



Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје

Векторска анализа

Весна Андова

Павел Димовски

Томи Димовски

Бојан Прангоски

Скопје, 2026

Издавач:

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. „Гоце Делчев“ бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:

проф. д-р Биљана Ангелова, ректор

Уредник на публикацијата:

проф. д-р Весна Андова
проф. д-р Павел Димовски
доц. д-р Томи Димовски
проф. д-р Бојан Прангоски

Рецензенти:

1. проф. д-р Алекса Малчески
2. проф. д-р Сања Атанасова
3. проф. д-р Даниел Велинов

Техничка обработка:

Весна Андова, Павел Димовски, Томи Димовски, Бојан Прангоски

Лектура на македонски јазик:

Џутка Јованоска

Илустратор:

Весна Андова, Павел Димовски, Томи Димовски, Бојан Прангоски

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски“, Скопје

514.742.2(075.8)

ВЕКТОРСКА анализа [Електронски извор] / Весна Андова ... [и др.] ;

илустратори Весна Андова ...[и др.]. - Скопје: Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје, 2026

Начин на пристапување (URL): <https://ukim.edu.mk/e-book/00154>. - Текст во PDF формат, содржи IV, 183 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 30.12.2025. - Други автори: Павел Димовски, Томи Димовски, Бојан Прангоски. - Библиографија: стр. 183

ISBN 978-9989-43-535-5

1. Андова, Весна [автор] [илустратор] 2. Димовски, Павел [автор] [илустратор] 3. Димовски, Томи [автор] [илустратор] 4. Прангоски, Бојан [автор] [илустратор]

а) Векторска анализа -- Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 67850245

Предговор

За опишување и за подобро разбирање на природните појави, како и за функционирањето на модерните технологии создадени од луѓето секогаш, се користат математички модели и алатки. Физичкото однесување на кое подлежат различни проблеми во инженерството може да се опише со скаларно поле. Скаларно поле е функција дефинирана на просторот која во секоја точка прима скаларна вредност. Вообичаените апликации на скаларните полиња вклучуваат: електрична спроводливост, пренос на топлина, неротационен проток на течност, магнетостатика, торзионен стрес итн. Од друга страна, пак, за опишување на дејството на некоја сила (гравитациона, електрична, магнетна итн.) или за движењето на флуидите, се користат т.н. векторски полиња. Векторско поле е функција дефинирана на просторот која во секоја точка прима вектор како вредност.

Оваа книга се занимава токму со скаларните и векторските полиња, како и со нивните физички толкувања. Покрај теоретските основи во книгата има и бројни целосно решени примери, како и примери за самостојна работа. Книгата изобилува со слики кои се поддршка на изложеното. Примарно е наменета за студентите на Машинскиот факултет, Факултетот за електротехника и информациски технологии, Технолошко-металуршкиот факултет, но и за студентите на математика, физика и на другите технички факултети. Од читателот се очекува да е запознаен со диференцијалното и интегралното сметање на функции од една и повеќе реални променливи.

Организирана е во пет глави. Во првата глава се дадени основните површини кои ќе се употребуваат во останатиот дел од книгата. Втората глава е посветена на рамнинските и на просторните криви кои опишуваат траекторија на движење на дадено тело. Во третата глава се дефинирани скаларните и векторските полиња, како и поими што се тесно врзани со нив. Последните две глави се посветени на линиските и површинските интегрални и на нивното физичко значење.

Им благодариме на рецензентите кои со своите сугестии и забелешки значително придонесоа за подобрување на оваа книга.

Однапред им благодариме на сите читатели кои ќе дадат свои коментари, забелешки и предлози, или, пак, ќе укажат на некоја грешка, со што ќе помогнат во подобрување на оваа книга.

Содржина

1. Површини	1
1.1. Некоку стандардни површини	1
1.2. Тангентни рамнини на површини	7
1.3. Нерешени задачи	12
2. Криви	15
2.1. Рамнински и просторни криви	15
2.1.1. Траекторија на тело	15
2.1.2. Непрекинатост и изводи на вектор-вредносни функции	18
2.1.3. Дефиниција на крива. Брзина и забрзување	24
2.2. Репараметризација и природна параметризација	30
2.2.1. Репараметризација на криви	30
2.2.2. Должина на крива	33
2.2.3. Природна параметризација	36
2.3. Примери на криви	41
2.3.1. Примери на рамнински криви	41
2.3.2. Примери на просторни криви	47
2.3.3. Просторни криви дадени како пресек на две површини	53
2.4. Тангентен, нормален и бинормален вектор	58
2.4.1. Тангентен вектор и тангентна права	58
2.4.2. Вектор на кривина и единечен нормален вектор. Закривеност на крива	60
2.4.3. Бинормален вектор и торзија	67
2.5. Нерешени задачи	76
3. Скаларни и векторски полиња	79
3.1. Дефиниција и примери	79
3.2. Градиент, дивергенција и ротор	82
3.2.1. Градиент на скаларни полиња	83
3.2.2. Дивергенција на векторски полиња	84
3.2.3. Ротор на векторски полиња	85
3.2.4. Операторот $\vec{\nabla}$	86
3.3. Конзервативни полиња	89
3.4. Нерешени задачи	90

4. Линиски интеграли	93
4.1. Линиски интеграли од скаларни полиња	93
4.2. Линиски интеграли од векторски полиња	100
4.3. Теорема на Грин	113
4.4. Линиски интеграли од конзервативни полиња	118
4.5. Нерешени задачи	120
5. Површински интеграли	125
5.1. Површински интеграли од скаларни полиња	125
5.2. Површински интеграли од векторски полиња	138
5.3. Теорема на Стокс	158
5.4. Теорема на Гаус-Остроградски	165
5.5. Скаларен потенцијал за конзервативно поле	171
5.6. Нерешени задачи	178
Литература	183

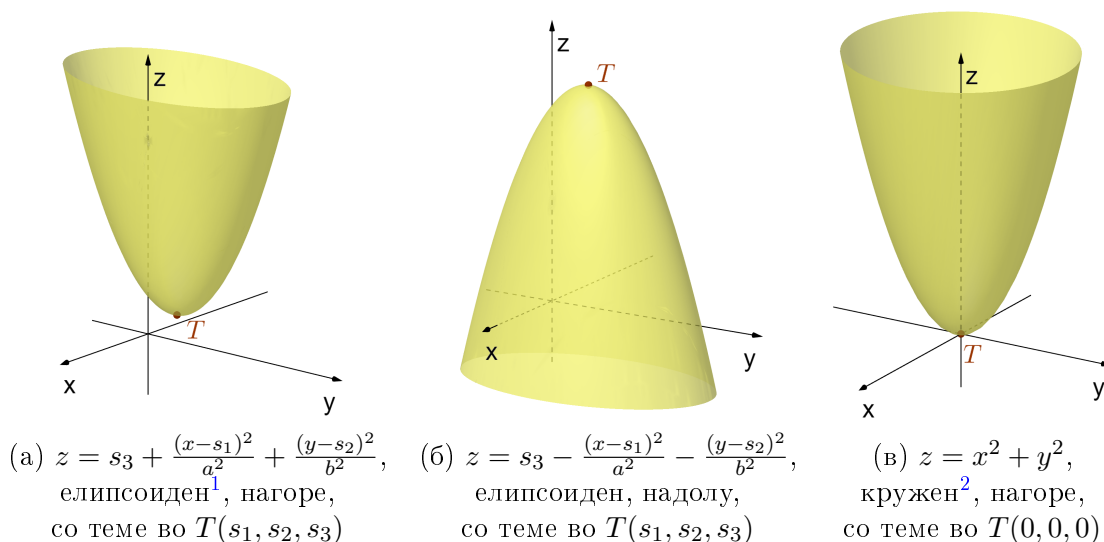
Глава 1.

Површини

1.1. Некоку стандардни површини

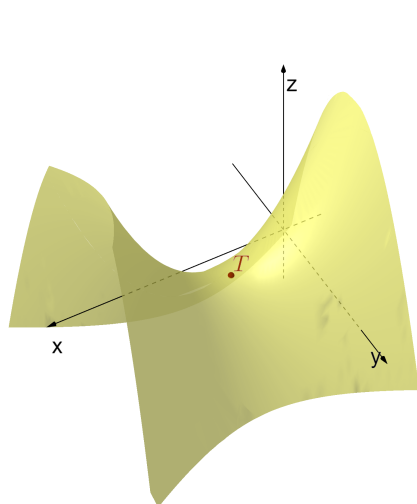
Во продолжение ќе ги илустрираме површините кои често ќе се појавуваат во книгата. Некои од нив се графици на функции, т. е. се состојат од сите точки (x, y, z) за кои важи: $z = f(x, y)$, каде f е функција од променливите x и y , додека останатите се дадени како равенства $G(x, y, z) = 0$, т. е. се состојат од сите точки (x, y, z) за кои функцијата G од променливите x , y и z добива вредност 0. Да забележиме дека секоја површина која е график на $f(x, y)$ може да биде дадена преку равенството $G(x, y, z) = 0$, ако ставиме $G(x, y, z) := z - f(x, y)$.

Слика 1.1.1: Елиптичен параболоид

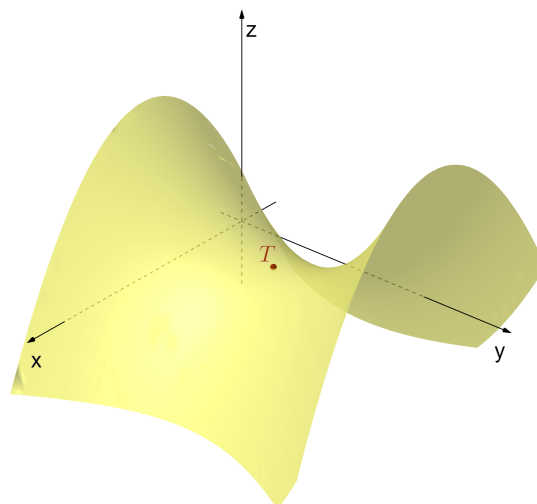


Површините од сликата 1.1.1 и од сликата 1.1.2 можат да бидат дадени како график на функција од променливите x и y : функцијата $f(x, y)$ е десната страна на изразот. Површините од сликата 1.1.3 (а) и (г), сликата 1.1.4 (а) и (г), сликата 1.1.5, сликата

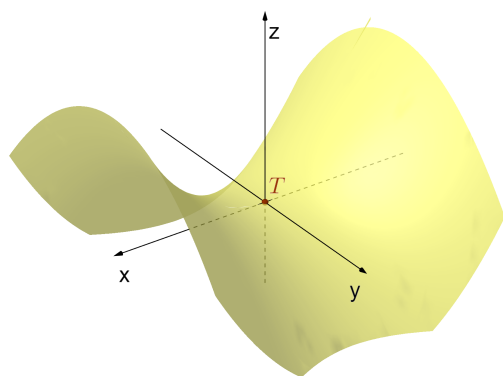
Слика 1.1.2: Хиперболичен параболоид



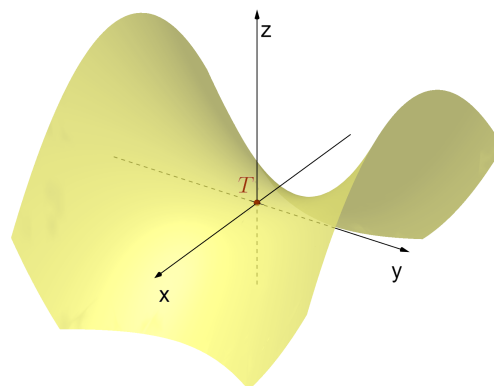
(а) $z = s_3 + \frac{(x-s_1)^2}{a^2} - \frac{(y-s_2)^2}{b^2}$,
отворен во x -насока,
со теме во $T(s_1, s_2, s_3)$



(б) $z = s_3 - \frac{(x-s_1)^2}{a^2} + \frac{(y-s_2)^2}{b^2}$,
отворен во y -насока,
со теме во $T(s_1, s_2, s_3)$



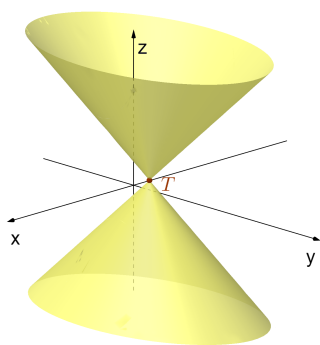
(в) $z = x^2 - y^2$,
отворен во x -насока,
со теме во $T(0, 0, 0)$



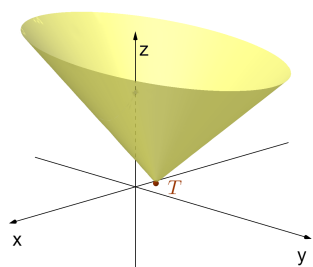
(г) $z = -x^2 + y^2$,
отворен во y -насока,
со теме во $T(0, 0, 0)$

1.1.6 и сликата 1.1.7 не можат во целост да бидат дадени како график на функција од променливите x и y ; тие се дадени преку равенството $G(x, y, z) = 0$ со очигледен избор на функцијата $G(x, y, z)$ во секоја од ситуациите. Делови од овие површини можат да бидат дадени како график на функција од две променливи: тоа најчесто се прави со изразување на променливата z од равенството како на сликата 1.1.3 и на сликата 1.1.4.

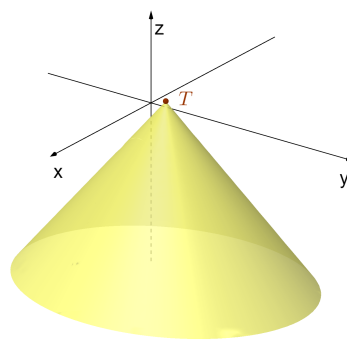
Слика 1.1.3: Конус



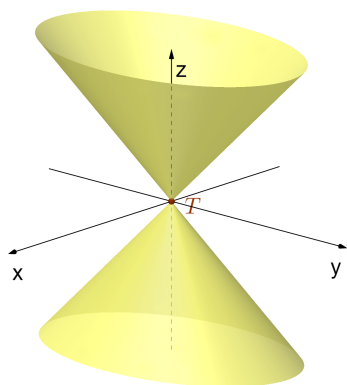
(а) $(z-s_3)^2 = \frac{(x-s_1)^2}{a^2} + \frac{(y-s_2)^2}{b^2}$,
елипсоиден, во z -насока,
со теме во $T(s_1, s_2, s_3)$



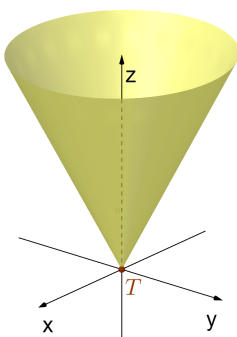
(б) $z-s_3 = \sqrt{\frac{(x-s_1)^2}{a^2} + \frac{(y-s_2)^2}{b^2}}$,
горниот дел
од конусот во (а)



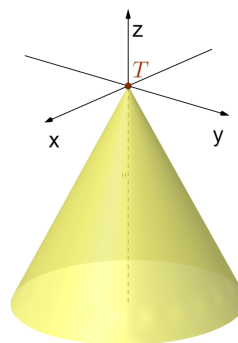
(в) $z-s_3 = -\sqrt{\frac{(x-s_1)^2}{a^2} + \frac{(y-s_2)^2}{b^2}}$,
долниот дел
од конусот во (а)



(г) $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$,
елипсоиден, во z -насока,
со теме во $T(0, 0, 0)$

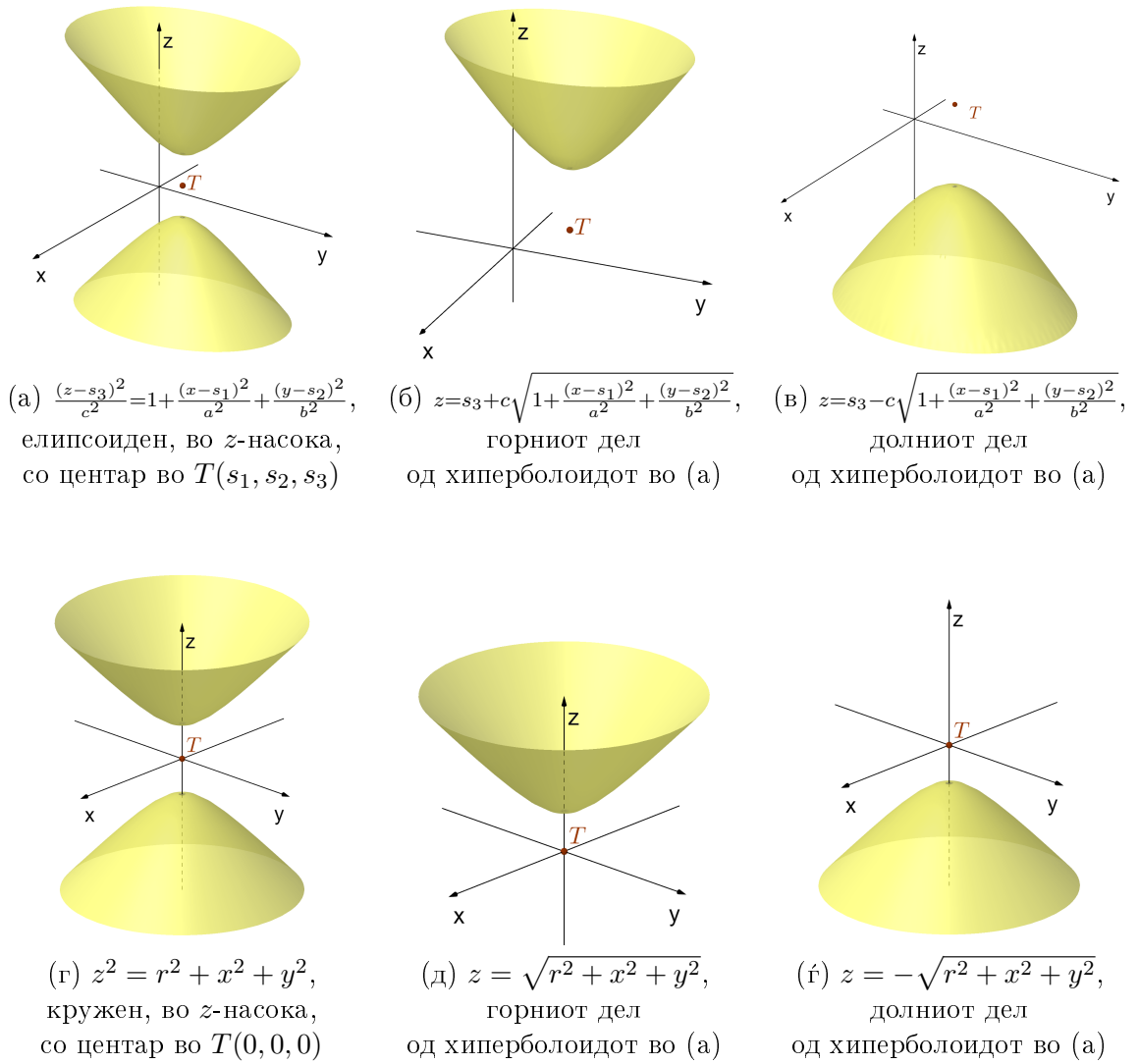


(д) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,
кружен, горниот дел
од $z^2 = x^2 + y^2$

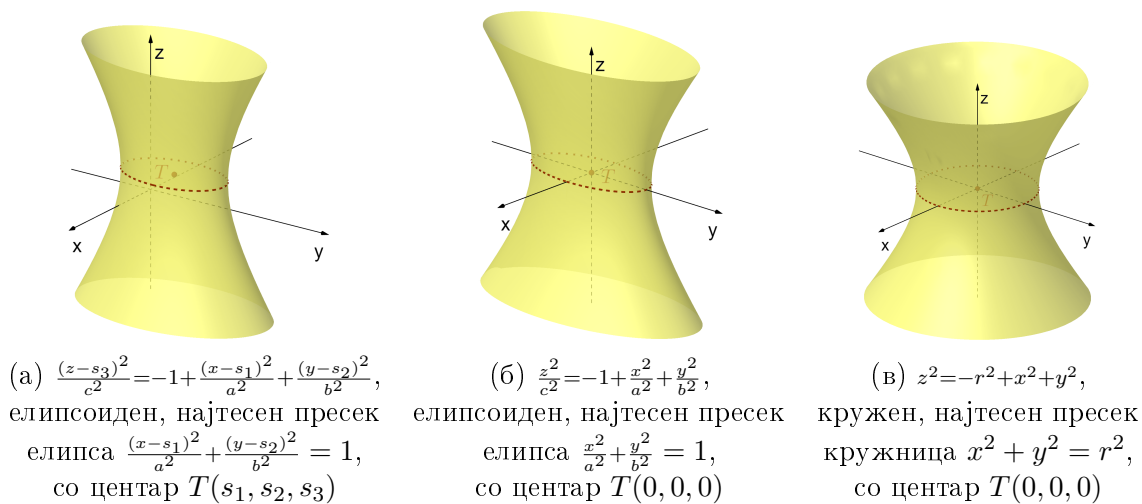


(е) $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$,
кружен, долниот дел
од $z^2 = x^2 + y^2$

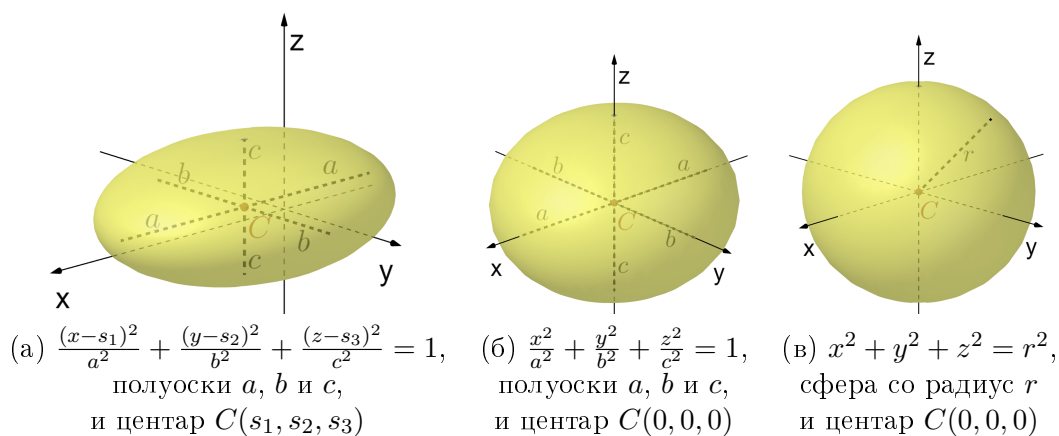
Слика 1.1.4: Елиптичен хиперболоид (двокрилен хиперболоид)



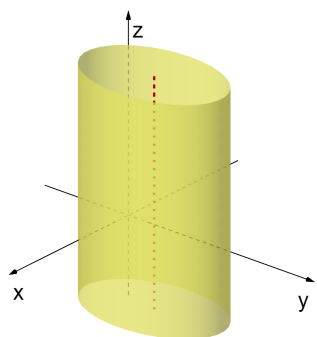
Слика 1.1.5: Хиперболичен хиперболоид (еднокрилен хиперболоид)



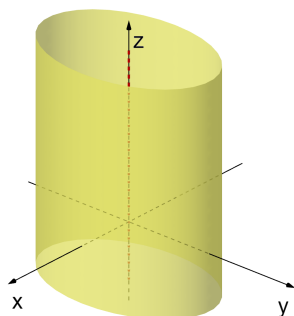
Слика 1.1.6: Елипсоид



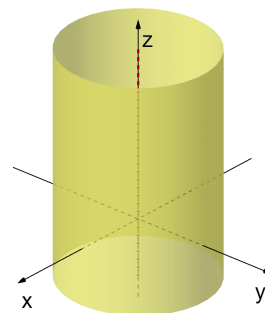
Слика 1.1.7: Цилиндар



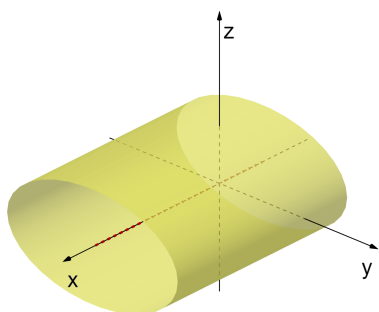
(а) $\frac{(x-s_1)^2}{a^2} + \frac{(y-s_2)^2}{b^2} = 1$, z -слободна,
во z -насока и основа
елипсата $\frac{(x-s_1)^2}{a^2} + \frac{(y-s_2)^2}{b^2} = 1$



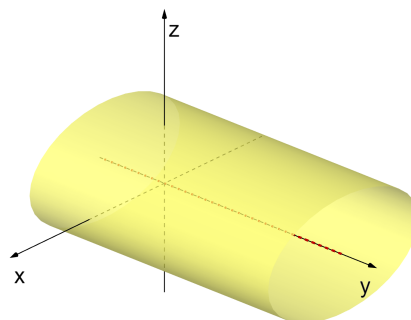
(б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, z -слободна,
во z -насока и основа
елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



(в) $x^2 + y^2 = r^2$, z -слободна,
во z -насока и основа
кружницата $x^2 + y^2 = r^2$



(а) $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, x -слободна,
во x -насока и основа
елипсата $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

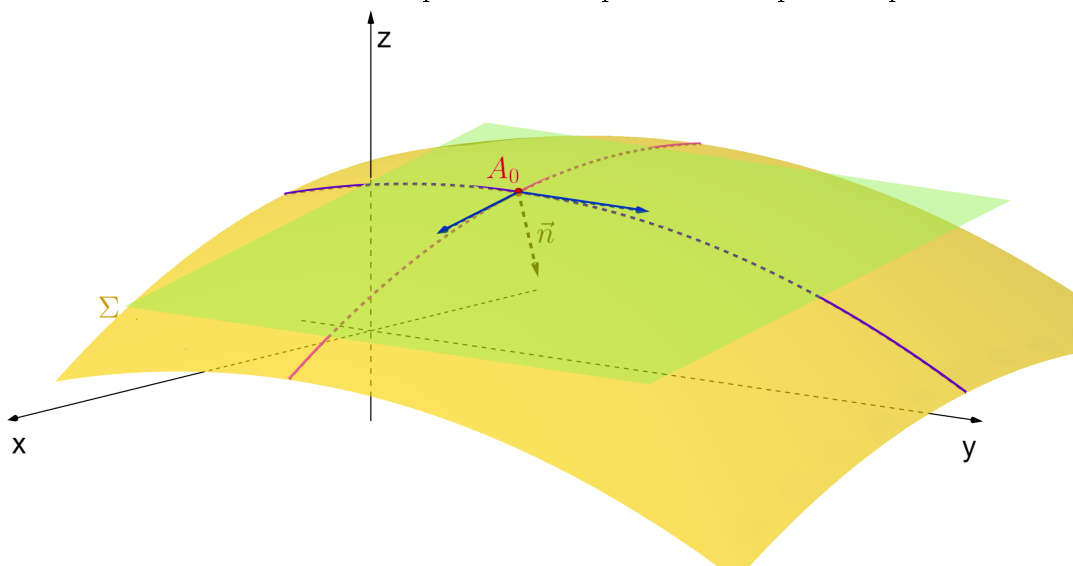


(б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, y -слободна,
во y -насока и основа
елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

1.2. Тангентни рамнини на површини

Нека површината Σ е график на функцијата $f(x, y)$ и нека $A_0(x_0, y_0, z_0)$ е точка од Σ , т. е. $z_0 = f(x_0, y_0)$. Сакаме да најдеме рамнина која минува низ A_0 и е тангентна на Σ . Ако фиксираме $y = y_0$, $z = f(x, y_0)$ е крива која лежи на Σ и минува

Слика 1.2.1: Тангентна рамнина и нормален вектор на површина



низ A_0 ; тоа е кривата која се добива кога ќе ја пресечиме Σ со рамнината $y = y_0$ (види ја сликата 1.2.1). Кој било тангентен вектор на оваа крива мора да лежи на бараната тангентна рамнина. За да најдеме тангентен вектор на кривата $z = f(x, y_0)$ забележуваме дека тоа е графикот на функцијата од една променлива $x \mapsto f(x, y_0)$ (y_0 е фиксна). Еден нејзин тангентен вектор е $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$: втората координата е 0 затоа што кривата лежи на рамнината $y = y_0$ и затоа нејзиниот тангентен вектор е паралелен со xOz -рамнината, додека другите две координати се добиваат од теоријата за тангентни вектори на функции од една променлива. Слично, ако фиксираме $x = x_0$, тогаш $z = f(x_0, y)$ е крива која лежи на Σ ; тоа е кривата која се добива како пресек на Σ со рамнината $x = x_0$. Како и претходно, кој било тангентен вектор на оваа крива лежи на бараната тангентна рамнина. За да определиме тангентен вектор на кривата $z = f(x_0, y)$, забележуваме дека тоа е графикот на функцијата од една променлива $y \mapsto f(x_0, y)$ (x_0 е фиксна). Еден нејзин тангентен вектор е $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$: како и претходно, првата координата е 0 затоа што кривата лежи на рамнината $x = x_0$ и нејзиниот тангентен вектор е паралелен со yOz -рамнината, додека другите две координати се добиваат од теоријата за тангентни вектори на функции од една променлива. Бидејќи векторите $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$ и $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$ лежат на бараната рамнина, нивниот векторски производ е нормален на неа:

$$\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \times \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) = \left(\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right).$$

Од ова следува дека тангентната рамнина на Σ во (x_0, y_0, z_0) е дадена со:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) = 0.$$

Кој било нормален вектор на оваа рамнина се вика дека е нормален вектор на површината во точката (x_0, y_0, z_0) . Ако $\vec{n}$ е еден таков вектор, тогаш $\lambda \vec{n}$ е повторно нормален вектор на Σ за кој било $\lambda \neq 0$. Од горните пресметки следува дека еден нормален вектор е:

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right).$$

Пример 1.2.1. Да се определат тангентната рамнина и нормалниот вектор на параболоидот $z = x^2 + y^2 + 1$ во неговата точка $A(1, 2, 6)$.

Параболоидот е графикот на $f(x, y) := x^2 + y^2 + 1$. Парцијалните изводи на f се:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

и нормалниот вектор е $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) = (2x, 2y, -1)$. Ги заменуваме координатите на A за да го добиеме нормалниот вектор во неа $\vec{n} = (2, 4, -1)$. Тангентната рамнина е:

$$(x - 1, y - 2, z - 6) \cdot (2, 4, -1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x + 4y - z = 4.$$

Ако површината Σ е график на функцијата $f(x, z)$ од променливите x и z , тогаш еден нормален вектор на Σ во нејзината точката (x_0, y_0, z_0) , каде $y_0 = f(x_0, z_0)$, е:

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, z_0), -1, \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, z_0) \right),$$

а тангентната рамнина на Σ низ (x_0, y_0, z_0) е

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, z_0), -1, \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, z_0) \right) = 0.$$

Слично, кога Σ е график на функцијата $f(y, z)$ од променливите y и z , еден нормален вектор на Σ во нејзината точката (x_0, y_0, z_0) , каде што $x_0 = f(y_0, z_0)$, е:

$$\vec{n} = \left(-1, \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) \right),$$

а тангентната рамнина на Σ низ (x_0, y_0, z_0) е:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(-1, \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) \right) = 0.$$

Пример 1.2.2. Да се определат тангентната рамнина и нормалниот вектор на конусот $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ (конусот е по y -оска) во неговата точка $A(1, \sqrt{10}, 3)$.

Конусот е графикот на $f(x, z) := \sqrt{x^2 + z^2}$. Парцијалните изводи на f се:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}},$$

и нормалниот вектор е:

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, -1, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, -1, \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right).$$

Ги заменуваме координатите на A за да го добиеме нормалниот вектор во неа, $\vec{n} = (1/\sqrt{10}, -1, 3/\sqrt{10})$. Тангентната рамнина е:

$$(x - 1, y - \sqrt{10}, z - 3) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -1, \frac{3}{\sqrt{10}} \right) = 0 \iff x - y\sqrt{10} + 3z = 0.$$

Некогаш површината Σ ќе биде дадена преку равенството $G(x, y, z) = 0$, каде што G е функција од x, y и z ; т. е. Σ се сите точки (x, y, z) каде што функцијата G е нула.

(*)_z Нека (x_0, y_0, z_0) е точка од Σ , т. е. важи: $G(x_0, y_0, z_0) = 0$. Ако $\frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, тогаш постои функција $f_1 = f_1(x, y)$ дефинирана за (x, y) блиску до (x_0, y_0) таква што за точките (x, y, z) блиски до (x_0, y_0, z_0) важи: $G(x, y, z) = 0$, ако и само ако $z = f_1(x, y)$; за овие точки исто важи: $\frac{\partial G}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$.

Ова тврдење **воопшто не е тривијално!** Нема да даваме доказ ниту, пак, ќе пробаме да дадеме каква било интуиција зошто е точно (го охрабруваме љубопитниот читател да го побара по литературата под името **теорема за имплицитна функција**). Тоа што тврдењето го дава е дека ако за точката $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, т. е. $G(x_0, y_0, z_0) = 0$, важи: $\frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$; равенството $G(x, y, z) = 0$ можеме да го решиме по променливата z како $z = f_1(x, y)$, но ова важи само за точките (x, y, z) кои се доволно блиску до (x_0, y_0, z_0) . Да забележиме дека тврдењето не дава како изгледа функцијата f_1 туку само тврди дека мора да постои! Исто така, ако (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) се две различни точки од Σ , за кои важи дека: $\frac{\partial G}{\partial z}(x_1, y_1, z_1) \neq 0$ и $\frac{\partial G}{\partial z}(x_2, y_2, z_2) \neq 0$, тогаш функциите f_1 кои се добиваат од тврдењето за овие две точки не мора да бидат исти!

Забелешка 1.2.3. Сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ е дадена со $G(x, y, z) = 0$, каде што $G(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Бидејќи $\frac{\partial G}{\partial z} = 2z$, $\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0$ кога $z \neq 0$. За точките каде $z > 0$ (горната хемисфера), сферата е дадена со $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и функцијата f_1 од тврдењето е $f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. За точките каде што $z < 0$ (долната хемисфера), сферата е дадена со $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и функцијата f_1 од тврдењето е $f_1(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Да забележиме дека во конкретната ситуација записот $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ важи кога $z \geq 0$, т. е. дополнително важи и кога $z = 0$ иако, $\frac{\partial G}{\partial z} = 0$ кога $z = 0$; слично, записот $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ важи кога $z \leq 0$. Тврдењето само гарантира запис кога $z \neq 0$, проширувањето за $z = 0$ е нешто што го забележавме во конкретната ситуација!

Со помош на претходното тврдење можеме да ги пресметаме тангентната рамнина и нормалниот вектор на Σ во нејзината точка (x_0, y_0, z_0) каде што $\frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тврдењето покажува дека во близина на (x_0, y_0, z_0) , $G(x, y, z) = 0$ е дадено со $z = f_1(x, y)$ за некоја функција f_1 , т. е. Σ е дадена со $z = f_1(x, y)$ кога (x, y, z) е блиску до (x_0, y_0, z_0) (односно Σ е графикот на f_1 за овие точки). Од претходното следува дека еден нормален вектор на Σ во (x_0, y_0, z_0) е: $\vec{n}_1 = (\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0), -1)$. Парцијалните изводи на f_1 можеме да ги изразиме преку парцијалните изводи на G . За да го видиме ова, го диференцираме равенството $G(x, y, f_1(x, y)) = 0$ по x и добиваме:

$$\frac{\partial}{\partial x}(G(x, y, f_1(x, y))) = 0 \iff \frac{\partial G}{\partial x}(x, y, f_1(x, y)) + \frac{\partial G}{\partial z}(x, y, f_1(x, y)) \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 0,$$

од што следува дека:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, y, f_1(x, y))}{\frac{\partial G}{\partial z}(x, y, f_1(x, y))}$$

(именителот на десната страна не е 0 за блиски точки до (x_0, y_0, z_0) заради тврдењето). Слично, со диференцирање на равенството $G(x, y, f_1(x, y)) = 0$ по y , добиваме:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}(x, y, f_1(x, y))}{\frac{\partial G}{\partial z}(x, y, f_1(x, y))}.$$

Од ова следува дека нормалниот вектор $\vec{n}_1$ е (заменуваме $z_0 = f_1(x_0, y_0)$):

$$\vec{n}_1 = \left(-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}, -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}, -1 \right).$$

Ако го помножиме овој вектор со $-\frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, повторно добиваме нормален вектор на Σ :

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right). \quad (1.2.1)$$

Од ова следува дека тангентната рамнина на Σ низ (x_0, y_0, z_0) е,

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) = 0. \quad (1.2.2)$$

Постојат аналогни варијанти на $(*)_z$ кога $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ или $\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$:

$(*)_y$ Нека (x_0, y_0, z_0) е точка од Σ , т. е. важи: $G(x_0, y_0, z_0) = 0$. Ако $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, тогаш постои функција $f_2 = f_2(x, z)$ дефинирана за (x, z) блиску до (x_0, z_0) , таква што за точките (x, y, z) блиски до (x_0, y_0, z_0) важи: $G(x, y, z) = 0$, ако и само ако $y = f_2(x, z)$; за овие точки исто важи: $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y, z) \neq 0$.

$(*)_x$ Нека (x_0, y_0, z_0) е точка од Σ , т. е. важи: $G(x_0, y_0, z_0) = 0$. Ако $\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, тогаш постои функција $f_3 = f_3(y, z)$ дефинирана за (y, z) блиску до (y_0, z_0) , таква што за точките (x, y, z) блиски до (x_0, y_0, z_0) важи: $G(x, y, z) = 0$, ако и само ако $x = f_3(y, z)$; за овие точки исто важи: $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y, z) \neq 0$.

