективно пресликување, следува дека $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. □

Својство 2. *Не постои множество од сите множества.*

Доказ. Да претпоставиме дека S е множество од сите множества, т. е. за секое множество A, S го има својството: $A \in S$. Тогаш, за секое множество B од множества, важи $B \subseteq S$. Специјално, $\mathcal{P}(S) \subseteq S$. Оттука следува дека $|\mathcal{P}(S)| \le |S|$, зашто пресликувањето $f: \mathcal{P}(S) \to S$ дефинирано со $f(x) = x$ е инјекција. Според теоремата на Кантор следува дека $|S| < |\mathcal{P}(S)|$, а оттука добиваме дека $|\mathcal{P}(S)| \le |S| < |\mathcal{P}(S)|$, што е контрадикција. □

Задачи за вежбање

1. Покажи дека $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$, каде што со 2^A го означуваме множеството од сите пресликувања $f: A \to \{0,1\}$.

Решение. Дефинираме пресликување $G: \mathcal{P}(A) \to 2^A$ на следниот начин.

Ако $X \subseteq A$, тогаш на множеството X му придружуваме пресликување $G(X): A \to \{0,1\}$ дефинирано со:

$$G(X)(a) = \begin{cases} 1, & a \in X \\ 0, & a \notin X. \end{cases}$$

Ќе покажеме дека ова пресликување е биекција. Нека $G(X) = G(Y)$. Тогаш за секој аргумент $a \in A$ важи $G(X)(a) = G(Y)(a)$. Оттука:

$$a \in X \Leftrightarrow \ G(X)(a) = 1 \ \Leftrightarrow G(Y)(a) = 1 \ \Leftrightarrow \ a \in Y.$$

Од дефиницијата за еднаквост на множества следува дека $X = Y$.

Нека $f: A \to \{0,1\}$ е произволно пресликување и нека $X = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$. Тврдиме дека $G(X) = f$. Нека $a \in A$ е произволно избран елемент. Ако $G(X)(a) = 1$, тогаш од дефиницијата на пресликувањето $G(X)$ имаме дека $a \in X$, а од дефиницијата на X следува дека $f(a) = 1$. Ако $G(X)(a) = 0$, тогаш $a \notin X$, па не е точно дека $f(a) = 1$. Од тоа што $f(a) \in \{0,1\}$, следува дека $f(a) = 0$. Значи, $G(X)(a) = f(a)$, за секој $a \in A$, па значи $G(X) = f$.

2. Покажи дека множествата $(0,1)$ и $[0,1]$ имаат ист кардинален број.

Решение. Да забележиме дека $(0,1) \subseteq [0,1]$, па оттука $|(0,1)| \le |[0,1]|$ (идентичното пресликување од $(0,1)$ во $[0,1]$ е инјекција). Ќе покажеме дека постои инјекција од $(0,1)$ во $[0,1]$. Дефинираме пресликување $f:[0,1] \to (0,1)$ со: $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$. Лесно се покажува дека ова пресликување е инјекција, па $|[0,1]| \le |(0,1)|$. Од теоремата на Кантор-Бернштајн, имаме дека $|[0,1]| = |(0,1)|$.

3. Покажи дека $[-1,1]$ има иста кардиналност како $(1,3) \cup (4,6)$.

Решение. Множеството $[-1,1]$ е сегмент со должина 2, којшто заради крајните точки не може да се смести во ниту еден од двата интервали $(1,3)$, $(4,6)$. Идејата е да го „намалиме“ сегментот $[-1,1]$, а потоа да го сместиме или во $(1,3)$ или во $(4,6)$. Ако го земеме сегментот $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, тогаш него можеме да го сместиме во $(1,3)$, додавајќи 2 на секоја од крајните точки на $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Го добиваме сегментот $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$. Дефинираме пресликување $f:[-1,1] \to (1,3) \cup (4,6)$ со:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2.$$

Прво, да видиме дали ова има смисла, т. е. дали $[-1,1]$ можеме да го сместиме во $(1,3)\cup(4,6)$. Нека $x\in[-1,1]$. Тогаш:

$$-1 \le x \le 1 \;\Leftrightarrow -\tfrac{1}{2} \le \tfrac{1}{2}x \le \tfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow -\tfrac{1}{2}+2 \le \tfrac{1}{2}x+2 \le \tfrac{1}{2}+2$$
$$\Leftrightarrow \tfrac{3}{2} \le f(x) \le \tfrac{5}{2}.$$

Бидејќи $f(x)\in[\frac{3}{2},\frac{5}{2}]$, следува дека $f(x)\in(1,3)$. Останува да покажеме дека f е инјекција, а тоа се покажува директно. (Читателот може сам да го докаже за вежба.)

Следно, треба да дефинираме пресликување $g:(1,3)\cup(4,6)\to[-1,1]$. Нека $x\in(1,3)\cup(4,6)$. Тогаш $1<x<6$ (но, оттука не следува дека $x\in(1,3)\cup(4,6)$). Така добиваме:

$$1<x<6 \;\Leftrightarrow \tfrac{1}{5}<\tfrac{1}{5}x<\tfrac{6}{5} \;\Leftrightarrow \tfrac{2}{10}-\tfrac{7}{10}<\tfrac{1}{5}x-\tfrac{7}{10}< \tfrac{6}{5}-\tfrac{7}{10} \;\Leftrightarrow -\tfrac{1}{2}<g(x)< \tfrac{1}{2}$$

Пресликувањето $g:(1,3)\cup(4,6)\to[-1,1]$ го дефинираме со:

$$g(x)=\tfrac{1}{5}x-\tfrac{7}{10}.$$

Бидејќи $g(x)\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, следува дека $g(x)\in[-1,1]$. Останува да покажеме дека g е инјекција, а тоа се покажува директно. (Читателот може сам да го докаже за вежба.)

Од теоремата на Кантор-Бернштајн, следува дека $[-1,1]$ е еквивалентно со $(1,3)\cup(4,6)$, т. е. дека множествата имаат иста кардиналност.

5.3. Пребројливи множества

Овде формално ќе дефинираме што значи елементите од едно множество да бидат „изброени“, користејќи го множеството на природните броеви.

Дефиниција 1. За едно множество A велиме дека е *пребројливо* ако $A\sim\mathbb{N}$. Тоа значи дека множеството A е пребројливо ако постои биекција $f:\mathbb{N}\to A$.

Кардиналниот број на множеството на природните броеви $\mathbb{N}$ го означуваме со $\aleph_0$ (*алеф нула*), т.е. $|\mathbb{N}|=\aleph_0$. Оваа ознака прв ја употребил Георг Кантор во неговата работа на теоријата на бесконечните множества, кон крајот на XIX век. Значи, $\aleph_0$ го сметаме за „бесконечен број“ кој го претставува „бројот на елементи“ на множеството $\mathbb{N}$ и на секое множество што е еквивалентно со $\mathbb{N}$.

***Пример* 1.** Множеството парни броеви $2\mathbb{N}=\{2,4,6,8,\ldots\}$ е пребројливо множество, бидејќи пресликувањето $f:\mathbb{N}\to 2\mathbb{N}$ дефинирано со $f(n)=2n$, за секој $n\in\mathbb{N}$, е биекција.

***Пример* 2.** Во примерот 1 од 5.1. видовме дека $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, па значи множеството од целите броеви $\mathbb{Z}$ е пребројливо множество.

Теорема 1. *Едно множество A е пребројливо ако и само ако $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ каде што $a_i \neq a_j$ за $i \neq j$.*

Доказ. Нека A е пребројливо множество. Тогаш $f : \mathbb{N} \to A$, дефинирано со $f(n) = a_n$, е биекција од множеството на природни броеви $\mathbb{N}$ во множеството A. Од тоа што f е инјекција, важи импликацијата: $n \neq m \Rightarrow f(n) \neq f(m)$, т. е. $n \neq m \Rightarrow a_n \neq a_m$. Оттука следува дека $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Обратно, ако $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, при што $a_n \neq a_m$ за $n \neq m$, тогаш пресликувањето $g : n \to a_n$ е биекција од $\mathbb{N}$ во A, што значи дека A е пребројливо. □

Забелешка 1. Од оваа теорема се гледа дека даденото множество A е пребројливо ако и само ако неговите елементи можат да се запишат во вид на бесконечна низа $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots$ каде што $a_i \neq a_j$ за $i \neq j$.

Својство 1. *Нека $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ се дисјунктни пребројливи множества. Тогаш и $A \cup B$ е пребројливо множество.*

Доказ. Бидејќи A и B се пребројливи множества следува дека $A \sim \mathbb{N}$ и $B \sim \mathbb{N}$. Тогаш постојат биекции $f : \mathbb{N} \to A$ и $g : \mathbb{N} \to B$. Дефинираме пресликување $h : \mathbb{N} \to A \cup B$ со

$$h(n) = \begin{cases} f\left(\dfrac{n+1}{2}\right), & \text{ако } n \text{ е непарен број} \\ g\left(\dfrac{n}{2}\right), & \text{ако } n \text{ е парен број.} \end{cases}$$

Пресликувањето h е инјекција. Нека $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ се произволно избрани елементи и нека $h(n_1) = h(n_2)$. Ќе разгледаме неколку случаи:

1) Ако n_1, n_2 се непарни броеви, тогаш $f\left(\dfrac{n_1+1}{2}\right) = f\left(\dfrac{n_2+1}{2}\right)$, а од тоа што f е инјекција, следува дека $\dfrac{n_1+1}{2} = \dfrac{n_2+1}{2}$, а оттука дека $n_1 = n_2$.

2) Ако n_1, n_2 се парни броеви, следува дека $g\left(\dfrac{n_1}{2}\right) = g\left(\dfrac{n_2}{2}\right)$, а од тоа што g е инјекција, следува дека $\dfrac{n_1}{2} = \dfrac{n_2}{2}$, а оттука дека $n_1 = n_2$.

Случајот кога n_1 е непарен, а n_2 е парен број (и обратно, n_1 е парен, а n_2 е непарен број) не е можен, зашто $h(n_1) \in A$ и $h(n_2) \in B$, а $A \cap B = \varnothing$.

Пресликувањето h е сурјекција. Нека $c \in A \cup B$ е произволно избран елемент. Тоа значи дека $c \in A$ или $c \in B$. Ако $c \in A$, тогаш од тоа што $f : \mathbb{N} \to A$ е биекција, следува дека постои број $k \in \mathbb{N}$, таков што $f(k) = c$, а ако $c \in B$, од тоа што $g : \mathbb{N} \to B$ е биекција, следува дека постои број $m \in \mathbb{N}$, таков што $g(m) = c$. Бидејќи A и B се дисјунктни множества, следува дека h е сурјекција. Значи, h е биекција од $\mathbb{N}$ во $A \cup B$. Според тоа $A \cup B$ е пре–бројливо множество. □

Својство 2. *Нека* $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ *и* $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ *се пребројливи множества. Тогаш* $A \times B$ *е пребројливо множество.*

Доказ. Формираме низа од парови од множеството $A \times B$ според збирот на индексите на двете компоненти, т.е.

$$(a_1, b_1)$$
$$(a_1, b_2),\ (a_2, b_1)$$
$$(a_1, b_3),\ (a_2, b_2),\ (a_3, b_1)$$
$$\vdots$$

Бидејќи секој елемент од $A \times B$ се јавува само еднаш во ова низа, според Теорема 1 следува дека множеството $A \times B$ е пребројливо. □

Својство 3. *Секое подмножество од пребројливо множество е пребројливо или конечно.*

Доказ. Нека A е пребројливо множество, а B е подмножество од A. Множеството A можеме да го запишеме во облик $A = \{1, 2, \ldots, k, \ldots\}$, а множеството B во облик $B = \{a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots\}$. Ако меѓу броевите $k_1, k_2, \ldots$ има најголем, тогаш B е конечно, а во спротивно $-$ B е пребројливо. □

Својство 4. *Множеството од позитивни рационални броеви е пребројливо.*

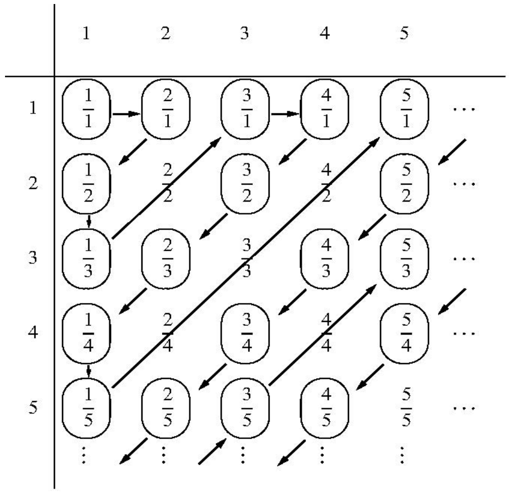
Доказ. Дефинираме пресликување $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ на следниов начин:

1) Почнуваме со оние дропки чиј збир на броителот и именителот е 2 (тоа е само $\frac{1}{1}$). Така, $f(1) = \frac{1}{1}$.

2) Продолжуваме со дропките чиј збир на броителот и именителот е 3 (тоа се дропките $\frac{2}{1}$ и $\frac{1}{2}$). Така, $f(2) = \frac{2}{1}$ и $f(3) = \frac{1}{2}$.

3) Во следниот чекор ги користиме дропките чиј збир на броителот и

именителот е 4 (тоа се дропките $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{2}$ и $\frac{3}{1}$). Така, $f(4)=\frac{1}{3}$ и $f(5)=\frac{3}{1}$. Го прескокнавме $\frac{2}{2}$ зашто $\frac{2}{2}=1$, а според 1), $f(1)=\frac{1}{1}$.



Постапката ја продолжуваме како на цртежот. На овој начин ги подредуваме позитивните рационални броеви во една низа, па според Теорема 1, следува дека пресликувањето f е биективно. Според тоа, $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}^+$.

Забелешка 2. Доказот на ова својство може да се изведе и поинаку. Од Св.2 следува дека множеството $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ е пребројливо множество. Да го разгледаме множеството од позитивни рационални броеви

$$\mathbb{Q}^+=\{\tfrac{p}{q}\mid p,q\in\mathbb{N}, \text{НЗД}(p,q)=1\}.$$

Пресликувањето $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}^+$ дефинирано со $f(n)=\frac{n}{1}$, за секој $n\in\mathbb{N}$ е инјекција, па значи $\aleph_0\le|\mathbb{Q}^+|$. Покрај тоа, $\mathbb{Q}^+\sim\mathbb{Q}'$, каде што

$$\mathbb{Q}'=\{(p,q)\mid p,q\in\mathbb{N}, \text{НЗД}(p,q)=1\}.$$

Очигледно, $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, па $|\mathbb{Q}'|\le|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$. Од $\mathbb{Q}^+\sim\mathbb{Q}'$ и $|\mathbb{Q}'|\le\aleph_0$, следува дека $|\mathbb{Q}^+|\le\aleph_0$. Според тоа, $\aleph_0\le|\mathbb{Q}^+|\le\aleph_0$, па $|\mathbb{Q}^+|=\aleph_0$, што значи дека множеството $\mathbb{Q}^+$ е пребројливо.

Својство 5. *Ако A е пребројливо множество, тогаш $A\cup\{x\}$ е пребројливо множество.*

Доказ. Нека A е пребројливо множество. Тогаш постои биекција $f:\mathbb{N}\to A$. Можни се два случаја: $x\in A$ или $x\notin A$.

1) Ако $x \in A$, тогаш $A \cup \{x\} = A$, па $A \cup \{x\}$ е преброjливо множество.

2) Ако $x \notin A$, тогаш дефинираме пресликување $g: \mathbb{N} \to A \cup \{x\}$ со:

$$g(n) = \begin{cases} x, & \text{ако } n = 1 \\ f(n-1), & \text{ако } n \geq 2. \end{cases}$$

Пресликувањето g е инјекција. Нека $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ се произволно избрани и нека $n_1 \neq n_2$. Ако $n_1 = 1$ и $n_2 \geq 2$, тогаш $g(n_1) = x$, $g(n_2) = f(n_2 - 1) \in A$. Бидејќи $x \notin A$, следува дека $g(n_1) \neq g(n_2)$. Симетрично се покажува и случајот кога $n_2 = 1$ и $n_1 \geq 2$. Останува случајот кога $n_1 \neq n_2$ и $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$. Тогаш $g(n_1) = f(n_1 - 1) \neq f(n_2 - 1) = g(n_2)$, зашто f е инјекција.

Пресликувањето g е сурјекција. Нека $c \in A \cup \{x\}$. Ако $c = x$, тогаш постои $n = 1 \in \mathbb{N}$, таков што $g(n) = g(1) = x$. Ако $c \in A$ (јасно, $c \neq x$), тогаш постои $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, таков што $f(n) = c$, т. е. $g(n) = c$.