Со нивна помош, слично како погоре, можеме да ги пресметаме тангентната рамнина и нормалниот вектор на Σ во нејзината точка (x_0, y_0, z_0) кога $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ или $\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Кога $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, го применуваме $(*)_y$, од што следува дека Σ е дадена како $y = f_2(x, z)$ кога (x, y, z) е блиску до (x_0, y_0, z_0) . Еден нормален вектор на Σ во (x_0, y_0, z_0) е $\vec{n} = (\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, z_0), -1, \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0, z_0))$. За да ги добијеме $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ и $\frac{\partial f_2}{\partial z}$, слично како претходно, го диференцираме равенството $G(x, f_2(x, z), z)$ по x и z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(G(x, f_2(x, z), z)) = 0 &\iff \frac{\partial G}{\partial x}(x, f_2(x, z), z) + \frac{\partial G}{\partial y}(x, f_2(x, z), z) \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}(G(x, f_2(x, z), z)) = 0 &\iff \frac{\partial G}{\partial z}(x, f_2(x, z), z) + \frac{\partial G}{\partial y}(x, f_2(x, z), z) \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, z) = 0. \end{aligned}$$

Од ова следува дека:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, z) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, f_2(x, z), z)}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, f_2(x, z), z)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, z) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial z}(x, f_2(x, z), z)}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, f_2(x, z), z)},$$

со што добивме дека (заменуваме $y_0 = f_2(x_0, z_0)$):

$$\vec{n}_2 = \left(-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}, -1, -\frac{\frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} \right).$$

Го множиме $\vec{n}_2$ со $-\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ и го добиваме нормалниот вектор (1.2.1). Од ова следува дека тангентната рамнина на Σ низ (x_0, y_0, z_0) е дадена со (1.2.2).

Аналогно, ако $\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, го употребуваме тврдењето $(*)_x$ и повторно добиваме дека (1.2.1) е нормален вектор на Σ во (x_0, y_0, z_0) и (1.2.2) е тангентната рамнина на Σ низ (x_0, y_0, z_0) .

Претходните разгледувања ги сумираме на следниот начин. Нека површината Σ е дадена со равенството $G(x, y, z) = 0$ и нека $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$. Ако барем едно од тврдењата:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \quad (1.2.3)$$

е точно, тогаш еден нормален вектор на Σ во (x_0, y_0, z_0) е даден со (1.2.1) и тангентната рамнина на Σ низ (x_0, y_0, z_0) е (1.2.2). Да забележиме дека барем еден од условите (1.2.3) е точен ако и само ако векторот (1.2.1) е ненулти. Заради ова, во практика, доволно е да го пресметаме векторот (1.2.1) и ако тој е ненулти, тогаш веднаш добиваме дека тој е нормален вектор на Σ во (x_0, y_0, z_0) и тангентната рамнина е (1.2.2).

Пример 1.2.4. Да се определат тангентната рамнина и нормалниот вектор на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ во нејзината точка $A(1, 0, 0)$.

За да го определиме нормалниот вектор на површината, ги пресметуваме парцијалните изводи на $G(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \quad \frac{\partial G}{\partial z}(x, y, z) = 2z.$$

Од ова следува дека нормалниот вектор е $\vec{n} = (\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}) = (2x, 2y, 2z)$. Ги заменуваме координатите на точката A и добиваме дека нормалниот вектор во A е $\vec{n} = (2, 0, 0)$. Од ова ја добиваме и тангентната рамнина во A :

$$(x - 1, y - 0, z - 0) \cdot (2, 0, 0) = 0 \iff 2x = 0 \iff x = 0.$$

Го охрабруваме читателот да ја нацрта сферата за да се увери дека оваа е навистина тангентната рамнина во A .

Пример 1.2.5. Да се определат тангентната рамнина и нормалниот вектор на површината $x \sin(xy) + \cos(xz) = 0$ во нејзината точка $A(1, \pi, \pi/2)$.

За да го определиме нормалниот вектор на површината, ги сметаме парцијалните изводи на $G(x, y, z) := x \sin(xy) + \cos(xz)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y, z) &= \sin(xy) + xy \cos(xy) - z \sin(xz), \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, z) &= x^2 \cos(xy), \quad \frac{\partial G}{\partial z}(x, y, z) = -x \sin(xz). \end{aligned}$$

Следува дека нормалниот вектор е:

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right) = (\sin(xy) + xy \cos(xy) - z \sin(xz), x^2 \cos(xy), -x \sin(xz)).$$

Ги заменуваме координатите на A и добиваме дека нормалниот вектор во A е $\vec{n} = (-3\pi/2, -1, -1)$. Од ова ја добиваме и тангентната рамнина во A :

$$\left(x - 1, y - \pi, z - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left(-\frac{3\pi}{2}, -1, -1 \right) = 0 \iff \frac{3\pi}{2}x + y + z = 3\pi.$$

1.3. Нерешени задачи

Задача 1.3.1. Да се одреди природата на површината $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 - 36 = 0$ и да се нацрта скица.

Задача 1.3.2. Да се одреди природата на површината $16x^2 + 9y^2 - 144z^2 = 144$ и да се нацрта скица.

Задача 1.3.3. Да се најдат тангентната рамнина и нормалата на површината $z = x^2 + y^2$ во точката $(1, 0, 1)$.

Задача 1.3.4. Да се најде тангентната рамнина на површината

$$z = \frac{x^2 y}{x^4 + 2y^2}$$

во точката $(-1, 1, 1/3)$.

Задача 1.3.5. Да се најдат тангентната рамнина и нормалата на површината

$$z = x^2 + 5xy - 2y^2$$

во точката $(1, 2, 3)$.

Задача 1.3.6. Да се најдат тангентната рамнина и нормалата на површината

$$x^2 + y^2 - z^2 = 4$$

во точката $(2, -3, 3)$.

Задача 1.3.7. Да се најдат тангентната рамнина на површината

$$\frac{27}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 3}} = 9$$

во точката $(2, 1, 1)$.

Задача 1.3.8. Да се најдат тангентната рамнина и нормалата на површината

$$z = x^2 - y^2$$

во точката $(-2, 1)$.

Задача 1.3.9. Да се определи тангентната рамнина на површината $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ во точката $(3, 4, 5)$.

Задача 1.3.10. Да се најде растојанието од точката $(0, 3, 0)$ до површината $z = x^2 + y^2$. (Помош: Најди ги нормалните прави на површината кои минуваат низ $(0, 3, 0)$. За секоја од овие нормали, пресметај ја должината на делот од $(0, 3, 0)$ до површината. Најмалото вакво растојание е бараната вредност.)

Задача 1.3.11. Дадена е површината:

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z = 0.$$

Да се најдат точките од површината со најголема и со најмала вредност за z -координатата. (Помош: Во бараните точки тангентните рамнини се хоризонтални.)

Задача 1.3.12. Да се провери дали површините $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ и $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$ се допираат во точката $(0, 0, 0)$.

Задача 1.3.13. Да се определи тангентна рамнина на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, која е паралелна со рамнината $4x + 3y + z = 10$.

Задача 1.3.14. Нека е дадена површината: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Да се најдат сите точки на површината во кои тангентната рамнина е паралелна со рамнината $2x - y + z = 0$.

Задача 1.3.15. Дадена е површината $z = x^2 - 2xy + y^2$.

(а) Да се најде равенката на тангентната рамнина во точката $x = a, y = 2a$.

- (б) За која вредност на a , тангентната рамнина е паралелна со рамнината $x - y + z = 1$?

Задача 1.3.16. Да се најдат сите точки од површината $x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 17$, каде што тангентната рамнина е паралелна со рамнината $x - 8z = 0$.

Задача 1.3.17. Да се најде равенката на рамнината која е тангентна на елипсоидот

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

и е паралелна со рамнината $3x - 2y + z = 0$.

Задача 1.3.18. Нека Σ е површината дефинирана со $z = x^2 + 2y^2 + 2y - 1$. Да се најдат сите точки $P(x_0, y_0, z_0)$, $x_0 \neq 0$ на Σ , такви што нормалната права на Σ повлечена низ точката P да минува низ координатниот почеток.

Задача 1.3.19. Нека a , b и c се позитивни броеви. Да се покаже дека

$$\text{конусот } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \text{ и сферата } x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$$

се допираат (имаат исти тангентни рамнини) во точките $(0, b, c)$ и $(0, -b, c)$.

Задача 1.3.20. Да се определи тангентната рамнина на функцијата $xz = y^2 \ln x + yz^2$ во точките од обликот $(1, 1, z)$. Потоа да се најдат пресеците на оваа рамнина со координатните оски.

Задача 1.3.21. Да се покаже дека правата

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

е нормална на површината $z = x^2 + y^2$. Да се најде соодветната тангентна рамнина и точката на допир.

Задача 1.3.22. Нека Σ е површината $z = xy$. Да се определат сите точки на Σ за кои соодветните нормални прави минуваат низ точката $(0, 0, 1)$.

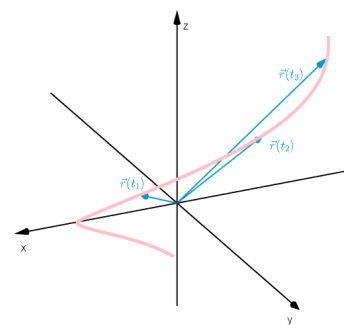
Глава 2.

Криви

2.1. Рамнински и просторни криви

2.1.1. Траекторија на тело

Нека е дадено тело што се движи во просторот. Во секој момент, позицијата на телото може да се опише со радиус-вектор $\vec{r}$. Радиус-вектор е векторот со почеток во координатниот почеток O и крај во позицијата на телото во тој момент. Бидејќи телото се движи, $\vec{r}$ зависи од времето t . Со други зборови, $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ е **вектор-вредносна функција**: функција која како аргумент прима реален број $t \in [a, b]$, а како вредност го дава радиус-векторот на положбата на телото $\vec{r}(t)$ во времето t . Како времето тече од почетниот момент $t = a$ до крајниот $t = b$, врвот на радиус-векторот $\vec{r}(t)$ ќе го опише патот (траекторијата) на движењето на телото. Во секој момент $t \in [a, b]$, векторот $\vec{r}(t)$ има три компоненти x , y и z . Бидејќи $\vec{r}(t)$ се променува со времето, неговите компоненти, исто така, ќе зависат од времето t : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$; т. е. координатите x , y и z на $\vec{r}$ се (обични) реални функции од една променлива. Овие функции се викаат **координатни функции** на $\vec{r}(t)$ и радиус-векторот $\vec{r}(t)$ е даден со:



$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

каде што $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ се единечните вектори (т. е. ортовите) по x , y и z -оските:

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1).$$

Слично, можеме да разгледуваме движење на тело во рамнина. Во тој случај, радиус-векторот $\vec{r}(t)$ којшто ја дава позицијата на телото во време t е вектор-вредносна функција чиито вредности се вектори во $\mathbb{R}^2$; т. е. $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Во овој случај, $\vec{r}(t)$ има две координати, $x = x(t)$, $y = y(t)$, кои зависат од времето t :

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Често пати ќе биде корисно да разгледуваме движење на тело кога времето t се движи во полуотворен или отворен интервал: $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) , $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, $[a, \infty)$, (a, ∞) , $(-\infty, \infty)$.

Пример 2.1.1.

- (а) Нека тело се движи со константна брзина v праволиниски по x -оската од координатниот почеток $O(0, 0, 0)$ до точката $A(2, 0, 0)$. Во секој момент t , неговата x -координата е vt , додека y и z -координатите се во секое време еднакви на 0. Радиус-векторот $\vec{r}(t)$ на позицијата на телото во време t е даден со:

$$\vec{r}(t) = (vt, 0, 0)$$

и неговите координатни функции се:

$$x(t) = vt, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = 0.$$

Патот којшто го поминува телото е отсечката $[OA]$ (види ја сликата 2.1.1) и тој е опишан со радиус-векторот $\vec{r}(t)$ кога t се движи во интервалот $[0, 2/v]$; во $t = 0$ се добива точката O (бидејќи $\vec{r}(0) = (0, 0, 0) = O$), додека во $t = 2/v$ се добива точката A (бидејќи $\vec{r}(2/v) = (2, 0, 0)$).

- (б) Нека тело се движи праволиниски по x -оската од координатниот почеток $O(0, 0, 0)$ до точката $A(2, 0, 0)$ со константно забрзување a и нека неговата почетна брзина во точката O е 0. Тогаш во секој момент t , неговата x -координата е $at^2/2$ (во t неговата брзина е at), додека y и z се еднакви на 0. Радиус-векторот $\vec{r}(t)$ на телото е:

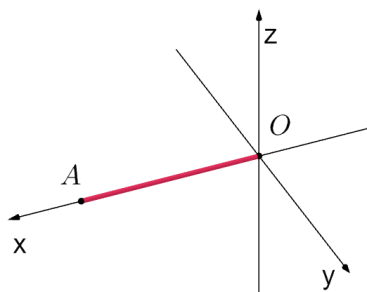
$$\vec{r}(t) = (at^2/2, 0, 0)$$

и неговите координатни функции се:

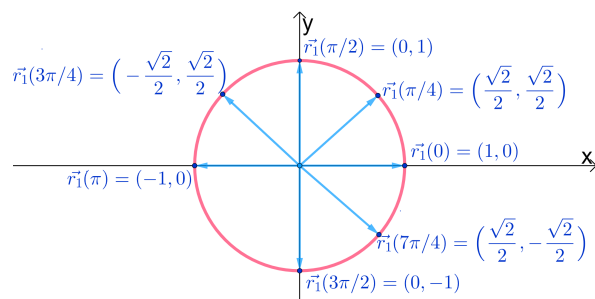
$$x(t) = at^2/2, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = 0.$$

Патот којшто го поминува телото е отсечката $[OA]$ (исто како и во (а); види ја сликата 2.1.1) и тој е опишан со радиус-векторот $\vec{r}(t)$ кога t се движи во интервалот $[0, 2/\sqrt{a}]$; во $t = 0$, $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$ (точката O), додека во $t = 2/\sqrt{a}$, $\vec{r}(2/\sqrt{a}) = (2, 0, 0)$ (точката A).

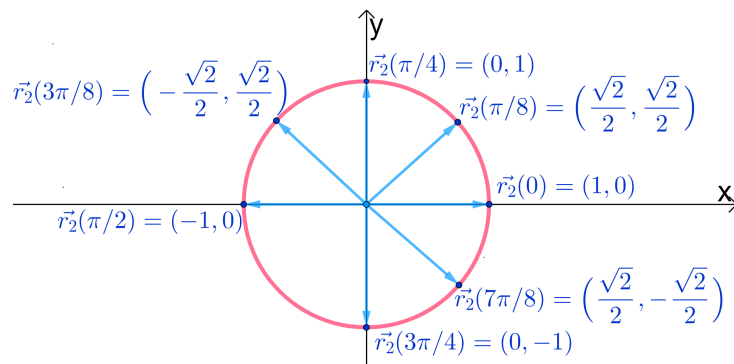
Слика 2.1.1: Кривите од примерот 2.1.1 и од примерот 2.1.2



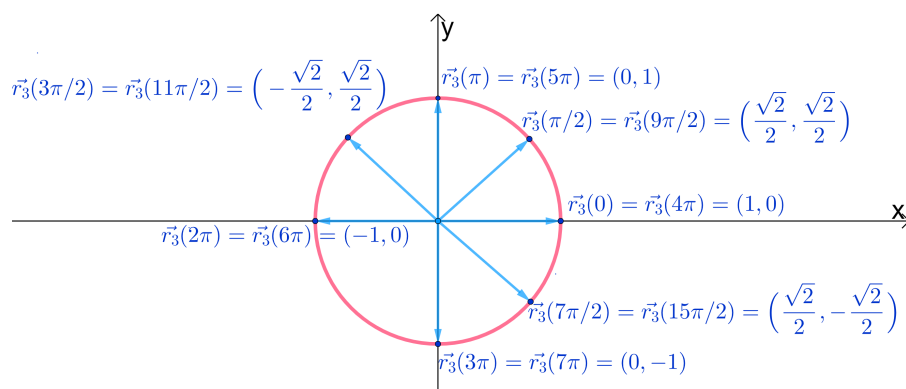
Пример 2.1.1 (а) и (б)



Пример 2.1.2 (а)



Пример 2.1.2 (б)



Пример 2.1.2 (в)

Пример 2.1.2.

(а) Позицијата на тело што се движи во рамнина е дадена со:

$$\vec{r}_1 : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}_1(t) = (\cos t, \sin t).$$

Координатните функции на $\vec{r}_1$ се $x_1(t) = \cos t$ и $y_1(t) = \sin t$. Бидејќи

$$(x_1(t))^2 + (y_1(t))^2 = 1, \quad \text{за сите } t \in [0, 2\pi),$$

траекторијата на телото лежи на единечната кружница. Во суштина, траекторијата на телото е целата единечна кружница и времето t е точно аголот (во радијани) што го зафаќа радиус-векторот $\vec{r}_1(t)$ со позитивната x -оска. Како t се движи во $[0, 2\pi)$, телото се движи по единечната кружница почнувајќи од $\vec{r}_1(0) = (1, 0)$ и прави точно едно полно вртење (види ја сликата 2.1.1). Бидејќи $2\pi \notin [0, 2\pi)$, точката $(1, 0)$ не се дуплира по завртувањето.

(б) Позицијата на тело што се движи во рамнина е дадена со:

$$\vec{r}_2 : [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t);$$

координатните функции на $\vec{r}_2$ се $x_2(t) = \cos 2t$ и $y_2(t) = \sin 2t$. Слично како во (а), и ова тело се движи по единечната кружница почнувајќи од $\vec{r}_2(0) = (1, 0)$ и прави точно едно полно вртење (увери се во ова!). Телото ја завртува целата кружница за двојно пократко време во споредба со телото во (а): времето е π (види ја сликата 2.1.1), додека времето потребно на телото во (а) е 2π . Интуицијата ни вели дека причината за ова е дека ова тело се движи двојно побрзо од телото во (а).

(в) Позицијата на трето тело што се движи во рамнина е дадена со:

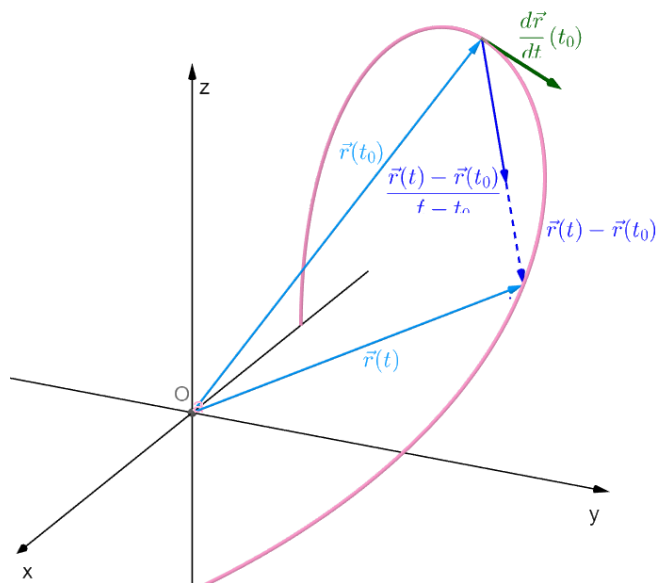
$$\vec{r}_3 : [0, 8\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}_3(t) = (\cos(t/2), \sin(t/2));$$

координатните функции на $\vec{r}_3$ се $x_3(t) = \cos(t/2)$ и $y_3(t) = \sin(t/2)$. И ова тело се движи по единечната кружница, но прави две полни вртења. Почнува во $t = 0$ $\vec{r}_3(0) = (1, 0)$ и прави едно полно вртење кога t се движи во $[0, 4\pi)$, и потоа прави уште едно вртење почнувајќи со $\vec{r}_3(4\pi) = (1, 0)$ и ги поминува сите точки од кружницата кога t се движи во $[4\pi, 8\pi)$; види ја сликата 2.1.1. Интуитивно, ова тело се движи двојно поспоро од телото во (а), но движењето трае четири пати подолго и на тој начин поминува двојно повејќе пат. Во споредба со телото во (б), се движи четири пати поспоро, но движењето трае осум пати подолго и природно е изминатиот пат да е двојно подолг.

2.1.2. Непрекинатост и изводи на вектор-вредносни функции

Нека позицијата на тело што се движи во простор е дадена со:

$$\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

Слика 2.1.2: Извод на вектор-вредносна функција во момент t_0 

каде што $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ се координатните функции на $\vec{r}(t)$. Природно е да очекуваме дека траекторијата не треба да има скокови. Ако во некое време $t_1 \in [a, b]$ телото се наоѓа во позицијата $A_1 = \vec{r}(t_1)$, а во некое наредно време $t_2 > t_1$ се наоѓа во позиција $A_2 = \vec{r}(t_2)$, тогаш тоа поминало по патот од A_1 до A_2 во интервалот $[t_1, t_2]$ (а не се „телепортирало“ од A_1 до A_2). Со други зборови, траекторијата не смее да има дупки и скокови. За да ги избегне не физичките ситуации каде што траекторијата има вакви неприродни дупки и скокови, секогаш ќе претпоставуваме дека координатните функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ се непрекинати; координатните функции се обични функции од една реална променлива и поимот за непрекинатост за нив ни е јасен (барем на интуитивно ниво). Кога координатните функции се непрекинати, ќе викаме дека $\vec{r}(t)$ е **непрекината**.

Следен концепт којшто е исклучително битен за нас е диференцијабилност на вектор-вредносната функција $\vec{r} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ и поимот на извод на $\vec{r}(t)$. Пристапот е сличен како и кај обичните функции од една променлива. Нека $t_0 \in (a, b)$. Го разгледуваме количникот (види ја сликата 2.1.2)

$$\begin{aligned}
 \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} &= \frac{(x(t), y(t), z(t)) - (x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{t - t_0} \\
 &= \frac{(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0), z(t) - z(t_0))}{t - t_0} \\
 &= \left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \right).
 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Да забележиме дека за секое t имаме по еден вектор со почеток во $\vec{r}(t_0)$ (види ја сликата 2.1.2). Клучното прашање е: дали кога t се доближува до t_0 , овие се приближуваат

кон некој вектор? Односно, дали

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \right) \quad (2.1.2)$$

постои? Во случај лимесот да постои велиме дека $\vec{r}(t)$ е **диференцијабилна** во t_0 и нејзиниот **извод** во t_0 е векторот кој е вредноста на овој лимес. Од (2.1.2), овој лимес постои точно тогаш кога секој од лимесите

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}, \quad (2.1.3)$$

постои. Овие лимеси постојат точно тогаш кога функциите $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ се диференцијабилни во t_0 и во тој случај лимесите (2.1.3) се точно изводите на $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ во t_0 (тоа е дефиницијата за извод на обична реална функција од една променлива). Стандардната нотација за извод на $\vec{r}(t)$ во t_0 е $\dot{\vec{r}}(t_0)$ или $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$; т. е.

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)), \quad (2.1.4)$$

каде што $\dot{x}(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$ и $\dot{z}(t_0)$ се изводите на $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ во t_0 ; ознаката на изводот со точка е стандардна во механика и ние ќе ја применуваме наместо ознаките $x'(t_0)$, $y'(t_0)$ и $z'(t_0)$ од калкулус од една променлива. Од начинот на којшто го дефиниравме изводот на $\vec{r}(t)$ во t_0 и од сликата 2.1.2 следува следнава ислучително битна геометричка опсервација.

Забелешка 2.1.3. Ако $\vec{r}(t)$ е диференцијабилна во t_0 , тогаш количникот (2.1.1) се должижува до вектор кој е тангентен на траекторијата на телото во времето t_0 . Односно, векторот $\dot{\vec{r}}(t_0)$ е тангентен на траекторијата во t_0 .

Ако $\vec{r}(t)$ има извод во сите точки $t \in (a, b)$, тогаш ќе велиме дека е диференцијабилна на (a, b) ; од горните разгледувања тоа е точно тогаш кога координатните функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ се диференцијабилни на (a, b) . Во тој случај:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{r}(t)) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)), \quad t \in (a, b).$$

Бидејќи $\dot{\vec{r}}(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ е вектор-вредносна функција, повторно можеме да се запрашаме дали $\dot{\vec{r}}(t)$ е диференцијабилна на (a, b) . На ист начин како погоре, тоа се случува точно тогаш кога $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ и $\dot{z}(t)$ се диференцијабилни. Во овој случај вториот извод на $\vec{r}(t)$ се дефинира како извод на $\dot{\vec{r}}(t)$ (извод на првиот извод) и

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)), \quad t \in (a, b),$$

каде што $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$ и $\ddot{z}(t)$ се вторите изводи на $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$. Изводите од повисок ред се дефинираат аналогно. Јасно, сите овие разгледувања можеме да ги спроведеме и кога $\vec{r}(t)$ прима вредности во $\mathbb{R}^2$, т. е. кога $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Како што ќе видиме наскоро, постоењето на изводот на $\vec{r}(t)$ е интимно поврзано со брзината на телото (тоа е практично дефиницијата на брзина), и затоа секогаш ќе претпоставуваме дека $\vec{r}(t)$ има извод во сите точки. Во суштина, скоро сите вектор-вредносни функции $\vec{r}(t)$ со кој ќе се среќаваме во книгата ќе можат произволно пати да се диференцираат.

Пример 2.1.4. За вектор-вредносната функција

$$\vec{r} : (-1, 3) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (\cos t, e^t \sin t, t + 1),$$

да ги пресметаме првиот и вториот извод, а потоа да ги најдеме нивните вредности во $t = 0$.

Координатните функции на $\vec{r}(t)$ се:

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = e^t \sin t, \quad z(t) = t + 1.$$

Нивните први изводи се:

$$\dot{x}(t) = -\sin t, \quad \dot{y}(t) = e^t \sin t + e^t \cos t, \quad \dot{z}(t) = 1.$$

Од дефиницијата на прв извод (2.1.4) добиваме:

$$\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (-\sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, 1).$$

За вредноста на $\dot{\vec{r}}$ во 0 имаме $\dot{\vec{r}}(0) = (0, 1, 1)$.

Вторите изводи на координатните функции се:

$$\ddot{x}(t) = -\cos t, \quad \ddot{y}(t) = 2e^t \cos t, \quad \ddot{z}(t) = 0,$$

од што следува дека:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = (-\cos t, 2e^t \cos t, 0).$$

Па, $\ddot{\vec{r}}(0) = (-1, 2, 0)$.

На крајот, ќе дадеме неколку својства на изводот на вектор-вредностите функции: сите овие се директна последица на фактот дека барањето на извод на $\vec{r}(t)$ се сведува на барање на извод од координатните функции (кои се функции од една реална променлива).

Теорема 2.1.5. Нека $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ се диференцијабилни вектор-вредносни функции дефинирани на ист интервал со вредности во $\mathbb{R}^3$.

(a) $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) = \frac{d\vec{r}_1}{dt}(t) + \frac{d\vec{r}_2}{dt}(t).$

(б) За даден скалар $\lambda \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}(\lambda \vec{r}_1(t)) = \lambda \frac{d\vec{r}_1}{dt}(t).$

(в) $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)) = \frac{d\vec{r}_1}{dt}(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt}(t).$

(г) $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)) = \frac{d\vec{r}_1}{dt}(t) \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \frac{d\vec{r}_2}{dt}(t).$

(д) Ако φ е (обична) реална диференцијабилна функција од една променлива, тогаш:

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)\vec{r}_1(t)) = \frac{d\varphi}{dt}(t)\vec{r}_1(t) + \varphi(t)\frac{d\vec{r}_1}{dt}(t).$$

Забелешка 2.1.6. Сите тврдења со исклучок на (г) важат и кога $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ имаат вредности во $\mathbb{R}^2$ (т. е. кога се дводимензионални вектори); се разбира во оваа ситуација (г) нема смисла затоа што векторскиот производ е дефиниран само за вектори во $\mathbb{R}^3$.

Редоследот на множењето во (г) е битен и мора да се зачува затоа што векторскиот производ не е комутативен.

Сите тврдења во теоремата 2.1.5 се директна последица од својствата на изводи на обични функции од една променлива. Ќе го покажеме својството (в) (го охрабруваме читателот да ги покаже останатите својства на ист начин). Да ги запишеме $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ со координатните функции:

$$\vec{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)), \quad \vec{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)).$$

Скаларниот производ $\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)$ е даден со:

$$\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t) = x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t) + z_1(t)z_2(t)$$

и за изводот добиваме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)) &= \frac{d}{dt}(x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t) + z_1(t)z_2(t)) \\ &= \frac{d}{dt}(x_1(t)x_2(t)) + \frac{d}{dt}(y_1(t)y_2(t)) + \frac{d}{dt}(z_1(t)z_2(t)) \\ &= \frac{dx_1}{dt}(t)x_2(t) + x_1(t)\frac{dx_2}{dt}(t) + \frac{dy_1}{dt}(t)y_2(t) \\ &\quad + y_1(t)\frac{dy_2}{dt}(t) + \frac{dz_1}{dt}(t)z_2(t) + z_1(t)\frac{dz_2}{dt}(t) \\ &= \frac{dx_1}{dt}(t)x_2(t) + \frac{dy_1}{dt}(t)y_2(t) + \frac{dz_1}{dt}(t)z_2(t) + x_1(t)\frac{dx_2}{dt}(t) \\ &\quad + y_1(t)\frac{dy_2}{dt}(t) + z_1(t)\frac{dz_2}{dt}(t) \\ &= \frac{d\vec{r}_1}{dt}(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt}(t) \end{aligned}$$

Ќе го завршиме овој дел со верижното правило за пресметување изводи (познато и како извод од сложена функција). Читателот сигурно го знае ова правило кога функциите се обични реални функции од една реална променлива; правилото е исто и кога едната функција е вектор-вредносна.

Теорема 2.1.7. Нека $\vec{r} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ е диференцијабилна вектор-вредносна функција и нека $\varphi : (c, d) \rightarrow (a, b)$ е диференцијабилна реална функција. Тогаш, композицијата

$$\vec{r} \circ \varphi : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \vec{r}(\varphi(t)),$$

е диференцијабилна вектор-вредносна функција и

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(\varphi(t))) = \dot{\vec{r}}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t).$$

За да се увериме во ова, нека $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Тогаш,

$$\vec{r}(\varphi(t)) = (x(\varphi(t)), y(\varphi(t)), z(\varphi(t))),$$

т. е. координатните функции на вектор-вредносната функција $t \mapsto \vec{r}(\varphi(t))$ се:

$$x(\varphi(t)), \quad y(\varphi(t)), \quad z(\varphi(t)).$$

Сега само го применуваме верижното правило за обични реални функции:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{r}(\varphi(t))) &= \left(\frac{d}{dt}(x(\varphi(t))), \frac{d}{dt}(y(\varphi(t))), \frac{d}{dt}(z(\varphi(t))) \right) \\ &= (\dot{x}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t), \dot{y}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t), \dot{z}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)) \\ &= (\dot{x}(\varphi(t)), \dot{y}(\varphi(t)), \dot{z}(\varphi(t))) \dot{\varphi}(t) = \dot{\vec{r}}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t). \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Пример 2.1.8. Нека $\vec{r}$ и φ се дадени со:

$$\begin{aligned} \vec{r} : (-\infty, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (\sin t, t \cos t, t^2), \quad \text{и со} \\ \varphi : (-\infty, \infty) &\rightarrow (-\infty, \infty), \quad \varphi(t) = t^2. \end{aligned}$$

Нивните изводи се:

$$\dot{\vec{r}}(t) = (\cos t, \cos t - t \sin t, 2t), \quad \dot{\varphi}(t) = 2t.$$

Бидејќи

$$\dot{\vec{r}}(\varphi(t)) = (\cos(t^2), \cos(t^2) - t^2 \sin(t^2), 2t^2),$$

од теоремата 2.1.7, за изводот на композицијата добиваме:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(\varphi(t))) = 2t(\cos(t^2), \cos(t^2) - t^2 \sin(t^2), 2t^2) = (2t \cos(t^2), 2t \cos(t^2) - 2t^3 \sin(t^2), 4t^3).$$

Ако прво ја пресметаме композицијата $\vec{r}(\varphi(t))$

$$\vec{r}(\varphi(t)) = (\sin(t^2), t^2 \cos(t^2), t^4)$$

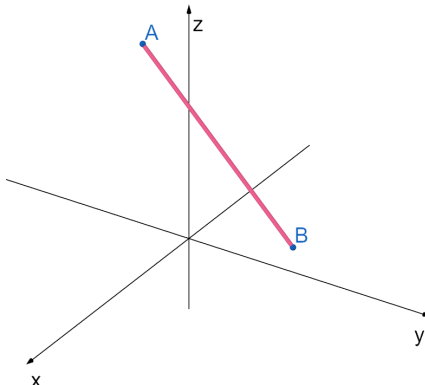
и потоа побараме извод од оваа функција по t , ќе го добиеме истиот резултат (провери!). Во суштина, кога го правиме ова ние го повторуваме истото нешто како во (2.1.5), само со конкретните $\vec{r}$ и φ што ги разгледуваме.

Забелешка 2.1.9. Во практика, начинот на којшто се запишува верижното правило е прикажан во продолжение. Нека $\vec{r}(t)$ е диференцијабилна вектор-вредносна функција и нека променливата t зависи од некоја друга променлива λ , т. е. t е функција од λ : $t = t(\lambda)$. Тогаш, $\vec{r}$ е функција и од λ и верижното правило го дава изводот на $\vec{r}$ по λ :

$$\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{d\lambda}. \quad (2.1.6)$$

Во оваа ситуација, функцијата φ е: $\lambda \mapsto \varphi(\lambda) = t(\lambda)$.

Слика 2.1.3: Отсечката од примерот 2.1.12



2.1.3. Дефиниција на крива. Брзина и забрзување

Конечно сме во можност да го дефинираме поимот крива.

Дефиниција 2.1.10. Вектор-вредносната функција $\vec{r}$ дефинирана на (конечен или бесконечен отворен, полуотворен или затворен) интервал J со вредности во $\mathbb{R}^3$, се вика **параметарска просторна крива** или скратено **просторна крива**, ако $\vec{r}(t)$ е произволно многу пати диференцијабилна на целиот интервал J .

Бидејќи кривата $\vec{r}$ е произволно многу пати диференцијабилна (по дефиниција) сите нејзини изводи се непрекинати. Минималните услови за $\vec{r}(t)$ да биде радиус-вектор на тело што се движи во простор, се постоење на изводот на $\vec{r}(t)$ и неговата непрекинатост: за секое тело концептот на брзина треба да има смисла (како што ќе видиме наскоро, тоа значи дека изводот $\vec{r}(t)$ мора да постои во секое време t) и брзината не смее нагло да скока од една вредност во друга за блиски вредности на времето (тоа е непрекинатоста на изводот $\vec{r}(t)$). Но, ние секогаш ќе разгледуваме криви што ќе можеме произволно многу пати да ги диференцираме¹. На сличен начин се дефинира рамнинска крива.

Дефиниција 2.1.11. Вектор-вредносната функција $\vec{r}$ дефинирана на (конечен или бесконечен отворен, полуотворен или затворен) интервал J со вредности во $\mathbb{R}^2$ се вика **параметарска рамнинска крива**, или скратено **рамнинска крива**, ако $\vec{r}(t)$ е произволно многу пати диференцијабилна на целиот интервал J .

Примери за рамнински криви се дадени во примерот 2.1.2, додека кривите во примерот 2.1.1 се просторни криви; иако во суштина тие се делови од прави (отсечки) по нашата дефиниција можеме да ги сметаме за криви. Примерот 2.1.1 можеме лесно да го проширеме во случаите кога правите не лежат на некои од оските.

Пример 2.1.12. Нека се дадени точките $A(1, 0, 3)$ и $B(1, 2, 1)$. Отсечката $[AB]$ може да се запише со вектор-вредносна функција на начин опишан во продолжение. Правата

¹Ова секогаш ќе биде исполнето во ситуациите што ќе ги разгледуваме.

што минува низ точките A и B е дадена со следниве параметарски равенки запишани со помош на векторот $\overrightarrow{AB} = (0, 2, -2)$ и точката A , и тоа:

$$\begin{cases} x = 0 \cdot t + 1, \\ y = 2t + 0, \\ z = -2t + 3. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

За $t = 0$ се добива точката A . Навистина, ако замениме $t = 0$ во овие равенки добиваме $(x, y, z) = (1, 0, 3)$. Слично, ако замениме $t = 1$ добиваме $(x, y, z) = (1, 2, 1)$, што е точката B . Значи $\vec{r}$ можеме да ја дефинираме со координатните равенки дадени со (2.1.7) на интервалот $[0, 1]$:

$$\vec{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (1, 2t, -2t + 3). \quad (2.1.8)$$

Тогаш, $\vec{r}(0) = (1, 0, 3) = A$ и $\vec{r}(1) = (1, 2, 1) = B$ и кога t се движи во интервалот $[0, 1]$, радиус-векторот $\vec{r}(t)$ ги дава сите точки на отсечката $[AB]$ (види ја сликата 2.1.3).

Вака дефинираната $\vec{r}(t)$ е радиус-вектор на тело што се движи праволиниски од A кон B по отсечката $[AB]$ со константна брзина; во овој момент можеби не е наполно очигледно дека брзината е константна, но наскоро тоа ќе стане јасно.

Дефиниција 2.1.13. Векторот на брзина $\vec{v}(t)$ во времето t на параметарската (просторна или рамнинска) крива $\vec{r}$ се дефинира како првиот извод на $\vec{r}$ во t , т. е.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \dot{\vec{r}}(t).$$

Брзината $v(t)$ во времето t се дефинира како должината на векторот на брзина $\vec{v}(t)$, т. е.

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = |\dot{\vec{r}}(t)|.$$

Читателот треба да помни дека векторот на брзина $\vec{v}(t)$ е вектор (по дефиниција!): има правец, насока и должина. Од друга страна, брзината $v(t)$ е скалар.

Пред да продолжиме, треба да ја оправдаме дефиницијата на вектор на брзина. Нека позицијата на телото што се движи е дадена со параметарската крива $\vec{r}(t)$. Интуицијата ни вели дека векторот на брзина треба да ја дава промената на положбата во единица време. Ако нè интересира векторот на брзина во t_0 , можеме да го разгледуваме следниот количник како кандидат за векторот на брзина во t_0 (види ја сликата 2.1.2):

$$\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}; \quad (2.1.9)$$

(2.1.9) ја има есенцијата на вектор на брзина: промена на позицијата на телото $\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$ поделена со времето во кое се случила промената $t - t_0$. Но, има очигледен проблем зошто ова не може да биде вектор на брзина во t_0 : за различни вредности на t количниците (2.1.9) ќе даваат различни вектори. Инцидентно, ова не може да го исправиме со тоа што ќе речеме дека векторот на брзина е количникот (2.1.9) кога $t = t_0$ затоа што тогаш овој количник не е ни дефиниран (именителот е 0). Ако $t \neq t_0$, (2.1.9) го дава средниот вектор на брзина на интервалот $[t_0, t]$ (види ја сликата 2.1.2).