Според тоа, g е биекција, па $A \cup \{x\}$ е преброjливо множество. □

Со директна примена на Св. 2 на множествата $\mathbb{Q}^+$ и $\mathbb{Q}^-$ (коишто се преброjливи и дисјунктни) и Св. 5 за множеството $\{0\}$, следува дека важи

Својство 6. *Множеството* $\mathbb{Q}$ *е преброjливо.* □

Задачи за вежбање

1. Покажи дека секое од следниве множества е преброjливо:

а) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N})\, n = 5k\}$; б) $B = \left\{ \frac{1}{2^k} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$;

в) $C = \mathbb{N} \setminus \{3, 4, 5\}$; г) $D = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq -10\}$.

Упатство. Покажи дека се биекции следниве пресликувања:

а) $f: \mathbb{N} \to A$ дефинирано со: $f(n) = 5n$.

б) $f: \mathbb{N} \to B$ дефинирано со: $f(n) = \frac{1}{2^n}$.

в) $f: \mathbb{N} \to C$ дефинирано со: $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(n) = n + 3$, за секој $n \geq 3$.

г) $f: \mathbb{N} \to D$ дефинирано со: $f(n) = n - 11$.

2. Покажи дека множеството $S = \{2^m + 3^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ е преброjливо.

Решение. Дефинираме пресликување $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to S$ со $g(m, n) = 2^m + 3^n$. Очигледно е дека пресликувањето g е сурјективно. Бидејќи множеството $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

пребројливо, следува дека постои биективно пресликување $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Тогаш пресликувањето $g\circ f:\mathbb{N}\to S$ е биекција (g е сурјекција, а f е инјекција), па значи $S\sim\mathbb{N}$, т. е. S е пребројливо множество.

3. Нека $A_1,A_2,\dots,A_n,\dots$ е пребројлива низа од пребројливи множества (т. е. $n\in\mathbb{N}$). Тогаш $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ е пребројливо множество.

Решение. Нека $A_1,A_2,\dots,A_n,\dots$ е пребројлива низа од пребројливи множества. Од тоа што A_1 е пребројливо множество, од Теорема 1 следува дека неговите елементи можеме да ги „наредиме“ во низа $a_{11},a_{12},a_{13},\dots,a_{1n},\dots$. Слично можеме да ги претставиме и елементите од останатите множества, при што првиот индекс ќе ни означува од кое множество се елементите:

$$\begin{array}{c} a_{21},a_{22},a_{23},\dots,a_{2n},\dots \\ a_{31},a_{32},a_{33},\dots,a_{3n},\dots \\ \vdots \\ a_{n1},a_{n2},a_{n3},\dots,a_{nn},\dots \\ \vdots \end{array}$$

Сега, елементите ќе ги „наредиме“ поинаку, според збирот на индексите почнувајќи од a_{11}, како на цртежот:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} \to & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \end{array}$$

Така се добива низата $a_{11},a_{12},a_{21},a_{13},a_{22},a_{31},a_{14},a_{23},a_{33},\dots$ Во оваа низа можно е да има многу броеви што се повторуваат, зашто не претпоставивме дека множествата A_i се дисјунктни, но во таков случај само се испуштаат елементите што се повторуваат, а се задржува првото појавување на елементот. Според тоа, секој елемент од $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ќе добие свој индекс, па $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\sim\mathbb{N}$.

5.4. Непребројливи множества

За едно множество велиме дека е *непребројливо* ако тоа не е ниту пребројливо ниту конечно множество, т. е. $A\not\sim\mathbb{N}$ и $A\not\sim\mathbb{N}_k$.

Подолу ќе го претставиме Канторовиот доказ за непребројливост на множеството на реалните броеви, а ќе покажеме и дека кардиналниот број на точките од рамнината е еднаков на кардиналноста на реалните броеви.

Лесно се гледа дека не е можно да има повеќе природни од реални броеви, бидејќи идентичното пресликување од множеството на природните броеви $\mathbb{N}$ во подмножество од реалните броеви $\mathbb{R}$ е инјекција. Се прашуваме дали постои биекција од множеството $\mathbb{N}$ во множеството $\mathbb{R}$? Ако постои, тоа би значело дека има исто онолку реални броеви колку што има природни броеви. Ако не постои, тогаш тоа значи дека постојат помалку природни броеви отколку реални броеви, т. е. $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$. Кантор покажал дека не постои биекција од $\mathbb{N}$ во $\mathbb{R}$. Неговиот доказ се нарекува *Канторов дијагонален аргумент.*

Доказот и неговиот краен резултат го изненадил и самиот Кантор, кој во едно писмо до својот колега и пријател Рихард Дедекинд, напишал: „Гледам, но не верувам".

Теорема 1. *Множеството од реалните броеви* $\mathbb{R}$ *е непребројливо.*

Доказ. Да претпоставиме дека множеството $\mathbb{R}$ е пребројливо, т.е. дека $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$. Ќе покажеме дека како и да ги „наредиме" реалните броеви во низа, во неа ќе недостигаат некои природни броеви, а тоа ќе противречи на претпоставката дека множеството $\mathbb{R}$ е пребројливо.

Да забележиме дека секој реален број на единствен начин може да се претстави во децимална форма како $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, каде што a_0 е цел број, а $a_1, a_2, a_3, \ldots$ зад децималната запирка се цифри од $\{0,1,2,\ldots,9\}$. Но, со договор, ако некој децимален запис завршува на бесконечна низа од деветки, како на пример, 1,59999..., ќе сметаме дека тоа е исто што и 1,6. Овој договор овозможува да постои биекција меѓу реалните броеви и нивните децимални записи.

Доказот натаму ќе биде малку неформален за да не се изгуби идејата во многу формално пишување. Со Табелата 1 е прикажана една биекција меѓу природните и реалните броеви изразени во децимална форма. Кантор покажал дека едно вакво претставување води до контрадикција преку создавање реален број што не припаѓа во табелата, независно од тоа кои реални броеви се избрани.

$$\begin{array}{ll}
1 \leftrightarrow & 3{,}167504937\ldots \\
2 \leftrightarrow & 28{,}636713809\ldots \\
3 \leftrightarrow & 0{,}497310123\ldots \\
4 \leftrightarrow & 292{,}275818831\ldots \\
5 \leftrightarrow & 12{,}002200025\ldots \\
6 \leftrightarrow & 1{,}999902681\ldots \\
\vdots &
\end{array}$$

Табела 1

Стратегијата за наоѓање на еден таков број е да се најде децимален број $0,a_1a_2a_3...$ (запишан во децимална форма) кој не може да му се придружи на ниту еден природен број. Од првиот број $3{,}167504937...$ ја избираме првата цифра по децималната запирка (тоа е 1, којашто подолу во Табелата 2 е ставена во квадратче). Бројот $0,a_1a_2a_3...$ на местото на a_1 може да ја има која било цифра само не 1. Да земеме тоа да е, на пример, 7. Од вториот број $28{,}636713809...$ ја гледаме втората децимала, т.е. втората цифра по децималната запирка (тоа е 3, којашто подолу во Табелата 2 е ставена во квадратче). Произволно бираме цифра, на пример 5, којашто доаѓа на местото на a_2.

$$\begin{array}{ccr}
1 & \leftrightarrow & 3,\boxed{1}67504937 \\
2 & \leftrightarrow & 28,6\boxed{3}6713809... \\
3 & \leftrightarrow & 0,49\boxed{7}310123... \\
4 & \leftrightarrow & 292,275\boxed{8}18831... \\
5 & \leftrightarrow & 12,0022\boxed{0}0025... \\
6 & \leftrightarrow & 1,99990\boxed{2}681... \\
\vdots & & \ddots \\
 & & 0,754971...
\end{array}$$

Табела 2

На тој начин добиваме 0,75. Продолжувајќи ја оваа постапка, одејќи надолу во табелата по дијагонала (заокружените цифри), можат да се изберат првите шест децимали од бараниот број и тој да биде, на пример, $0{,}754971...$. Ако ја продолжиме оваа постапка до бесконечност ќе добиеме реален број што не припаѓа во табелата, зашто добиениот број ќе се разликува во најмалку една децимала од секој број од листата. Ова противречи на фактот дека меѓу природните и реалните броеви постои биекција. Значи, не постои биекција меѓу природните и реалните броеви, а бидејќи множеството на природните броеви е подмножество од множеството на реалните броеви, множеството на реалните броеви мора да има поголема кардиналност отколку онаа на природните броеви. □

На овој начин Кантор добил две бесконечности: кардиналниот број $\aleph_0$ на пребројливите множества и кардиналниот број на реалните броеви. Бидејќи не знаел дали кардиналниот број на реалните броеви „доаѓа веднаш по“ кардиналниот број $\aleph_0$, тој го означил со c и го нарекол *континуум*. Според тоа, множеството $\mathbb{R}$, а и секое множество еквивалентно со $\mathbb{R}$, има кардинален број c, т. е. е *нейребројливо.*

Забелешка. Симболот ∞ не го претставува „бројот бесконечност", туку е симбол кој ни кажува дека множеството на реалните броеви не е ограничено, како на пример множествата (a,∞), $(-\infty,b)$, $(-\infty,\infty)$, итн.

***Пример* 1.** Да покажеме дека кардиналниот број на отворениот интервал $(0,1)=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\}$ е еднаков на c.

Дефинираме пресликување $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ со:

$$(\forall x\in(0,1))\ f(x)=\mathrm{tg}\ (\pi(x-\tfrac{1}{2})).$$

Од графикот на оваа функција се гледа дека пресликувањето f е биекција. Според тоа, $(0,1)\sim\mathbb{R}$.

Теорема 2. *Множесшвошо шочки од еден квадраш има исш кардинален број како множесшвошо шочки на еден од неговише рабови.*

Доказ. Без да изгубиме од општоста, квадратот го избираме да биде единичниот квадрат $S=(0,1)\times(0,1)=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ 0<y<1\}$ во Декартов координатен систем. Ќе покажеме дека секоја точка $(x,y)\in S$ може биективно да се преслика во точка (т. е. број) z меѓу 0 и 1.

За да видиме како ќе се конструира ова пресликување, да ја разгледаме точката $(x,y)=(0,2731975...,\ 0,45190314...)\in S$. Ако наизменично ги „испреплетеме" децималите од x и y, ќе го добиеме бројот $z=0,247531...$, којшто е реален број меѓу 0 и 1.

Обратно, за секој реален број, на пример, $z=0,3671458391...$, можеме да конструираме точка $(x,y)=(0,37489...,0,61531...)$ од единичниот квадрат. Од начинот на кој е дефинирано ова пресликување имаме дека кои било две различни точки од единичниот квадрат се пресликуваат во различен реален број, што значи дека ова пресликување е инјекција. Исто така е јасно дека за секој реален број z меѓу 0 и 1 постои точка $(x,y)\in S$ што се пресликува во z. Според тоа, постои биекција меѓу единичниот квадрат и интервалот (0,1). □

***Пример* 2.** Да се одреди кардиналниот број на множеството на ирационалните броеви.

Интервалот (0,1) може да се претстави како дисјунктна унија од рационалните и ирационалните броеви од интервалот (0,1). Бидејќи интервалот (0,1) има кардиналност c, а рационалните броеви имаат кардиналност $\aleph_0$, следува дека множеството на ирационалните броеви има кардиналност c.

***Пример* 3.** Да се најде биективно пресликување меѓу множеството $S=(0,1)\times(0,1)=\{(x,y)\,|\,0<x<1,\ 0<y<1\}$ и рамнината $\mathbb{R}^2$.

Ќе го искористиме пресликувањето од примерот 1, $f(x)=\operatorname{tg}\ (\pi(x-\frac{1}{2}))$, за да дефинираме пресликување $F:S\to\mathbb{R}^2$ на следниов начин:

$$F(x,y)=(f(x),f(y)).$$

Да забележиме дека точката (0,5; 0,5) се пресликува во координатниот почеток од $\mathbb{R}^2$, точките од горниот десен квадрат $S_1=(\frac{1}{2},1)\times(\frac{1}{2},1)$ во првиот квадрант итн. Вака дефинираното пресликување е биекција.

Теорема 3. *Кардиналниот број на партитивното множество на природните броеви е еднаков на кардиналниот број на множеството на реалните броеви, т. е.* $c=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Доказ. Бидејќи множеството $\mathbb{R}$ и множеството $(0,1)$ имаат ист кардинален број c, доволно е да покажеме дека множествата $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ и $(0,1)$ се еквивалентни. Да забележиме дека секој реален број $x\in(0,1)$ може да се претстави во бинарна децимална форма $x=0,b_1b_2b_3...$ каде што секој b_i е 0 или 1. На пример, $x=0,1101...=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...$. На секој реален број x му придружуваме подмножество од природни броеви коешто се состои од индексите i за кои $b_i=1$. На пример:

$$x=0,1101...\ \leftrightarrow\ \{1,2,4,...\}$$
$$x=0,011011...\ \leftrightarrow\ \{2,3,5,6,...\}$$
$$x=0,11101...\ \leftrightarrow\ \{1,2,3,5,...\}.$$

Вака дефинираното пресликување е биекција, па значи $(0,1)\sim\mathcal{P}(\mathbb{N})$, т. е. $c=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. □

***Пример* 4.** Докажи дека множеството M од сите низи од нули и единици има кардиналност c.

Решение. Да разгледаме некои две низи од нули и единици, на пример

Низа 1: 100101000...
Низа 2: 001011001000...

каде што трите точки на крајот од секоја од овие две низи значи дека останатите членови од низата се нули. Очигледно, низата 1 има единици на првото, четвртото и на шестото место, а нули на сите останати места, додека низата 2 има единици на третото, петтото, шестото и деветтото место, а нули на сите останати места. На секоја низа може да ѝ се придружи подмножество од природни броеви кое се состои од позициите на единиците. На пример:

$$\text{Низа 1: } 100101000\ldots \leftrightarrow \{1,4,6\}$$
$$\text{Низа 2: } 001011001000\ldots \leftrightarrow \{3,5,6,9\}.$$

На овој начин се дефинира биективно пресликување меѓу множеството M и партитивното множество $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ на природните броеви, т. е. $|M| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c$. □

Со $2^{\aleph_0}$ го означуваме кардиналниот број на $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, а заради Теорема 3 следува дека $c = 2^{\aleph_0}$.

Да го означиме со $\aleph_1$ следниот поголем бесконечен број по $\aleph_0$. Се поставува едно интересно прашање. Ако $\aleph_0$, како кардинален број на множеството на природните броеви, е најмалиот бесконечен број, а c е кардиналниот број на множеството на реалните броеви, тогаш дали постои (или не) некое множество M чијшто кардинален број би бил меѓу $\aleph_0$ и c, т. е. $\aleph_0 < |M| < c$? Со други зборови: дали $c = \aleph_1$? Кантор верувал дека последново равенство е точно, но никогаш не успеал да го докаже или да го побие. Оваа хипотеза се нарекува *Канторова хипотеза* или *Континуум хипотеза*.

Забелешка 1. Во 1938 година Гедел (Kurt Friedrich Gödel, 1938 – 1978) докажал дека Канторовата хипотеза не може да се докаже дека е погрешна, па затоа може да се смета за точна. Но, во 1963 година, американскиот математичар Пол Ј. Коен (Paul J. Cohen, 1934 – 2007), докажал дека Канторовата хипотеза е неодлучлива, т.е. дека може да се прифати дека таа е точна и може да се прифати дека таа е неточна. Ако се земе за точна аксиома, тогаш добиената теорија се нарекува *канторовска теорија на множествата*, а ако се прифати дека не е точна, тогаш добиената теорија се нарекува *неканторовска теорија на множествата*.

Обопштената Канторова хипотеза, којашто исто така ја поставил Кантор, вели дека за секое бесконечно множество A не постои бесконечно множество чијшто кардинален број е меѓу кардиналниот број на A и кардиналниот број на неговото партитивно множество $\mathcal{P}(A)$, т. е. $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\alpha}$ за $\alpha = 1, 2, \ldots$

5.5. Аритметика со кардинални броеви

Колекцијата од сите кардинални броеви може да се смета дека е надмно–жество од множеството на кардиналните броеви на конечни множества, т. е. од множеството на ненегативните цели броеви. Во овој дел ќе покажеме како одредени аритметички операции со карадиналните броеви на конечни множества можат да се прошират на сите кардинални броеви.

Дефиниција 1. Нека α и β се кардинални броеви и нека A и B се дисјунктни множества такви што $\alpha = |\, A \,|$ и $\beta = |\, B \,|$. *Збирот* (*сумата*) на α и β се означува со $\alpha + \beta$ и се дефинира со

$$\alpha + \beta = |\, A \cup B \,|.$$

Пример 1. а) Нека n е кардинален број на конечно множество. Тогаш $n + \aleph_0 = \aleph_0$, зашто $n + \aleph_0 = |\, \{1,2,...,n\} \cup \{n+1, n+2,...\} \,| = \aleph_0$.

б) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, зашто $\aleph_0 + \aleph_0 = |\, \{1,3,5,...\} \cup \{2,4,6,...\} \,| = \aleph_0$.