Кога t се доближува до t_0 средниот вектор на брзина (2.1.9) го сметаме на се помали интервали на времето t_0 (т. е. интервалот $[t_0, t]$ се стеснува), така што во лимесот кога $t \rightarrow t_0$ количниците (2.1.9) треба да тежат кон векторот на брзина во t_0 . Но лимесот на (2.1.9) кога $t \rightarrow t_0$ е точно изводот на $\vec{r}(t)$ во t_0 , што ја оправдува дефиницијата $\vec{v}(t_0) = \dot{\vec{r}}(t_0)$.

Забелешка 2.1.14. Векторот на брзина $\vec{v}(t)$ е вектор како и секој друг вектор во $\mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^2$ ако кривата е рамнинска), но добро е секогаш да го гледаме како да е поместен со почеток во $\vec{r}(t)$. Имајќи ја во предвид забелешката 2.1.3, векторот на брзина $\vec{v}(t)$ е секогаш тангентен на траекторијата на движење на телото.

Добар начин да го илустрираме ова е преку векторот на брзина на кривата $\vec{r}_1$ дадена во примерот 2.1.2 (а) (во оваа ситуација можеме да дадеме едноставен геометриски аргумент за тангентноста на векторот на брзина на траекторијата). Векторот на брзина е

$$\vec{v}_1(t) = (-\sin t, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Треба да видиме дека за секое $t \in [0, 2\pi)$, правата која што е паралелна со векторот $\vec{v}_1(t) = (-\sin t, \cos t)$ е тангентна на траекторијата. Но, бидејќи траекторијата е единечната кружница $x^2 + y^2 = 1$, ова е еквивалентно со фактот дека правата која е паралелна со векторот $(-\sin t, \cos t)$ и минува низ точката $\vec{r}_1(t) = (\cos t, \sin t)$ е ортогонална со права која минува низ координатниот почеток и точката определена со $\vec{r}_1(t) = (\cos t, \sin t)$. Оваа права е паралелна со векторот $(\cos t, \sin t)$. Векторите $(-\sin t, \cos t)$ и $(\cos t, \sin t)$ се ортогонални бидејќи нивниот скаларен производ е 0:

$$(-\sin t, \cos t) \cdot (\cos t, \sin t) = -\sin t \cos t + \cos t \sin t = 0.$$

Забелешка 2.1.15. Ако векторот на брзина е константен, т. е. $\vec{v}(t)$ е истиот вектор за сите вредности на t , тогаш брзината $v(t)$ е константна затоа што таа е должината на $\vec{v}(t)$. За кривата $\vec{r}(t)$ од примерот 2.1.12, векторот на брзина е $\vec{v}(t) = (0, 2, -2)$, за $t \in [0, 1]$, (т. е. $\vec{v}(t) = \vec{AB}$, за $t \in [0, 1]$) од што добиваме

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, \quad t \in [0, 1].$$

Обратното тврдење, во општа ситуација, не мора да е точно, т. е. брзината може да е константна но векторот на брзина да не е. Тоа ќе се случува точно тогаш кога $\vec{v}(t)$ има константна должина но неговиот правец и насока се променуваат со текот на времето. Кривите од примерот 2.1.2 (а), (б) и (в) се пример каде ова се случува. Нивните вектори на брзини се:

$$\vec{v}_1(t) = (-\sin t, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi), \quad (2.1.10)$$

$$\vec{v}_2(t) = (-2 \sin 2t, 2 \cos 2t) = 2(-\sin 2t, \cos 2t), \quad t \in [0, \pi), \quad (2.1.11)$$

$$\vec{v}_3(t) = \left(-\frac{1}{2} \sin(t/2), \frac{1}{2} \cos(t/2)\right) = \frac{1}{2}(-\sin(t/2), \cos(t/2)), \quad t \in [0, 8\pi), \quad (2.1.12)$$

и очигледно е дека ниту еден од нив не е константен, но нивните брзини се константни:

$$v_1(t) = |\vec{v}_1(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1, \quad t \in [0, 2\pi), \quad (2.1.13)$$

$$v_2(t) = |\vec{v}_2(t)| = 2\sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t} = 2, \quad t \in [0, \pi), \quad (2.1.14)$$

$$(2.1.15)$$

$$v_3(t) = |\vec{v}_3(t)| = \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2(t/2) + \cos^2(t/2)} = \frac{1}{2}, \quad t \in [0, 8\pi). \quad (2.1.16)$$

Ако векторот на брзина $\vec{v}$ на кривата $\vec{r}(t)$ е константен тогаш телото се движи по права линија. За да се увериме во ова, нека $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ се координатните функции на $\vec{r}(t)$. Тогаш

$$\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)).$$

Бидејќи $\vec{v}(t)$ е константен, следува дека $\vec{v}(t)$ во секое време t е еднаков на некој фиксен вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Добиваме $\dot{x}(t) = a_1$, $\dot{y}(t) = a_2$ и $\dot{z}(t) = a_3$ во секое време t . Ако побараме (неопределени) интеграли од овие равенки, добиваме

$$x(t) = a_1 t + c_1, \quad y(t) = a_2 t + c_2, \quad z(t) = a_3 t + c_3, \quad (2.1.17)$$

каде c_1 , c_2 и c_3 се константите од интеграција; односно

$$\vec{r}(t) = (a_1 t + c_1, a_2 t + c_2, a_3 t + c_3).$$

Да забележиме дека (2.1.17) се точно параметарските равенки на (дел од) права со паралелен вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ (кој што е точно векторот на брзина) која што минува низ точката со координати (c_1, c_2, c_3) .

Забелешка 2.1.16. Телото може да се движи по права линија но неговиот вектор на брзина ниту неговата брзина да не е константна. За кривата $\vec{r}(t)$ од примерот 2.1.1 (б) векторот на брзина и брзината се

$$\vec{v}(t) = (at, 0, 0), \quad v(t) = |\vec{v}(t)| = at;$$

јасно, тие се променуваат со времето. Но телото се движи праволиниски по отсечката $[OA]$.

Наредниот битен физички концепт е векторот на забрзување (види ја сликата 2.1.4).

Дефиниција 2.1.17. Векторот на забрзување $\vec{a}(t)$ во време t на параметарската (просторна или рамнинска) крива $\vec{r}$ се дефинира како првиот извод на векторот на брзина $\vec{v}$ во време t , т. е.

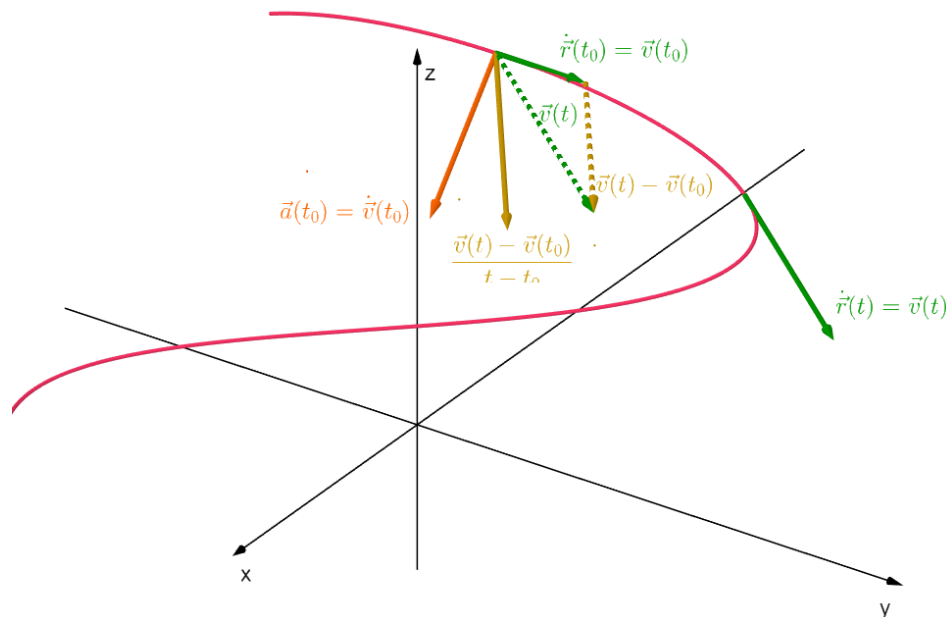
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \dot{\vec{v}}(t).$$

Од дефиницијата следува дека векторот на забрзување е вториот извод на кривата $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$:

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)).$$

Забелешка 2.1.18. Слично како и за векторот на брзина, добро е векторот на забрзување $\vec{a}(t)$ секогаш да го гледаме како да е поместен со почеток во $\vec{r}(t)$ (види ја сликата 2.1.4).

Слика 2.1.4: Векторот на забрзување: $\vec{a}(t_0) = \dot{\vec{v}}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0}$



Пример 2.1.19. Да ги пресметаме забрзувањата на кривите од примерот 2.1.2 (а), (б) и (в). Нивните вектори на брзини се дадени со (2.1.10), (2.1.11) и (2.1.12), па векторите на забрзувања се:

$$\begin{aligned}\vec{a}_1(t) &= (-\cos t, -\sin t), \quad t \in [0, 2\pi), \\ \vec{a}_2(t) &= 2(-2\cos 2t, -2\sin 2t) = 4(-\cos 2t, -\sin 2t), \quad t \in [0, \pi), \\ \vec{a}_3(t) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos(t/2), -\frac{1}{2} \sin(t/2) \right) = \frac{1}{4} (-\cos(t/2), -\sin(t/2)), \quad t \in [0, 8\pi).\end{aligned}$$

Пример 2.1.20. За кривата од примерот 2.1.12, векторот на забрзување е цело време еднаков на нултиот вектор: $\vec{a}(t) = (0, 0, 0)$ (затоа што векторот на брзина е константен).

Во суштина, ако векторот на брзина на некоја крива е константен тогаш векторот на забрзување е нултиот вектор.

Од друга страна, ако знаеме дека векторот на забрзување на $\vec{r}(t)$ е цело време еднаков на нултиот вектор, тогаш телото се движи по права линија со константен вектор на брзина. За да го видиме тоа, нека $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Фактот дека $\vec{a}(t) = (0, 0, 0)$ за сите t , имплицира

$$\ddot{x}(t) = 0, \quad \ddot{y}(t) = 0, \quad \ddot{z}(t) = 0.$$

Ако побараме два (неопределени) интеграла од секоја од равенките добиваме

$$x(t) = a_1 t + b_1, \quad y(t) = a_2 t + b_2, \quad z(t) = a_3 t + b_3, \quad (2.1.18)$$

каде $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ се константи од интеграција. Добиваме

$$\vec{r}(t) = (a_1t + b_1, a_2t + b_2, a_3t + b_3), \quad \vec{v}(t) = (a_1, a_2, a_3).$$

Значи, векторот на брзина е константен и телото се движи по (дел) од права линија со параметарски равенки дадени со (2.1.18).

Ако брзината $v(t)$ на $\vec{r}(t)$ е константна тогаш во секое време t векторот на забрзување е ортогонален на векторот на брзина. (Внимание! Претпоставката е дека $v(t)$ е константна, а не $\vec{v}(t)$; ако $\vec{v}(t)$ е константен тогаш $\vec{a}(t) = (0, 0, 0)$, а нултиот вектор е ортогонален на секој вектор па тврдењето во овој случај е тривијално).

Точноста на ова тврдење следува од следниот едноставен аргумент. Нека $v(t)$ е еднаква на константата c во секое време t . Тогаш

$$c^2 = (v(t))^2 = |\vec{v}(t)|^2 = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t).$$

Ако го диференцираме ова равенство, теоремата 2.1.5 (в) дава

$$0 = \frac{d}{dt}(\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \dot{\vec{v}}(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{v}(t) \cdot \dot{\vec{v}}(t) = \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 2\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t).$$

Односно $\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$, од што следува дека $\vec{a}(t)$ и $\vec{v}(t)$ се ортогонални.

Интересно е дека важи и обратното: ако во секое време векторот на забрзување е ортогонален на векторот на брзина тогаш брзината е константна. За да видиме дека $v(t)$ е константна, доволно е да видиме дека нејзиниот квадрат $(v(t))^2$ е константен. Тоа ќе го провериме со тоа што ќе ја диференцираме функцијата $(v(t))^2$ и ќе видиме дека нејзиниот извод е 0, од што ќе следува дека $(v(t))^2$ е константна. За таа цел го диференцираме равенството $(v(t))^2 = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)$. Теоремата 2.1.5 (в) дава

$$\frac{d}{dt}((v(t))^2) = \dot{\vec{v}}(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{v}(t) \cdot \dot{\vec{v}}(t) = \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 2\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t).$$

Бидејќи $\vec{a}(t)$ и $\vec{v}(t)$ се ортогонални, $\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$ од што следува тврдењето. Овие факти се битни и ќе ги издвоиме како посебно тврдење.

Теорема 2.1.21. *Ако брзината на кривата е константна тогаш во секое време t векторот на забрзување е ортогонален на векторот на брзина.*

Ако во секое време векторот на забрзување е ортогонален на векторот на брзина тогаш брзината на кривата е константна.

Ќе го завршиме овој дел со следнава исклучително битна обсервација. Според нашата дефиниција кривата е целото пресликување $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, а не само сликата на интервалот каде што е дефинирана кривата (т. е. интервалот $[a, b]$). Сите три криви од примерот 2.1.2 (а), (б) и (в) се различни затоа што $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ и $\vec{r}_3(t)$ се различни вектор-вредносни функции (се дефинирани на различни интервали или функциите се различно дефинирани) иако сликите на интервалите на кои се дефинирани во сите случаи се истото нешто: единечната кружница во $\mathbb{R}^2$. Ако размислиме, кривата $\vec{r}_3(t)$ личи како да е „суштински различна“ од другите две затоа што таа два пати ја поминува единечната кружница за разлика од другите две кои тоа го прават само еднаш; т.

е. $\vec{r}_3$ поминува двојно повеќе пат од другите две. Кривите $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$ се многу слични: и во обата случаи траекториите кои ги опишуваат точно еднаш поминуваат низ секоја точка од единечната кружница. Разлика помеѓу нив е времето што им е потребно да ја опишат кружницата и, се разбира, брзината со која го прават тоа. Во следниот дел, прецизно ќе го дефинираме овој концепт на „сличност на криви“.

2.2. Репараметризација и природна параметризација. Должина на крива

2.2.1. Репараметризација на криви

Дефиниција 2.2.1. Нека се дадени кривите $\vec{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $\vec{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ќе велиме дека $\vec{r}_2$ е **репараметризација** на $\vec{r}_1$ ако постои реална функција $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ која што ги задоволува следниве услови:

- (1) φ го пресликува интервалот $[c, d]$ на целиот интервал $[a, b]$,
- (2) φ може произволно многу пати да се диференцира,
- (3) првиот извод на φ е или секогаш позитивен или секогаш негативен (т. е. не менува знак и никогаш не е 0),

и важи

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(\varphi(t)), \quad t \in [c, d]. \quad (2.2.1)$$

Условот (2) имплицира дека φ или цело време строго расте или цело време строго опаѓа. На ист начин се дефинира и репараметризација на рамнински криви.

Да разгледаме неколу примери на репараметризација.

Пример 2.2.2. Нека $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$ се кривите од примерот 2.1.2 (а) и (б).

- (а) Тогаш $\vec{r}_2(t)$ е репараметризација на $\vec{r}_1(t)$. За да го видиме тоа, најпрво да забележиме дека интервалот $[a, b]$ каде е дефинирана $\vec{r}_1$ е $[0, 2\pi)$, додека интервалот $[c, d]$ каде е дефинирана $\vec{r}_2$ е $[0, \pi)$. Функцијата φ која што ни треба во оваа ситуација е

$$\varphi : [0, \pi) \rightarrow [0, 2\pi), \quad \varphi(t) = 2t,$$

(т. е. φ го растегнува интервалот $[0, \pi)$ два пати за да се добие $[0, 2\pi)$). Јасно дека φ ги исполнува условите (1), (2) и (3) (изводот на φ е $\varphi'(t) = 2 > 0$) и

$$\vec{r}_1(\varphi(t)) = (\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t))) = (\cos 2t, \sin 2t) = \vec{r}_2(t),$$

од што следува дека $\vec{r}_2(t)$ е репараметризација на $\vec{r}_1(t)$. Важи и обратното: $\vec{r}_1(t)$ е репараметризација на $\vec{r}_2$. За да го видиме тоа доволно е да ја земеме инверзната функција на φ :

$$\varphi^{-1} : [0, 2\pi) \rightarrow [0, \pi), \quad \varphi^{-1}(t) = t/2,$$

и да забележиме дека

$$\vec{r}_2(\varphi^{-1}(t)) = (\cos(2\varphi^{-1}(t)), \sin(2\varphi^{-1}(t))) = (\cos t, \sin t) = \vec{r}_1(t).$$

(б) Да ја разгледаме кривата

$$\vec{r}_4(t) : (-2\pi, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}_4(t) = (\cos t, -\sin t).$$

Кога t се движи во интервалот $(-2\pi, 0]$, $\vec{r}_4(t)$ ја опишува единечната кружница но вртењето е во насока на стрелките на часовникот т. е. вртењето е во спротивна насока од вртењето на $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$ (увери се во ова!). Кривата $\vec{r}_4(t)$ е репараметризација на $\vec{r}_1(t)$. Функцијата φ во оваа ситуација е

$$\varphi : (-2\pi, 0] \rightarrow [0, 2\pi), \quad \varphi(t) = -t;$$

таа ги исполнува условите (1), (2) и (3) (увери се во ова!) и

$$\vec{r}_1(\varphi(t)) = (\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t))) = (\cos(-t), \sin(-t)) = (\cos t, -\sin t) = \vec{r}_4(t).$$

Слично како и во (а), $\vec{r}_1(t)$ е репараметризација на $\vec{r}_4(t)$: тоа се остварува со помош на инверзната функција на φ , кој што во оваа ситуација е иста со φ , т. е. $\varphi^{-1}(t) = -t$ (го охрабруваме читателот да ги испише деталите!)

(в) Нека c е било кој реален број. Ја разгледуваме кривата

$$\vec{r}_5(t) : [-c, 2\pi - c] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}_5(t) = (\cos(t + c), \sin(t + c)).$$

И оваа крива е репараметризација на $\vec{r}_1(t)$. Навистина, за

$$\varphi : [-c, 2\pi - c] \rightarrow [0, 2\pi), \quad \varphi(t) = t + c,$$

добиваме

$$\vec{r}_1(\varphi(t)) = (\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t))) = (\cos(t + c), \sin(t + c)) = \vec{r}_5(t).$$

Слично како и претходно, $\vec{r}_1(t)$ е репараметризација на $\vec{r}_5(t)$: се разбира тоа повторно се остварува со инверзната функција на φ , т. е. со $\varphi^{-1}(t) = t - c$ (го охрабруваме читателот да ги провери деталите!).

(г) Кривата $\vec{r}_3(t)$ од примерот 2.1.2 (в) не може да биди репараметризација на $\vec{r}_1(t)$. Ако е репараметризација тогаш треба

$$\vec{r}_1(\varphi(t)) = \vec{r}_3(t)$$

за некоја $\varphi : [0, 8\pi) \rightarrow [0, 2\pi)$ која ги исполнува условите (1), (2) и (3). Но, $\vec{r}_3(t)$ ги дуплира точките на кружницата а десната страна не. На пример $\vec{r}_3(\pi) = (0, 1) = \vec{r}_3(5\pi)$ од што следува дека мора да важи: $\vec{r}_1(\varphi(\pi)) = \vec{r}_1(\varphi(5\pi)) = (1, 0)$. Но бидејќи $\vec{r}_1$ поминува низ сите точки од единечната кружница по еднаш, последново имплицира $\varphi(\pi) = \varphi(5\pi)$ што е невозможно затоа што φ исто строго расте или строго опаѓа и затоа не може да дава иста вредност за различни точки.

Забелешка 2.2.3. Овој пример сугерира дека ако една крива е репараметризација на друга крива тогаш и втората крива е репараметризација на првата. Тоа е секогаш точно. Ако $\vec{r}_2(t)$ е репараметризација на $\vec{r}_1(t)$ со помош на φ , т. е. $\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(\varphi(t))$, тогаш $\vec{r}_1(t)$ е репараметризација на $\vec{r}_2(t)$ со помош на инверзната функција φ^{-1} :

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\varphi^{-1}(t)).$$

Забелешка 2.2.4. Од горниот пример можеме да заклучиме дека секоја крива има бесконечно многу репараметризации.

Ако кривата $\vec{r}_2(t)$ е репараметризација на кривата $\vec{r}_1(t)$, тогаш како директна последица од (2.2.1) добиваме дека траекториите кои ги опишуваат се исти.

Често, нас не интересираат својства на кривите кои се исти за сите репараметризации. Таквите својства се викаат **геометриски својства** на разгледуваната крива; уште ќе велиме дека се **независни од параметризација**. Наскоро ќе се сретниме со едно такво својство: тоа е должината на кривата. Понатаму ќе видиме уште неколку такви како што се закривеноста, торзијата, тангентните прави итн.

Битно е да нагласиме дека некои својства зависат од репараметризацијата (и затоа тие не се геометриски својства)! За таквите својства ќе велиме дека **зависат од параметризација**. На пример векторот на брзина, брзината и векторот на забрзување можат да бидат различни за различни репараметризации. На пример, кривите од примерот 2.1.2 (а) и (б) (за коишто веќе видовме дека се репараметризации една на друга) имаат различни вектори на брзина, различни брзини и различни забрзувања. Од друга страна, геометриските својства на овие криви како и на кривите од примерот 2.2.2 (б) и (в) ќе бидат исти; затоа што сите тие се репараметризации една на друга. Тоа не треба да не изненади, затоа што нивните траектории го опишуваат истиот геометриски објект: единечната кружница со центар во координатниот почеток и јасно е дека нејзината должина и закривеност не треба да зависат од тоа колку брзо ќе се движи телото по неа или во која насока.

Ако $\vec{r}_2(t)$ е репараметризација на $\vec{r}_1(t)$, секогаш можеме да го изразиме векторот на брзина на $\vec{r}_2(t)$ преку векторот на брзина на $\vec{r}_1(t)$. Ова е директна последица од верижното правило. Бидејќи $\vec{r}_2(t)$ е репараметризација на $\vec{r}_1(t)$, имаме:

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(\varphi(t)),$$

за некоја функција φ што ги исполнува условите (1), (2) и (3). Верижното правило (теорема 2.1.7) дава:

$$\vec{v}_2(t) = \frac{d\vec{r}_2}{dt}(t) = \dot{\vec{r}}_1(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = \vec{v}_1(\varphi(t))\dot{\varphi}(t);$$

односно векторот на брзина на $\vec{r}_2$ во t е векторот на брзина на $\vec{r}_1$ пресметан во време $\varphi(t)$, но помножен со скаларот $\dot{\varphi}(t)$. Слично, векторот на забрзување на $\vec{r}_2(t)$ секогаш можеме да го изразиме преку векторот на забрзување на $\vec{r}_1(t)$; ова се прави на ист начин како за векторите на брзина и се добива:

$$\vec{a}_2(t) = \vec{a}_1(\varphi(t))(\dot{\varphi}(t))^2 + \vec{v}_1(\varphi(t))\ddot{\varphi}(t).$$

Го охрабруваме читателот да ги испише деталите (ова е добра вежба за употреба на верижното правило и извод од производ!).

Често, дадено ќе биде геометриско место од точки во $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$, а ние треба да најдеме крива што поминува низ секоја точка од ова геометриско место од точки точно еднаш со ненулта вектор на брзина²; со тоа траекторијата на кривата ќе се соопваѓа

²Кривите со ненулта вектор на брзина се викаат регуларни; види ја дефиницијата 2.2.10 подолу.

со даденото геометриско место од точки и фактот дека векторот на брзина е ненулти дава дека кривата во ниту една точка не мирува. Ваквите геометриски места од точки ќе ги викаме **геометриски криви**. Овој процес на запишување крива со ненулти вектор на брзина, која поминува низ секоја точка од дадена геометриска крива, се вика **параметризација** на геометриската крива. Параметризацијата не е единствена: секоја нејзина репараметризација е повторно параметризација на геометриската крива. На пример, единечната кружница во $\mathbb{R}^2$ со центар во координатниот почеток е геометриското место од точки со координата $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ за кои важи:

$$x^2 + y^2 = 1$$

(тоа е дефиницијата на оваа кружница). Ова е геометриска крива и веќе видовме повеќе нејзини параметризации: кривите од примерот 2.1.2 (а) и (б), како и кривите од примерот 2.2.2 (б) и (в). Кривата од примерот 2.1.2 (в) не е параметризација на единечната кружница затоа што таа ја поминува кружницата два пати. Слично, во примерот 2.1.12 геометриската крива е отсечката $[AB]$, а (2.1.8) е една нејзина параметризација. Често и геометриските криви ќе ги викаме криви, но читателот треба да помни дека геометриската крива е геометриско место од точки во $\mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^2$), а параметризацијата е вектор-вредносната функција $\vec{r}(t)$ којашто ја опишува геометриската крива.

2.2.2. Должина на крива

Конечно пристигнавме до првото геометриско својство на кривите: должината. Ако кривата е кружница или отсечка, тогаш знаеме како да ја пресметаме нејзината должина. Во општ случај, проблемот изгледа многу тежок; телото може да има чудна траекторија и нема очигледен начин како да напишеме формула за нејзината должина. Затоа, ќе започниме со мали чекори: како за почеток, да пробаме да ја апроксимираме должината на кривата $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Наједноставен начин да ја апроксимираме е да ја поделиме кривата со неколку точки и потоа секој лак помеѓу две последователни точки да го замениме со отсечката што ги врзува двете точки. На овој начин ја апроксимираме должината на $\vec{r}(t)$ со искршена линија (види ја сликата 2.2.1). Должината на искршената линија лесно се пресметува: тоа е сумата на должините на сите отсечки. Значи, го делиме интервалот $[a, b]$ со $n - 1$ точка $t_1, \dots, t_{n-1}$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-2} < t_{n-1} < t_n = b$$

(краевите a и b ги означивме со t_0 и t_n) и искршената линија е составена од отсечките:

$$\text{од } \vec{r}(t_0) \text{ до } \vec{r}(t_1), \quad \text{од } \vec{r}(t_1) \text{ до } \vec{r}(t_2), \quad \dots, \quad \text{од } \vec{r}(t_{n-1}) \text{ до } \vec{r}(t_n).$$

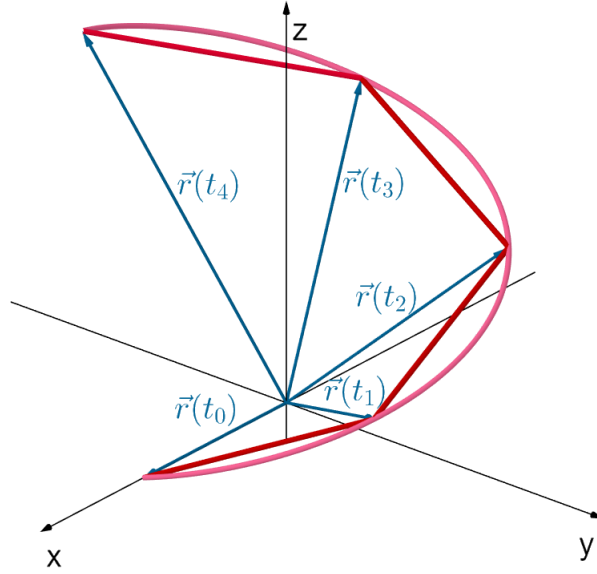
Должините на овие отсечки се:

$$|\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)|, \quad |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|, \quad \dots, \quad |\vec{r}(t_n) - \vec{r}(t_{n-1})|,$$

и должината на искршената линија е нивната сума:

$$\sum_{j=1}^n |\vec{r}(t_j) - \vec{r}(t_{j-1})|. \quad (2.2.2)$$

Слика 2.2.1: Апроксимација на должината на крива



На пример, за $n = 4$, интервалот е поделен со три точки t_1, t_2 и t_3 : $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b$. Искршената линија се состои од четирите отсечки (види ја сликата 2.2.1),

$$\text{од } \vec{r}(t_0) \text{ до } \vec{r}(t_1), \quad \text{од } \vec{r}(t_1) \text{ до } \vec{r}(t_2), \quad \text{од } \vec{r}(t_2) \text{ до } \vec{r}(t_3), \quad \text{од } \vec{r}(t_3) \text{ до } \vec{r}(t_4),$$

и нејзината должина е:

$$|\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)| + |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)| + |\vec{r}(t_3) - \vec{r}(t_2)| + |\vec{r}(t_4) - \vec{r}(t_3)|.$$

Кога бројот на делбени точки расте, искршената линија сè повеќе ќе личи на кривата и нејзината должина ќе се доближува до должината на $\vec{r}(t)$. Со други зборови, сумата (2.2.2) ќе тежи кон вистинската должина l на кривата кога $n \rightarrow \infty$. Од друга страна, ако имаме голем број делбени точки (т. е. ако n е голем) и ако точките t_{j-1} и t_j се блиски една до друга тогаш

$$\text{векторот } \frac{\vec{r}(t_j) - \vec{r}(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \text{ е близок до векторот } \dot{\vec{r}}(t_{j-1}); \quad (2.2.3)$$

ова следува од дефиницијата на изводот (2.1.4). Следува дека и нивните должини се блиски:

$$\frac{|\vec{r}(t_j) - \vec{r}(t_{j-1})|}{t_j - t_{j-1}} \approx |\dot{\vec{r}}(t_{j-1})|, \quad \text{односно} \quad |\vec{r}(t_j) - \vec{r}(t_{j-1})| \approx |\dot{\vec{r}}(t_{j-1})|(t_j - t_{j-1}). \quad (2.2.4)$$

Бидејќи $|\dot{\vec{r}}(t_{j-1})|$ е брзината $v(t_{j-1})$, сумата (2.2.2) ја апроксимираме на следниот начин:

$$\sum_{j=1}^n |\vec{r}(t_j) - \vec{r}(t_{j-1})| \approx \sum_{j=1}^n v(t_{j-1})(t_j - t_{j-1}). \quad (2.2.5)$$

Клучното нешто што треба да го забележиме е дека десната страна е (Римановата) интегрална сума за функцијата $v(t)$ на интервалот $[a, b]$, па кога бројот на делбени точки е голем, десната страна ќе биде сè поблиска до интегралот на $v(t)$ на $[a, b]$. Кога $n \rightarrow \infty$ во (2.2.5), добиваме:

$$l = \int_a^b v(t) dt,$$

што е бараната формула за должината на кривата.

Теорема 2.2.5. Должината l на кривата $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ е дадена со формулата:

$$l = \int_a^b |\dot{\vec{r}}(t)| dt. \quad (2.2.6)$$

Должината не зависи од параметризацијата, т. е. ако $\vec{r}_1 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ е репараметризација на $\vec{r}$, тогаш нејзината должина е иста како и должината на $\vec{r}$.

Забелешка 2.2.6. Внимателниот читател ќе забележи дека последниот факт за независноста од параметризација не следува од аргументите што ги дадовме погоре. Доказот се сведува на смена на променливи во интегралот (2.2.6), но е специфичен и нема да го дадеме.

Забелешка 2.2.7. Теоремата е валидна и кога кривата е рамнинска.

Забелешка 2.2.8. Формулата (2.2.6) ја има истата есенција како обичната формула за должина што ја знаеме:

$$\text{должината} = \text{брзината} \cdot \text{времето}.$$

Тоа директно се гледа од апроксимацијата (2.2.5).

Ќе ја илустрираме теоремата во неколку едноставни ситуации; во наредниот дел ќе ја пресметаме должината на повеќе различни криви.

Пример 2.2.9. Да ја пресметаме должината на кривите $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$ од примерот 2.1.2. Јасно, резултатот што треба да го добиеме е должината на единечната кружница и во двата случаја. За $\vec{r}_1$, од (2.1.10) имаме $v_1(t) = 1$ и должината е:

$$\int_0^{2\pi} v_1(t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

За $\vec{r}_2$, (2.1.11) дава $v_2(t) = 2$ и должината е (за $\vec{r}_2$ интервалот е $[0, \pi]$):

$$\int_0^{\pi} v_2(t) dt = 2 \int_0^{\pi} dt = 2\pi.$$

Должината на кривата $\vec{r}_3$ од примерот 2.1.2 (в) треба да е два пати поголема затоа што два пати ја врти единечната кружница. Навистина, нејзината брзина е $v_3(t) = 1/2$ (види (2.1.12)) и должината е:

$$\int_0^{8\pi} v_3(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{8\pi} dt = 4\pi.$$

Го охрабруваме читателот да ја пресмета должината на кривата од примерот 2.1.12 и да се увери дека тоа е точно должината на отсечката $[AB]$.

2.2.3. Природна параметризација

Како што видовме, кривите имаат бексонечно многу различни репараметризации. Меѓу нив има една исклучително битна: тоа е таканаречената **параметризација по должина на кружен лак**; уште се вика **природна параметризација**. Оваа репараметризација се дава само за таканаречените регуларни криви, што сега ќе ги дефинираме.

Дефиниција 2.2.10. Кривата $\vec{r}$ се вика **регуларна** ако нејзиниот вектор на брзина е секогаш различен од нултиот вектор.

Регуларните криви опишуваат движења на тела што во ниту еден момент не мируваат (нивната брзина никогаш не е нула).

Природната параметризација се добива на начинот прикажан во продолжение. Нека $\vec{r}$ е регуларна просторна или рамнинска крива дефинирана на интервалот $[a, b]$. За секое време $t \in [a, b]$ ја дефинираме следната вредност (која зависи од t):

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\vec{r}}(\lambda)| d\lambda, \quad t \in [a, b]; \quad (2.2.7)$$

ова е навистина функција од t , затоа што по евалуацијата на интегралот t останува како слободна променлива. Да забележиме дека, за секоја фиксна вредност на $t \in [a, b]$, $s(t)$ е точно должината на делот на кривата $\vec{r}$ на интервалот $[a, t]$; ова директно следува од теоремата 2.2.5 (види ја сликата 2.2.1). Притоа, како t се менува од a до b , вредноста на s се движи од 0 до должината l на кривата (за $t = a$, $s(a) = 0$, додека за $t = b$, $s(b)$ е точно l); односно s е обична реална функција што го пресликува интервалот $[a, b]$ на интервалот $[0, l]$. Со диференцирање на (2.2.7) по t , добиваме:

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{r}}(t)| > 0, \quad \text{за сите } t \in [a, b]. \quad (2.2.8)$$

Последното неравенство следува од регуларноста на $\vec{r}$, додека првото равенство е фактот дека изводот од интеграл е подинтегралната функција. Клучниот факт (што нема да го докажаме) е дека функцијата $s : [a, b] \rightarrow [0, l]$ ги исполнува својствата (1), (2) и (3) од дефиницијата 2.2.1 (во (2.2.8) веќе видовме дека го задоволува (3)). Вака дефинираното s се вика **природен параметар** за $\vec{r}$. На пример, за кривата $\vec{r}_2$ од примерот 2.1.2 (б), $|\dot{\vec{r}}_2(t)| = 2$ (види (2.1.15)), па нејзиниот природен параметар е:

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}_2(\lambda)| d\lambda = 2 \int_0^t d\lambda = 2\lambda \Big|_0^t = 2t, \quad t \in [0, \pi).$$

Се враќаме на општата ситуација. Бидејќи $s : [a, b] \rightarrow [0, l]$ ги задоволува условите (1), (2) и (3) од дефиницијата 2.2.1, факт е дека и инверзната функција $[0, l] \rightarrow [a, b]$ ги исполнува овие својства (ова нема да го докажаме). Инверзната функција е точно таа што го изразува времето t како функција од s . Инверзната функција се определува со решавање на равенката $s = s(t)$. Во случајот на кривата од примерот 2.1.2 (б), оваа равенка е $s = 2t$ од што добиваме $t = s/2$; инверзната функција е $t(s) = s/2$. Вака дефинираната функција $s \mapsto t(s)$, $[0, l] \rightarrow [a, b]$, ќе ја користиме како функцијата φ

од дефиницијата 2.2.1, за да ја дефинираме природната параметризација. Природната параметризација на $\vec{r}(t)$ е кривата $s \mapsto \vec{r}(t(s))$; односно, на местото од t ја ставиме формулата $t(s)$ што го изразува времето t како функција од s . За кривата од примерот 2.1.2 (б), добиваме:

$$\vec{r}_2(t(s)) = (\cos(2t(s)), \sin(2t(s))) = (\cos s, \sin s).$$

Во практика, природната параметризација се означува само со $\vec{r}(s)$ (наместо $\vec{r}(t(s))$). Па, природната параметризација на $\vec{r}_2$ е (должината е 2π , види го примерот 2.2.9)

$$\vec{r}_2 : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}_2(s) = (\cos s, \sin s);$$

да забележиме дека ова е точно кривата од примерот 2.1.2 (а).

Забелешка 2.2.11. Природната параметризација е битна, бидејќи преку неа ќе ги дефинираме геометриските својства на кривите; како што се закривеноста и торзијата. Но, често, нејзиното определување е исклучително тешко (практично невозможно). Евалуацијата на интегралот (2.2.7), со кој се дефинира s , е обично исклучително тешко. Но, дури и кога тоа може да се направи, на крајот треба да се изрази t преку s (т. е. да се реши равенката $s = s(t)$), а ова, често е практично невозможно. Затоа, иако геометриските својства ќе ги дефинираме преку природната параметризација, во практика обично ќе ги пресметуваме на други начини.

Забелешка 2.2.12. Природниот параметар секогаш ќе го означуваме со s . За да не настане забуна, изводите по s ќе ги означуваме со $\frac{d}{ds}$ (прв извод), $\frac{d^2}{ds^2}$ (втор извод) итн., додека за изводите по t најчесто ќе ги користиме ознаките со точки како и досега (на пример $\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$ итн.), но некогаш ќе ги користиме и дескриптивните ознаки $\frac{d}{dt}$, $\frac{d^2}{dt^2}$ итн.

Бидејќи $s \mapsto t(s)$ е инверзната функција на $t \mapsto s(t)$, од правилото за сметање извод на инверзна функција (од елементарен калкулус) формулата (2.2.8) дава:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}|}. \quad (2.2.9)$$

Ако го примениме верижното правило (види ја равенката (2.1.6)), за векторот на брзината на природната параметризација добиваме:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}. \quad (2.2.10)$$

Па, брзината на природната параметризација е:

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|} = 1; \quad (2.2.11)$$

т. е. таа е секогаш еднаква на 1. Ова не треба да нè зачуди: интуитивно, бидејќи

$$\text{брзина} = \frac{\text{изминат пат}}{\text{време}}$$

и бидејќи во природната параметризација времето го мериме како изминатиот пат, брзината очекуваме дека ќе биде 1.