в) $c + c = c$, зашто $c + c = \left| \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \right| = c$.

Дефиниција 2. Нека α и β се кардинални броеви и нека A и B се множества такви што $\alpha = |\, A \,|$ и $\beta = |\, B \,|$. *Производот* од α и β се означува со $\alpha\beta$ и се дефинира со

$$\alpha\beta = |\, A \times B \,|.$$

Да забележиме дека во оваа дефиниција, множествата A и B не мора да се дисјунктни.

Пример 2. а) Нека n и m се кардинални броеви на конечни множества. Тогаш на nm одговара вообичаеното множење на ненегативни цели броеви.

б) Од тоа што $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е пребројливо множество, следува дека $\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$.

в) Од примерот 1 од претходната лекција имаме дека $|\, (0,1) \,| = c$, а од Теорема 2 од 5.4 имаме дека $|\, (0,1) \times (0,1) \,| = |\, (0,1) \,|$, па според тоа, $cc = c$.

Теорема 1. *Собирањето и множењето на кардинални броеви* α, β, γ *ги задоволуваат следните особини:*

	Кардинални броеви	Множества
(1)	$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(2)	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$A \cup B = B \cup A$
(3)	$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$	$(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$
(4)	$\alpha\beta = \beta\alpha$	$A \times B \sim B \times A$
(5)	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(6) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ $\quad A \subseteq B \Rightarrow A \cup C = B \cup C$

(7) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma$ $\quad A \subseteq B \Rightarrow A \times C = B \times C$

Доказ. Нека A, B, C се пар по пар дисјунктни множества, такви што $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$, $\gamma = |C|$.

(1) $(\alpha + \beta) + \gamma = |A \cup B| + |C| = |(A \cup B) \cup C)|$

$\alpha + (\beta + \gamma) = |A| + |B \cup C| = |A \cup (B \cup C)|$

Од асоцијативниот закон за унија на множества, следува дека десните страни на равенствата се еднакви, па значи еднакви се и левите.

(2) Од тоа што $A \cup B = B \cup A$ имаме дека

$$\alpha + \beta = |A \cup B| = |B \cup A| = \beta + \alpha .$$

(3) $(\alpha\beta)\gamma = |A \times B| \cdot |C| = |(A \times B) \times C|$

$\alpha(\beta\gamma) = = |A| \cdot |B \times C| = |A \times (B \times C)|$

Според Св. 2 од Гл. 4.6 имаме дека $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$, па $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

(4) Од тоа што $A \times B \sim B \times A$, Св. 1 од Гл. 4.6, имаме дека

$\alpha\beta = |A \times B| = |B \times A| = \beta\alpha$.

(5) Прво, да забележиме дека $B \cap C \Rightarrow (A \times B) \cap (A \times C) = \varnothing$. Тогаш:

$\alpha(\beta + \gamma) = |A| \cdot |B \cup C| = |A \times (B \cup C)|$

$\alpha\beta + \alpha\gamma = |A \times B| + |B \times C| = |(A \times B) \cup (A \times C)|$.

Бидејќи $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, следува дека $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

(6) Да претпоставиме дека $\alpha \leq \beta$. Тогаш постои инјективно пресликување $f : A \to B$. Нека $g : A \cup C \to B \cup C$ е дефинирано со:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ако } x \in A \\ x, & \text{ако } x \in C. \end{cases}$$

Тогаш g е инјекција. Според тоа, $|A \cup C| \leq |B \cup C|$ и $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

(7) Да претпоставиме дека $\alpha \leq \beta$. Тогаш постои инјективно пресликување $f : A \to B$. Нека $g : A \times C \to B \times C$ е дефинирано со:

$$g(a, c) = (f(a), c).$$

Тогаш g е инјекција. Според тоа, $|A \times C| \leq |B \times C|$ и $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$. □

Да забележиме дека не секое својство на собирање и множење на конечни кардинални броеви важи и општо за сите кардинални броеви. Таков е, на пример, законот за кратење:

(а) Ако $a + b = a + c$, тогаш $b = c$.

(б) Ако $ab = ac$ и $a \neq 0$, тогаш $b = c$.

Доволно е да најдеме примери дека (а) и (б) не важат за бесконечни кардинални броеви. Така, според примерот 1, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0 + 1$, но $\aleph_0 \neq 1$, а слично, според примерот 2, $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0 \cdot 1$, но $\aleph_0 \neq 1$.

Од друга страна, собирањето и множењето на кардинални броеви е многу просто. Тука ќе ја наведеме следната теорема, но без доказ.

Теорема 2. Нека α и β се ненулти кардинални броеви, такви што β е бесконечен и $\alpha \leq \beta$. Тогаш $\alpha + \beta = \alpha\beta = \beta$. □

Дефиниција 3. Нека α и β се ненулти кардинални броеви и нека A и B се множества такви што $\alpha = |A|$ и $\beta = |B|$. *Степен* од α на β се означува со α^β и се дефинира со

$$\alpha^\beta = |A^B|.$$

Теорема 3. Нека α, β, γ се кардинални броеви. Тогаш:

(а) $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \beta^\gamma$ (б) $\alpha^\beta \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ (в) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

Доказ. (а) Ќе покажеме дека $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$ од што ќе произлезе точноста на равенството. Дефинираме пресликување $h : (A \times B)^C \to A^C \times B^C$ со:

$$h(\varphi) = (p_1 \circ \varphi,\ p_2 \circ \varphi),$$

каде што $p_1 : A \times B \to A$, $p_2 : A \times B \to B$ се дефинирани со:

$$p_1(a,b) = a, \text{ за секој } a \in A \text{ и}$$
$$p_2(a,b) = b, \text{ за секој } b \in B.$$

Овие пресликувања се нарекуваат *канонични проекции* од $A \times B$ на A и B, соодветно.

Прво ќе покажеме дека пресликувањето h е сурјекција. Навистина, нека $(f,g) \in A^C \times B^C$. Според задача 3 од задачите за вежбање од оваа лекција, следува дека постои $\varphi \in (A \times B)^C$, така што $p_1 \circ \varphi = f$ и $p_2 \circ \varphi = g$.

Ќе покажеме дека h е инјекција. Нека $\varphi, \psi \in (A \times B)^C$ и $h(\varphi) = h(\psi)$. Тогаш

$$\begin{aligned} h(\varphi) = h(\psi) &\Rightarrow (p_1 \circ \varphi,\ p_2 \circ \varphi) = (p_1 \circ \psi,\ p_2 \circ \psi) \\ &\Rightarrow p_1 \circ \varphi = p_1 \circ \psi \ \wedge\ p_2 \circ \varphi = p_2 \circ \psi \\ &\Rightarrow \varphi = \psi \qquad \text{(следува од единственоста на пресликувањето } \varphi\text{).} \end{aligned}$$

Според тоа, h е биекција, па $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$, а оттука $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \beta^\gamma$.

(б) Произлегува од задача 6 од задачите за вежбање од Гл.4.6.

(в) Ќе покажеме дека $A^{B\times C} \sim (A^B)^C$. Нека $f \in A^{B\times C}$, т. е. $f: B\times C \to A$.

Дефинираме пресликување $h: A^{B\times C} \to (A^B)^C$ со:

$$h(f) = F ,$$

каде што $F: C \to A^B$ е дефинирано со

$$(\forall y \in C)\ \ F(y) = f_y ,$$

а $f_y : B \to A$ е пресликување дефинирано со:

$$(\forall x \in B)\ \ f_y(x) = f(x, y) .$$

Пресликувањето h е инјекција. Нека $f', f'' \in A^{B\times C}$ и нека $h(f') = h(f'')$. Тогаш

$$\begin{aligned} h(f') = h(f'') &\Rightarrow F_1 = F_2 \\ &\Rightarrow (\forall y \in C)(f'_y = f''_y) \\ &\Rightarrow (\forall y \in C)(\exists x \in B)(f'(x,y) = f''(x,y)) \\ &\Rightarrow f' = f'' . \end{aligned}$$

Пресликувањето h е сурјекција. Нека $g: C \to A^B$ е произволно избран елемент од $(A^B)^C$ и нека за секој $y \in C$, $g(y) = f_y$, каде што $f_y : B \to A$.

Со пресликувањето *h*, елементот $f \in A^{B\times C}$ (кој претставува пресликување од $B \times C$ во A дефинирано со $f(x,y) = (f_y)(x)$) се пресликува во елементот *g*, па значи *h* е сурјекција. Значи, *h* е биекција. Оттука следува дека $\alpha^{\beta}\alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$.

Пример 3. Со помош на Теоремата 3, можеме да покажеме дека:

1) $c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$.

2) $c^c = (2^{\aleph_0})^c = 2^{\aleph_0\cdot c} = 2^c$.

Задачи за вежбање

1. Покажи дека $\aleph_0 \cdot c = c$.

Решение. Нека $A = [0,1)$ и нека $f: \mathbb{Z}\times A \to \mathbb{R}$ е пресликување дефинирано со:

$$f(n, a) = n + a .$$

Со други зборови, за секој $n \in \mathbb{N}$, $f(\{n\}\times[0,1))$ се пресликува во полуотворениот интервал $[n, n+1)$. Јасно е дека ова пресликување е сурјекција и инјекција. Од тоа што $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$, $|A| = |\mathbb{R}| = c$, имаме дека $\aleph_0 \cdot c = |\mathbb{Z}\times A| = |\mathbb{R}| = c$.

2. Нека $f:C\to A$, $g:C\to B$ се две пресликувања и $p_1:A\times B\to A$, $p_2:A\times B\to B$ се канонични проекции од $A\times B$ на А и В, соодветно. Тогаш постои единствено пресликување $\varphi:C\to A\times B$ така што дијаграмот

$$\begin{tikzcd} & A \\ C \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "g"'] & A\times B \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\ & B \end{tikzcd}$$

комутира, т. е. $p_1\circ\varphi=f$ *и* $p_2\circ\varphi=g$.

Решение. Дефинираме пресликување $\varphi:C\to A\times B$ со:

$$(\forall x\in C)\ \ \varphi(x)=(f(x),g(x)).$$

Тогаш $(p_1\circ\varphi)(x)=p_1(\varphi(x))=p_1(f(x),g(x))=f(x)$, за секој $x\in C$. Оттука, $p_1\circ\varphi=f$. Слично $(p_2\circ\varphi)(x)=p_2(\varphi(x))=p_2(f(x),g(x))=g(x)$, за секој $x\in C$. Оттука, $p_2\circ\varphi=g$.

Да ја покажеме единственоста на пресликувањето φ. Нека $\psi:C\to A\times B$ е пресликување што ги задоволува условите на задачата и да претпоставиме дека $\psi(x)=(y_1,y_2)$, каде што $y_1\in A$, $y_2\in B$. Тогаш

$$(p_1\circ\psi)(x)=p_1(\psi(x))=p_1(y_1,y_2)=y_1=f(x).$$
$$(p_2\circ\psi)(x)=p_2(\psi(x))=p_2(y_1,y_2)=y_2=g(x).$$

Според тоа, $\psi(x)=(y_1,y_2)=(f(x),g(x))=\varphi(x)$, за секој $x\in C$, па значи $\psi=\varphi$.

5.6. Ординални броеви

Двата основни типови броеви во теоријата на множествата се кардинални и ординални броеви. Да се потсетиме: кардинален број, во најпроста смисла, е бројот на елементите во едно множество. Така на пример, ако на испит се дојдени четворица студенти, тогаш кардиналниот број на ова множество студенти е 4. Но, ако зборуваме за четвртиот студент кој го полага испитот, тоа одговара на ординалниот број 4 и имплицира дека тројца полагале пред него. Јасно, во секојдневната употреба, ординален број претставува термин којшто ја означува нумеричката позиција на еден објект, како на пример, прв, втор, трет, итн. Ординалноста се однесува на тоа како множеството е организирано, т.е. подредено.

Во формалната теорија на множествата ординален број се дефинира како подредбен тип на добро подредени множества. Да видиме што значи тоа и да разгледаме еден едноставен пример.

Дефиниција 1. За две подредени множества $(A,\leq)$ и $(B,\leq')$ велиме дека се *подредбено изоморфни* (или *слични*) ако постои биекција $f:A\to B$ таква што

$$\left(\forall a_1,a_2\in A\right)\left(a_1\leq a_2 \Leftrightarrow f(a_1)\leq' f(a_2)\right).$$

(Со други зборови, $(A,\leq)$ и $(B,\leq')$ имаат иста кардиналност и постои пресликување што го запазува подредувањето меѓу двете множества.)

Пресликувањето $f:A\to B$ дефинирано на овој начин се вика *подредбен изоморфизам* на $(A,\leq)$ и $(B,\leq')$.

За множествата $(A,\leq)$ и $(B,\leq')$ велиме дека имаат ист *подредбен тип* ако тие се подредбено изоморфни.

Истата дефиниција се користи и за линеарно подредени множества.

Поимот подредбен тип го вовел *Џон фон Нојман* (John von Neumann, 1903 – 1957), унгарско-американски математичар, физичар и компјутерски научник, во 1923 година.

***Пример* 1.** Нека $A=\{a_0,a_1,a_2,a_3\}$ и нека A е добро подредено множество со $a_0<a_1<a_2<a_3$, а $B=\{0,1,2,3\}$. Тогаш можеме да дефинираме пресликување $f:A\to B$ со:

$$f(a_0)=0,\quad f(a_1)=1,\quad f(a_2)=2,\quad f(a_3)=3.$$

Пресликувањето f е биекција, а множествата A и B се подредбено изоморфни. Притоа, A има подредбен тип 4.

Ако $(A,\leq)$ и $(B,\leq')$ се линеарно подредени множества со n елементи, каде што $n\in\mathbb{N}$, тогаш тие се подредбено изоморфни добро подредени множества.

Навистина, нека $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, каде што $a_i\neq a_j$ за $i\neq j$, е линеарно подредено множество. Ако a_1 не е најмал елемент, тогаш постои $a_i\in A$ таков што $a_i\leq a_1$. Ако a_i не е најмал, тогаш постои $a_j\in A$ таков што $a_j\leq a_i\leq a_1$. Продолжувајќи ја натаму оваа постапка ќе добиеме дека во A има најмал елемент. Да го означиме со c_1. Множеството $A\setminus\{c_1\}$ има најмал елемент – да го означиме со c_2. Продолжувајќи ја оваа постапка, добиваме дека множеството A може да се претстави како $A=\{c_1,c_2,...,c_n\}$, каде што $c_1 \le c_2 \le ... \le c_n$.

На ист начин се покажува дека $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ може да се претстави како $B=\{d_1,d_2,...,d_n\}$, каде што $d_1 \le' d_2 \le' ... \le' d_n$. Дефинираме пресликување $f: A \to B$ со $f(c_i)=d_i$, $i \in \{1,...,n\}$. Јасно е дека вака дефинираното пресликување е биекција која ги запазува подредувањата. Според тоа, $(A,\le)$ и $(B,\le')$ се подредбено изоморфни добро подредени множества.

Лема 1. (Лема за ригидност) *Нека* $(A,\le)$ и $(B,\le')$ *се добро подредени множества и нека* $f_1, f_2 : A \to B$ *се два подредбени изоморфизми на* A *и* B*, соодветно. Тогаш* $f_1 = f_2$.

Доказ. Нека f_1 и f_2 се подредбени изоморфизми меѓу добро подредените множества A и B, за кои можеме да претпоставиме дека се непразни. Да го означиме со S_2 множеството што ги содржи сите елементи a од A такви што $f_1(a) \ne f_2(a)$ и нека $S_1 = A \setminus S_2$. Бидејќи најмалиот елемент од A мора да се преслика во најмалиот елемент од B со кое било пресликување со кое се запазува подредувањето, следува дека $S_1 \ne \varnothing$. Да ставиме $T_1 = f_1(S_1) = f_2(S_1)$. Под претпоставка дека $S_2 \ne \varnothing$, нека a_2 е неговиот најмал елемент. Тогаш $f_1(a_2)$ и $f_2(a_2)$ се најмали елементи во $B \setminus T_1$, па значи, тие мора да се еднакви, што е контрадикција. Следствено, $f_1 = f_2$. □

***Пример* 2.** Нека A е конечно множество со n елементи. За конечно множество, поимите добро подредено множество и линеарно подредено множество се совпаѓаат и јасно е дека постои (до подредбен изоморфизам) единствено линеарно подредување на A. Слободно речено, ако $\le$ и $\le'$ се две подредувања на множество со n елементи, можеме да дефинираме биективно пресликување што го запазува подредувањето ако ги „спаруваме" најмалите елементи, па потоа вторите по ред најмали елементи, итн.

Сега ќе го дефинираме поимот ординален број.

Дефиниција 2. Нека $(A,\le)$ е добро подредено множество. *Ординален број* или *ординал* на множеството A е класа од добро подредени множества кои се подредбено изоморфни со множеството A; се означува со некоја грчка буква, на пример $\alpha, \beta, \gamma, ...$ (или со $o(A)$ или со $\operatorname{ord} A$).