За крај, уште еднаш ќе ја илустрираме техниката за определување на природната параметризација на кривата $\vec{r}_3$ од примерот 2.1.2 (в):

$$\vec{r}_3 : [0, 8\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}_3(t) = (\cos(t/2), \sin(t/2)).$$

Бидејќи $|\dot{\vec{r}}_3(t)| = 1/2$ (види ја равенката (2.1.16)), природниот параметар е:

$$s = \int_0^t |\dot{\vec{r}}_3(\lambda)| d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^t d\lambda = \frac{1}{2} \lambda \Big|_0^t = \frac{t}{2};$$

инцидентно, за $t = 8\pi$ се добива должината $l = 4\pi$. Добиваме $t = 2s$ и природната параметризација е:

$$\vec{r}_3 : [0, 4\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}_3(s) = (\cos s, \sin s).$$

Пример 2.2.13. Дадена е кривата:

$$\vec{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

Да се определи нејзината природна параметризација.

Ја определуваме брзината на $\vec{r}$:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t), \\ |\dot{\vec{r}}(t)| &= \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + e^{2t}} \\ &= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2 \sin t \cos t + \sin^2 t) + e^{2t}(\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t) + e^{2t}} \\ &= e^t \sqrt{2 \cos^2 t + 2 \sin^2 t + 1} = \sqrt{3} e^t. \end{aligned}$$

За природниот параметар добиваме:

$$s = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(\lambda)| d\lambda = \sqrt{3} \int_0^t e^\lambda d\lambda = \sqrt{3} e^\lambda \Big|_0^t = \sqrt{3}(e^t - 1).$$

Следува $e^t = s/\sqrt{3} + 1$, односно $t = \ln(s/\sqrt{3} + 1)$. Од горното равенство следува и дека должината на кривата е $\sqrt{3}(e - 1)$ (се добива за $t = 1$). Природната параметризација е:

$$\vec{r}(s) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \cos \left(\ln \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \right), \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \sin \left(\ln \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \right), \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right),$$

кога s се движи во $[0, \sqrt{3}(e - 1)]$.

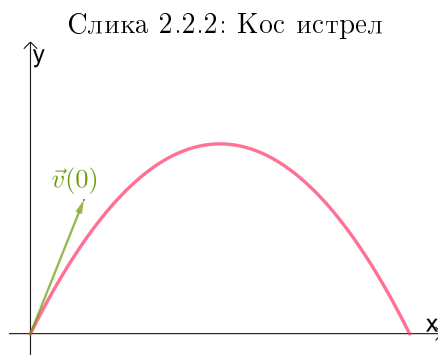
Го охрабруваме читателот да ги определи природните параметризации за кривите од примерот 2.1.2 (а) и од примерот 2.2.2 (б). И во обете ситуации се добива $s = t$ и нивните природни параметризации се истите криви, т. е. кривите се веќе запишани во природна параметризација.

Уште еден пример од механика

Пример 2.2.14. (Кос истрел) Тело се ифрла од земјата со почетна брзина v_0 под агол $\alpha \in (0, \pi/2)$ во однос на земјата. Отпорот на воздухот е занемарлив. Да се пресмета колку далеку паднало од местото од кое е исфрлено, со која брзина удрило во земјата и под кој агол. Потоа да се пресмета изминатиот пат на телото додека не падне на земјата, т. е. должината на неговата траекторија.

Бидејќи на телото дејствува само гравитационата сила вертикално надолу, телото ќе се движи во рамнината определена со правецот во кое е исфрлено и ортогоналниот правец на земјата; со други зборови неговата траекторија е рамнинска. Го ставаме координатниот систем така што неговиот почеток $O(0, 0)$ е во местото од каде што се исфрла телото на тој начин што тоа е исфрлено во насока на позитивната x -оската, додека y -оската е ортогонална на земјата. Траекторијата на телото е дадена со крива $\vec{r}(t)$. Знаеме дека во $t = 0$, $\vec{r}(0) = (0, 0)$, но не знаеме колку време поминува додека не падне на земјата. Од условот, векторот на брзината во $t = 0$ е (види ја сликата 2.2.2)

$$\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}(0) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha) = v_0(\cos \alpha, \sin \alpha).$$



Силата што дејствува на телото е гравитационата и таа е $-m(0, g)$, каде што g е земјиното забрзување и m е масата на телото; знакот $-$ е затоа што таа е насочена надолу по y -оската. Од вториот Њутнов закон добиваме:

$$-m(0, g) = m\vec{a}(t) \implies (0, -g) = \ddot{\vec{r}}(t).$$

Ако $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, ги добиваме следниве диференцијални равенки:

$$\ddot{x}(t) = 0, \quad \ddot{y}(t) = -g, \quad (2.2.12)$$

со почетни услови $x(0) = y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha$, $\dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha$. Ги интегрираме два пати равенките (2.2.12) и добиваме:

$$x(t) = c'_1 t + c_1, \quad y(t) = -gt^2/2 + c'_2 t + c_2,$$

каде што c_1, c'_1, c_2, c'_2 се константите од интеграција. Нив ги определуваме од почетните услови:

$$0 = x(0) = c_1, \quad 0 = y(0) = c_2, \quad v_0 \cos \alpha = \dot{x}(0) = c'_1, \quad v_0 \sin \alpha = \dot{y}(0) = c'_2.$$

Од ова добиваме дека:

$$\vec{r}(t) = ((v_0 \cos \alpha)t, -gt^2/2 + (v_0 \sin \alpha)t).$$

Телото паѓа на земјата во оној момент кога y -координатата станува 0:

$$0 = -gt^2/2 + (v_0 \sin \alpha)t \iff t = 0 \text{ или } t = (2v_0 \sin \alpha)/g.$$

Се разбира, вредноста $t = 0$ не нè интересира затоа што тогаш телото почнало да се движи. Моментот кога телото паѓа на земјата е $t = (2v_0 \sin \alpha)/g$. Од ова веднаш можеме да видиме колку далеку паднало од местото од каде што било исфрлено: тоа е точно вредноста на x -координата во ова време, односно:

$$x((2v_0 \sin \alpha)/g) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

За да ја најдеме брзината со која телото удрило во земјата, прво пресметуваме:

$$\vec{r}(t) = (v_0 \cos \alpha, -gt + v_0 \sin \alpha), \quad |\vec{r}(t)| = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (gt - v_0 \sin \alpha)^2} \quad (2.2.13)$$

и заменуваме $t = (2v_0 \sin \alpha)/g$. Се добива $|\vec{r}((2v_0 \sin \alpha)/g)| = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha} = v_0$. Како што очекувавме, брзината е иста со онаа со која било исфрлено. Се разбира, ова може да се добие далеку поедноставно од законот за зачувување на енергијата. На почетокот, телото има само кинетичка енергија $mv_0^2/2$. Кога ќе ја удри земјата повторно има само кинетичка енергија која што мора да биде иста со вкупната енергија на почетокот. Со изедначување се добива дека крајната брзина мора да биде v_0 . За да го добиеме аголот под кој ја удрило земјата, заменуваме $t = (2v_0 \sin \alpha)/g$ во $\vec{r}(t)$ и добиваме:

$$\vec{r}((2v_0 \sin \alpha)/g) = (v_0 \cos \alpha, -v_0 \sin \alpha) = v_0(\cos \alpha, -\sin \alpha),$$

од што следува дека аголот е повторно α ; интуитивно, ова е очигледно затоа што траекторијата е превртена парабола, види ја сликата 2.2.2.

Барањето на должината на траекторијата е покомплицирано. Проблемот се сведува на сметање на должината на дел од парабола и тука се појавува интеграл од облик $\int \sqrt{1+t^2} dt$ кој е специфичен за пресметка (види го примерот 2.3.4). Од (2.2.13), за изминатиот пат добиваме:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{(2v_0 \sin \alpha)/g} |\vec{r}(\lambda)| d\lambda = \int_0^{(2v_0 \sin \alpha)/g} \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (g\lambda - v_0 \sin \alpha)^2} d\lambda \\ &= v_0 \cos \alpha \int_0^{(2v_0 \sin \alpha)/g} \sqrt{1 + \frac{(g\lambda - v_0 \sin \alpha)^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}} d\lambda. \end{aligned}$$

Воведуваме смена:

$$q = \frac{g\lambda - v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha}, \quad dq = \frac{g}{v_0 \cos \alpha} d\lambda.$$

По смената, долната граница на интегралот е $-\tan \alpha$ (се добива кога $\lambda = 0$), а горната граница е $\tan \alpha$ (се добива кога $\lambda = (2v_0 \sin \alpha)/g$). Имаме:

$$l = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \int_{-\tan \alpha}^{\tan \alpha} \sqrt{1+q^2} dq.$$

Употребуваме парцијална интеграција со:

$$u = \sqrt{1+q^2}, \quad dv = dq, \quad du = \frac{q dq}{\sqrt{1+q^2}}, \quad v = q,$$

и добиваме:

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} q \sqrt{1+q^2} \Big|_{-\tan \alpha}^{\tan \alpha} - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \int_{-\tan \alpha}^{\tan \alpha} \frac{q^2 dq}{\sqrt{1+q^2}} \\
 &= \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \tan \alpha \sqrt{1+\tan^2 \alpha} + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \tan \alpha \sqrt{1+\tan^2 \alpha} \\
 &\quad - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left(\int_{-\tan \alpha}^{\tan \alpha} \frac{(q^2+1) dq}{\sqrt{1+q^2}} - \int_{-\tan \alpha}^{\tan \alpha} \frac{dq}{\sqrt{1+q^2}} \right).
 \end{aligned}$$

Да забележиме дека:

$$\sqrt{1+\tan^2 \alpha} = \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad (2.2.14)$$

од што следува:

$$l = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \int_{-\tan \alpha}^{\tan \alpha} \sqrt{1+q^2} dq + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \int_{-\tan \alpha}^{\tan \alpha} \frac{dq}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Претпоследниот интеграл (со коефициентот пред него) е точно l , додека последниот е табличен интеграл. Добиваме:

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g} - l + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \ln \left| q + \sqrt{1+q^2} \right| \Big|_{-\tan \alpha}^{\tan \alpha} \\
 &= \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g} - l + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left(\ln \left| \tan \alpha + \sqrt{1+\tan^2 \alpha} \right| - \ln \left| -\tan \alpha + \sqrt{1+\tan^2 \alpha} \right| \right).
 \end{aligned}$$

Ја решаваме равенката по l и го употребуваме (2.2.14); добиваме:

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g} + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g} \left(\ln \left| \frac{\sin \alpha + 1}{\cos \alpha} \right| - \ln \left| \frac{-\sin \alpha + 1}{\cos \alpha} \right| \right) \\
 &= \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g} + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g} \ln \left| \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right|.
 \end{aligned}$$

2.3. Примери на криви

Во овој дел, ќе разгледаме различни примери на криви. За секоја од нив, ќе ги пресметаме нивните вектори на брзина и забрзување и, во дел од случаите, нивните должини и природни параметризации. За да добиеме подобра геометриска интуиција, ќе ги нацртаме и нивните траектории.

2.3.1. Примери на рамнински криви

Графици на функции од една променлива

Наједноставниот тип на рамнински криви се графичите на (обичните) реални функции од една променлива. Ако $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е реална функција, нејзиниот график (по

дефиниција!) е множеството од точки во рамнината (x, y) чија што координата x припаѓа во $[a, b]$, соодветната y -координата е вредноста на функцијата во x , т. е. $y = f(x)$. Односно, графикот се сите точки од облик $(x, f(x))$, каде што $x \in [a, b]$. Па, траекторијата на кривата

$$\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}(t) = (t, f(t)),$$

е точно графикот на f (во суштина само ја преименувавме променливата x со t). Нејзините вектори за брзина и забрзување се $\vec{r}'(t) = (1, f'(t))$ и $\vec{a}(t) = (0, f''(t))$ (каде што f' и f'' се првиот и вториот извод на f). Да забележиме дека оваа крива е секогаш регуларна, т. е. $\vec{v}(t) \neq \vec{0}$ (првата координата на брзината е секогаш 1).

Кружници и елипси

Во примерот 2.1.2 (а) и (б) веќе видовме две криви чиешто траектории се единечната кружница со центар во $(0, 0)$. Генерално, кружницата со центар во точката $C(c_1, c_2)$ и радиус r (види ја сликата 2.3.1) е дадена со равенката:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2. \quad (2.3.1)$$

Еден начин да се запише оваа кружница како параметарска крива е:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}(t) = (c_1 + r \cos t, c_2 + r \sin t). \quad (2.3.2)$$

Во овој случај t е аголот што го зафаќа правата што минува низ центарот C и точката $\vec{r}(t)$ со позитивната x -оска. Радиус-векторот $\vec{r}(t)$ се врти по кружницата во спротивна насока од стрелките на часовникот од точката $A(c_1 + r, c_2)$ преку дијаметрално спротивната точка $B(c_1 - r, c_2)$ и завршува во A (види ја сликата 2.3.1). Кривата $\vec{r}$ поминува низ сите точки само еднаш, освен точката A што се добива и за $t = 0$ и за $t = 2\pi$, ако сакаме ова да не се случува треба да ја дефинираме на интервалот $[0, 2\pi)$. Векторите на брзина и забрзување се дадени со:

$$\vec{v}(t) = (-r \sin t, r \cos t), \quad \vec{a}(t) = (-r \cos t, -r \sin t).$$

Од овде $v(t) = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r$ и природниот параметар е:

$$s = \int_0^t v(\lambda) d\lambda = r \int_0^t d\lambda = r\lambda \Big|_0^t = tr.$$

За $t = 2\pi$ се добива должината $l = 2r\pi$. Бидејќи $t = s/r$, природната параметризација е:

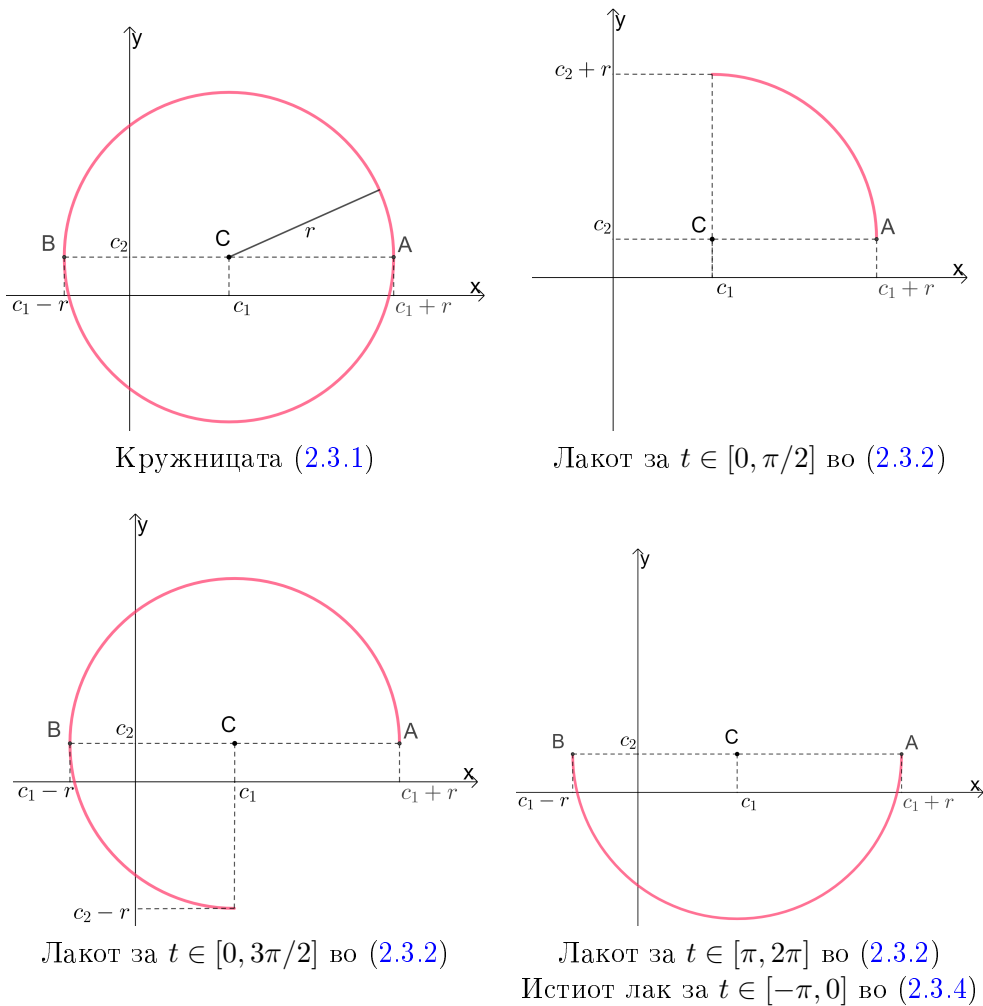
$$\vec{r} : [0, 2r\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}(s) = (c_1 + r \cos(s/r), c_2 + r \sin(s/r)). \quad (2.3.3)$$

Записот (2.3.2) можеме да го користиме кога ни требаат само делови од кружницата со тоа што треба соодветно да го промениме интервалот; види ја сликата 2.3.1.

Записот (2.3.2) не е единствениот начин на кој може да ја дадеме кружницата (2.3.1). Друга, често употребувана параметризација е:

$$\vec{r} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}(t) = (c_1 + r \cos t, c_2 + r \sin t). \quad (2.3.4)$$

Слика 2.3.1: Кружницата (2.3.1) и неколку нејзини делови



Траекторијата на оваа крива врти во спротивна насока од насоката на стрелките на часовникот од точката $B(c_1 - r, c_2)$ преку точката $A(c_1 + r, c_2)$ и се враќа во B (види ја сликата 2.3.1).

Равенката на елипсата со центар во точката $C(c_1, c_2)$ и полуоски $a > 0$ и $b > 0$ (види ја сликата 2.3.2) е дадена со:

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} + \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1; \quad (2.3.5)$$

се разбира кога полуоските a и b се исти, тогаш добиваме кружница (види (2.3.1)). Параметризацијата на елипсата е слична со таа на кружницата:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}(t) = (c_1 + a \cos t, c_2 + b \sin t); \quad (2.3.6)$$

t е повторно аголот што го зафаќа правата што минува низ C и точката $\vec{r}(t)$ со позитивната x -оска. На сличен начин како кај кружницата, ако во параметризацијата

(2.3.6) земаме само делови од интервалот $[0, 2\pi]$, ги добиваме соодветните делови од елипсата; види ја сликата 2.3.2. Векторите на брзина и забрзување на (2.3.6) се дадени со:

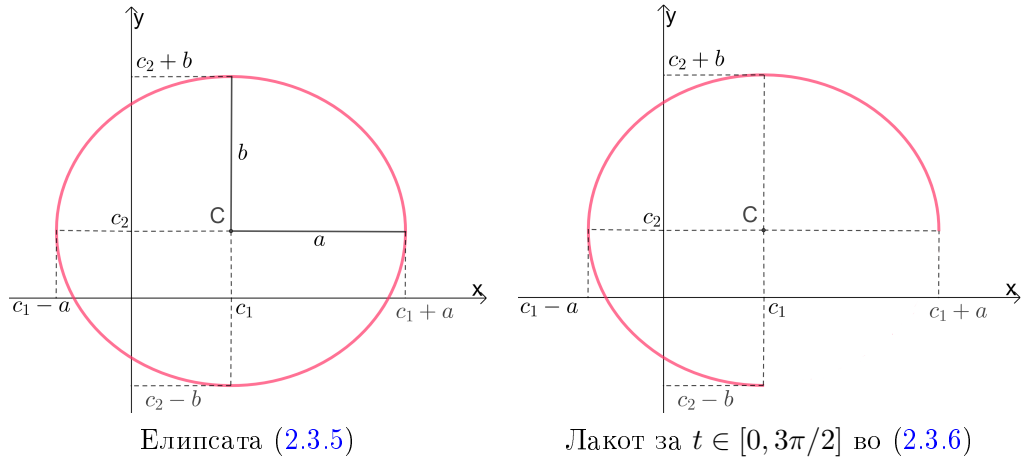
$$\vec{v}(t) = (-a \sin t, b \cos t), \quad \vec{a}(t) = (-a \cos t, -b \sin t),$$

а брзината е $v(t) = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$. За должината добиваме:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt. \quad (2.3.7)$$

Во општа ситуација, овој интеграл не може експлицитно да се пресмета; се разбира, за фиксни вредности на a и b , интегралот може нумерички да се апроксимира со голема прецизност. Исто така, во општа ситуација, природниот параметар на елипсата не може експлицитно да се пресмета. Веќе нагласивме во претходниот дел дека ова е еден од проблемите во природната параметризација: пресметката на интегралот што го дава природниот параметар е исклучително тешка (често невозможна, како во оваа ситуација).

Слика 2.3.2: Елипсата (2.3.5) и еден нејзин лак



Хиперболи

Има две хиперболи со полусоки $a > 0$ и $b > 0$ и центар во координатниот почеток. Едната е дадена со равенката:

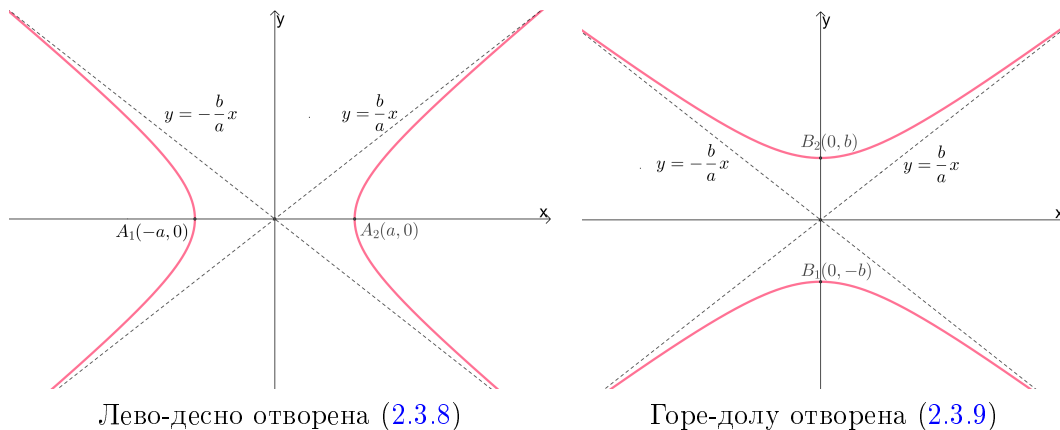
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.3.8)$$

а другата со равенката:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1; \quad (2.3.9)$$

(види ја сликата 2.3.3). За да правиме разлика меѓу двете, (2.3.8) ќе ја викаме лево-десно отворена, додека (2.3.9) ќе ја викаме горе-долу отворена. И за двете, правите

Слика 2.3.3: Хиперболите (2.3.8) и (2.3.9)



$y = (b/a)x$ и $y = -(b/a)x$ се асимптоти. Лево-десно отворената хипербола (2.3.8) има две гранки: левата гранка се состои од точките со негативна x -координата, а десната гранка ги содржи точките со позитивна x -координата. Точките $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ се викаат темиња; да забележиме дека точките $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ не се дел од оваа хипербола. Слично, горе-долу отворената хипербола (2.3.9) има две гранки: горната гранка ги содржи точките со позитивна y -координата, додека долната тие со негативна y -координата. За оваа хипербола, точките $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ се викаат темиња; се разбира, оваа хипербола не ги содржи точките $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$. За да ги параметризираме хиперболите, ќе се потсетиме на хиперболичните тригонометриски функции: хиперболичниот синус $\sinh t$ и хиперболичниот косинус $\cosh t$. Тие се дефинирани на следниов начин:

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3.10)$$

Со директна замена се добива дека:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \quad \text{за сите } t \in \mathbb{R}, \quad (2.3.11)$$

(ова е хиперболичната варијанта на равенството $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$). Изводите на $\sinh t$ и $\cosh t$ се однесуваат слично како изводите на $\sin t$ и $\cos t$: со примена на формулите (2.3.10)) добиваме:

$$\frac{d}{dt}(\sinh t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t, \quad \frac{d}{dt}(\cosh t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t. \quad (2.3.12)$$

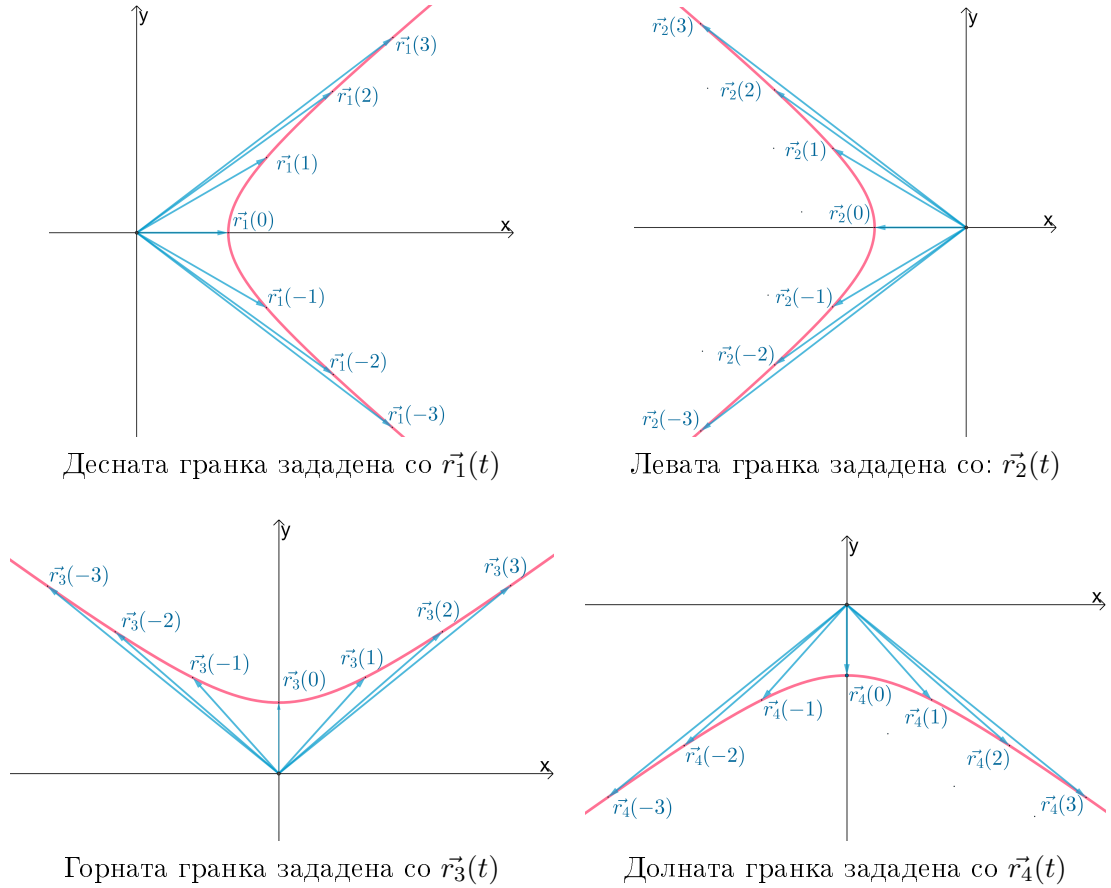
Параметризацијата на лево-десно отворената хипербола (2.3.8) се состои од две криви, по една за секоја гранка:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1: (-\infty, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}_1(t) = (a \cosh t, b \sinh t), \quad \text{за десната гранка;} \\ \vec{r}_2: (-\infty, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}_2(t) = (-a \cosh t, b \sinh t), \quad \text{за левата гранка} \end{aligned}$$

(читателот ја гледа симетријата помеѓу ова и параметризацијата на елипсата). За $t = 0$ се добиваат двете темиња: $\vec{r}_1(0) = (a, 0)$, $\vec{r}_2(0) = (-a, 0)$. Кога t се движи од $-\infty$ до ∞ ,

траекторијата на $\vec{r}_1(t)$ ги поминува сите точки од десната гранка на начинот покажан на сликата 2.3.4. Слично, кога t се движи од $-\infty$ до ∞ , траекторијата на $\vec{r}_2$ ги поминува сите точки на левата гранка како на сликата 2.3.4.

Слика 2.3.4: Гранките на хиперболите (2.3.8) и (2.3.9)



Параметризацијата на горе-долу отворената хипербола (2.3.9) е дадена со

$$\begin{aligned} \vec{r}_3 : (-\infty, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}_3(t) = (a \sinh t, b \cosh t), \quad \text{за горната гранка;} \\ \vec{r}_4 : (-\infty, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}_4(t) = (a \sinh t, -b \cosh t), \quad \text{за долната гранка.} \end{aligned}$$

За $t = 0$ се добиваат двете темиња: $\vec{r}_3(0) = (0, b)$, $\vec{r}_4(0) = (0, -b)$. Кога t се движи од $-\infty$ до ∞ , траекторијата на $\vec{r}_3(t)$ ги поминува сите точки од горната гранка на начинот покажан на сликата 2.3.4, додека, кога t се движи од $-\infty$ до ∞ , траекторијата на $\vec{r}_4$ ги поминува сите точки на долната гранка како на сликата 2.3.4.

Со примена на (2.3.12), добиваме дека векторите на брзина и забрзување на $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ и $\vec{r}_4$ се дадени со:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(t) &= (a \sinh t, b \cosh t), & \vec{a}_1(t) &= (a \cosh t, b \sinh t); \\ \vec{v}_2(t) &= (-a \sinh t, b \cosh t), & \vec{a}_2(t) &= (-a \cosh t, b \sinh t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_3(t) &= (a \cosh t, b \sinh t), & \vec{a}_3(t) &= (a \sinh t, b \cosh t); \\ \vec{v}_4(t) &= (a \cosh t, -b \sinh t), & \vec{a}_4(t) &= (a \sinh t, -b \cosh t).\end{aligned}$$

Јасно, должината на целата хипербола е ∞ . Ако сакаме да ја пресметаме должината на конечен дел од хиперболата, тогаш интегралот што треба да се евалуира, најчесто не може експлицитно да се пресмета; нумерички секогаш може да се апроксимира.

2.3.2. Примери на просторни криви

Сега ќе видиме неколку примери на просторни криви.

Спирали

За нас, најбитните просторни криви ќе бидат спиралите; често ќе се среќаваме со нив. Нека a и b се два позитивни броја и q ненулта реален број (q може да биде негативен!). Типичен пример на спирала е:

$$\vec{r} : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t, qt). \quad (2.3.13)$$

Кога $q > 0$, спиралата изгледа како на сликата 2.3.5 (а), а кога $q < 0$ таа изгледа како на сликата 2.3.5 (б).

За да го видиме тоа, да забележиме дека проекцијата на спиралата на xOy -рамнината е (проекцијата на xOy -рамнината ја добиваме кога z -координатата ќе ја ставиме да биде 0)

$$(a \cos t, b \sin t, 0); \quad (2.3.14)$$

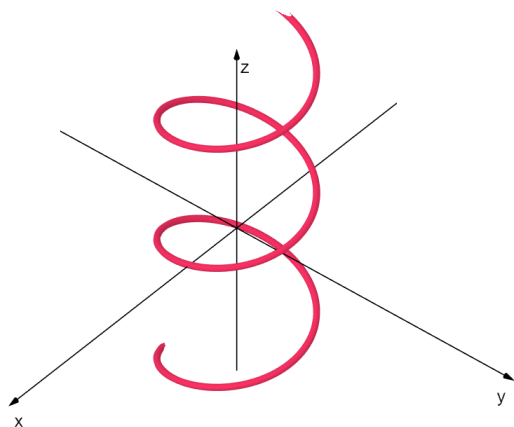
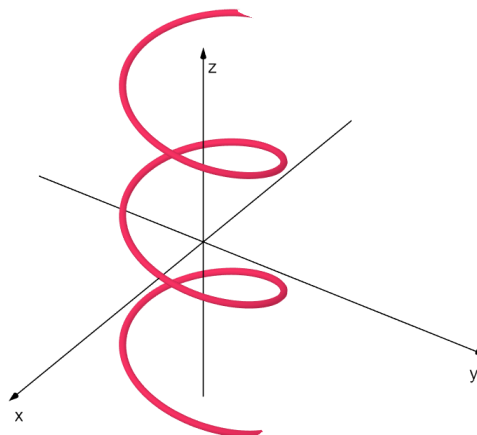
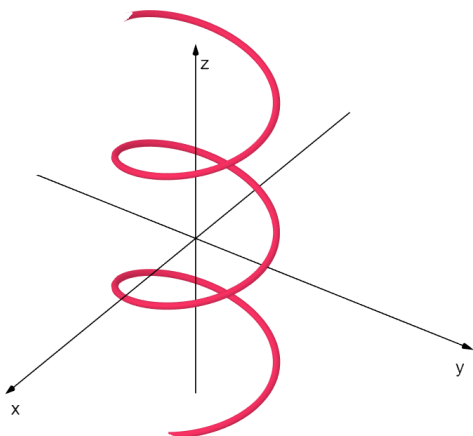
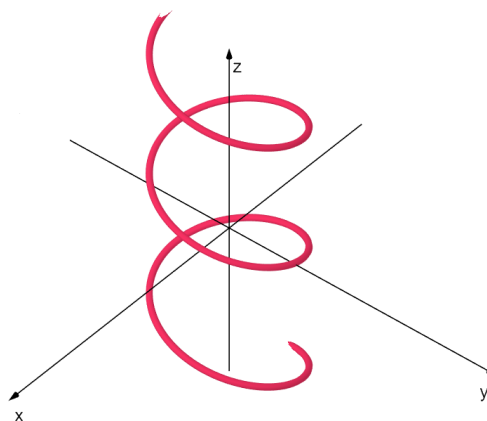
тоа е точно елипсата со полуоски a и b и центар во координатниот почеток. Како t се движи од $-\infty$ до ∞ , координатите x и y ќе ја поминуваат елипсата (2.3.14) но z -координатата ќе се променува. Ако $q > 0$, тогаш z -координатата ќе расте и спиралата ќе се врти околу z -оската во спротивна насока од насоката на часовникот и ќе оди нагоре. Кога $q < 0$, тогаш спиралата ќе се врти околу z -оската повторно во спротивна насока од движењето на стрелките на часовникот, но ќе оди надолу по z -оската. Кога $a = b$, спиралата е кружна затоа што тогаш нејзината проекција на xOy рамнината е кружница. Кога $q > 0$, движењето на спиралата можеме да го опишеме и на следниов начин: ако десната рака ја затвориме и ја поставиме на таков начин што прстите да го покажуваат вртењето на спиралата околу z -оската, тогаш палецот ќе ја покажува насоката во која спиралата се движи; во овој случај тоа е позитивната z -оска. Ваквите спирали ќе викаме дека имаат **десна хиралност**. Ако $q < 0$, тогаш насоката во која се движи елипсата ја дава палецот на левата рака ако, како и претходно, раката ја затвориме така што прстите ја покажуваат насоката во која се врти спиралата. Ваквите спирали ќе викаме дека имаат **лева хиралност**.

Хиралноста на спиралата не зависи само од знакот на q , туку и од тоа како нејзината проекција се врти околу оската. На пример, спиралата

$$\vec{r}_4 : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}_4(t) = (a \sin t, b \cos t, qt) \quad (2.3.15)$$

има десна хиралност кога $q < 0$ и лева хиралност кога $q > 0$ (види ја сликата 2.3.5 (в) и (г)).

Слика 2.3.5: Спирали

(а) Спиралата (2.3.13) кога $q > 0$:
спирала со десна хиралност(б) Спиралата (2.3.13) кога $q < 0$:
спирала со лева хиралност(в) Спиралата (2.3.15) кога $q < 0$:
спирала со десна хиралност(г) Спиралата (2.3.15) кога $q > 0$:
спирала со лева хиралност

Слично, можеме да разгледуваме спирали што се вртат околу y и x -оската (види ја сликата 2.3.6)

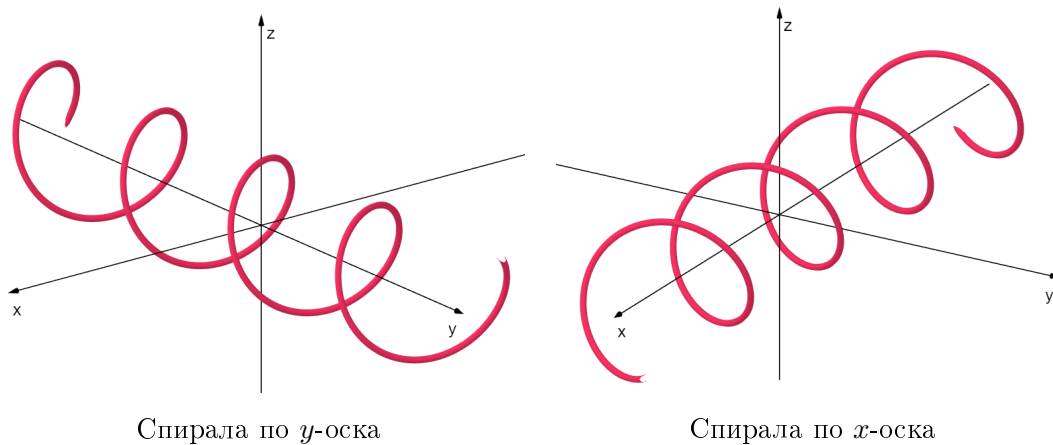
$$\vec{r}_1 : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}_1(t) = (b \sin t, qt, a \cos t), \quad \text{спирала по } y\text{-оска};$$

$$\vec{r}_2 : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}_2(t) = (qt, a \cos t, b \sin t), \quad \text{спирала по } x\text{-оска}.$$

Спиралата $\vec{r}_1$ има десна хиралност кога $q > 0$ и лева хиралност кога $q < 0$. Истото важи и за $\vec{r}_2$.

Векторите на брзина и на забрзување на спиралата (2.3.13) се дадени со:

$$\vec{v}(t) = (-a \sin t, b \cos t, q), \quad \vec{a}(t) = (-a \cos t, -b \sin t, 0), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Слика 2.3.6: Спирали по x -оската и y -оската

Јасно, должината на целата спирала е бесконечна. Ако $a = b$, тогаш можеме да ја пресметаме должина на кој било конечен дел и неговата природна параметризација. Но ако $a \neq b$, тогаш интегралот што се појавува во пресметката на должината (и на природниот параметар) е од ист облик како (2.3.7) и веќе коментиравме дека овие типови интеграли, во општ случај, не можат експлицитно да се пресметаат.

Пример 2.3.1. Да ги пресметаме должината и природната параметризација на:

$$\vec{r} : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t). \quad (2.3.16)$$

Да забележиме дека кога t се движи од 0 до 4π , спиралата прави две полни завртувања околу z -оската.

Векторот на брзината е:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 1),$$

од што добиваме:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 1} = \sqrt{5}, \quad t \in [0, 4\pi].$$

Должината е:

$$l = \int_0^{4\pi} v(t) dt = \sqrt{5} \int_0^{4\pi} dt = 4\sqrt{5}\pi.$$

За природниот параметар добиваме:

$$s = \int_0^t v(\lambda) d\lambda = \sqrt{5} \int_0^t d\lambda = \sqrt{5}\lambda \Big|_0^t = \sqrt{5}t,$$

од што $t = s/\sqrt{5}$. Природната параметризација е:

$$\vec{r} : [0, 4\sqrt{5}\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(s) = (2 \cos(s/\sqrt{5}), 2 \sin(s/\sqrt{5}), s/\sqrt{5}).$$

На крајот ќе спомнеме дека ако коефициентите пред t во тригонометриските функции не се 1, тогаш спиралата ќе се врти помалку или повеќе пати (во зависност од коефициентот) околу оската за истото време потребно да добие некоја фиксна висина. На пример, да ја споредиме спиралата (2.3.16) со следнава:

$$\vec{r} : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (2 \cos 2t, 2 \sin 2t, t). \quad (2.3.17)$$

Кога t се движи од 0 до 4π , спиралата (2.3.16) прави две полни вртења околу z -оската, додека спиралата (2.3.17) прави четири.

Уште неколку интересни ситуации

Идејата што ја употребивме за да го добиеме обликот на спиралата (2.3.13) можеме да го примениме во ситуациите кога едната координата е од облик (коефициент) $\cdot t$, а другите две координати даваат рамнинска крива што знаеме како изгледа. На пример, за да видиме како изгледа кривата

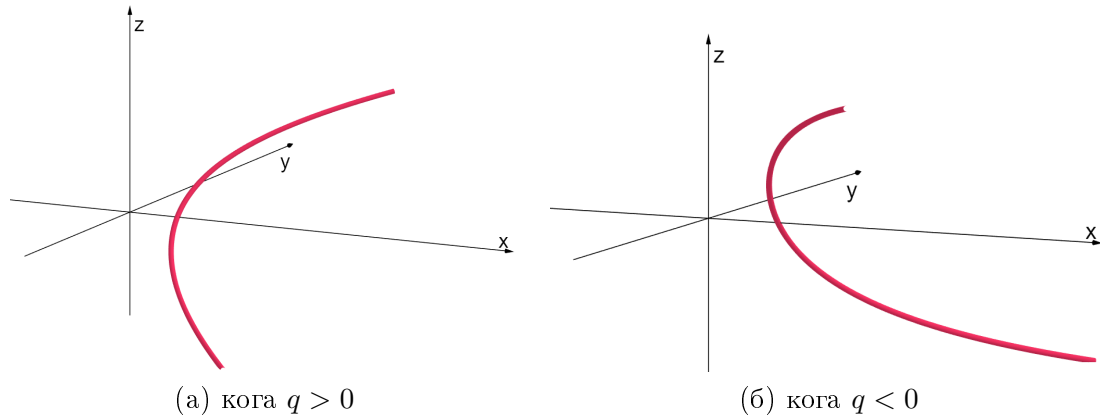
$$\vec{r} : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (a \cosh t, b \sinh t, qt), \quad (2.3.18)$$

каде што $a > 0$, $b > 0$ и $q \neq 0$, ја проектираме кривата на xOy -рамнината. Проекцијата е:

$$(a \cosh t, b \sinh t, 0), \quad (2.3.19)$$

што е точно десната гранка на хиперболата (2.3.8). Како t се движи од $-\infty$ до ∞ , x -координатите и y -координатите ќе ја поминуваат хиперболата (2.3.19). Ако $q > 0$, тогаш z -координатата ќе расте и кривата ќе оди нагоре (по z -оската), а ако $q < 0$, z -координатата ќе опаѓа и кривата ќе оди надолу (по z -оската); види ја сликата 2.3.7. Интересно е дека патот што го поминува оваа крива на конечен сегмент можеме да го пресметаме ако $a = b = q$ (спореди го ова со рамнинската хипербола што ја разгледавме погоре).

Слика 2.3.7: Кривата (2.3.18)



Пример 2.3.2. Да ја пресметаме должината на кривата

$$\vec{r} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t); \quad (2.3.20)$$

ова е ситуацијата кога $a = b = q = 1$; на сличен начин се пресметува должината кога $a = b = q > 0$ примаат друга вредност.

Од (2.3.12), за векторот на брзина добиваме $\vec{v}(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$, па

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1} = \sqrt{\frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} + \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} + 1} \\ &= \sqrt{\frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{2}} = \frac{\sqrt{(e^t + e^{-t})^2}}{\sqrt{2}} = \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Должината на кривата е:

$$\begin{aligned} l &= \int_{-1}^1 v(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 (e^t + e^{-t}) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^t - e^{-t}) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e - e^{-1} - e^{-1} + e) \\ &= \sqrt{2}(e - e^{-1}). \end{aligned}$$

За кривата (2.3.20) можеме да ја пресметаме и природната параметризација. Во наредниот пример ќе го направиме тоа, но ќе го разгледуваме само делот кога $t \in [0, 1]$ затоа што инаку во пресметките ќе се појавуваат многу коефициенти коишто непотребно ќе ја отежнат работата.

Пример 2.3.3. Да ја пресметаме природната параметризација на кривата

$$\vec{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t). \quad (2.3.22)$$

Користејќи ја формулата (2.3.21) за брзината на кривата, добиваме:

$$s = \int_0^t v(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t (e^\lambda + e^{-\lambda}) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^\lambda - e^{-\lambda}) \Big|_0^t = \frac{e^t - e^{-t}}{\sqrt{2}}.$$

Треба да го изразиме t од равенката $s = (e^t - e^{-t})/\sqrt{2}$ (внимателниот читател ќе забележи дека последната равенка во суштина е $s = \sqrt{2} \sinh t$, но нема да ни треба овој факт). За таа цел ставаме $w = e^t > 0$ и добиваме:

$$\sqrt{2}s = w - \frac{1}{w} \iff w^2 - \sqrt{2}sw - 1 = 0 \iff w_{1/2} = \frac{\sqrt{2}s \pm \sqrt{2s^2 + 4}}{2}.$$

Да забележиме дека решението е тоа што се добива со знак $+$, бидејќи другото решение е негативно (бидејќи $\sqrt{2s^2 + 4} > 2s$), а знаеме дека $w = e^t > 0$. Од овде добиваме:

$$e^t = \frac{\sqrt{2}s + \sqrt{2s^2 + 4}}{2} \iff t = \ln \left(\frac{\sqrt{2}s + \sqrt{2s^2 + 4}}{2} \right),$$

па природната параметризација на кривата се добива кога во (2.3.22) на местото од t се замени изразот којшто го добивме погоре.

Формулите што ќе се добијат со заменување на равенката за t ќе бидат огромни, но тоа ќе ја дава природната параметризација. Интересно е дека ако направиме неколку трансформации, формулата за $\vec{r}(s)$ може да се поедностави. Најпрво да забележиме дека од $s = \sqrt{2} \sinh t$ (види погоре) веднаш ја добиваме y -координатата на $\vec{r}(s)$, т. е. $\sinh t = s/\sqrt{2}$. За да ја определиме x -координатата, наместо да ја заменуваме формулата за t во $\cosh t$, ќе го примениме равенството $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Од ова добиваме $\cosh t = \sqrt{1 + \sinh^2 t}$ (бидејќи $\cosh t$ е секогаш позитивен) и ако ја замениме вредноста за $\sinh t$ добиваме $\cosh t = \sqrt{1 + s^2/2}$. Па, природната параметризација е:

$$\vec{r}(s) = \left(\sqrt{1 + \frac{s^2}{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, \ln \left(\frac{\sqrt{2}s + \sqrt{2s^2 + 4}}{2} \right) \right).$$

Да видиме уште еден пример на просторна крива:

$$\vec{r} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (t, t^2, t). \quad (2.3.23)$$

За да видиме како изгледа оваа крива, ќе ја употребиме истата идеја како погоре. Проекцијата на кривата на xOy -рамнината е:

$$(t, t^2, 0),$$

што е графикот на функцијата $f(x) = x^2$, т. е. е парабола. Сега, како t се движи од $-\infty$ до ∞ , x -координатите и y -координатите ќе ја поминуваат оваа парабола но z -координатата расте и кривата ќе оди нагоре (по z -оската).

Пример 2.3.4. Да ја пресметаме должината на кривата (2.3.23).

Векторот на брзина е $\vec{v}(t) = (1, 2t, 1)$, па $v(t) = \sqrt{2 + 4t^2}$. За должината добиваме:

$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{4t^2 + 2} dt \quad (2.3.24)$$

Употребуваме парцијална интеграција со:

$$u = \sqrt{4t^2 + 2}, \quad dv = dt; \quad \text{па } du = \frac{4t dt}{\sqrt{4t^2 + 2}}, \quad v = t,$$

со што:

$$\begin{aligned} l &= t\sqrt{4t^2 + 2} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{4t^2 + 2 - 2}{\sqrt{4t^2 + 2}} dt \\ &= (1 \cdot \sqrt{4 + 2} - (-1) \cdot \sqrt{4 + 2}) - \left(\int_{-1}^1 \frac{4t^2 + 2}{\sqrt{4t^2 + 2}} dt - 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{4t^2 + 2}} \right) \\ &= 2\sqrt{6} - \int_{-1}^1 \sqrt{4t^2 + 2} dt + 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{4t^2 + 2}}. \end{aligned}$$

Првиот интеграл е точно вредноста на l (види (2.3.24)), од каде следи:

$$l = 2\sqrt{6} - l + 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{4t^2 + 2}} \implies l = \sqrt{6} + \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{4t^2 + 2}}.$$

Во последниот интеграл воведуваме смена на променливи $t_1 = 2t$, $dt_1 = 2dt$, и добиваме:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{6} + \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \frac{dt_1}{\sqrt{t_1^2 + 2}} = \sqrt{6} + \frac{1}{2} \ln \left| t_1 + \sqrt{t_1^2 + 2} \right| \Big|_{-2}^2 \\ &= \sqrt{6} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{6}) - \frac{1}{2} \ln \left| -2 + \sqrt{6} \right|. \end{aligned}$$

На сличен начин може да се пресмета природниот параметар s (направи го тоа!). Но, во оваа ситуација, практично е невозможно да се реши таа равенка по t , т. е. да се изрази t преку s и затоа природната параметризација е практично невозможно да се определи.

2.3.3. Просторни криви дадени како пресек на две површини

Честопати дадена ќе биде геометријска крива во просторот како пресек на две површини, а ние ќе треба да најдеме (една) нејзина параметризација.

Пресек на цилиндрични површини со графици на функции од две променливи

Во практика, овие криви се наједноставни за параметризација. Нека е даден елипсоиден цилиндар по z -оската: тоа се сите точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ за кои важи:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z\text{-координатата е слободна.} \quad (2.3.25)$$

Нека f е функција од две променливи. Сакаме да ја параметризираме кривата што се добива како пресек на цилиндарот (2.3.25) со графикот на f ; да се потсетиме графикот на f се сите точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, такви што $z = f(x, y)$. Бидејќи оваа крива лежи на цилиндарот, нејзината проекција на xOy -рамнината е точно основата на цилиндарот, а тоа е елипсата $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, која веќе видовме како може да се параметризира. Значи за секоја точка (x, y, z) од кривата, x и y -координатите ќе бидат дадени со параметарските равенки на елипсата, а z -координатата ќе биде вредноста на f во овие x и y (бидејќи $z = f(x, y)$ на кривата). Ја добиваме следнава параметризација:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t, f(a \cos t, b \sin t)).$$

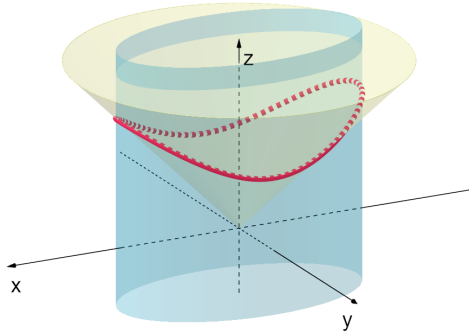
Пример 2.3.5. Да ја параметризираме кривата што се добива како пресек на елипсоидниот цилиндар даден со:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1, \quad (z\text{-координатата е слободна}),$$

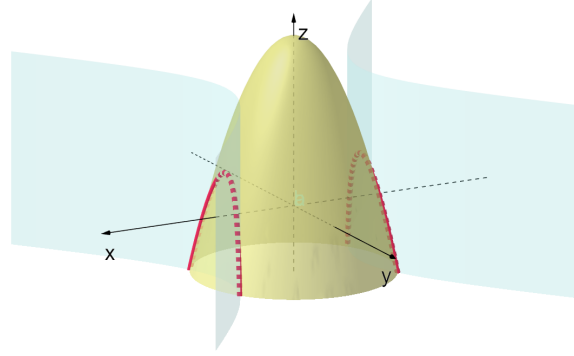
со графикот на функцијата $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; види ја сликата 2.3.8. (Да забележиме дека графикот на f е горниот дел од конусот $z^2 = x^2 + y^2$.)

Параметризацијата на елипсата $x^2/9 + y^2/3 = 1$ е дадена со равенките $x = 3 \cos t$,

Слика 2.3.8: Кривите од примерот 2.3.5 и примерот 2.3.6



Пример 2.3.5



Пример 2.3.6

$y = \sqrt{3} \sin t$, кога $t \in [0, 2\pi]$ (полуоските на елипсата се 3 и $\sqrt{3}$). Параметризацијата на кривата е:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (3 \cos t, \sqrt{3} \sin t, \sqrt{9 \cos^2 t + 3 \sin^2 t}).$$

Оваа техника можеме да ја примениме и кога обликот на основата на цилиндарот е која било крива во $\mathbb{R}^2$ која знаеме да ја параметризираме.

Пример 2.3.6. Да ја најдеме параметризацијата на кривата дадена како пресек на хиперболичниот цилиндар даден со:

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1, \quad z\text{-координатата е слободна,}$$

со графикот на функцијата $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. (Графикот на f е превртен параболоид со теме во $(0, 0, 4)$; види ја сликата 2.3.8.)

Хиперболоата $x^2/3 - y^2/4 = 1$ има две гранки и нивните параметризации се дадени со равенките:

$$x = \sqrt{3} \cosh t, \quad y = 2 \sinh t, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad \text{за десната гранка;}$$

$$x = -\sqrt{3} \cosh t, \quad y = 2 \sinh t, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad \text{за левата гранка.}$$

Бараната крива се состои од два дела со следните параметризации:

$$\vec{r}_1 : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}_1(t) = (\sqrt{3} \cosh t, 2 \sinh t, 4 - 3 \cosh^2 t - 4 \sinh^2 t)$$

$$\vec{r}_2 : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}_2(t) = (-\sqrt{3} \cosh t, 2 \sinh t, 4 - 3 \cosh^2 t - 4 \sinh^2 t).$$

Пресек на површини со рамнини

Бидејќи рамнините се дадени со линеарни равенки од обликот $ax + by + cz = d$, секогаш можеме да ја изразиме едната од координатите преку другите две и потоа ова да го замениме во равенката на површината.

Пример 2.3.7. Да ја параметризираме кривата којашто се добива како пресек на елипсоидот:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1 \quad (2.3.26)$$

со рамнината $z = 1$; види ја сликата 2.3.9.

Координатите на точките на кривата мора истовремено да ги задоволуваат равенките (2.3.26) и $z = 1$. Заменуваме $z = 1$ во (2.3.26) и добиваме:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{2}{3}.$$

Ова е равенка на елипса во xOy -рамнината. За да го видиме ова, ја делиме оваа равенка со $2/3$ и добиваме:

$$\frac{x^2}{\frac{2}{3}} + \frac{y^2}{\frac{8}{3}} = 1,$$

што е равенка на елипса со центар во координатниот почеток и полуоски $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ и $\sqrt{8}/\sqrt{3}$. Параметризацијата на оваа елипса е дадена со равенките:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos t, \quad y = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Бидејќи на кривата важи $z = 1$, нејзината параметризација е дадена со:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos t, \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \sin t, 1 \right).$$

Пример 2.3.8. Да ја параметризираме кривата којашто се добива како пресек на елипсоидот (2.3.26) со рамнината $x - y = 0$; види ја сликата 2.3.9.

Бидејќи точките на кривата истовремено ги задоволуваат и равенката (2.3.26) и $x - y = 0$, од втората равенка изразуваме $x = y$ и заменуваме во првата. Добиваме:

$$y^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{5y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y^2}{\frac{4}{5}} + \frac{z^2}{3} = 1.$$

Последната е равенка на елипса во yOz -рамнината којашто ја параметризираме со равенките:

$$y = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos t, \quad z = \sqrt{3} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Бидејќи на кривата важи $x = y$, параметризацијата на кривата е дадена со:

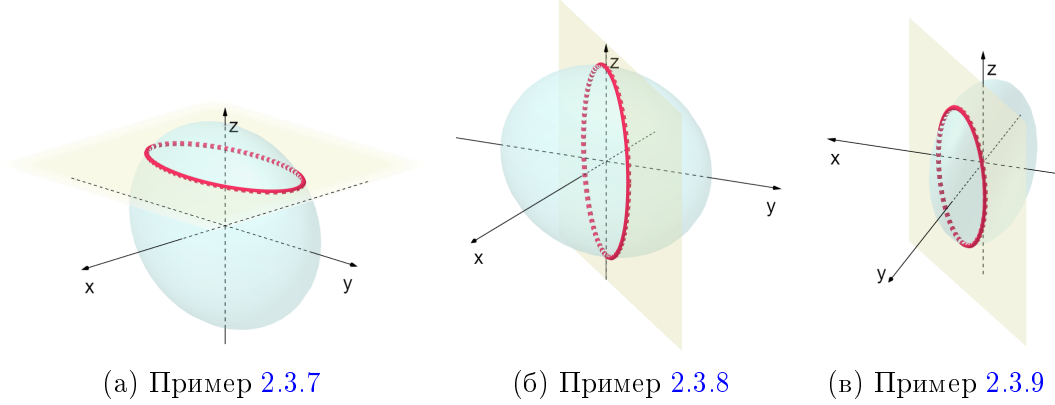
$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos t, \frac{2}{\sqrt{5}} \cos t, \sqrt{3} \sin t \right).$$

Пример 2.3.9. Да ја параметризираме кривата којашто се добива како пресек на елипсоидот (2.3.26) со рамнината $x + y = 1$; види ја сликата 2.3.9.

Координатите на кривата ги задоволуваат и двете равенки

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1 \quad \text{и} \quad x + y = 1.$$

Слика 2.3.9: Кривите од примерот 2.3.7, од примерот 2.3.8 и од примерот 2.3.9



Ја изразуваме y од втората равенка: $y = 1 - x$ и ова го заменуваме во (2.3.26). Добиваме:

$$x^2 + \frac{1 - 2x + x^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1 \iff \frac{5x^2 - 2x}{4} + \frac{z^2}{3} = \frac{3}{4}. \quad (2.3.27)$$

Ова е равенка на елипса во xOz -рамнината. За да го видиме ова, треба броителот во првата дробка да го запишеме како полн квадрат; односно да најдеме броеви c_1 и c_2 , такви што $5x^2 - 2x = 5(x - c_1)^2 + c_2$. Ја развиваме десната страна и добиваме:

$$5x^2 - 2x = 5x^2 - 10xc_1 + 5c_1^2 + c_2.$$

Ги изедначуваме коефициентите пред степените на x и добиваме $2 = 10c_1$ и $0 = 5c_1^2 + c_2$. Следува $c_1 = 1/5$ и $c_2 = -1/5$. Значи, (2.3.27) е еквивалентна со:

$$\frac{5(x - \frac{1}{5})^2 - \frac{1}{5}}{4} + \frac{z^2}{3} = \frac{3}{4} \iff \frac{5(x - \frac{1}{5})^2}{4} + \frac{z^2}{3} = \frac{4}{5}.$$

Го делиме последното равенство со $4/5$ и ја добиваме елипсата:

$$\frac{(x - \frac{1}{5})^2}{\frac{16}{25}} + \frac{z^2}{\frac{12}{5}} = 1.$$

Параметризацијата на кривата се добива исто како и претходно: x и z -координатите се дадени со параметризацијата на оваа елипса, додека $y = 1 - x$ (од равенката на рамнината); односно:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \sin t, \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \sin t, \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} \cos t \right).$$

Уште неколку интересни ситуации

Пример 2.3.10. Да ја параметризираме кривата што е пресек на површините $z = 2 - x^2 - y^2$ (превртен параболоид со теме во $(0, 0, 2)$) и $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (горниот дел од

конусот со теме во координатниот почеток); види ја сликата 2.3.10.

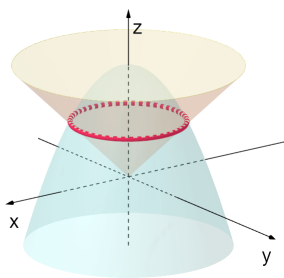
Координатите на точките на кривата истовремено ги задоволуваат и двете равенки: $z = 2 - x^2 - y^2$ и $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Од втората равенка добиваме $x^2 + y^2 = z^2$ и ако го замениме ова во првата, добиваме:

$$z = 2 - z^2 \iff z^2 + z - 2 = 0.$$

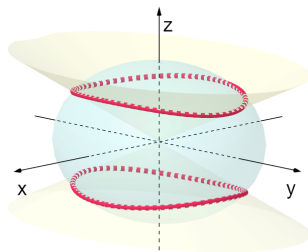
Решенијата на оваа квадратна равенка се $z = 1$ и $z = -2$. Второто решение е невозможно во нашата ситуација затоа што z -координатата е ненегативна. Значи $z = 1$ за сите точки на кривата. Ако ова го замениме во која било од равенките на површините добиваме $x^2 + y^2 = 1$; што е равенката на кружница со центар во координатниот почеток и радиус 1. Ја добиваме следнава параметризација на кривата:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1).$$

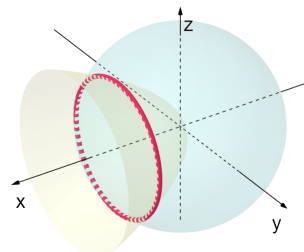
Слика 2.3.10: Кривите од примерот 2.3.10, од примерот 2.3.11 и од примерот 2.3.12



(а) Пример 2.3.10



(б) Пример 2.3.11



(в) Пример 2.3.12

Пример 2.3.11. Да се параметризира кривата што е пресек на елипсоидот:

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1,$$

со елипсоидниот конус:

$$z^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5}.$$

Кривата има два дела (види ја сликата 2.3.10). Го заменуваме z^2 од втората во првата равенка и добиваме:

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{10} = 1 \iff \frac{7x^2}{12} + \frac{7y^2}{20} = 1 \iff \frac{x^2}{\frac{12}{7}} + \frac{y^2}{\frac{20}{7}} = 1.$$

Последната е равенка на елипса во xOy -рамнината и нејзината параметризација е дадена со:

$$x = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}} \cos t, \quad y = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{7}} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (2.3.28)$$

Од равенката на конусот добиваме $z = \pm \sqrt{x^2/2 + y^2/5}$, што, заедно со (2.3.28), ги дава параметризациите на двата дела од кои е составена кривата:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}_1(t) &= \left(\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}} \cos t, \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{7}} \sin t, \sqrt{\frac{6}{7} \cos^2 t + \frac{4}{7} \sin^2 t} \right); \\ \vec{r}_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}_2(t) &= \left(\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}} \cos t, \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{7}} \sin t, -\sqrt{\frac{6}{7} \cos^2 t + \frac{4}{7} \sin^2 t} \right).\end{aligned}$$

Пример 2.3.12. Да ја параметризираме кривата што се добива како пресек на сферата:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad (2.3.29)$$

со параболоидот по x оската:

$$x = y^2 + z^2; \quad (2.3.30)$$

види ја сликата 2.3.10.

Од (2.3.30) и (2.3.29) добиваме:

$$x^2 + x = 2 \iff x^2 + x - 2 = 0. \quad (2.3.31)$$

Решенијата на квадратната равенка се $x = 1$ и $x = -2$. Бидејќи x е ненегативен на кривата (од (2.3.30)), заклучуваме дека $x = 1$ на кривата. Заменуваме во (2.3.29) (или (2.3.30)) и добиваме дека за y и z -координатите на точките од кривата важи $y^2 + z^2 = 1$. Ова е кружница во yOz -рамнината што се параметризира со:

$$y = \cos t, \quad z = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

За параметризацијата на кривата добиваме:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (1, \cos t, \sin t).$$

2.4. Тангентен, нормален и бинормален вектор

2.4.1. Тангентен вектор и тангентна права

Дефиниција 2.4.1. Единечниот тангентен вектор $\vec{T}$ на регуларната крива $\vec{r}$ се дефинира како векторот на брзина на нејзината природна параметризација, т. е.

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}(s),$$

каде што s е природниот параметар.

Единечниот тангентен вектор е секогаш тангентен на кривата (види ја забелешката 2.1.14) и од (2.2.11) добиваме дека неговата должина е секогаш еднаква на 1, т. е. $|\vec{T}(s)| = 1$ за сите s (затоа се вика единечен). Формулата (2.2.10) ни дава начин како да го пресметаме без да ја пресметуваме природната параметризација:

$$\vec{T}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}, \quad (2.4.1)$$

каде што t е параметарот со кој кривата $\vec{r}$ е зададена. Од овде директно се гледа дека $\vec{T}$ е секогаш паралелен со векторот на брзина и секогаш има иста насока со него.

Забелешка 2.4.2. Во дефиницијата за $\vec{T}$ претпоставивме дека кривата е регуларна (т. е. векторот на брзина никогаш не е нултиот), затоа што само во тие ситуации ја дефиниравме природната параметризација. Заради ова, во формулата (2.4.1) секогаш можеме да делиме со $v(t) \neq 0$.

Дефиниција 2.4.3. Нека $\vec{r}(t)$ е регуларна крива и t_0 фиксна точка од интервалот каде што е дефинирана кривата. Правата што минува низ точката $\vec{r}(t_0)$ и е паралелна со единечниот тангентен вектор на кривата во t_0 , се вика **тангентна права** на кривата во t_0 .

Забелешка 2.4.4. Најбитниот факт за тангентните прави (кој нема да го докажеме!) е дека тие се геометриски својства на кривата (не зависат од параметризација). Која било репараметризација на кривата ќе ги има истите тангентни прави во секоја точка од траекторијата.

Забелешка 2.4.5. Тангентната права во секоја точка на кривата е таква што векторот на брзина во таа точка за која било репараметризација е паралелен со неа. Со други зборови, таа „ги чува“ сите вектори на брзини во таа точка на сите репараметризации на дадената крива.

Пример 2.4.6. Да ги разгледаме кривите:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, & \vec{r}_1(t) &= (\cos t, \sin t); \\ \vec{r}_2 &: [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, & \vec{r}_2(t) &= (\cos 2t, \sin 2t); \\ \vec{r}_3 &: (-2\pi, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, & \vec{r}_3(t) &= (\cos t, -\sin t).\end{aligned}$$

Траекторија на сите е единечната кружница. Во примерот 2.2.2 видовме дека тие се репараметризации една на друга. Бидејќи нивните вектори на брзини се:

$$\vec{v}_1 = (-\sin t, \cos t), \quad \vec{v}_2(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t), \quad \vec{v}_3(t) = (-\sin t, -\cos t),$$

за нивните брзини добиваме: $v_1(t) = 1$, $v_2(t) = 2$, $v_3(t) = 1$. Од (2.4.1), нивните единечни тангентни вектори се:

$$\begin{aligned}\vec{T}_1(t) &= (-\sin t, \cos t), & t &\in [0, 2\pi); \\ \vec{T}_2(t) &= (-\sin 2t, \cos 2t), & t &\in [0, \pi); \\ \vec{T}_3(t) &= (-\sin t, -\cos t), & t &\in (-2\pi, 0].\end{aligned}$$

Да забележиме дека во секоја точка од кружницата, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ се исти додека $\vec{T}_3$ е спротивен на нив. На пример, во точката $A(0, 1)$, што се добива за $t = \pi/2$ во $\vec{r}_1$, за $t = \pi/4$ во $\vec{r}_2$ и за $t = 3\pi/2$ во $\vec{r}_3$ (т. е. $\vec{r}_1(\pi/2) = \vec{r}_2(\pi/4) = \vec{r}_3(3\pi/2) = (0, 1)$), единечните тангентни вектори се $\vec{T}_1(\pi/2) = \vec{T}_2(\pi/4) = (-1, 0)$, $\vec{T}_3(3\pi/2) = (1, 0)$. Ова се случува затоа што $\vec{r}_3$ ја поминува кружницата во обратна насока од онаа на $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Но, тангентната права во сите случаи е правата $y = 1$.

Како што видовме во овој пример, единечниот тангентен вектор зависи од параметризацијата. Но, ако репараметризацијата не ја променува насоката на движење на

кривата, тогаш единичниот тангентен вектор е ист. Ако репараметризацијата е во обратна насока, тогаш единичниот тангентен вектор си ја променува насоката, но правецот и должината му се исти. Со други зборови, тој не зависи од репараметризациите ако тие не ја променуваат насоката на движење.

На крајот ќе дадеме уште еден резултат којшто го опишува движењето по отсечка.

Теорема 2.4.7. Нека $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ е регуларна крива и $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$ две точки во $\mathbb{R}^3$. Ако траекторијата на $\vec{r}$ е отсечката $[AB]$ (т. е. ако $\vec{r}$ го пресликува интервалот $[a, b]$ на отсечката $[AB]$), тогаш:

$$\frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \text{ за сите } t \in [a, b] \quad \text{или} \quad \frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|} = \frac{\overrightarrow{BA}}{AB}, \text{ за сите } t \in [a, b].$$

Со AB е означена должината на отсечката $[AB]$. Постои репараметризација $\vec{r}_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ на $\vec{r}$, таква што во првиот случај:

$$\vec{r}_1(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), a_3 + t(b_3 - a_3)), \quad t \in [0, 1],$$

т. е. $\vec{r}_1(t) = (a_1, a_2, a_3) + t\overrightarrow{AB}$, $t \in [0, 1]$, додека во вториот случај:

$$\vec{r}_1(t) = (b_1 + t(a_1 - b_1), b_2 + t(a_2 - b_2), b_3 + t(a_3 - b_3)), \quad t \in [0, 1],$$

т. е. $\vec{r}_1(t) = (b_1, b_2, b_3) + t\overrightarrow{BA}$.

Нема да дадеме доказ на овој резултат, но ќе го коментираме неговото значење. Теоремата тврди дека ако траекторијата на движењето е отсечката $[AB]$ и ако векторот на брзина никогаш не е нултиот, тогаш или телото се движи од A кон B , или од B кон A и притоа поминува низ сите точки од отсечката точно еднаш; ова следува од постоењето на репараметризацијата $\vec{r}_1$ (да забележиме дека таа е стандардната параметризација на отсечката $[AB]$). Првиот дел тврди дека единичниот тангентен вектор е секогаш паралелен со векторот $\overrightarrow{AB}$, но во зависност од насоката на движење тој е или во иста насока со $\overrightarrow{AB}$ или во спротивна; последователно, истото важи и за векторот на брзина. (Ова треба интуитивно да биде јасно.) Внимавај! Претпоставката дека кривата е регуларна (т. е. $\vec{v}(t) \neq \vec{0}$) е клучна. Ако ова не важи, тогаш тврдењето не мора да важи: во таква ситуација кривата може да оди од A до некоја точка C измеѓу, потоа да се враќа назад до некоја друга точка D (измеѓу A и C) и потоа да оди напред до B . Ако $\vec{v}(t) \neq \vec{0}$ за сите t , ова не може да се случи затоа што, во спротивна ситуација, во оној момент кога телото ќе си ја промени насоката на движење, неговиот вектор на брзина во тој момент ќе биде $\vec{0}$ (затоа што движењето е по права линија).

2.4.2. Вектор на кривина и единечен нормален вектор. Закривеност на крива

Дефиниција 2.4.8. Векторот на кривина $\vec{K}$ на регуларната крива $\vec{r}$ се дефинира како векторот на забрзување на нејзината природна параметризација, т. е.

$$\vec{K}(s) = \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2}(s) = \frac{d\vec{T}}{ds}(s),$$

каде што s е природниот параметар.

Во овој момент, веројатно е тешко да се види како векторот на кривина е поврзан со она што интуитивно ние го сметаме за закривеност на кривата. Наскоро ќе стигнеме до оваа врска. За почеток, да видиме неколку едноставни својства.

Бидејќи единечниот тангентен вектор секогаш има константна должина, векторот на кривина секогаш е ортогонален на него (види ја теоремата 2.1.21); односно $\vec{K} \cdot \vec{T} = 0$. Корисно ќе биде да имаме начин да го сметаме векторот на кривина без да ја определуваме природната параметризација на кривата. За да добиеме формула за ова, го применуваме верижното правило (2.1.6) заедно со (2.2.9):

$$\vec{K} = \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}|} \frac{d\vec{T}}{dt}, \quad \text{односно} \quad \vec{K}(t) = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}(t)|} \frac{d\vec{T}}{dt}(t) = \frac{\dot{\vec{T}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}. \quad (2.4.2)$$

Забелешка 2.4.9. Клучен факт е дека векторот на кривина не зависи од параметризацијата (нема да го докажаме ова!); т. е. е геометриско својство на кривата (за разлика од единечниот тангентен вектор).

Се враќаме на проблемот на закривеност на крива. Сакаме да најдеме нумеричка карактеристика за кривата која што ќе ја опишува закривеноста. Се разбира, таа треба да зависи од точката на кривата затоа што кривата може да биде различно закривена во различни точки. Од неа отчекнуваме три работи. Прво, таа треба да биде геометриско својство на кривата, т. е. не смее да зависи од параметризација.

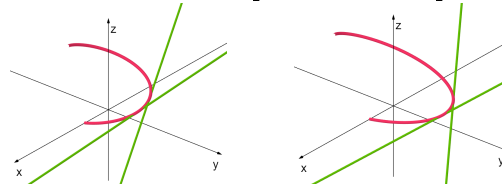
Таа треба да биде константно еднаква на 0 за правите; тие не треба да имаат закривеност. За кружниците, оваа карактеристика треба да биде константна. Тоа треба да го рефлектира фактот што ни е интуитивно јасен: кружниците се подеднакво закривени во секоја точка. Фактот дека правата е права, а кружницата закривена се карактеризира со тоа што тангентните прави на кружницата го променуваат правецот, додека кај правата нивниот правец е секогаш ист. Колку побрзо се променуваат правците на тангентните прави во блиски точки на кривата, толку поголема ќе биде закривеноста на кривата во близината на тие точки (види ја сликата 2.4.1). Бидејќи единечните тангентни вектори го даваат правецот на тангентните прави, брзината на промената на правците треба да бидат нумеричка карактеристика за закривеноста. Односно, закривеноста на кривата во нејзината точката A треба да се апроксимира, како во продолжение. Нека B точка од кривата блиска до A ; тогаш

$$\text{закривеност во } A \approx \left| \frac{\vec{T}_{(\text{во } B)} - \vec{T}_{(\text{во } A)}}{\text{изминатиот пат од } A \text{ до } B} \right|.$$

Кога B се доближува до A , ова тежи кон:

$$\left| \frac{d\vec{T}}{ds}(\text{во } A) \right|.$$

Слика 2.4.1: Закривеност на крива



Мала закривеност Голема закривеност

Внимавајте, изводот е по природниот параметар s , затоа што неговата промена од A до B е изминатиот пат на кривата од A до B . Да забележиме дека ова е точно должината на векторот на кривина во A . Овие разгледувања ја оправдуваат следната дефиниција.

Дефиниција 2.4.10. Закривеноста κ на регуларна крива се дефинира како должината на нејзиниот вектор на кривина, т. е.

$$\kappa(s) = |\vec{K}(s)| = \left| \frac{d\vec{T}}{ds}(s) \right|,$$

каде што s е природниот параметар.

Забелешка 2.4.11. Бидејќи $\vec{K}$ не зависи од параметризација, закривеноста, исто така, не зависи од параметризација, т. е. закривеноста е геометриско својство на кривата.

Пример 2.4.12. Кружницата со центар во координатниот почеток и радиус $r > 0$, параметризирана со:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}(t) = (r \cos t, r \sin t),$$

има природна параметризација дадена со (види (2.3.3))

$$\vec{r} : [0, 2r\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}(s) = (r \cos(s/r), r \sin(s/r)).$$

Нејзиниот единечен тангентен вектор и вектор на кривина се:

$$\vec{T}(s) = (-\sin(s/r), \cos(s/r)), \quad \vec{K}(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos(s/r), -\frac{1}{r} \sin(s/r) \right),$$

од што, за закривеноста добиваме: $\kappa(s) = |\vec{K}(s)| = 1/r$, за сите $s \in [0, 2r\pi]$. Тоа е она што го очекувавме: закривеноста на кружницата во сите точки е иста! Од ова заклучуваме и дека колку радиусот на кружницата е поголем толку нејзината закривеност е помала. Ова треба интуитивно да биде јасно: големите кружници се помалку закривени од малите.

Пример 2.4.13. Нека $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ е регуларна крива. Траекторијата на кривата е отсечка ако и само ако кривината е константно еднаква на 0. Навистина, ако кривината е константно еднаква на 0, тоа значи дека векторот на кривина во секое време има должина 0 што значи во секое време е нултиот вектор. Со други зборови, векторот на забрзување на природната параметризација е нултиот вектор. Од коментарите по примерот 2.1.20 следува дека природната параметризација на $\vec{r}$ е од облик:

$$\vec{r}(s) = (a_1 s + b_1, a_2 s + b_2, a_3 s + b_3),$$

што е дел од права; следува дека траекторијата е отсечка (зошто должината е конечна и не може да биде целата права).