Множеството од сите ординални броеви β помали од α е добро подредено со подредбен тип α во однос на подредувањето $\leq$. Дополнително, секое множество од ординални броеви е добро подредено со релацијата $\leq$, т.е. секое непразно подмножество од ординални броеви содржи најмал ординален број. За кое било множество Z од ординални броеви, постои ординален број што е поголем од кој било ординален број од множеството Z. Според тоа, не постои множество од сите ординални броеви.

Забелешка. Дефиницијата на фон Нојман за ординал на множество вели: „Секој ординал е дефиниран со множеството од сите ординали што му претходат." Од аксиомата за бесконечност (в. 2.6.) имаме дека првиот ординал е празното множество $\varnothing$. Вториот е множеството што го содржи претходниот ординал, т. е. $\{\varnothing\}$. Третиот е множеството што ги содржи претходните два ординали, т. е. $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$. Четвртиот ординал веќе станува поконфузен: $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$. Очигледно, ваквата форма на запишување на ординалите е тежок, па затоа воведуваме практична форма на симболичко запишување. (Симболот „ $:=$ " ќе ни означува: „по дефиниција ставаме да е еднакво на..."

$$0 := \varnothing\,,$$

$$1 := \{\varnothing\} = \{0\}\,,$$

$$2 := \{\varnothing,\{\varnothing\}\} = \{0,1\}\,,$$

$$3 := \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\} = \{0,1,2\}\,,$$

$$4 := \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\} = \{0,1,2,3\}\,, \text{ итн.}$$

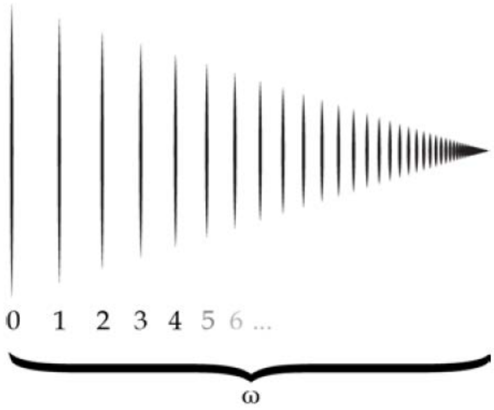
Дефиниција 3. *Ординал-следбеник* на ординален број α е ординален број β што е еднаков на $\alpha + 1$.

Натаму кусо ќе велиме само *следбеник*. Следбеникот на еден ординален број α се дефинира со помош на симболи вака: $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$. (Следбеникот на еден ординален број α се означува и со α^+.)

Дефиниција 4. *Трансфинитен број* е подредбениот тип на бесконечно добро подредено множество.

***Пример* 3.** Првиот трансфинитен ординал е множеството од сите конечни ординали заедно со нивниот супремум. Тоа множество симболички се означува со ω, т. е. $\omega := \{0,1,2,\ldots\}$.

Овој трансфинитен ординал има следбеник, $\omega+1$, а тој е вториот трансфинитен ординал. Според горната дефиниција на ординал-следбеник имаме дека $\omega+1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0,1,2,\ \ldots\ ,\omega\}$.



Слика 1. Визуализација на ω.

Секој ординал има ординал-следбеник, но не секој ординал има непосреден претходник. Со исклучок на 0, секој ординал што нема непосреден претходник е граничен ординал.

Дефиниција 4. *Граничен ординал* е ординален број што не е ниту нула ниту следбеник-ординал.

Значи, еден ординал λ е граничен ординал ако и само ако постои ординал помал од λ и секогаш кога β е ординал помал од λ, тогаш постои ординал γ таков што $\beta < \gamma < \lambda$.

Според тоа, секој ординален број е или нула, или ординал-следбеник, или граничен ординал.

***Пример* 4.** На пример, ω – најмалиот ординал што е поголем од секој ненегативен цел број – е граничен ординал зашто за кој било помал ординал (т.е. за кој било ненегативен цел број n) можеме да најдеме друг ненегативен цел број поголем од него (на пример $n+1$) којшто е помал од ω.

***Пример* 5.** Операцијата „следбеник“ ни овозможува со помош на ω да конструираме нови ординални броеви:

$\omega+1$, $\omega+2 := (\omega+1)+1$ и, за секој $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\omega+n := (\omega+(n-1))+1$.

Сите овие се различни ординални броеви.

Формалната дефиниција за *собирање на ординални броеви* се претставува со помош на Декартов производ којшто е добро подреден поради специфичниот начин на кој е дефиниран. Збирот на два ординални броеви α и β го дефинираме како подредбен тип на унијата на множествата $\alpha \times \{0\}$ и $\beta \times \{1\}$, т. е.

$$\alpha+\beta=\overline{\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\}}\,,$$

при што цртата одозгора ни го означува подредбениот тип на множеството. За вредностите 0 и 1 доволно е да важи само дека $0<1$.

Да забележиме дека не мора да ги користиме вредностите 0 и 1. Збирот $\alpha+\beta$ можеме да го дефинираме и вака:

$$\alpha+\beta=\overline{\alpha\times\{m\}\cup\beta\times\{n\}}\,,\ \text{каде што } m<n\,.$$

***Пример* 6.** Да го пресметаме збирот на ординалите 2 и 3. Според дефиницијата, $2+3=\overline{2\times\{0\}\cup3\times\{1\}}$. Да се потсетиме: ординалот $2=\{0,1\}$, а ординалот $3=\{0,1,2\}$. Значи,

$$2\times\{0\}\cup3\times\{1\}=\{0,1\}\times\{0\}\cup\{0,1,2\}\times\{1\}=\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(2,1)\}\,.$$

Ова множество е изоморфно со множеството $\{1,2,3,4,5\}$, па значи $2+3=5$.

Овој едноставен пример одговара и на нашето сфаќање за собирањето на природни броеви. Кога се собираат природни броеви, горното подредување не влијае на крајниот збир, зашто унијата можеме да ја подредиме како што сакаме и повторно да го добиеме истиот резултат. Колку е важно подредувањето се покажува дури кога почнуваме да собираме трансфинитни ординали.

Забелешка за ознаките. Симболите 0,1,2,3,... во текстот погоре се употребуваат со две значења: 1) како природни (т. е. кардинални) броеви и 2) како редни (т. е. ординални) броеви. Во случајот 1) изговараме: нула, еден, два, три, ..., соодветно, а во случајот 2), ако сакаме да бидеме прецизни, би требало да изговараме: нулти, прв, втор, трет, ... соодветно.

***Пример* 7.** Ќе покажеме дека $1+\omega\neq\omega+1$.

Од дефиницијата имаме дека $1+\omega=\overline{1\times\{0\}\cup\omega\times\{1\}}$. Од тоа што $1=\{0\}$ и $\omega=\{0,1,2,...\}$ следува дека:

$$1\times\{0\}\cup\omega\times\{1\}=\{0\}\times\{0\}\cup\{0,1,2,...\}\times\{1\}=\{(0,0),(0,1),(1,1),(2,1),....\}\,.$$

Ова множество е изоморфно со $\{0,1,2,...\}=\omega$, па $1+\omega=\omega$.

Од друга страна, $\omega+1=\overline{\omega\times\{0\}\cup\{0\}\times\{1\}}=\overline{\{0,1,2,...\}\times\{0\}\cup\{0\}\times\{1\}}$. Пресметувајќи го Декартовиот производ добиваме дека

$$\{0,1,2,...\}\times\{0\}\cup\{0\}\times\{1\}=\{(0,0),(1,0),(2,0),...,(0,1)\}\,.$$

Разликата меѓу ова и претходното множество е во подредувањето. Прво броиме до бесконечност, а потоа „додаваме“ еден елемент. Така, горното множество ќе биде изоморфно со $\{0,1,2,\ldots,\omega\}$ коешто е поголемо од ω. Значи, $1+\omega\neq\omega+1$.

(Да забележиме дека: $1+\omega=2+\omega=3+\omega=...=\omega$.)

Од овој пример гледаме дека собирањето на ординални броеви не е комутативна операција. Сепак, веднаш се гледа дека собирањето на ординали е асоцијативна операција.