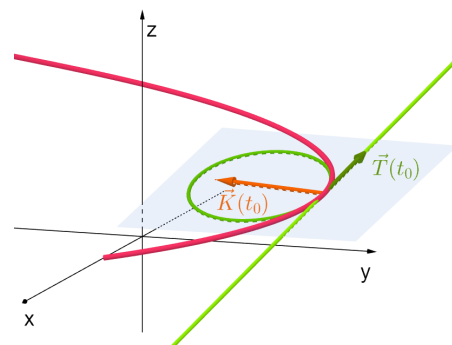
Од друга страна, ако траекторијата на $\vec{r}$ е отсечка, веќе видовме во теоремата 2.4.7 дека единечниот тангентен вектор е константен, од што следува дека векторот на кривина е цело време еднаков на $\vec{0}$ (од (2.4.2)), па закривеноста е константно еднаква на 0.

Од горните дискусии гледаме дека закривеноста κ ги задоволува сите својства што ги очекуваме од неа.

Во примерот 2.4.12 видовме дека векторот на кривина во секоја точка на кружницата е насочен кон центарот на кружницата и неговата должина (што е закривеноста) е реципрочната вредност на радиусот. Ова секогаш важи во следната смисла. Нека A е точка од траекторијата на регуларната крива $\vec{r}$. Ако низ A ја нацртаме кружницата што најдобро ја апроксимира кривата во блиските точки на A , тогаш векторот на кривина секогаш покажува кон центарот на оваа кружница и нејзиниот радиус е реципрочната вредност на закривеноста.

Оваа кружница секогаш лежи во рамнината што е паралелна со единичниот тангентен вектор и векторот на кривина и минува низ A ; оваа кружница се вика **оскулаторна кружница**, а рамнината **оскулаторна рамнина** (види ја сликата 2.4.2). Јасно, единичниот тангентен вектор во A е тангентен на оскулаторната кружница; со тоа и тангентната права во A на кривата $\vec{r}$ истовремено е тангентна на оскулаторната кружница во таа точка. Се разбира, оскулаторната кружница и рамнина не можат да се дефинираат таму каде што векторот на кривина е нултиот вектор. Таквите точки во кои векторот на кривина е нултиот вектор (т. е. закривеноста е 0) се викаат **точки на инфлексција** на кривата.

Слика 2.4.2: Оскулаторна рамнина и кружница, вектор на кривина



Забелешка 2.4.14. Геометриското значење на оскулаторната рамнина е прикажано во продолжение. Ако кривата лежи во некоја рамнина, тогаш оскулаторната рамнина во секоја точка од кривата се совпаѓа со оваа рамнина. Ако кривата не лежи во една рамнина, тогаш оскулаторната рамнина во фиксна точка од кривата е таа рамнина за која кривата е „најблиску да лежи во неа“ во близина на фиксната точка.

Забелешка 2.4.15. Внимавај! Ако регуларната крива во една точка има закривеност 0, тоа не значи дека во околината на таа точка е права. За да во близината на некоја точка е права, закривеноста мора да биде 0 во околина на таа точка. На пример, кривата

$$\vec{r} : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}(t) = (t, t^3), \quad (2.4.3)$$

во точката $(0, 0)$ што се добива за $t = 0$ има закривеност 0. Нависитина, бидејќи $\vec{r}'(t) = (1, 3t^2)$, следува $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1 + 9t^4}$, од што добиваме:

$$\vec{T}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 9t^4}}, \frac{3t^2}{\sqrt{1 + 9t^4}} \right), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

За изводот на $\vec{T}$ добиваме:

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \left(-\frac{18t^3}{(1 + 9t^4)^{3/2}}, \frac{6t\sqrt{1 + 9t^4} - 3t^2 \frac{18t^3}{\sqrt{1 + 9t^4}}}{1 + 9t^4} \right), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Го сметаме $\vec{K}(0)$ по формулата (2.4.2). Бидејќи $|\dot{\vec{r}}(0)| = 1$ и $\frac{d\vec{T}}{dt}(0) = (0, 0)$, добиваме $\vec{K}(0) = (0, 0)$ па $\kappa(0) = 0$; односно закривеноста е 0 во $(0, 0)$. Но, $\vec{r}$ не е права во близина на $(0, 0)$. Во суштина, $\vec{r}$ е точно графикот на функцијата $f(x) = x^3$ (бидејќи $x = t$, $y = t^3$, добиваме $y = x^3$). Овде се случува точно тоа што го спомнавме погоре: закривеноста е нула само во $(0, 0)$ и во ниту една друга точка блиска до неа.

Формулата (2.4.2) ни дава начин како да го пресметаме $\vec{K}$ без да ја сметаме природната параметризација, а со тоа можеме да го пресметаме и κ без да ја употребуваме природната параметризација. Корисно е да имаме начин како да го правиме ова без претходно да го наоѓаме $\vec{K}$. Формулата за ова е:

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|^3}. \quad (2.4.4)$$

Оваа формула има смисла само кога кривите се просторни, затоа што за рамнински криви векторскиот производ нема смисла. За рамнински криви $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, соодветната формула е:

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|^3}. \quad (2.4.5)$$

Нема да ги докажуваме овие формули, само ќе нагласиме дека тие се добиваат од (2.4.2) и од дефиницијата $\kappa(t) = |\vec{K}(t)|$.

Пример 2.4.16. Да ја пресметаме закривеноста на (2.4.3) во $t = 0$ со помош на (2.4.5). Бидејќи $\dot{\vec{r}}(t) = (1, 3t^2)$ и $\ddot{\vec{r}}(t) = (0, 6t)$, добиваме $\dot{\vec{r}}(0) = (1, 0)$ и $\ddot{\vec{r}}(0) = (0, 0)$. Бидејќи $|\dot{\vec{r}}(0)| = 1$, имаме:

$$\kappa(0) = \frac{|\dot{x}(0)\ddot{y}(0) - \ddot{x}(0)\dot{y}(0)|}{|\dot{\vec{r}}(0)|^3} = \frac{|1 \cdot 0 - 0 \cdot 0|}{1^3} = 0,$$

што е исто како и во претходниот пример.

Во точките од регуларната крива во коишто закривеноста не е 0 корисно ќе биде да имаме единечен вектор кој ќе има ист правец и насока како векторот на кривина, т. е. единечен вектор кој ќе покажува кон центарот на оскулаторната кружница (слично како што $\vec{T}$ е единечен вектор и ја дава насоката на движење). Таквиот вектор се вика **единечен нормален вектор**, се означува со $\vec{N}$ и се дефинира на следниов начин:

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{K}(t)}{|\vec{K}(t)|} = \frac{\vec{K}(t)}{\kappa(t)}, \quad \text{кога } \kappa(t) \neq 0.$$

Бидејќи $\vec{K}$ не зависи од параметризација, и $\vec{N}$, исто така, не зависи од параметризација. Од дефиницијата се гледа дека $\vec{N}(t)$ има ист правец и насока како $\vec{K}(t)$ и $|\vec{N}(t)| = 1$. Јасно $\vec{N}(t)$ е нормален на $\vec{T}(t)$ (т. е. $\vec{T}(t) \cdot \vec{N}(t) = 0$) и $\vec{K}(t) = \kappa(t)\vec{N}(t)$.

Забелешка 2.4.17. Од (2.4.2), добиваме $|\vec{K}(t)| = \frac{|\dot{\vec{T}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|}$, со што ја добиваме и следнава формула за $\vec{N}(t)$:

$$\vec{N}(t) = \frac{\dot{\vec{T}}(t)}{|\dot{\vec{T}}(t)|}. \quad (2.4.6)$$

Пример 2.4.18. За спиралата од примерот 2.3.1

$$\vec{r} : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t), \quad (2.4.7)$$

да го определиме единичниот тангентен вектор, векторот на кривина, единичниот нормален вектор и закривеноста. Потоа, да ја определиме и оскулаторната рамнина во точката што се добива за $t = \pi$. Ќе ги определиме на два начина: со природната параметризација и директно (без да ја репараметризираме кривата).

Со помош на природната параметризација. Во примерот 2.3.1 ја определивме природната параметризација, таа е:

$$\vec{r} : [0, 4\sqrt{5}\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(s) = \left(2 \cos(s/\sqrt{5}), 2 \sin(s/\sqrt{5}), s/\sqrt{5}\right), \quad (2.4.8)$$

и врската помеѓу s и t е $t = s/\sqrt{5}$. Од ова добиваме:

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \sin(s/\sqrt{5}), \frac{2}{\sqrt{5}} \cos(s/\sqrt{5}), \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad s \in [0, 4\sqrt{5}\pi]; \quad (2.4.9)$$

$$\vec{K}(s) = \frac{d\vec{T}}{ds} = \left(-\frac{2}{5} \cos(s/\sqrt{5}), -\frac{2}{5} \sin(s/\sqrt{5}), 0\right), \quad s \in [0, 4\sqrt{5}\pi];$$

$$\kappa(s) = |\vec{K}(s)| = \sqrt{\frac{4}{25} \cos^2(s/\sqrt{5}) + \frac{4}{25} \sin^2(s/\sqrt{5}) + 0} = \frac{2}{5}, \quad s \in [0, 4\sqrt{5}\pi];$$

$$\vec{N}(s) = \frac{\vec{K}(s)}{\kappa(s)} = \left(-\cos(s/\sqrt{5}), -\sin(s/\sqrt{5}), 0\right), \quad s \in [0, 4\sqrt{5}\pi]. \quad (2.4.10)$$

Да забележиме дека закривеноста на спиралата е константна (секогаш е еднаква на $2/5$). За да ја определиме оскулаторната рамнина во точката што се добива $t = \pi$, прво да забележиме дека $t = \pi$ кога $s = \sqrt{5}\pi$. Точката во која треба да се определи оваа рамнина е $A(-2, 0, \pi)$ (се добива со заменување $t = \pi$ во (2.4.7), или, еквивалентно, $s = \sqrt{5}\pi$ во (2.4.8)). Со заменување $s = \sqrt{5}\pi$ во формулите за $\vec{T}(s)$ и $\vec{N}(s)$, добиваме: $\vec{T}(\sqrt{5}\pi) = (0, -2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ и $\vec{N}(\sqrt{5}\pi) = (1, 0, 0)$. Значи, бараната оскулаторна рамнина минува низ A и е паралелна со овие два вектора. Ни треба еден нејзин нормален вектор $\vec{n}$; можеме да земеме $\vec{n} = \vec{T}(\sqrt{5}\pi) \times \vec{N}(\sqrt{5}\pi)$. Добиваме:

$$\vec{n} = (0, -2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) \times (1, 0, 0) = (0, 1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}), \quad (2.4.11)$$

и равенката на бараната оскулаторна рамнина е:

$$(x + 2, y - 0, z - \pi) \cdot (0, 1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = 0 \iff y/\sqrt{5} + 2(z - \pi)/\sqrt{5} = 0 \iff y + 2z = 2\pi.$$

Се разбира, во определувањето на $\vec{n}$ можевме да го ползуваме $\vec{K}(\sqrt{5}\pi)$ ($\vec{K}$ и $\vec{N}$ се паралелни!).

Директно (без природната параметризација.) Од (2.4.7) добиваме:

$$\vec{r}(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 1) \implies |\vec{r}'(t)| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 1} = \sqrt{5}, \quad t \in [0, 4\pi].$$

Следува дека:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \sin t, \frac{2}{\sqrt{5}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad t \in [0, 4\pi];$$

$$\begin{aligned}\vec{K}(t) &= \frac{1}{|\dot{\vec{r}}(t)|} \frac{d\vec{T}}{dt} = \left(-\frac{2}{5} \cos t, -\frac{2}{5} \sin t, 0 \right), \quad t \in [0, 4\pi]; \\ \kappa(t) &= |\vec{K}(t)| = \sqrt{\frac{4}{25} \cos^2 t + \frac{4}{25} \sin^2 t + 0} = \frac{2}{5}, \quad t \in [0, 4\pi]; \\ \vec{N}(t) &= \frac{\vec{K}(t)}{\kappa(t)} = (-\cos t, -\sin t, 0), \quad t \in [0, 4\pi].\end{aligned}$$

(Се разбира, исти се како и формулите што ги добивме со природната параметризација; да се потсетиме $t = s/\sqrt{5}$.) Да ја пресметаме оскулаторната рамнина во точката што се добива за $t = \pi$; таа е точката $A(-2, 0, \pi)$. Еден нормален вектор на оваа рамнина е даден со $\vec{n} = \vec{T}(\pi) \times \vec{N}(\pi)$. Бидејќи $\vec{T}(\pi) = (0, -2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ и $\vec{N}(\pi) = (1, 0, 0)$, го добиваме истиот вектор $\vec{n}$ како и во (2.4.11), и со тоа истата рамнина $y + 2z = 2\pi$.

Пример 2.4.19. Да ја пресметаме закривеноста на спиралата (2.4.7) со помош на формулата (2.4.4) и да се увериме дека ќе го добиеме истиот резултат како во примерот 2.4.18. Бидејќи

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 1), \quad \ddot{\vec{r}}(t) = (-2 \cos t, -2 \sin t, 0), \quad t \in [0, 4\pi],$$

добиваме:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) &= \left(\begin{vmatrix} 2 \cos t & 1 \\ -2 \sin t & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \sin t \\ 0 & -2 \cos t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 \sin t & 2 \cos t \\ -2 \cos t & -2 \sin t \end{vmatrix} \right) \\ &= (2 \sin t, -2 \cos t, 4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t) = (2 \sin t, -2 \cos t, 4).\end{aligned}$$

Следува:

$$|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \quad t \in [0, 4\pi].$$

Бидејќи

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 1} = \sqrt{5},$$

(2.4.4) дава $\kappa(t) = 2\sqrt{5}/(\sqrt{5})^3 = 2/5$, за сите $t \in [0, 4\pi]$.

Забелешка 2.4.20. Во практика, ако не ни треба природната параметризација, секогаш е подобро да ги пресметаме $\vec{T}$, $\vec{K}$, $\vec{N}$ и κ директно, затоа што определувањето на природниот параметар често може да биде исклучително тешко. Исто така, ако ни е потребна само закривеноста, тогаш скоро секогаш подобро е да ја пресметаме по формулата (2.4.4) (односно (2.4.5) за рамнински криви), затоа што на овој начин го избегнуваме пресметувањето на $\vec{K}$.

За крај, ќе го дадеме следниот исклучително битен факт за векторот на забрзување $\vec{a}(t)$ на регуларната крива $\vec{r}(t)$. Ако во точката t закривеноста е 0, тогаш од (2.4.4) следува дека $\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{0}$ па $\dot{\vec{r}}(t)$ и $\ddot{\vec{r}}(t)$ се колинеарни. Од ова добиваме дека во оваа ситуација $\vec{a}(t)$ е колинеарен со векторот на брзина $\vec{v}(t)$, т. е. векторот на забрзување лежи на тангентната права во таа точка. Ако $\kappa(t) \neq 0$, тогаш забрзувањето секогаш лежи во рамнината формирана од векторите $\vec{T}(t)$ и $\vec{N}(t)$, т. е. во оскулаторната рамнина во таа точка (нема да го докажеме овој факт). Ова е битно затоа што ни дава

можност да го раздвоиме векторот на забрзување на две компоненти: во правец на движењето и во правец нормален на движењето. За да го видиме ова, да забележиме дека фактот дека $\vec{a}(t)$ лежи во рамнината формирана од $\vec{T}(t)$ и $\vec{N}(t)$ имплицира дека $\vec{a}(t)$ е линеарна комбинација од векторите $\vec{T}(t)$ и $\vec{N}(t)$, т. е. постојат броеви $a_T(t)$ и $a_N(t)$, кои, се разбира, зависат од t , така што:

$$\vec{a}(t) = a_T(t)\vec{T}(t) + a_N(t)\vec{N}(t). \quad (2.4.12)$$

Векторите $a_T(t)\vec{T}(t)$ и $a_N(t)\vec{N}(t)$ се викаат **тангенцијална** и **нормална компонента** на векторот на забрзување, додека скаларите $a_T(t)$ и $a_N(t)$ се викаат **тангенцијално** и **нормално забрзување**. Може да се докаже дека (нема да го направиме тоа)

$$a_T(t) = \frac{dv}{dt}(t), \quad a_N(t) = \kappa(t)(v(t))^2. \quad (2.4.13)$$

Тангенцијалната компонента $a_T(t)\vec{T}(t)$ секогаш е во истиот правец со векторот на брзина (т. е. лежи на тангентната права) и тангенцијалното забрзување $a_T(t)$ ја дава промената на брзината. Нормалната компонента е во насока на нормалниот вектор (т. е. покажува кон центарот на оскулаторната кружница) и нормалното забрзување ја дава брзината на промена на правецот на векторот на брзина (т. е. правецот на движење). Да забележиме дека ситуацијата кога $\kappa(t) = 0$ (првата ситуација којашто ја разгледавме) следува од (2.4.12): навистина кога $\kappa(t) = 0$, $\vec{a}(t) = a_T(t)\vec{T}(t)$, од што следува дека векторот на забрзување е колинеарен со векторот на брзина.

2.4.3. Бинормален вектор и торзија

Дефиниција 2.4.21. Во точките во кои закривеноста на регуларната крива $\vec{r}(t)$ не е 0, **бинормалниот вектор** $\vec{B}(t)$ се дефинира како:

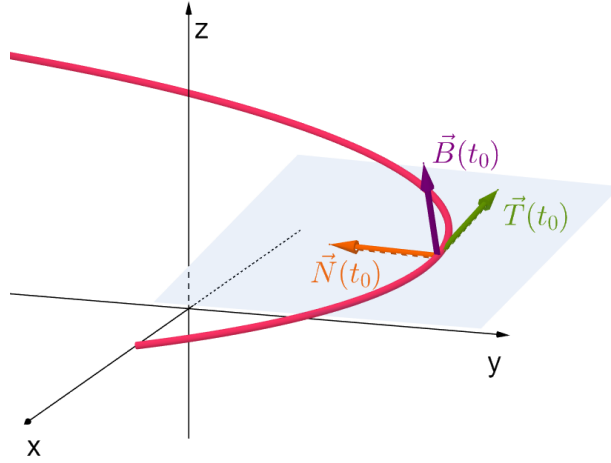
$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t).$$

Бинормалниот вектор е ортогонален на рамнината на која лежат $\vec{T}$ и $\vec{N}$, т. е. на оскулаторната рамнина (па $\vec{B}$ е нормален и на $\vec{T}$ и на $\vec{N}$). Бидејќи $\vec{T}$ и $\vec{N}$ се единечни и ортогонални, $\vec{B}$ е исто така единечен, т. е. $|\vec{B}(t)| = 1$. Во секоја точка од кривата, векторите $\vec{T}(t)$, $\vec{N}(t)$ и $\vec{B}(t)$ се десна тројка од единечни взаемно ортогонални вектори.

Веќе видовме дека единечниот нормален вектор не зависи од параметризација. Единечниот тангентен вектор е ист за сите репараметризации што ја зачувуваат насоката на движење на кривата, но ја менуваат насоката кога репараметризацијата ја менува насоката на движење (види ги коментарите пред теоремата 2.4.7). Според тоа, бинормалниот вектор ќе биде ист за сите репараметризации што ја зачувуваат насоката на движење, додека неговата насока е спротивна за репараметризациите што ја променуваат насоката на движење.

Нè интересира како $\vec{B}$ се менува во зависност од изминатиот пат по кривата. Квантитативна карактеристика за ова е изводот на $\vec{B}$ по s , т. е. $\frac{d\vec{B}}{ds}$ (Внимавај!, Нè интересира промената во однос на изминатиот пат; затоа изводот е по s , а не по t). Од

Слика 2.4.3: Единечен тангентен и нормален вектор, бинормален вектор



дефиницијата на $\vec{B}$ и теоремата 2.1.5 (г), добиваме:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{N} + \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{K} \times \vec{N} + \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds}; \quad (2.4.14)$$

последното равенство следува од фактот дека $\vec{K}$ е паралелен со $\vec{N}$ и затоа $\vec{K} \times \vec{N} = \vec{0}$. Клучниот факт е дека во која било точка од кривата:

$$\frac{d\vec{N}}{ds} \text{ лежи на рамнината генерирана од } \vec{T} \text{ и } \vec{B}. \quad (2.4.15)$$

Бидејќи $\vec{N}$ е нормален на оваа рамнина, доволно е да провериме дека $\vec{N}$ е ортогонален на $\frac{d\vec{N}}{ds}$, т. е. $\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{N} = 0$. За да го видиме ова, го диференцираме равенството $1 = |\vec{N}|^2 = \vec{N} \cdot \vec{N}$; од теоремата 2.1.5 (в) добиваме:

$$0 = \frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{N} + \vec{N} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = 2 \frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{N} \implies \frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{N} = 0.$$

Значи (2.4.15) е секогаш точно. Бидејќи $\vec{T}$, исто така, лежи на рамнината генерирана од $\vec{T}$ и $\vec{B}$, $\vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds}$ е ортогонален на оваа рамнина, па мора да биде паралелен со $\vec{N}$; односно е константа по $\vec{N}$. Оваа константа зависи од точката на кривата во која ги разгледуваме векторите, т. е. зависи од s . Ќе ја означиме оваа константа со $-\tau(s)$ (знакот $-$ е конвенционален во оваа ситуација). Поради (2.4.14), добиваме:

$$\frac{d\vec{B}}{ds}(s) = -\tau(s)\vec{N}(s). \quad (2.4.16)$$

Ова равенство е исклучително битно. Тоа ни кажува дека за квантитативно да ја карактеризираме промената на $\vec{B}$ во однос на изминатиот пат по кривата, доволно е

да ја знаеме нумеричката карактеристика $\tau(s)$ затоа што $\frac{d\vec{B}}{ds}(s)$ секогаш го има истиот правец како $\vec{N}(s)$; се разбира насоката не мора да им е иста, тоа зависи од знакот на $\tau(s)$. За да добиеме формула за $\tau(s)$, равенството (2.4.16) го множиме скаларно со $\vec{N}(s)$. Бидејќи $\vec{N}(s) \cdot \vec{N}(s) = 1$, добиваме:

$$\tau(s) = -\frac{d\vec{B}}{ds}(s) \cdot \vec{N}(s). \quad (2.4.17)$$

Дефиниција 2.4.22. Торзијата τ на регуларна крива чијашто закривеност никогаш не е 0 се дефинирана како:

$$\tau(s) = -\frac{d\vec{B}}{ds}(s) \cdot \vec{N}(s),$$

каде што s е природниот параметар.

Како што видовме, торзијата ја карактеризира промената на бинормалниот вектор во однос на изминатиот пат. Ако торзијата е еднаква на 0 во сите точки од кривата, тогаш бинормалниот вектор не се променува. Бидејќи тој е нормален на оскулаторната рамнина во секоја точка од кривата, добиваме дека оскулаторните рамнини во сите точки од кривата се паралелни меѓу себе. Интуицијата ни кажува дека од тоа мора да следува дека тие се во суштина истата рамнина и дека кривата лежи на оваа рамнина (види забелешка 2.4.14). Ова е секогаш точно; тоа следува од наредната теорема (која нема да ја докажеме).

Теорема 2.4.23. Нека $\vec{r}$ е регуларна крива чијашто закривеност никогаш не е 0. Тогаш кривата $\vec{r}$ лежи во една рамнина ако и само ако нејзината торзија е еднаква на 0 во сите точки од кривата.

Како што коментиравме во забелешката 2.4.14, оскулаторната рамнина во фиксна точка од кривата е таа за која кривата е „најблиску да лежи во неа“ во близина на таа точка. Торзијата во таа точка мери колку „брзо“ кривата се извртува надвор од оскулаторната рамнина во близина на точката. Ако τ е позитивна, кривата се извртува на страната на која покажува $\vec{B}$, а ако е негативна тогаш таа се извртува на спротивната страна. Ќе го илустрираме ова со следниот пример.

Пример 2.4.24. Да ја пресметаме торзијата на кривите:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 : [0, 4\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \vec{r}_1(t) &= (2 \cos t, 2 \sin t, t); \\ \vec{r}_2 : [0, 4\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \vec{r}_2(t) &= (2 \cos t, 2 \sin t, 4\pi - t). \end{aligned}$$

Првата крива е спиралата од примерот 2.4.18. Втората спирала оди надолу по z -оската (внимавај, не е иста како првата!).

За $\vec{r}_1$, единечниот тангентен вектор и единечниот нормален вектор се дадени со (2.4.9) и (2.4.10). Бинормалниот вектор $\vec{B}_1$ е векторскиот производ на овие два:

$$\vec{B}_1(s) = \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{2}{\sqrt{5}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) & 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \\ 0 & -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} -\frac{2}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) & \frac{2}{\sqrt{5}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \\ -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) & -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \end{array} \right| \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), -\frac{1}{\sqrt{5}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), \frac{2}{\sqrt{5}} \sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), -\frac{1}{\sqrt{5}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), \frac{2}{\sqrt{5}} \right).
\end{aligned}$$

Од ова добиваме:

$$\frac{d\vec{B}_1}{ds}(s) = \left(\frac{1}{5} \cos(s/\sqrt{5}), \frac{1}{5} \sin(s/\sqrt{5}), 0 \right),$$

и со помош на (2.4.17) за тозијата τ_1 на $\vec{r}_1$ добиваме:

$$\begin{aligned}
\tau_1(s) &= - \left(\frac{1}{5} \cos(s/\sqrt{5}), \frac{1}{5} \sin(s/\sqrt{5}), 0 \right) \cdot \left(-\cos(s/\sqrt{5}), -\sin(s/\sqrt{5}), 0 \right) \\
&= \frac{1}{5} \cos^2(s/\sqrt{5}) + \frac{1}{5} \sin^2(s/\sqrt{5}) = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Инцидентно, да забележиме дека торзијата на спиралата е константна: тоа значи дека таа подеднакво „брзо“ се извртува надвор од секоја од оскулаторните рамнини. Торзијата е позитивна и кривата се извртува на страната на која покажува $\vec{B}_1$.

За да ја пресметаме торзијата на $\vec{r}_2$, прво ќе ја најдеме нејзината природна параметризација. Бидејќи $\vec{r}_2 = (-2 \sin t, 2 \cos t, -1)$, $|\vec{r}_2'(t)| = \sqrt{5}$, имаме:

$$s = \int_0^t |\vec{r}_2'(\lambda)| d\lambda = \sqrt{5} \int_0^t d\lambda = \sqrt{5}t \implies t = s/\sqrt{5}.$$

Природната параметризација е:

$$\vec{r}_2 : [0, 4\sqrt{5}\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}_2(s) = \left(2 \cos(s/\sqrt{5}), 2 \sin(s/\sqrt{5}), 4\pi - s/\sqrt{5} \right).$$

Сега, слично како и во примерот 2.4.18, за единечниот тангентен вектор и единечниот нормален вектор на $\vec{r}_2$ добиваме:

$$\begin{aligned}
\vec{T}_2(s) &= \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \sin(s/\sqrt{5}), \frac{2}{\sqrt{5}} \cos(s/\sqrt{5}), -\frac{1}{\sqrt{5}} \right), \quad s \in [0, 4\sqrt{5}\pi]; \\
\vec{N}_2(s) &= \left(-\cos(s/\sqrt{5}), -\sin(s/\sqrt{5}), 0 \right), \quad s \in [0, 4\sqrt{5}\pi].
\end{aligned}$$

Бинормалниот вектор на $\vec{r}_2$ е даден со:

$$\vec{B}_2(s) = \vec{T}_2(s) \times \vec{N}_2(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \sin(s/\sqrt{5}), \frac{1}{\sqrt{5}} \cos(s/\sqrt{5}), \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Неговиот извод по s е:

$$\frac{d\vec{B}_2}{ds}(s) = \left(-\frac{1}{5} \cos(s/\sqrt{5}), -\frac{1}{5} \sin(s/\sqrt{5}), 0 \right),$$

и за торзијата добиваме:

$$\tau_2(s) = - \left(-\frac{1}{5} \cos(s/\sqrt{5}), -\frac{1}{5} \sin(s/\sqrt{5}), 0 \right) \cdot \left(-\cos(s/\sqrt{5}), -\sin(s/\sqrt{5}), 0 \right)$$

$$= -\frac{1}{5} \cos^2(s/\sqrt{5}) - \frac{1}{5} \sin^2(s/\sqrt{5}) = -\frac{1}{5}.$$

Во оваа ситуација, спиралата се извртува на спротивната страна од онаа на која покажува $\vec{B}_2$.

Во практика, пресметувањето на торзијата по формулата (2.4.17) често е исклучително тешко, затоа што треба да се определи природната параметризација на кривата. Следната формула дава начин за сметање на торзијата без да мора да се определува нејзината природна параметризација:

$$\tau(t) = \frac{\left(\dot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t), \dddot{\vec{r}}(t) \right)}{|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)|^2}, \quad (2.4.18)$$

каде $\ddot{\vec{r}}(t)$ е третиот извод на $\vec{r}(t)$ по t и броителот е мешаниот производ на векторите $\dot{\vec{r}}(t)$, $\ddot{\vec{r}}(t)$ и $\dddot{\vec{r}}(t)$.

Пример 2.4.25. Да ја определиме торзијата на кривата (2.4.7) од примерот 2.4.18 со помош на оваа формула. Ги пресметаме првите три изводи на $\vec{r}$:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= (-2 \sin t, 2 \cos t, 1), \quad t \in [0, 4\pi], \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (-2 \cos t, -2 \sin t, 0), \quad t \in [0, 4\pi], \\ \dddot{\vec{r}}(t) &= (2 \sin t, -2 \cos t, 0), \quad t \in [0, 4\pi]. \end{aligned}$$

За нивниот мешан производ, добиваме:

$$\left(\dot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t), \dddot{\vec{r}}(t) \right) = \begin{vmatrix} -2 \sin t & 2 \cos t & 1 \\ -2 \cos t & -2 \sin t & 0 \\ 2 \sin t & -2 \cos t & 0 \end{vmatrix} = 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 4.$$

Од друга страна,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) &= \left(\begin{vmatrix} 2 \cos t & 1 \\ -2 \sin t & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \sin t \\ 0 & -2 \cos t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 \sin t & 2 \cos t \\ -2 \cos t & -2 \sin t \end{vmatrix} \right) \\ &= (2 \sin t, -2 \cos t, 4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t) = (2 \sin t, -2 \cos t, 4), \end{aligned}$$

од што следува:

$$|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Сега, од формулата (2.4.18), добиваме: $\tau(t) = 1/5$, за сите $t \in [0, 4\pi]$. Се разбира, резултатот е ист како и во примерот 2.4.24.

Забелешка 2.4.26. Клучен факт за торзијата (кој нема да го докажеме) е дека таа е геометриско својство на кривата, т. е. не зависи од параметризација.

Пример 2.4.27. Дадена е спиралата:

$$\vec{r} : [-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t).$$

Да ја определиме нејзината природна параметризација. Потоа да ги пресметаме $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$, κ и τ .

Бидејќи $\dot{\vec{r}}(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t, 4)$, добиваме:

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t + 16} = \sqrt{25} = 5, \quad t \in [-2\pi, 2\pi]. \quad (2.4.19)$$

Природниот параметар е:

$$s = \int_{-2\pi}^t |\dot{\vec{r}}(\lambda)| d\lambda = 5 \int_{-2\pi}^t d\lambda = 5(t + 2\pi) \implies t = \frac{s}{5} - 2\pi.$$

Од ова следува дека должината на кривата е 20π (таа се добива кога $t = 2\pi$) и за природната параметризација на кривата добиваме:

$$\begin{aligned} \vec{r}(s) &= (3 \cos(s/5 - 2\pi), 3 \sin(s/5 - 2\pi), 4s/5 - 8\pi) \\ &= (3 \cos(s/5), 3 \sin(s/5), 4s/5 - 8\pi), \quad s \in [0, 20\pi]; \end{aligned}$$

последното равенство следува од периодичноста на функциите синус и косинус (имаат период 2π).

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}(s) = \left(-\frac{3}{5} \sin(s/5), \frac{3}{5} \cos(s/5), \frac{4}{5} \right), \quad s \in [0, 20\pi],$$

$$\vec{K}(s) = \frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \left(-\frac{3}{25} \cos(s/5), -\frac{3}{25} \sin(s/5), 0 \right), \quad s \in [0, 20\pi],$$

$$\kappa(s) = |\vec{K}(s)| = \sqrt{\frac{9}{625} \cos^2(s/5) + \frac{9}{625} \sin^2(s/5)} = \frac{3}{25}, \quad s \in [0, 20\pi],$$

$$\vec{N}(s) = \frac{\vec{K}(s)}{\kappa(s)} = (-\cos(s/5), -\sin(s/5), 0), \quad s \in [0, 20\pi],$$

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} \frac{3}{5} \cos(s/5) & \frac{4}{5} \\ -\sin(s/5) & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \sin(s/5) \\ 0 & -\cos(s/5) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} \sin(s/5) & \frac{3}{5} \cos(s/5) \\ -\cos(s/5) & -\sin(s/5) \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(\frac{4}{5} \sin(s/5), -\frac{4}{5} \cos(s/5), \frac{3}{5} \sin^2(s/5) + \frac{3}{5} \cos^2(s/5) \right)$$

$$= \left(\frac{4}{5} \sin(s/5), -\frac{4}{5} \cos(s/5), \frac{3}{5} \right), \quad s \in [0, 20\pi],$$

$$\tau(s) = -\frac{d\vec{B}}{ds}(s) \cdot \vec{N}(s) = -\left(\frac{4}{25} \cos(s/5), \frac{4}{25} \sin(s/5), 0 \right) \cdot (-\cos(s/5), -\sin(s/5), 0)$$

$$= \frac{4}{25} \cos^2(s/5) + \frac{4}{25} \sin^2(s/5) = \frac{4}{25}, \quad s \in [0, 20\pi].$$

Пример 2.4.28. Да ја определиме закривеноста и торзијата на кривата од примерот 2.4.27 со помош на формулите (2.4.4) и (2.4.18).

За изводите на $\vec{r}$ добиваме

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= (-3 \sin t, 3 \cos t, 4), \quad t \in [-2\pi, 2\pi], \\ \vec{r}''(t) &= (-3 \cos t, -3 \sin t, 0), \quad t \in [-2\pi, 2\pi], \\ \vec{r}'''(t) &= (3 \sin t, -3 \cos t, 0), \quad t \in [-2\pi, 2\pi].\end{aligned}$$

Векторскиот производ на $\vec{r}'(t)$ и $\vec{r}''(t)$ е:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= \left(\begin{vmatrix} 3 \cos t & 4 \\ -3 \sin t & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -3 \sin t \\ 0 & -3 \cos t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \sin t & 3 \cos t \\ -3 \cos t & -3 \sin t \end{vmatrix} \right) \\ &= (12 \sin t, -12 \cos t, 9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t) = (12 \sin t, -12 \cos t, 9).\end{aligned}$$

За неговиот модул добиваме:

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = \sqrt{144 \sin^2 t + 144 \cos^2 t + 81} = \sqrt{225} = 15,$$

и бидејќи $|\vec{r}'(t)| = 5$ (види (2.4.19)), формулата (2.4.4) дава: $\kappa(t) = 3/25$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$; се разбира, тоа е истиот резултат како и во примерот 2.4.27.

За да ја пресметаме торзијата, ни треба мешаниот производ:

$$\left(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t) \right) = \begin{vmatrix} -3 \sin t & 3 \cos t & 4 \\ -3 \cos t & -3 \sin t & 0 \\ 3 \sin t & -3 \cos t & 0 \end{vmatrix} = 36 \cos^2 t + 36 \sin^2 t = 36.$$

Од формулата (2.4.18) добиваме: $\tau(t) = 4/25$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$; со што го потврдуваме резултатот од примерот 2.4.27.

Пример 2.4.29. Дадена е кривата:

$$\vec{r} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (3 \cosh t, 3 \sinh t, 2t).$$

Да се пресмета закривеноста и торзијата.

Затоа што не ни треба природната параметризација, поедноставно е да ги пресметаме κ и τ со формулите (2.4.4) и (2.4.18). За изводите на $\vec{r}$ добиваме (види (2.3.12)):

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= (3 \sinh t, 3 \cosh t, 2), \quad t \in (-1, 1), \\ \vec{r}''(t) &= (3 \cosh t, 3 \sinh t, 0), \quad t \in (-1, 1), \\ \vec{r}'''(t) &= (3 \sinh t, 3 \cosh t, 0), \quad t \in (-1, 1).\end{aligned}$$

Векторскиот производ на векторите е:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= \left(\begin{vmatrix} 3 \cosh t & 2 \\ 3 \sinh t & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \sinh t \\ 0 & 3 \cosh t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 \sinh t & 3 \cosh t \\ 3 \cosh t & 3 \sinh t \end{vmatrix} \right) \\ &= (-6 \sinh t, 6 \cosh t, 9 \sinh^2 t - 9 \cosh^2 t) = (-6 \sinh t, 6 \cosh t, -9);\end{aligned}$$

во последното равенство го употребивме (2.3.11). Неговиот модул е:

$$|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{36 \sinh^2 t + 36 \cosh^2 t + 81}.$$

Модулот на $\dot{\vec{r}}(t)$ е:

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{9 \sinh^2 t + 9 \cosh^2 t + 4}.$$

Од (2.4.4) добиваме:

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{36 \sinh^2 t + 36 \cosh^2 t + 81}}{(9 \sinh^2 t + 9 \cosh^2 t + 4)^{3/2}}, \quad t \in (-1, 1).$$

За да ја определиме торзијата ни треба мешаниот производ:

$$\left(\dot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t) \right) = \begin{vmatrix} 3 \sinh t & 3 \cosh t & 2 \\ 3 \cosh t & 3 \sinh t & 0 \\ 3 \sinh t & 3 \cosh t & 0 \end{vmatrix} = 18 \cosh^2 t - 18 \sinh^2 t = 18;$$

последното равенство следува од (2.3.11). Формулата (2.4.18) дава:

$$\tau(t) = \frac{18}{36 \sinh^2 t + 36 \cosh^2 t + 81} = \frac{2}{4 \sinh^2 t + 4 \cosh^2 t + 9}, \quad t \in (-1, 1).$$

Резултатите можат да се поедностават ако се искористи равенството

$$\sinh^2 t + \cosh^2 t = \cosh(2t), \quad t \in \mathbb{R},$$

(провери дека ова важи!); тоа го оставаме на читателот.

Пример 2.4.30. Да се пресмета закривеноста и торзијата на кривата:

$$\vec{r} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (te^t, t^2, t^2 e^t),$$

во точката што се добива за $t = 0$.

Се разбира, ќе ги користиме формулите (2.4.4) и (2.4.18). Ги пресметуваме првите три изводи на $\vec{r}$:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= (e^t + te^t, 2t, 2te^t + t^2 e^t), \quad t \in (-1, 1), \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (2e^t + te^t, 2, 2e^t + 4te^t + t^2 e^t), \quad t \in (-1, 1), \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (3e^t + te^t, 0, 6te^t + t^2 e^t), \quad t \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Бидејќи нè интересира закривеноста и торзијата само во $t = 0$, ги определуваме вредностите на изводите во оваа точка:

$$\dot{\vec{r}}(0) = (1, 0, 0), \quad \ddot{\vec{r}}(0) = (2, 2, 2), \quad \ddot{\vec{r}}(0) = (3, 0, 6).$$

Векторскиот производ на $\dot{\vec{r}}(0)$ и $\ddot{\vec{r}}(0)$ е:

$$\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0) = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (0, -2, 2).$$

Од ова добиваме: $|\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Бидејќи $|\dot{\vec{r}}(0)| = 1$, за закривеноста во $t = 0$ имаме: $\kappa(0) = 2\sqrt{2}$.

За торзијата, прво ќе го пресметаме мешаниот производ

$$\left(\dot{\vec{r}}(0), \ddot{\vec{r}}(0), \dddot{\vec{r}}(0) \right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12.$$

Од ова следува: $\tau(0) = 12/(2\sqrt{2})^2 = 3/2$.

Пример 2.4.31. Дадена е кривата:

$$\vec{r} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (t^2, t^2 + t, t^3).$$

Да ги определиме единечниот тангентен вектор, единечниот нормален вектор и бинормалниот вектор на $\vec{r}$ во $t = 0$.

Бидејќи не ни треба природната параметризација, ќе ги определиме $\vec{T}$ и $\vec{K}$ со помош на формулите (2.4.1) и (2.4.2); потоа, определувањето на $\vec{N}$ и $\vec{B}$ е стандардно.

За векторот на брзина и брзината на кривата имаме:

$$\dot{\vec{r}}(t) = (2t, 2t + 1, 3t^2), \quad |\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{4t^2 + 4t^2 + 4t + 1 + 9t^4} = \sqrt{9t^4 + 8t^2 + 4t + 1}.$$

Од ова добиваме:

$$\vec{T}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = \frac{(2t, 2t + 1, 3t^2)}{\sqrt{9t^4 + 8t^2 + 4t + 1}}, \quad \vec{T}(0) = (0, 1, 0).$$

За $\vec{K}$ ни треба изводот на $\vec{T}$ по t

$$\begin{aligned} \dot{\vec{T}}(t) &= \frac{\sqrt{9t^4 + 8t^2 + 4t + 1}(2, 2, 6t) - \frac{18t^3 + 8t + 2}{\sqrt{9t^4 + 8t^2 + 4t + 1}}(2t, 2t + 1, 3t^2)}{9t^4 + 8t^2 + 4t + 1}, \\ \dot{\vec{T}}(0) &= (2, 2, 0) - 2(0, 1, 0) = (2, 0, 0). \end{aligned}$$

Добиваме:

$$\vec{K}(0) = \frac{\dot{\vec{T}}(0)}{|\dot{\vec{T}}(0)|} = (2, 0, 0) \implies \vec{N}(0) = \frac{\vec{K}(0)}{|\vec{K}(0)|} = (1, 0, 0);$$

се разбира, $\vec{N}(0)$ можеме да го пресметаме и по формулата (2.4.6). Останува уште да го определиме бинормалниот вектор во $t = 0$:

$$\vec{B}(0) = \vec{T}(0) \times \vec{N}(0) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, -1).$$

2.5. Нерешени задачи

Задача 2.5.1. Да се определат брзината, векторот на брзина и векторот на забрзување на следните криви. Потоа да се евалуираат во зададената вредност на t .

- (а) $\vec{r}(t) = (t \sin t, t^2 \cos t, t), t = 0$;
- (б) $\vec{r}(t) = (te^t, t^2 e^t, t), t = 0$;
- (в) $\vec{r}(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t, \sin t), t = 0$;
- (г) $\vec{r}(t) = (t \cosh t, t \sinh t, t^2 + t), t = 0$;
- (д) $\vec{r}(t) = (t^3, t^3 + t, t^2 + t + 1), t = 0$;
- (ѓ) $\vec{r}(t) = (\ln(1 + t), t\sqrt{1 + t^2}, \arctan t), t = 0$;
- (е) $\vec{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t^2), t = \pi$;
- (ж) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos 2t), t = \pi/4$.

Задача 2.5.2. Да се определат единичниот тангентен вектор, единичниот нормален вектор и бинормалниот вектор на следните криви во зададената вредност на t .

- (а) $\vec{r}(t) = (\cosh(t^2), \sinh(t^2), t), t = 0$;
- (б) $\vec{r}(t) = (t^3 + t^2, t, t^2), t = 0$;
- (в) $\vec{r}(t) = (e^{t^2}, te^t, e^t), t = 0$;
- (г) $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ во $t = 1$;
- (д) $\vec{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ во $t = 0$;
- (ѓ) $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, t)$ во $t = 0$.

Задача 2.5.3.

- (а) За кривите од задачата 2.5.1 да се определи закривеноста и торзијата во $t = 0$.
- (б) Да се определат закривеноста и торзијата за кривите од задачата 2.5.2.

Задача 2.5.4. Да се определи радиус-векторот $\vec{r}(t)$ (т. е. кривата) на телото ако се знаат:

- (а) неговиот вектор на брзина $\vec{v}(t) = (t, t \sin t, t + 1)$ и позицијата во $t = 0$ ($\vec{r}(0) = (0, 0, 1)$);
- (б) неговиот вектор на забрзување $\vec{a}(t) = (1, t + \sin t, te^t)$ и неговиот вектор на брзина и на позиција во $t = 0$: $\vec{v}(0) = (0, 1, 0)$, $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)$.

Задача 2.5.5. Да се определи должината на следниве криви:

- (а) $\vec{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (2t, \frac{1}{3}t^3, t^2)$.

(б) $\vec{r} : [0, \pi/4] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, \ln \cos t)$.

(в) $\vec{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (2t, t, t^2)$.

(г) $\vec{r} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (\cos(e^t), \sin(e^t), e^t)$;

(д) $\vec{r} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$.

Задача 2.5.6. За следните криви, да се определи нивната природна параметризация, а потоа да се определат $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$, κ и τ .

(а) $\vec{r} : [-\pi, 3\pi]$, $\vec{r}(t) = (3 \cos 2t, 3 \sin 2t, 2t + 1)$.

(б) $\vec{r} : [0, 5\pi]$, $\vec{r}(t) = (-\sin 3t, \cos 3t, t + 3)$.

Задача 2.5.7. Кривата C е дефинирана како пресек на површините:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = 4z.$$

Да се определи тангентниот вектор на кривата во точката $(\sqrt{3}, 1, 1)$.

Задача 2.5.8. Кривата C е дефинирана како пресек на површините:

$$x^2 + z^2 = 10 \quad \text{и} \quad y^2 + z^2 = 10.$$

(а) Да се определи тангентниот вектор на кривата C во точката $(1, 1, 3)$.

(б) Да се напише во параметарски облик равенката на тангентата на кривата C во точката $(1, 1, 3)$.

Задача 2.5.9. За кривите од претходната задача да се пресмета закривеноста κ и торзијата τ во соодветните точки.

Задача 2.5.10. Даден е вектор на забрзување $\vec{a}(t) = (\sin t, \cos t, 2)$ и почетни услови $\vec{v}(0) = (1, 0, 0)$, $\vec{r}(0) = (0, 1, 0)$. Да се определи функцијата $\vec{r}(t)$.

Задача 2.5.11. Кривата C е пресек на површините $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ и $F_2(x, y, z) = x + 2y + z - 3 = 0$. Да се најде тангентниот вектор на C во точката $(1, 1, 2)$.

Задача 2.5.12. Кривата C е дадена како пресек на површините $x^2 + y^2 = 4$ и $z = xy$.

(а) Да се најде параметарска форма за C .

(б) Да се најде вектор на брзина и нормала во точката каде што $x = 1$, $y = 2$ (ако постои).

Задача 2.5.13. * Да се одреди точката(ите) на кривата $\vec{r}(t) = (t^2 - 1, 2t, t^3)$ каде што закривеноста има екстрем.

Глава 3.

Скаларни и векторски полиња

3.1. Дефиниција и примери

Дефиниција 3.1.1. Скаларно поле од три променливи е реална функција $G : U \rightarrow \mathbb{R}$, дефинирана на област U во $\mathbb{R}^3$. Кога областа U лежи во $\mathbb{R}^2$, тогаш велиме дека G е скаларно поле од две променливи.

Со други зборови, скаларно поле е обична функција од две или од три променливи; името скаларно поле е сугестивно за да нагласи дека вредностите се обични броеви (скалари) и за да се направи разлика со векторските полиња што ќе ги дефинираме подолу. Скоро сите скаларни полиња коишто ќе ги разгледуваме ќе бидат функции што ќе имаат добри својства: се непрекинати и ќе имаат парцијални изводи од произволен ред таму каде што се дефинирани. Често ќе биде јасно од контекстот дали скаларното поле е од две или од три променливи и во тие ситуации тоа нема да го нагласуваме.

Типичен пример на скаларно поле е температурата: во секоја точка од просторот со координати (x, y, z) , температурата $T(x, y, z)$ е реален број што ја дава температурата во таа точка. Слично, температурата на танка метална плоча со занемарлива дебелина е скаларно поле од две променливи $T(x, y)$.

Да видиме неколку примери на скаларни полиња:

$$\begin{aligned} G_1 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, & G_1(x, y, z) &= xyz + x; \\ G_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & G_2(x, y) &= x^2y + e^{xy}; \\ G_3 : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R}, & G_3(x, y, z) &= \frac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

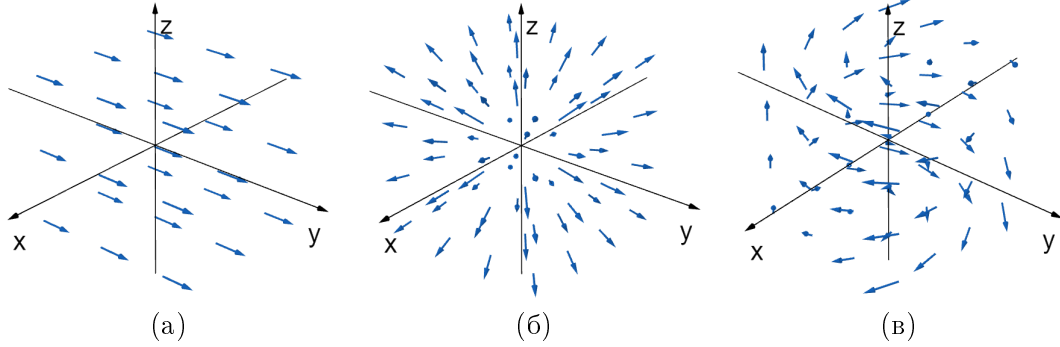
Скаларните полиња G_1 и G_3 се од три променливи, додека G_2 е од две променливи. Да забележиме дека G_3 не е дефинирано на целиот простор $\mathbb{R}^3$: во точката $(0, 0, 0)$ полето нема смисла.

За моделирање на физичките појави, скаларните полиња не се доволни. Често физичките величини се векторски: покрај големина имаат и насока и правец.

Дефиниција 3.1.2. Векторско поле од три променливи е пресликување $\vec{F}$ што на секоја точка со координати (x, y, z) од областа U во $\mathbb{R}^3$ му придружува просторен вектор $\vec{F}(x, y, z)$. Слично, векторско поле од две променливи е пресликување $\vec{F}$

што на секоја точка со координати (x, y) од област U во $\mathbb{R}^2$ му придружува рамнински вектор $\vec{F}(x, y)$.

Слика 3.1.1: Векторски полиња од три променливи



Од дефиницијата следува дека векторско поле од три променливи е пресликување $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, каде што U е област во $\mathbb{R}^3$, додека векторско поле од две променливи е пресликување $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, каде што U е област во $\mathbb{R}^2$. Геометриски, векторските полиња ги претставуваме како колекција од стрелки: кога полето е од три променливи, во секоја точка $(x, y, z) \in U$ имаме стрелка која го дава векторот $\vec{F}(x, y, z)$ со почеток поместен во точката (x, y, z) (види ја сликата 3.1.1); слично и кога полето е од две променливи (на сликата 3.2.1 (а) подолу е даден пример на векторско поле од две променливи).

Да разгледаме неколку примери на векторски полиња:

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (xy, xz, x + yz); \quad (3.1.1)$$

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = (\sin(x + y), x). \quad (3.1.2)$$

Векторското поле (3.1.1) е од три променливи, додека (3.1.2) е од две променливи; еве неколку вредности на (3.1.1) и (3.1.2) во неколку произволно избрани точки:

$$\text{за (3.1.1): } \vec{F}(1, 1, 0) = (1, 0, 1), \quad \vec{F}(-1, 1, 1) = (-1, -1, 0), \quad \vec{F}(1, 2, 1) = (2, 1, 3);$$

$$\text{за (3.1.2): } \vec{F}(1, 1) = (\sin 2, 1), \quad \vec{F}(-1, 1) = (0, -1), \quad \vec{F}(3, 2) = (\sin 5, 3).$$

Координатите на секое векторско поле од три променливи зависат од x , y и z и според тоа се обични функции од три променливи (т. е. скаларни полиња). Овие функции се викаат **координатни функции** на полето и секогаш ќе ги означуваме со иста буква како и самото поле со индекс 1, 2 или 3. На пример, за полето (3.1.1), координатните функции се:

$$F_1(x, y, z) = xy, \quad F_2(x, y, z) = xz, \quad F_3(x, y, z) = x + yz; \quad (3.1.3)$$

координатните функции често се означуваат и со F_x , F_y и F_z , но ние секогаш ќе ги користиме ознаките F_1 , F_2 и F_3 . Слично ќе постапуваме и кога полето е од две променливи; за полето (3.1.2), координатните функции се:

$$F_1(x, y) = \sin(x + y), \quad F_2(x, y) = x. \quad (3.1.4)$$

Векторските полиња од три променливи можат да се зададат и со помош на ортовите по x , y и z -оските: $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ и $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Ако $\vec{F}$ е дадено со $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, тогаш:

$$\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k}.$$

На пример, (3.1.1) уште може да се запише како:

$$\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + xz\vec{j} + (x + yz)\vec{k}.$$

За векторските полиња од две променливи ни требаат само ортовите $\vec{i} = (1, 0)$ и $\vec{j} = (0, 1)$. На пример, полето (3.1.2) може да се запише и на следниов начин:

$$\vec{F}(x, y) = \sin(x + y)\vec{i} + x\vec{j}.$$

Типичен пример на векторско поле е брзината на флуид: во секоја точка (x, y, z) , брзината на флуидот е вектор $\vec{F}(x, y, z)$.

Друг пример е електростатското поле генерирано од материјална точка со полнеж q_0 , којашто се наоѓа во (x_0, y_0, z_0) . Ова поле $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_0, y_0, z_0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ е дефинирано со:

$$\vec{E}(x, y, z) = k_e q_0 \frac{(x - x_0, y - y_0, z - z_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}, \quad (3.1.5)$$

каде $k_e > 0$ е Кулоновата (електростатска) константа. Векторите $\vec{E}(x, y, z)$ се насочени во спротивна насока од полнежот кога тој е позитивен (т. е. $q_0 > 0$) и во насока на полнежот кога е негативен (т. е. $q_0 < 0$); на пример, кога $q_0 > 0$ се наоѓа во координатниот почеток, $\vec{E}$ изгледа како на сликата 3.1.1 (б). Електростатското поле генерирано од полнежот q_0 е пропорционално со силата со која q_0 дејствува на друг полнеж q ставен во точката (x, y, z) ; поточно електростатската сила (уште се вика Кулонова сила) е дадена со

$$\vec{F}(x, y, z) = q\vec{E}(x, y, z) \quad (\text{ова е Кулоновиот закон}). \quad (3.1.6)$$

Добро е читателот да се увери дека ситуацијата е симетрична: ако се запише електростатското поле генерирано од q и со негова помош се определи силата со која q делува на q_0 , се добива истата сила само со спротивен знак (што е третиот Њутнов закон). Ако означиме $\vec{r} = (x, y, z)$ и $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (ова се радиус-векторите на овие точки), тогаш електростатското поле и електростатската сила со која q_0 делува на q го добиваат обликот:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k_e q_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}, \quad \vec{F}(\vec{r}) = \frac{k_e q q_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|};$$

читателот веројатно веќе ги има видено овие формули. Да забележиме дека координатните функции на (3.1.5) се:

$$E_1(x, y, z) = \frac{k_e q_0 (x - x_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}},$$

$$E_2(x, y, z) = \frac{k_e q_0 (y - y_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}},$$

$$E_3(x, y, z) = \frac{k_e q_0 (z - z_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}.$$

Ако имаме n материјални точки со координати $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ и полнежи $q_1, q_2, \dots, q_n$, тогаш вкупното електростатско поле

$$\vec{E} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

е збирот од електростатските полиња $\vec{E}_{q_1}, \vec{E}_{q_2}, \dots, \vec{E}_{q_n}$ генерирани од полнежите $q_1, q_2, \dots, q_n$ ($\vec{E}_{q_j}$ е дадено со (3.1.5), се разбира, со q_j и (x_j, y_j, z_j) на местото од q_0 и (x_0, y_0, z_0) соодветно), т. е.

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_{q_1}(x, y, z) + \dots + \vec{E}_{q_n}(x, y, z). \quad (3.1.7)$$

Исто како и претходно, вкупната електростатска (Кулонова) сила со која $q_1, q_2, \dots, q_n$ дејствуваат на полнеж q , кој се наоѓа во (x, y, z) , е дадена со (3.1.6).

Ќе дадеме уште еден пример на векторско поле од физика. Ако е дадена материјална точка со маса m_0 којашто се наоѓа во (x_0, y_0, z_0) , тогаш таа го продуцира гравитационо поле $\vec{\Gamma} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_0, y_0, z_0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ дефинирано со:

$$\vec{\Gamma}(x, y, z) = -G_N m_0 \frac{(x - x_0, y - y_0, z - z_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}, \quad (3.1.8)$$

каде што G_N е Њутновата гравитациона константа (читателот веројатно веќе ја забележува сличноста со електростатското поле); кога материјалната точка е во координатниот почеток, $\vec{\Gamma}$ изгледа како на сликата 3.1.1 (б), со таа разлика што векторите се во спротивна насока. Гравитационото поле генерирано од масата m_0 е пропорционално со силата со која m_0 дејствува на друга материјална точка со маса m која се наоѓа во (x, y, z) ; поточно гравитационата сила е:

$$\vec{F}(x, y, z) = m \vec{\Gamma}(x, y, z) \quad (\text{ова е Њутновиот закон за гравитација}). \quad (3.1.9)$$

Слично како и кај електростатското поле, ако се дадени n материјални точки со координати $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ и маси $m_1, m_2, \dots, m_n$, тогаш вкупното гравитационо поле $\vec{\Gamma} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ е збирот од гравитационите полиња $\vec{\Gamma}_{m_1}, \vec{\Gamma}_{m_2}, \dots, \vec{\Gamma}_{m_n}$ генерирани од масите $m_1, m_2, \dots, m_n$, т. е.

$$\vec{\Gamma}(x, y, z) = \vec{\Gamma}_{m_1}(x, y, z) + \dots + \vec{\Gamma}_{m_n}(x, y, z). \quad (3.1.10)$$

Исто како и претходно, вкупната гравитациона сила со која $m_1, m_2, \dots, m_n$ дејствуваат на материјална точка со маса m и координати (x, y, z) , е дадена со (3.1.9).

3.2. Градиент, дивергенција и ротор

Целта на овој дел е да ги воведеме трите основни операции кои се применуваат на скаларните и на векторските полиња: градиент, дивергенција и ротор.

3.2.1. Градиент на скаларни полиња

Дефиниција 3.2.1. Градиентот на скаларното поле $G : U \rightarrow \mathbb{R}$ од три променливи е векторското поле $\text{grad } G$ зададено со:

$$\text{grad } G : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{grad } G(x, y, z) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right).$$

Аналогно, ако $G : U \rightarrow \mathbb{R}$ е скаларно поле од две променливи $\text{grad } G$ е векторското поле од две променливи, дадено со:

$$\text{grad } G : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{grad } G(x, y) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} \right).$$

Пред да коментираме кои информации ни ги дава градиентот за скаларното поле, ќе видиме неколку примери.

Пример 3.2.2. Да пресметаме $\text{grad } G$ за скаларното поле:

(а) $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, G(x, y, z) = xy + ye^z;$

(б) $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, G(x, y) = x^2 + y^2.$

(а) Бидејќи парцијални изводи на G се:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = x + e^z, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = ye^z,$$

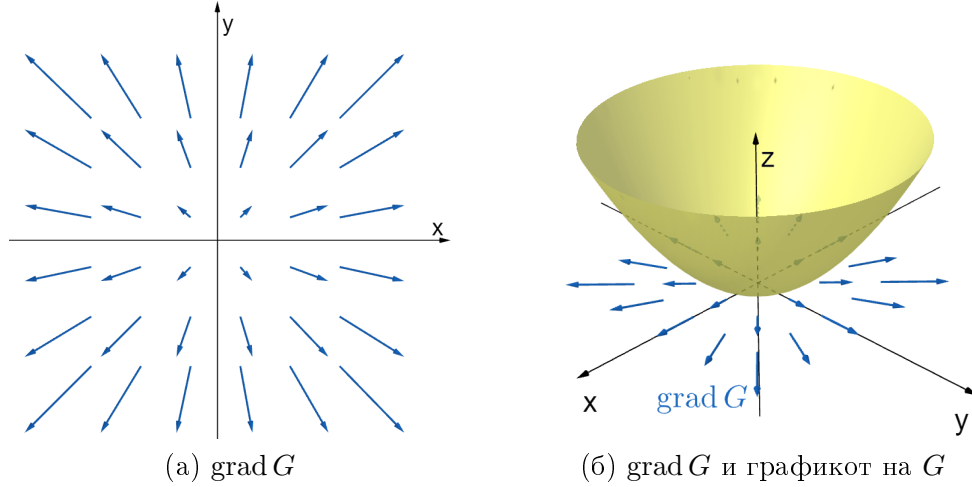
следува дека $\text{grad } G(x, y, z) = (y, x + e^z, ye^z).$

(б) Слично, ги бараме првите парцијални изводи на G :

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 2y,$$

и добиваме: $\text{grad } G(x, y) = (2x, 2y).$

Градиентот на скаларното поле во точката (x, y, z) ја дава насоката во која вредностите на скаларното поле најбрзо растат во близината на таа точка. Неговата должина е квантитативна мерка колку брзо расте полето во таа насока, односно колку должината е поголема растењето на полето во таа насока е побрзо. Во примерот 3.2.2 (а), за точката $(1, 1, 0)$ градиентот е $\text{grad } G(1, 1, 0) = (1, 2, 1)$. Тоа значи дека во близината на точката $(1, 1, 0)$ скаларното поле најбрзо расте во насока на векторот $\text{grad } G(1, 1, 0) = (1, 2, 1)$. Слично, за примерот 3.2.2 (б), за точката $(1, 2)$, $\text{grad } G(1, 2) = (2, 4)$, што значи дека во близината на точката $(1, 2)$ скаларното поле најбрзо расте во насока на векторот $\text{grad } G(1, 2) = (2, 4)$. Во оваа ситуација, можеме лесно визуелно да се увериме во ова. Графикот на функцијата $G(x, y) = x^2 + y^2$ е параболоид со теме во координатниот почеток. Фактот $\text{grad } G(1, 2) = (2, 4)$ кажува дека кога $(x, y) = (1, 2)$ параболоидот е најстрмен во насока $\text{grad } G(1, 2) = (2, 4)$ (види ја сликата 3.2.1).

Слика 3.2.1: Градиент на $G(x, y) = x^2 + y^2$ 

3.2.2. Дивергенција на векторски полиња

Дефиниција 3.2.3. Дивергенцијата на векторското поле од три променливи $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ е скаларното поле $\text{div } \vec{F}$ дадено со:

$$\text{div } \vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{div } \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Аналогно, ако $\vec{F} = (F_1, F_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ е векторско поле од две променливи, $\text{div } \vec{F}$ е скаларното поле од две променливи дадено со:

$$\text{div } \vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{div } \vec{F}(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

Да видиме два примера.

Пример 3.2.4. Да ја пресметаме дивергенцијата на векторското поле $\vec{F}$ дадено со:

(а) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (xy + z, x \sin(yz), e^{xz});$

(б) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = (x \cos(xy), y \sin x).$

(а) За ова векторско поле, координатните функции се:

$$F_1(x, y, z) = xy + z, \quad F_2(x, y, z) = x \sin(yz), \quad F_3(x, y, z) = e^{xz}.$$

Бидејќи

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = xz \cos(yz), \quad \frac{\partial F_3}{\partial z} = xe^{xz},$$

следува дека: $\text{div } \vec{F}(x, y, z) = y + xz \cos(yz) + xe^{xz}.$

(б) Координатните функции на $\vec{F}$ се: $F_1(x, y) = x \cos(xy), F_2(x, y) = y \sin x.$ Парцијалните изводи што ни требаат се:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \cos(xy) - xy \sin(xy), \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = \sin x,$$

од што се добива $\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = \cos(xy) - xy \sin(xy) + \sin x$.

Значењето на дивергенцијата е следното. Дивергенцијата во точката (x, y, z) е квантитативна оценка колку векторското поле во близината на оваа точка се однесува како „извор“, односно како „одвод“. Кога дивергенцијата во некоја точка е позитивна, во околината на таа точка полето се однесува како извор; ако полето е брзината на флуид, позитивна дивергенција значи дека флуидот се шири од таа точка на надвор. Полето на сликата 3.1.1 (б) има позитивна дивергенција во координатниот почеток; слично, полето на сликата 3.2.1 (а) има позитивна дивергенција во сите точки. Кога дивергенцијата е негативна, полето се однесува како одвод, т. е. флуидот се собира во таа точка. Ако дивергенцијата е 0, тогаш вкупната количина од флуидот што влегува е иста со таа која излегува од непосредната околината на таа точка; на пример, полето на сликата 3.1.1 (а) има дивергенција 0 во сите точки.

3.2.3. Ротор на векторски полиња

Дефиниција 3.2.5. Роторот на векторското поле од три променливи $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ е векторското поле од три променливи $\operatorname{rot} \vec{F}$ дадено со:

$$\operatorname{rot} \vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Забелешка 3.2.6. Роторот е дефиниран само за векторски полиња од три променливи; роторот не е дефиниран за векторски полиња од две променливи.

Забелешка 3.2.7. Роторот на $\vec{F}$ често се означува и со $\operatorname{curl} \vec{F}$.

Забелешка 3.2.8. Во наредниот дел ќе ја запишеме формулата за пресметка на $\operatorname{rot} \vec{F}$ на поедноставен начин за паметење.

Пример 3.2.9. Да се пресмета роторот на векторското поле

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (xy + z, x \sin(yz), e^{xz}).$$

Координатните функции на $\vec{F}$ се:

$$F_1(x, y, z) = xy + z, \quad F_2(x, y, z) = x \sin(yz), \quad F_3(x, y, z) = e^{xz}.$$

Ни требаат следните парцијални изводи:

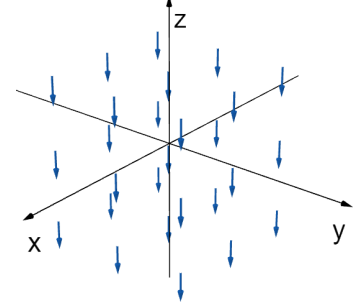
$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= x, & \frac{\partial F_1}{\partial z} &= 1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \sin(yz), & \frac{\partial F_2}{\partial z} &= xy \cos(yz) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} &= ze^{xz}, & \frac{\partial F_3}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Заменуваме во формулата за роторот и добиваме:

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = (-xy \cos(yz), 1 - ze^{xz}, \sin(yz) - x).$$

Значењето на роторот е следното; повторно ќе го опишеме кога векторското поле е брзина на флуид. Нека во фиксната точка (x, y, z) ставиме мало топче со фиксен центар (за да не ја променува позицијата под дејството на флуидот). Тогаш, под дејството на флуидот, топчето ќе почне да ротира. Роторот на полето во таа точка е насоката на оската околу која се ротира, дадена преку правилото на десна рака: прстите на десната рака ја покажуваат ротацијата, а палецот насоката на оската на ротација (која е точно роторот). На пример, полето на сликата 3.1.1 (в) има ненулти ротор во сите точки и тој изгледа како на сликата 3.2.2, додека роторот на полето на сликата 3.1.1 (а) е $\vec{0}$ секаде.

Слика 3.2.2: Роторот на полето на сликата 3.1.1 (в)



3.2.4. Операторот $\vec{\nabla}$

Го дефинираме следниот „вектор“ $\vec{\nabla}$ (се чита „набла“ или „дел“)

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

$\vec{\nabla}$ не е класичен вектор: неговите координати не се вредности туку операции за барање парцијални изводи. Сам по себе, тој нема смисла. Него можеме да го применуваме на полиња и тогаш тој добива смисла; $\vec{\nabla}$ се вика оператор бидејќи со него оперираме на скаларни и векторски полиња.

Нека G е скаларно поле од три променливи. Со $\vec{\nabla}$ оперираме на G на следниов начин:

$$\vec{\nabla} G(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) G = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right).$$

Нотацијата е сугестивна: личи како да го множиме „векторот“ $\vec{\nabla}$ со скаларот G (кога вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ се множи со скаларот λ , се добива $\vec{a}\lambda = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$; нотацијата е избрана за да личи на ова). Да забележиме дека $\vec{\nabla} G$ е точно $\text{grad } G$.

Нека $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ е векторско поле. Имаме два начина како можеме да го „множиме“ „векторот“ $\vec{\nabla}$ со векторот $\vec{F}$. Ако го „множиме“ скаларно добиваме:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

(ова личи на скаларен производ на два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$; т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$). Да забележиме дека $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ е точно $\text{div } \vec{F}$. Друг начин како можеме да го „множиме“ „векторот“ $\vec{\nabla}$ со векторот $\vec{F}$ е векторски, и тогаш:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \frac{\partial F_3}{\partial y} + \vec{j} \frac{\partial F_1}{\partial z} + \vec{k} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \vec{k} \frac{\partial F_1}{\partial y} - \vec{j} \frac{\partial F_3}{\partial x} - \vec{i} \frac{\partial F_2}{\partial z}.$$

По средовање (групираме по $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$) добиваме дека $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ е точно $\text{rot } \vec{F}$ (да забележиме дека ова соодветствува на векторски производ на два вектора). На овој начин многу е полесно да се памети формулата за ротор.

Забелешка 3.2.10. Од сега, секогаш ќе ги користиме ознаките $\vec{\nabla}G$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ и $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ за $\text{grad } G$, $\text{div } \vec{F}$ и $\text{rot } \vec{F}$; ова се најчесто применуваните ознаки во литературата.

Забелешка 3.2.11. Кога $G : U \rightarrow \mathbb{R}$ е скаларно поле од две променливи, дефинирано на област $U \subseteq \mathbb{R}^2$, повторно ќе ја користиме ознаката $\vec{\nabla}G$ за градиентот на G .

Пример 3.2.12. Да се пресмета $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}G)$, каде што $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = e^{xy} + x^2z + yz$.

Прво сметаме $\vec{\nabla}G$:

$$\vec{\nabla}G(x, y, z) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right) = (ye^{xy} + 2xz, xe^{xy} + z, x^2 + y).$$

За $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}G)$ добиваме:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}G) = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy} + 2xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy} + z) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y) = y^2e^{xy} + 2z + x^2e^{xy}.$$

Пример 3.2.13. За векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, x^2y, yz)$, да се пресмета $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$.

Роторот на $\vec{F}$ е:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & x^2y & yz \end{vmatrix} = z\vec{i} + xy\vec{j} + 2xy\vec{k} - xz\vec{k} - 0\vec{j} - 0\vec{i} = (z, xy, 2xy - xz),$$

од што следува дека:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & xy & 2xy - xz \end{vmatrix} = 2x\vec{i} + \vec{j} + y\vec{k} - 0\vec{k} - (2y - z)\vec{j} - 0\vec{i} \\ &= (2x, 1 - 2y + z, y). \end{aligned}$$

Пример 3.2.14. Дадени се скаларните полиња $G_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G_1(x, y, z) = e^{xy} + xz$ и $G_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G_2(x, y, z) = x + yz$. Да се пресмета $\vec{\nabla} \times (G_2\vec{\nabla}G_1)$ и $\vec{\nabla} \cdot (G_2\vec{\nabla}G_1)$.

Векторското поле $\vec{\nabla}G_1$ е:

$$\vec{\nabla}G_1 = \left(\frac{\partial G_1}{\partial x}, \frac{\partial G_1}{\partial y}, \frac{\partial G_1}{\partial z} \right) = (ye^{xy} + z, xe^{xy}, x),$$

од што следува дека:

$$G_2\vec{\nabla}G_1 = (x + yz)(ye^{xy} + z, xe^{xy}, x) = (xye^{xy} + y^2ze^{xy} + xz + yz^2, x^2e^{xy} + xyze^{xy}, x^2 + xyz).$$

За $\vec{\nabla} \times (G_2 \vec{\nabla} G_1)$ добиваме:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (G_2 \vec{\nabla} G_1) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy e^{xy} + y^2 z e^{xy} + xz + yz^2 & x^2 e^{xy} + xyz e^{xy} & x^2 + xyz \end{vmatrix} \\ &= xz \vec{i} + (y^2 e^{xy} + x + 2yz) \vec{j} + (2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} + yz e^{xy} + xy^2 z e^{xy}) \vec{k} \\ &\quad - (x e^{xy} + x^2 y e^{xy} + 2yz e^{xy} + xy^2 z e^{xy} + z^2) \vec{k} - (2x + yz) \vec{j} - xy e^{xy} \vec{i} \\ &= (xz - xy e^{xy}, y^2 e^{xy} - x + yz, x e^{xy} - yz e^{xy} - z^2), \end{aligned}$$

додека за $\vec{\nabla} \cdot (G_2 \vec{\nabla} G_1)$ имаме:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (G_2 \vec{\nabla} G_1) &= \frac{\partial}{\partial x} (xy e^{xy} + y^2 z e^{xy} + xz + yz^2) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 e^{xy} + xyz e^{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + xyz) \\ &= y e^{xy} + xy^2 e^{xy} + y^3 z e^{xy} + z + x^3 e^{xy} + xz e^{xy} + x^2 yz e^{xy} + xy. \end{aligned}$$

Пример 3.2.15. Дадено е скаларното поле $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = xy \sin z$ и векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xy, z, y)$. Да се пресмета $\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G)$.

Векторското поле $\vec{\nabla} G$ е:

$$\vec{\nabla} G = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right) = (y \sin z, x \sin z, xy \cos z),$$

од што следува дека:

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G = (xy, z, y) \cdot (y \sin z, x \sin z, xy \cos z) = (xy^2 + xz) \sin z + xy^2 \cos z.$$

Добиваме:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G), \frac{\partial}{\partial y}(\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G), \frac{\partial}{\partial z}(\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G) \right) \\ &= ((y^2 + z) \sin z + y^2 \cos z, 2xy(\sin z + \cos z), (x - xy^2) \sin z + (xy^2 + xz) \cos z). \end{aligned}$$

Следните два факта се исклучително битни; го охрабруваме читателот да провери дека се навистина точни.

Теорема 3.2.16.

- (а) За кое било скаларно поле G од три променливи, $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} G) = \vec{0}$.
- (б) За кое било векторско поле $\vec{F}$ од три променливи, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$.

3.3. Конзервативни полиња

Често, силовите полиња што се појавуваат во природата се градиенти на скаларни полиња.

Дефиниција 3.3.1. Векторското поле $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, дефинирано на област $U \subseteq \mathbb{R}^3$, се вика **конзервативно** ако постои скаларно поле $G : U \rightarrow \mathbb{R}$, такво што $\vec{F} = \vec{\nabla}G$. Во оваа ситуација, G се вика **скаларен потенцијал** (или кратко, **потенцијал**) за $\vec{F}$.

Од теоремата 3.2.16 (а) следува дека:

$$\text{ако } \vec{F} \text{ е конзервативно, тогаш неговиот ротор е } \vec{0}. \quad (3.3.1)$$

Навистина, ако $\vec{F} = \vec{\nabla}G$ тогаш:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}G) = (0, 0, 0).$$

Од ова следува дека не секое векторско поле е конзервативно; на пример, векторските полиња од примерот 3.2.9 и примерот 3.2.13 не се конзервативни, затоа што нивните ротори не се секогаш еднакви на $\vec{0}$.

Електростатското поле (3.1.5) е конзервативно. Неговиот потенцијал е $-\Phi_E$, каде што

$$\Phi_E : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_0, y_0, z_0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_E(x, y, z) = \frac{k_e q_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}; \quad (3.3.2)$$

Φ_E уште се вика електростатски потенцијал или Кулонов потенцијал.

Задача 3.3.1. Провери дека $\vec{E} = \vec{\nabla}(-\Phi_E) = -\vec{\nabla}\Phi_E$.

Електростатското поле (3.1.7) генерирано од полнежите $q_1, q_2, \dots, q_n$, исто така, е конзервативно. Неговиот потенцијал е $-\Phi_E$, каде што $\Phi_E = \Phi_{E;q_1} + \Phi_{E;q_2} + \dots + \Phi_{E;q_n}$ и $\Phi_{E;q_1}, \Phi_{E;q_2}, \dots, \Phi_{E;q_n}$ се електростатските потенцијали на полнежите $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Слично, гравитационото поле (3.1.8) генерирано од материјалната точка со маса m_0 и координати (x_0, y_0, z_0) е конзервативно. Неговиот потенцијал е $-\Phi_G$, т. е. $\vec{\Gamma} = \vec{\nabla}(-\Phi_G)$, каде

$$\Phi_G : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_0, y_0, z_0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_G(x, y, z) = \frac{-G_N m_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}; \quad (3.3.3)$$

Φ_G се вика гравитационен потенцијал.