Нашето сфаќање за множењето на ординални броеви е многу слично со нашето елементарно сфаќање на множењето на целите броеви како собирање што се повторува. Множењето на трансфинитни ординали е поневообичаено. Формалната дефиниција за *множењето на ординални броеви* е следнава:

$$\alpha\cdot\beta=\sum_{\gamma<\beta}\alpha .$$

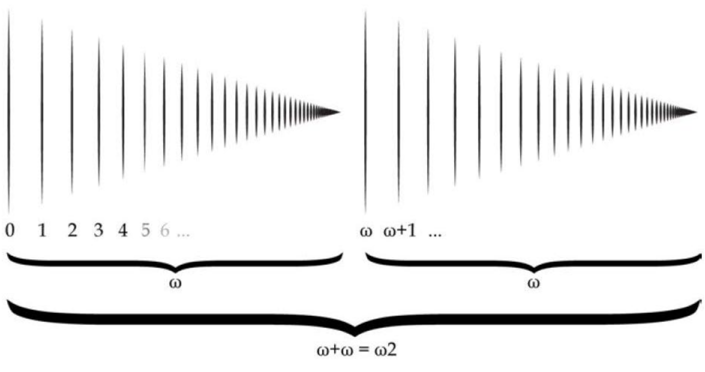
За илустрација да го земеме, на пример, производот $4\cdot 3$. Ова значи дека бројот 4 се собира трипати, т.е. $4\cdot 3=4+4+4$. Од формалната дефиниција за собирање ординали имаме дека

$$\begin{aligned}4+4+4&=\overline{4\times\{0\}\cup 4\times\{1\}\cup 4\times\{2\}}=\\&=\overline{\{0,1,2,3\}\times\{0\}\cup\{0,1,2,3\}\times\{1\}\cup\{0,1,2,3\}\times\{2\}}=\\&=\overline{\{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(0,1),(1,1),(2,1),(3,1),(0,2),(1,2),(2,2),(3,2)\}}.\end{aligned}$$

Ова множество е изоморфно со множеството $\overline{\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}}=12$, па значи $4\cdot 3=12$.

Да забележиме дека со $\omega 2$ се означува производот на ω со 2, а тоа е збирот $\omega+\omega$, т.е. $\omega 2=\omega+\omega$. Тоа не е исто што и 2ω, коешто значи 2 да е собирок бесконечно пати, т. е. $2\omega=2+2+2+...$. Овој збир, пак, е еднаков на $1+1+1+1+...$, а тој е еднаков на ω. Значи, $\omega 2=\omega+\omega>\omega=2\omega$.

За илустрација, графички ќе го прикажеме трансфинитниот ординал $\omega 2$, а од тоа јасно се гледа и дека $\omega 2\neq 2\omega$.



Слика 2. Визуализација на $\omega 2$.

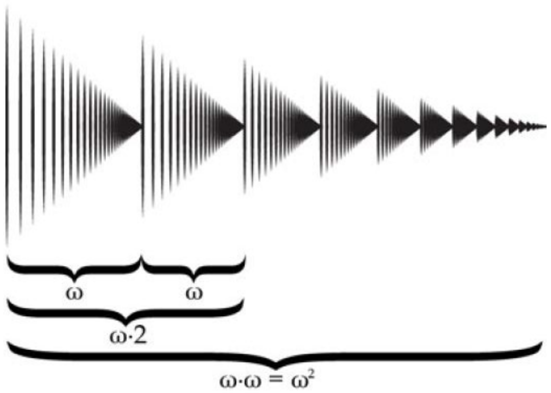
Слично како и за собирањето, множењето ординали не е комутативно.

Степенувањето ординали може да се сфати како повторување на множењето. Него ќе го дефинираме на следниов начин:

$$\alpha^{\beta} := \prod_{\gamma<\beta} \alpha \ .$$

На пример, $4^3 = \prod_{\gamma<3} 4 = 4\cdot 4\cdot 4 = (4+4+4+4)\cdot 4 = 16\cdot 4 = 16+16+16+16 = 64$.

Ова станува поинтересно кога станува збор за трансфинитни ординали. Да ја разгледаме природата на ω^2. Да се квадрира еден ординал значи тој да се помножи сам со себе, па така $\omega^2 = \omega\cdot\omega$. Множењето на еден ординал со ω значи тој да се множи бесконечно пати сам со себе, па $\omega^2 = \omega+\omega+\omega+\dots$.



Слика 3. Визуализација на ω^2.

Повторувајќи ја оваа операција добиваме $\omega^3 = \omega^2\cdot\omega$, итн. Ова ни овозможува да ги претставиме ординалите во облик на полином

$$P(\omega) = a_n\omega^n + \ldots + a_1\omega + a_0 \ , \text{ каде што } a_i \in \mathbb{N} .$$

Забелешка. Еден од поинтересните резултати во теоријата на множествата е постоењето на различни видови бесконечности. Тоа се случува и со кардиналните и со ординалните броеви. Иако резултатите што се однесуваат на кардиналните и на ординалните броеви му ги должиме на Кантор, сепак идејата не е оригинална, што се гледа од белешките на *Бернард Болцано* (Bernard Bolzano, 1781 – 1848), чешки филозоф, логичар, математичар и католички свештеник со италијанско потекло. Тој во делото „Парадокси за бесконечноста“ запишал:

„*Дури и во примерите за бесконечното што се досега разгледувани, не можеме да не забележиме дека сите бесконечни множества не може да се сметаат за еднакви во однос на бројноста на елементите. Напротив, многу од нив се поголеми (или помали) од некои други, во смисла дека едниот* *го вклучува другиот како дел од себе (или е во релација со другиот како дел од целината). Многумина сметаат дека ова е уште еден парадокс, и навистина, во очите на сите коишто ја дефинираат бесконечноста како нешто што не може да се зголеми, идејата дека една бесконечност е поголема од друга, мора да изгледа не само парадоксално, туку дури и чисто контрадикторно.*“

Литература

[1] Н. Бурбаки, *Теория множеств*, Издательство Мир, Москва, 1965.

[2] G. Vojvodić, *Predavanja iz matematičke logike i algebre*, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad, 1998.

[3] G. Vojvodić, B. Šobot, *Zbirka zadataka iz matematičke logike i algebre*, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad, 2003.

[4] В. Девиде, *Увод во математичката логика*, Библиотека „Математич–ка школа“, Математички институтут со нумерички центар при УКИМ, Скопје, 1973 (превод).

[5] V. Devidé, *Matematika kroz kulture i epohe*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[6] M. Janjić, *Predavanja iz Osnova matematike 2012–2013 god., Matematička logika, skupovi, funkcije, brojevi*, Prirodno-matematički fakultet Univerzitet u Banja Luci, 2013.

[7] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Издательство Мир, Москва, 1970.

[8] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Издательство Мир, Москва, 1979.

[9] J. Lewin, *A simple proof of Zorn's lemma*, The American Mathematical Monthly, 98(4), 1991, 353–354.

[10] S. Lipschutz, *Set Theory and Related Topics*, Second Edition, Schaums’ Outline of Theory and Problems, McGraw-Hill Inc., 1998.

[11] S. Milić, *Elementi Matematičke logike i teorije skupova*, A – Š delo, Beograd, 1991.

[12] G. O’Regan, *Guide to Discrete Mathematics, An Accessible Introduction to the History, Theory, Logic and Applications*, Springer, 2016.

[13] Б. Трпеновски, Н. Целакоски, Ѓ. Чупона, *Виша математика, книга* I, Просветно дело, Скопје, 1995.

[14] А. Самарџиски, Н. Целакоски, *Збирка задачи по алгебра, МНОЖЕСТВА*, трето издание, УКИМ, Скопје, 1996.

[15] S. J. Farlow, *Finite Mathematics and its Applications*, McGraw Hill, 1992.

[16] P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, NJ, 1960.

[17] Ѓ. Чупона, *Предавања ӣо алīебра книīа* I, УКИМ, Скопје, 2000.

[18] Ѓ. Чупона, *Алīебраски сӣрукӣури и реални броеви*, УКИМ, ПМФ, Скопје, 1976.

[19] Ѓ. Чупона, Б. Трпеновски, *Предавања ӣо алīебра книīа* II, УКИМ, Скопје, 2000.

[20] Н. Целакоски, *Дидакӣика на маӣемаӣикаӣа*, Дидактичко-методска нумерусова библиотека 2, „Нумерус“, Скопје, 1993.

[21] P. L. Clark, *Well-ordered sets, Ordinalities and the Axiom of Choice*, 2016, http://math.uga.edu/%7Epete/settheorypart3.pdf.

[22] J. R. Clark III, *Transfinite Ordinal Arithmetic*, Master Thesis, Governors State University, 2017.

[23] A. R. Weiss, *An Introduction to Set Theory*, Create Space Independent Publishing Platform, 2014.

[24] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Algebra* 1 *sa logičkim uvodom, teorija i zadaci*, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad, 2000.

Показател на поими и имиња

Е-издание: https://ukim.edu.mk/e-book/00158