Задача 3.3.2. Провери дека $\vec{\Gamma} = \vec{\nabla}(-\Phi_G) = -\vec{\nabla}\Phi_G$.

Исто така, гравитационото поле (3.1.10) генерирано од материјалните точки со маси $m_1, m_2, \dots, m_n$ е конзервативно. Неговиот потенцијал е $-\Phi_G$, каде $\Phi_G = \Phi_{G;m_1} + \Phi_{G;m_2} + \dots + \Phi_{G;m_n}$ и $\Phi_{G;m_1}, \Phi_{G;m_2}, \dots, \Phi_{G;m_n}$ се гравитационите потенцијали на масите $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Интересно прашање е дали обратното тврдење на (3.3.1) е точно, т. е.

$$\text{дали од } \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \text{ следува дека } \vec{F} \text{ е конзервативно?} \quad (3.3.4)$$

Ова прашање воопшто не е тривијално. Одговорот зависи од геометријата на областа U каде што е дефинирано $\vec{F}$. Ако U нема дупки, тогаш одговорот е да, но во општа ситуација (3.3.4) не мора да важи. Подетално ќе го разгледаме овој проблем на крајот од последната глава.

На сличен начин се дефинира и конзервативноста на поле во две димензии: Векторското поле $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, дефинирано на област $U \subseteq \mathbb{R}^2$, се вика **конзервативно** ако постои скаларното поле $G : U \rightarrow \mathbb{R}$, такво што $\vec{F} = \vec{\nabla} G$. Во оваа ситуација, G се вика **скаларен потенцијал** (или кратко, **потенцијал**) за $\vec{F}$.

Бидејќи не дефиниравме ротор за дводимензионално поле, во овој случај (3.3.1) нема смисла!

3.4. Нерешени задачи

Задача 3.4.1. Да се пресмета градиентот на скаларното поле G дадено со:

- (а) $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y) = xy + xe^{x+y}$;
- (б) $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = xz + x \sin(yz)$;
- (в) $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = xye^{xyz}$;
- (г) $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{z}{x}$.

Задача 3.4.2. Да се пресмета дивергенцијата на векторското поле $\vec{F}$ дадено со:

- (а) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (e^{xy}, x^2 + y^2)$;
- (б) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, x^2 + y, x^2 + z)$;
- (в) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (\sin(xy), \cos(xz), yz)$;
- (г) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, z \cos(xy) \right)$.

Задача 3.4.3. Да се пресмета роторот на векторското поле $\vec{F}$ дадено со:

- (а) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x - y, x^2 - z^2, y^2 + xz)$;
- (б) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (e^{xy}, xze^y, ye^{x+z})$;
- (в) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x \sin(yz), y \sin z, x \cos(yz))$;
- (г) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (yz \sin x, xz \cos y, xy)$.

Задача 3.4.4. Да се пресмета $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} G)$ за скаларното поле $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + e^{xyz}$.

Задача 3.4.5. Да се пресмета $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} G)$ за:

$$G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x, y, z) = e^{xy} \sin z + x^2 - y^2 + z.$$

Задача 3.4.6. Да се пресмета $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$ за векторското поле

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (\sin(x + y), \cos(xz), z).$$

Задача 3.4.7. Да се пресмета $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$ за векторското поле

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (e^x, \sin(yz)e^{xy}, x + y).$$

Задача 3.4.8. Дадени се скаларните полиња $G_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G_1(x, y, z) = 1 + x^2 + y + z$, и $G_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G_2(x, y, z) = \sin(xy + z)$. Да се пресмета:

$$\vec{\nabla} \times (G_2 \vec{\nabla} G_1) \text{ и } \vec{\nabla} \cdot (G_2 \vec{\nabla} G_1).$$

Глава 4.

Линиски интеграли

4.1. Линиски интеграли од скаларни полиња

Нека C е крива во $\mathbb{R}^3$ и G скаларно поле дефинирано во околина на кривата C . Целта е да дефинираме интеграл на полето G по кривата C , т. е.

$$\int_C G(x, y, z) d\sigma. \quad (4.1.1)$$

Како и интегралот на функции од една променлива, (4.1.1) е граница на интегрални суми. Нека $A_0, A_1, \dots, A_n$ се делбени точки на кривата C , каде што A_0 и A_n се почетната и крајната точка на C (види ја сликата 2.2.1) и нека $\Delta\sigma_j$ е должината на отсечката $[A_j, A_{j+1}]$ (т. е. $\Delta\sigma_j = \overline{A_j A_{j+1}}$). На секој лак $\widehat{A_j A_{j+1}}$ од C избираме по една произволна точка $A'_j \in \widehat{A_j A_{j+1}}$ и ја формираме интегралната сума:

$$\sum_{j=0}^{n-1} G(A'_j) \Delta\sigma_j = G(A'_0) \overline{A_0 A_1} + G(A'_1) \overline{A_1 A_2} + \dots + G(A'_{n-1}) \overline{A_{n-1} A_n}; \quad (4.1.2)$$

интегралот (4.1.1) е лимесот кога бројот на делбени точки, n , тежи кон бесконечност и должината на отсечките $[A_j, A_{j+1}]$ тежи кон 0. Во практика, ова е тотално непрагматично за употреба. За да најдеме поедноставен начин за пресметка на (4.1.1), нека $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ е параметризација на C и нека $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ е поделба на интервалот $[a, b]$. Точките $A_j := \vec{r}(t_j)$, $j = 0, \dots, n$, се поделба на кривата C и должината на отсечката $[A_j, A_{j+1}]$ е еднаква на должината на векторот $\vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)$, т. е. $\overline{A_j A_{j+1}} = |\vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)|$. На секој интервал $[t_j, t_{j+1}]$ избираме по една точка $t'_j \in [t_j, t_{j+1}]$. Интегралната сума (4.1.2) (со $A'_j := \vec{r}(t'_j)$) го добива обликот:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} G(\vec{r}(t'_j)) |\vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)| &= G(\vec{r}(t'_0)) |\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)| \\ &+ G(\vec{r}(t'_1)) |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)| + \dots + G(\vec{r}(t'_{n-1})) |\vec{r}(t_n) - \vec{r}(t_{n-1})|. \end{aligned}$$

Ја употребуваме истата идеја како и во (2.2.4):

$$|\vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)| \approx |\vec{r}'(t_j)|(t_{j+1} - t_j) \approx |\vec{r}'(t'_j)|(t_{j+1} - t_j);$$

во втората апроксимација употребивме дека $|\vec{r}(t_j)| \approx |\vec{r}(t'_j)|$, кога t_j е блиска до t_{j+1} . Апроксимациите стануваат сè подобри кога бројот на делбени точки расте и разликата $t_{j+1} - t_j$ станува сè помала. Добиваме:

$$\sum_{j=0}^{n-1} G(\vec{r}(t'_j)) |\vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)| \approx \sum_{j=0}^{n-1} G(\vec{r}(t'_j)) |\vec{r}(t'_j)| (t_{j+1} - t_j).$$

Десната страна е интегрална сума за функцијата од една променлива

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto G(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)|,$$

и кога $n \rightarrow \infty$, таа тежи кон интегралот на оваа функција на $[a, b]$; се разбира, левата страна тежи кон (4.1.1) (така го дефиниравме линискиот интеграл). Го добивме следниот резултат.

Теорема 4.1.1. Нека C е крива во $\mathbb{R}^3$ и G скаларно поле дефинирано во околина на кривата C . Нека $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ е параметризација на C . Тогаш,

$$\int_C G(x, y, z) d\sigma = \int_a^b G(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt. \quad (4.1.3)$$

Забелешка 4.1.2. Нагласуваме дека (4.1.3) важи без разлика која параметризација сме ја избрале за кривата C . Заради тоа, во практика можеме да ја избереме таа параметризација која најмногу ни одговара.

Забелешка 4.1.3. Ако кривата C е рамнинска, т. е. $C \subseteq \mathbb{R}^2$, и полето G е од две променливи, линискиот интеграл на G по C се дефинира на ист начин и формулата (4.1.3) важи и во оваа ситуација.

Кога полето G е еднакво на 1 на кривата C , теоремата 2.2.5 имплицира:

$$\int_C d\sigma = \text{должина на } C.$$

Линиските интеграли ги имаат следните својства (кои нема да ги докажеме).

Теорема 4.1.4.

- (а) Ако G_1 и G_2 се скаларни полиња дефинирани во околина на кривата C и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, тогаш:

$$\int_C (\lambda G_1(x, y, z) + \mu G_2(x, y, z)) d\sigma = \lambda \int_C G_1(x, y, z) d\sigma + \mu \int_C G_2(x, y, z) d\sigma.$$

- (б) Нека G е скаларно поле дефинирано во околина на C . Ако C е составена од кривите $C_1, C_2, \dots, C_k$, така што крајот на едната се соопваѓа со почетокот на наредната, тогаш:

$$\int_C G(x, y, z) d\sigma = \int_{C_1} G(x, y, z) d\sigma + \int_{C_2} G(x, y, z) d\sigma + \dots + \int_{C_k} G(x, y, z) d\sigma.$$

Пример 4.1.5. Дадено е скаларното поле $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y) = xy$. Нека C е делот од елипсата со центар во координатниот почеток и полуоски $\sqrt{2}$ и 1, соодветно по x и y , што се наоѓа во прв квадрант. Да се пресмета:

$$\int_C G(x, y) d\sigma.$$

Кривата C ја параметризираме со:

$$\vec{r} : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sin t).$$

Векторот на брзина и брзината се:

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-\sqrt{2} \sin t, \cos t), \quad |\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{2 \sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t + 1}.$$

За интегралот добиваме:

$$\int_C G(x, y) d\sigma = \int_0^{\pi/2} G(\vec{r}(t)) |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \sqrt{\sin^2 t + 1} dt.$$

Во последниот интеграл ставаме смена $q = \sin t$, $dq = \cos t dt$:

$$\int_C G(x, y) d\sigma = \sqrt{2} \int_0^1 q \sqrt{q^2 + 1} dq.$$

Ставаме смена $p = q^2 + 1$, $dp = 2q dq$ и добиваме:

$$\int_C G(x, y) d\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^2 \sqrt{p} dp = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{p^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

Пример 4.1.6. Дадено е скаларното поле $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = xy + z$. Нека кривата C се состои од следниве два дела:

- (1) делот од кружницата со центар во $O(0, 0, 0)$ во xOy -рамнината од точката $A(3, 0, 0)$ до точката $B(0, 3, 0)$, каде што важи $x \geq 0$;
- (2) отсечката $[BD]$ каде $B(0, 3, 0)$ и $D(1, 0, 1)$.

Да го пресметаме линискиот интеграл на G по кривата C .

Кривата C се состои од два дела C_1 и C_2 , каде што C_1 е делот (1) и C_2 е делот (2) (види ја сликата 4.1.1 (а)). Го поделиме интегралот на два дела:

$$\int_C G(x, y, z) d\sigma = \int_{C_1} G(x, y, z) d\sigma + \int_{C_2} G(x, y, z) d\sigma. \quad (4.1.4)$$

За да го пресметаме првиот интеграл ја параметризираме C_1 на следниов начин:

$$\vec{r}_1 : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}_1(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 0).$$

Векторот на брзина и брзината се:

$$\vec{r}_1'(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t, 0), \quad |\vec{r}_1'(t)| = \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t + 0} = 3.$$

Првиот интеграл е:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} G(x, y, z) d\sigma &= \int_0^{\pi/2} G(\vec{r}_1(t)) |\vec{r}_1'(t)| dt = \int_0^{\pi/2} (3 \cos t \cdot 3 \sin t + 0) \cdot 3 dt \\ &= 27 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt. \end{aligned}$$

Во последниот интеграл ставаме смена $q = \sin t$, $dq = \cos t dt$, и добиваме:

$$\int_{C_1} G(x, y, z) d\sigma = 27 \int_0^1 q dq = 27 \cdot \frac{q^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{27}{2}.$$

За да го пресметаме вториот интеграл, ја параметризираме C_2 на следниот начин. Добиваме дека $\overrightarrow{BD} = (1, -3, 1)$ и правата што минува низ B и D е:

$$\begin{cases} x = 1 \cdot t + 0 \\ y = -3t + 3 \\ z = 1 \cdot t + 0. \end{cases}$$

Отсечката $[BD]$ е параметризирана со:

$$\vec{r}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}_2(t) = (t, -3t + 3, t);$$

векторот на брзина и брзината се:

$$\vec{r}_2'(t) = (1, -3, 1), \quad |\vec{r}_2'(t)| = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11}.$$

За вториот интеграл добиваме:

$$\begin{aligned} \int_{C_2} G(x, y, z) d\sigma &= \int_0^1 G(\vec{r}_2(t)) |\vec{r}_2'(t)| dt = \int_0^1 (t(-3t + 3) + t) \cdot \sqrt{11} dt \\ &= \sqrt{11} \int_0^1 (-3t^2 + 4t) dt = -3\sqrt{11} \int_0^1 t^2 dt + 4\sqrt{11} \int_0^1 t dt \\ &= -\sqrt{11} + 2\sqrt{11} = \sqrt{11}. \end{aligned}$$

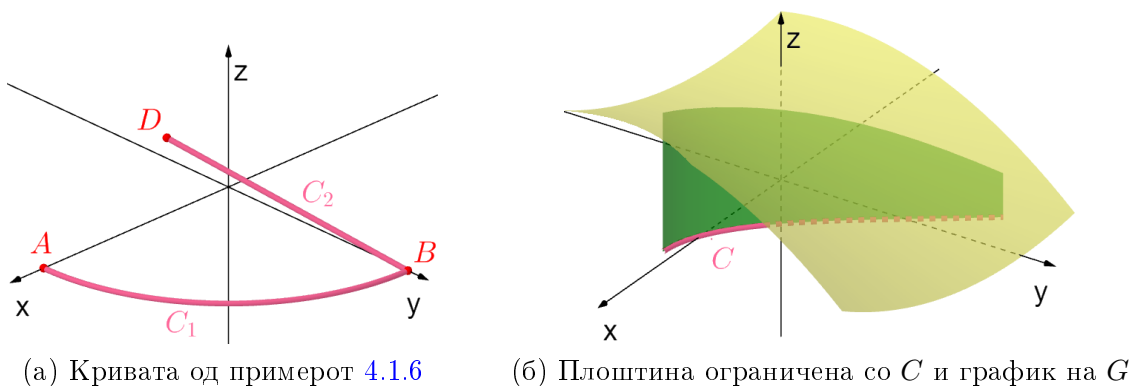
Со замена во (4.1.4), добиваме:

$$\int_C G(x, y, z) d\sigma = \frac{27}{2} + \sqrt{11}.$$

Пред да разгледаме уште неколку примери, ќе го коментираме геометриското и физичкото толкување на линискиот интеграл од скаларно поле.

Нека $C \subseteq \mathbb{R}^2$ е рамнинска крива и нека G е скаларно поле од две променливи. Линискиот интеграл $\int_C G(x, y) d\sigma$ е плоштината ограничена со кривата C и графикот на G (види ја сликата 4.1.1 (б)). Исто како и интегралите од функции од една променлива, и во оваа ситуација плоштината што се наоѓа под xOy -рамнината добива негативен знак, додека таа што се наоѓа над xOy -рамнината има позитивен знак.

Слика 4.1.1:



Пример 4.1.7. Да се пресмета плоштината на цилиндричната ограда со основа

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

која од долу е ограничена со $z = 0$, а од горе со $z = 3 - y$.

Ако ставиме $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y) = 3 - y$, тогаш бараната плоштина е:

$$\int_C G(x, y) d\sigma,$$

каде C е кружницата $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ во xOy -рамнината (тоа е основата на цилиндарот). Да забележиме дека $G(x, y) = 3 - y \geq 0$ на C (увери се во ова!). Кружницата C ја параметризираме со $\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t)$ (види (2.3.2)). Бидејќи $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$, $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$, добиваме:

$$\int_C G(x, y) d\sigma = \int_0^{2\pi} (3 - \sin t) dt = 3 \int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi} \sin t dt = 6\pi - (-\cos t) \Big|_0^{2\pi} = 6\pi.$$

Типичното физичко толкување на линиските интеграли од скаларни полиња е следното. Нека е дадена жица со занемарлива дебелина во облик на кривата C и нека $\rho(x, y, z)$ е нејзината линиска густина во точката (x, y, z) (димензиите на $\rho(x, y, z)$ се [маса]/[должина]). Тогаш,

$$\text{масата на жицата } m = \int_C \rho(x, y, z) d\sigma. \quad (4.1.5)$$

За да се увериме во ова, ја делиме жицата со точки $A_0, A_1, \dots, A_n$. Го апроксимираме лакот помеѓу A_j и A_{j+1} со отсечка $[A_j A_{j+1}]$. Кога бројот на делбени точки е голем и тие се блиску една до друга, густината нема да се променува значително помеѓу A_j и A_{j+1} и можеме да ја третираме како да е константна, т. е. еднаква на $\rho(A'_j)$, каде што A'_j е која било точка на лакот $\widehat{A_j A_{j+1}}$. Заради ова, $\rho(A'_j) \widehat{A_j A_{j+1}}$ е добра

апроксимација за масата на лакот помеѓу A_j и A_{j+1} . Значи, (4.1.2) (со $\rho(x, y, z)$ на местото од $G(x, y, z)$) е апроксимација за масата на жицата која станува сè подобра кога бројот n на делбени точки станува сè поголем. Кога $n \rightarrow \infty$, (4.1.2) тежи кон масата на жицата и истовремено тежи кон линискиот интеграл на ρ ; од ова ја добиваме точноста на (4.1.5). Со помош на линискиот интеграл можеме да го определиме и центарот на маса (тежиштето) на жицата: тоа е точката $A^*(x^*, y^*, z^*)$ чиешто координати се дадени со:

$$x^* = \frac{1}{m} \int_C x \rho(x, y, z) d\sigma, \quad y^* = \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y, z) d\sigma, \quad z^* = \frac{1}{m} \int_C z \rho(x, y, z) d\sigma. \quad (4.1.6)$$

Пример 4.1.8. Дадена е танка жица во облик на спиралата:

$$\vec{r} : [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t),$$

со линиска густина $\rho(x, y, z) = z$. Да се пресмета масата и тежиштето на жицата.

Жицата го има обликот како на сликата 2.3.5 (а); таа почнува во точката $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)$ и завршува во точката $\vec{r}(6\pi) = (1, 0, 6\pi)$ и прави три полни вртења околу z -оската. Векторот на брзина и брзината на $\vec{r}$ се:

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \quad |\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

Масата на жицата е:

$$m = \int_C \rho(x, y, z) d\sigma = \int_0^{6\pi} t \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^{6\pi} = 18\pi^2 \sqrt{2}.$$

Тежиштето е точката со координати (x^*, y^*, z^*) дадени со (4.1.6).

$$x^* = \frac{1}{m} \int_C x \rho(x, y, z) d\sigma = \frac{1}{18\pi^2 \sqrt{2}} \int_0^{6\pi} \cos t \cdot t \cdot \sqrt{2} dt = \frac{1}{18\pi^2} \int_0^{6\pi} t \cos t dt.$$

Употребуваме парцијална интеграција со $u = t$, $dv = \cos t dt$, $du = dt$, $v = \sin t$, и добиваме:

$$x^* = \frac{1}{18\pi^2} \left(t \sin t \Big|_0^{6\pi} - \int_0^{6\pi} \sin t dt \right) = \frac{1}{18\pi^2} \left(0 + \cos t \Big|_0^{6\pi} \right) = 0.$$

Слично,

$$y^* = \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y, z) d\sigma = \frac{1}{18\pi^2 \sqrt{2}} \int_0^{6\pi} \sin t \cdot t \cdot \sqrt{2} dt = \frac{1}{18\pi^2} \int_0^{6\pi} t \sin t dt.$$

Повторно, употребуваме парцијална интеграција со $u = t$, $dv = \sin t dt$, $du = dt$, $v = -\cos t$, и добиваме:

$$y^* = \frac{1}{18\pi^2} \left(-t \cos t \Big|_0^{6\pi} + \int_0^{6\pi} \cos t dt \right) = \frac{1}{18\pi^2} \left(-6\pi + \sin t \Big|_0^{6\pi} \right) = -\frac{1}{3\pi}.$$

Останува да ја определиме z^* :

$$z^* = \frac{1}{m} \int_C z \rho(x, y, z) d\sigma = \frac{1}{18\pi^2 \sqrt{2}} \int_0^{6\pi} t^2 \sqrt{2} dt = \frac{1}{18\pi^2} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_0^{6\pi} = 4\pi.$$

Значи, тежиштето е точката $(0, -1/(3\pi), 4\pi)$.

Кратко ќе го коментираме резултатот. Фактот дека линиската густина е $\rho(x, y, z) = z$, кажува дека жицата станува помасивна како што се зголемува z -координатата. Заради тоа z -координатата на тежиштето е поблиска до крајната точка; оставаме на читателот да размисли зошто y -координатата е негативна, т. е. зошто тежиштето е поместено во лево.

Пример 4.1.9. Дадено е скаларното поле $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = x^2 y^2 z$. Нека кривата C е пресекот на површините $z = 2 - x^2 - y^2$ и $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Да се пресмета:

$$\int_C G(x, y, z) d\sigma.$$

Да ја определиме кривата C (види ја сликата 2.3.10 (а)). Од равенките на површините добиваме: $z = 2 - z^2$. Од што следува дека: $z^2 + z - 2 = 0$. Решенијата се: $z = 1$ и $z = -2$. Јасно, z не може да е -2 затоа што двете површини се наоѓаат над xOy -рамнината. Значи, $z = 1$. Ако замениме во која било од површините, добиваме: $x^2 + y^2 = 1$. Ја параметризираме C со:

$$\vec{r}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1).$$

Векторот на брзина и брзината се:

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0), \quad |\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 0} = 1.$$

За интегралот добиваме:

$$\int_C G(x, y, z) d\sigma = \int_0^{2\pi} G(\vec{r}(t)) |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt.$$

Бидејќи

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}, \quad (4.1.7)$$

добиваме:

$$\begin{aligned} \int_C G(x, y, z) d\sigma &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)(1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 2t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 2t dt. \end{aligned}$$

Јасно, $\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$. За да го пресметаме вториот интеграл, уште еднаш ја применуваме формулата:

$$\cos^2 2t = \frac{1 + \cos 4t}{2}$$

и добиваме:

$$\int_C G(x, y, z) d\sigma = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 4t) dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \cos 4t dt.$$

Во последниот интеграл ставаме смена $q = 4t$, $dq = 4dt$, од што следува:

$$\int_C G(x, y, z) d\sigma = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{32} \int_0^{8\pi} \cos q dq = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{32} \sin q \Big|_0^{8\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 4.1.10. Дадено е скаларното поле $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = xy$. Да се пресмета:

$$\int_C G(x, y, z) d\sigma,$$

каде што кривата C е дадена со $\vec{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$.

Кривата C изгледа како на сликата 2.3.7 (а). Брзината на $\vec{r}$ веќе ја пресметавме во примерот 2.3.2; таа е дадена со (види (2.3.21)):

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cosh t.$$

За бараниот интеграл имаме:

$$\int_C G(x, y, z) d\sigma = \sqrt{2} \int_0^1 \cosh t \sinh t \cosh t dt = \sqrt{2} \int_0^1 \cosh^2 t \sinh t dt. \quad (4.1.8)$$

Последниот интеграл може да се реши ако $\cosh t$ и $\sinh t$ се изразат преку формулите (2.3.10); по множење се добиваат интегрални од експоненцијални функции кои лесно можат да се пресметаат. Ние ќе ја дадеме следнава поедноставна евалуација на (4.1.8). Воведуваме смена $q = \cosh t$, $dq = \sinh t dt$, (заради (2.3.12)) и добиваме:

$$\int_C G(x, y, z) d\sigma = \sqrt{2} \int_1^{\cosh 1} q^2 dq = \sqrt{2} \cdot \frac{q^3}{3} \Big|_1^{\cosh 1} = \frac{\sqrt{2} \cosh^3 1 - \sqrt{2}}{3}.$$

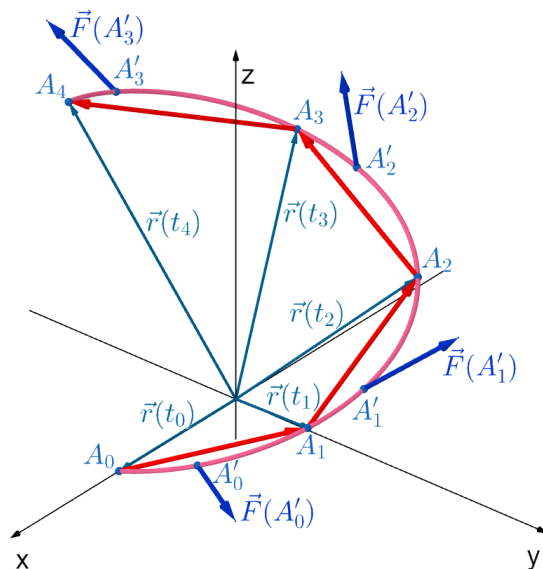
4.2. Линиски интеграл од векторски полиња

Нека C е ориентирана крива во $\mathbb{R}^3$, тоа значи дека кривата има почетна и крајна точка и насока на движење од почетната кон крајната точка. Нека $\vec{F}$ е векторско поле дефинирано во околина на кривата C . Целта е да го дефинираме линискиот интеграл на $\vec{F}$ по кривата C , со ознака:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}. \quad (4.2.1)$$

Интегралот (4.2.1) го има следното битно физичко толкување. Нека $\vec{F}$ е силово поле (на пример, електростатско, гравитационо,...) кое дејствува на тело што се движи по траекторија C . Тогаш (4.2.1) ја дава работата што ја извршува силовото поле $\vec{F}$ на телото.

Слика 4.2.1: Векторите во интегралната сума (4.2.3)



Пред да го дефинираме интегралот (4.2.1), ќе се потсетиме како се пресметува работата кога силата $\vec{F}$ е константна и телото се движи праволиниски од точка A до точка B . Ако константната сила $\vec{F}$ зафаќа агол θ со насоката на движење $\overrightarrow{AB}$ тогаш

$$\text{извршената работа} = (|\vec{F}| \cos \theta) \overrightarrow{AB} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}; \quad (4.2.2)$$

(второто равенство следува од дефиницијата на скаларниот производ). Ако $0 \leq \theta < \pi/2$, работата е позитивна; кога $\vec{F}$ има исти правец и насока како и $\overrightarrow{AB}$ (т. е. $\theta = 0$), работата ја добива познатата формула $|\vec{F}| \overrightarrow{AB}$. Ако $\pi/2 < \theta \leq \pi$, работата е негативна (на пример кога силата е во спротивна насока од движењето) и кога $\theta = \pi/2$ работата е 0 (нормална сила не извршува работа).

Забелешка 4.2.1. Да го разложиме $\vec{F}$ на два вектора, т. е. $\vec{F} = \vec{F}_P + \vec{F}_N$, каде што $\vec{F}_P$ е паралелен, а $\vec{F}_N$ е нормален вектор на векторот $\overrightarrow{AB}$. Тогаш, од (4.2.2) се добива дека извршената работа е $\vec{F}_P \cdot \overrightarrow{AB}$; односно, нормалната сила не извршува работа.

Се враќаме на дефиницијата на интегралот (4.2.1). Нека $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ е векторско поле дефинирано во околината на ориентираната крива $C \subseteq \mathbb{R}^3$ со почетна точка A и крајна точка B . Ја делиме C со точките $A_0, A_1, \dots, A_n$, каде што $A_0 = A$ и $A_n = B$ (види ја сликата 4.2.1) и нека $\Delta \vec{\sigma}_j = \overrightarrow{A_j A_{j+1}}$. На секој лак $\widehat{A_j A_{j+1}}$ од C избираме по една произволна точка $A'_j \in \widehat{A_j A_{j+1}}$ и ја формираме интегралната сума:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \vec{F}(A'_j) \cdot \Delta \vec{\sigma}_j = \vec{F}(A'_0) \cdot \overrightarrow{A_0 A_1} + \vec{F}(A'_1) \cdot \overrightarrow{A_1 A_2} + \dots + \vec{F}(A'_{n-1}) \cdot \overrightarrow{A_{n-1} A_n}; \quad (4.2.3)$$

интегралот (4.2.1) е лимесот кога бројот n на делбени точки тежи кон бесконечност и должината на отсечките $[A_j A_{j+1}]$ тежи кон 0. За да видиме дека (4.2.1) ја дава извршената работа, нека $\vec{F}$ е силово поле. Кога бројот на делбени точки, n , е голем

и тие се блиски една до друга, лакот помеѓу A_j и A_{j+1} можеме да го апроксимираме со отсечката $[A_j A_{j+1}]$. Исто така, силата $\vec{F}$ незначително ќе варира помеѓу A_j и A_{j+1} , па затоа можеме да ја третираме како константна, т. е. еднаква на $\vec{F}(A'_j)$, каде што A'_j е произволна точка од лакот $\widehat{A_j A_{j+1}}$. Заради ова, имајќи ја предвид формулата (4.2.2), $\vec{F}(A'_j) \cdot \Delta \vec{\sigma}_j$ е добра апроксимација за извршената работа на лакот помеѓу A_j и A_{j+1} . Од ова следува дека (4.2.3) е апроксимација за вкупната работа извршена на траекторијата C и оваа апроксимација е сè подобра кога бројот n на делбени точки станува сè поголем. Кога $n \rightarrow \infty$, (4.2.3) тежи кон вкупната извршена работа, па добиваме:

$$\text{извршената работа} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}. \quad (4.2.4)$$

Забелешка 4.2.2. Од дефиницијата на (4.2.1) следува дека ако се промени ориентацијата на кривата C , тогаш ќе се промени знакот на интегралот (4.2.1). Навистина, ако со $\overleftarrow{C}$ ја означиме кривата C помината во спротивна насока, тогаш интегралните суми за $\int_{\overleftarrow{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$ се исти како (4.2.3), со таа разлика што во оваа ситуација $\Delta \vec{\sigma}_j$ е $\overrightarrow{A_{j+1} A_j}$; од ова следува:

$$\int_{\overleftarrow{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

За да најдеме поедноставен начин за пресметка на (4.2.1), нека $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ е параметризација на C која ја запазува ориентацијата, т. е. $\vec{r}(a) = A$ е почетната точка и $\vec{r}(b) = B$ е крајната точка на C . Нека $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ е поделба на интервалот $[a, b]$. Точките $A_j = \vec{r}(t_j)$, $j = 0, \dots, n$, се поделба на кривата C . На секој интервал $[t_j, t_{j+1}]$ избираме по една произволна точка $t'_j \in [t_j, t_{j+1}]$ и означуваме $A'_j := \vec{r}(t'_j)$. Поради (2.2.3), векторот $\overrightarrow{A_j A_{j+1}} = \vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)$ е близок до векторот $\vec{r}(t_j)(t_{j+1} - t_j)$, кој, од друга страна, е близок до векторот $\vec{r}(t'_j)(t_{j+1} - t_j)$ (бидејќи $\vec{r}(t_j) \approx \vec{r}(t'_j)$ кога точките t_j и t_{j+1} се блиски). Од ова следува:

$$\vec{F}(A'_j) \cdot \overrightarrow{A_j A_{j+1}} = \vec{F}(\vec{r}(t'_j)) \cdot (\vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)) \approx (\vec{F}(\vec{r}(t'_j)) \cdot \vec{r}(t'_j))(t_{j+1} - t_j)$$

и оваа апроксимација станува сè подобра кога бројот на делбени точки расте и разликата $t_{j+1} - t_j$ станува сè помала. Ја добиваме следната апроксимација за (4.2.3):

$$\sum_{j=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}(t'_j)) \cdot (\vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)) \approx \sum_{j=0}^{n-1} (\vec{F}(\vec{r}(t'_j)) \cdot \vec{r}(t'_j))(t_{j+1} - t_j).$$

Десната страна е интегрална сума за функцијата од една променлива:

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t),$$

и таа тежи кон интегралот на оваа функција на $[a, b]$ кога $n \rightarrow \infty$. Го добивме следниот резултат.

Теорема 4.2.3. Нека C е ориентирана крива и $\vec{F}$ векторско поле дефинирано во околина на кривата C . Нека $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ е параметризација на C која ја запазува ориентацијата. Тогаш,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt. \quad (4.2.5)$$

Забелешка 4.2.4. Нагласуваме дека (4.2.5) важи за која било параметризација на кривата C која ја запазува нејзината ориентација. Заради тоа, во практика можеме да ја избереме таа параметризација што најмногу ни одговара.

Забелешка 4.2.5. Ако ориентираната крива C е рамнинска, т. е. $C \subseteq \mathbb{R}^2$, и векторското поле $\vec{F} = (F_1, F_2)$ е од две променливи, линискиот интеграл на $\vec{F}$ по C се дефинира на ист начин и формулата (4.2.5) важи и во оваа ситуација.

Слично како и линиските интеграли од скаларни полиња, и линиските интеграли од векторски полиња ги исполнуваат следните својства (кои нема да ги докажеме).

Теорема 4.2.6.

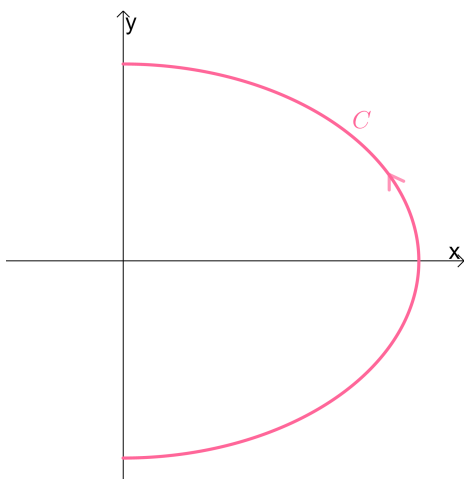
- (а) Ако $\vec{F}$ и $\vec{H}$ се векторски полиња дефинирани во околина на ориентираната крива C и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, тогаш,

$$\int_C (\lambda \vec{F} + \mu \vec{H}) \cdot d\vec{\sigma} = \lambda \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} + \mu \int_C \vec{H} \cdot d\vec{\sigma}.$$

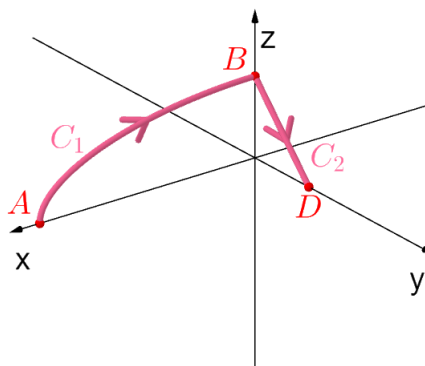
- (б) Нека $\vec{F}$ е векторско поле дефинирано во околина на C . Ако C е составена од ориентираните криви $C_1, C_2, \dots, C_k$, така што крајот на едната се совпаѓа со почетокот на наредната, тогаш:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} + \dots + \int_{C_k} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Слика 4.2.2:



(а) Кривата од примерот 4.2.7



(б) Кривата од примерот 4.2.8

Пример 4.2.7. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (xy, y)$. Кривата C е десната половина од елипсата со центар во $O(0, 0)$ и полуоски 3 и 2 ориентирана во спротивна насока од движењето на стрелките на часовникот. Да се пресмета:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Ја параметризираме C со (види ја сликата 4.2.2 (а))

$$\vec{r} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}(t) = (3 \cos t, 2 \sin t).$$

Да забележиме дека параметризацијата ја запазува насоката на кривата. Векторот на брзина е: $\dot{\vec{r}}(t) = (-3 \sin t, 2 \cos t)$. За интегралот добиваме:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (6 \cos t \sin t, 2 \sin t) \cdot (-3 \sin t, 2 \cos t) dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-18 \cos t \sin^2 t + 4 \sin t \cos t) dt \\ &= -18 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \sin^2 t dt + 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos t dt. \end{aligned}$$

Во двата интеграла ставаме смена $q = \sin t$, $dq = \cos t dt$ и добиваме:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = -18 \int_{-1}^1 q^2 dq + 4 \int_{-1}^1 q dq = -18 \frac{q^3}{3} \Big|_{-1}^1 + 4 \frac{q^2}{2} \Big|_{-1}^1 = -12.$$

Пример 4.2.8. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xy + z, x + z, xz)$. Кривата C е составена од следниве два дела:

- (1) делот од елипсата што поминува низ точките $A(3, 0, 0)$ и $B(0, 0, 1)$ со центар во $O(0, 0, 0)$ и лежи во делот од xOz -рамнината, каде што $x \geq 0$ и $z \geq 0$, со ориентација од A кон B ;
- (2) отсечката $[BD]$, каде што $B(0, 0, 1)$ и $D(0, 1, 0)$, ориентирана од B кон D .

Да се пресмета:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Кривата C се состои од два дела, C_1 и C_2 , каде што C_1 е делот (1) и C_2 е делот (2); види ја сликата 4.2.2 (б). Го делиме интегралот на два дела:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}. \quad (4.2.6)$$

За да го пресметаме првиот интеграл, ја параметризираме C_1 на следниов начин:

$$\vec{r}_1 : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}_1(t) = (3 \cos t, 0, \sin t).$$

Да забележиме дека параметризацијата ја запазува насоката на кривата; таа се движи од A кон B . Векторот на брзина е $\dot{\vec{r}}_1(t) = (-3 \sin t, 0, \cos t)$. За интегралот по C_1 имаме:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^{\pi/2} (3 \cos t \cdot 0 + \sin t, 3 \cos t + \sin t, 3 \cos t \sin t) \cdot (-3 \sin t, 0, \cos t) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-3 \sin^2 t + 3 \cos^2 t \sin t) dt = -3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt + 3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t dt.$$

Во првиот интеграл го применуваме равенството (4.1.7). Во вториот интеграл ставаме смена: $q = \cos t$, $dq = -\sin t dt$. Добиваме:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = -\frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt - 3 \int_1^0 q^2 dq = -\frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} dt + \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2t dt + 3 \int_0^1 q^2 dq.$$

Јасно, $\int_0^1 q^2 dq = 1/3$. Во вториот интеграл ставаме смена: $p = 2t$, $dp = 2dt$ и добиваме:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = -\frac{3\pi}{4} + \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \cos p dp + 1 = -\frac{3\pi}{4} + \frac{3}{4} \sin p \Big|_0^{\pi} + 1 = 1 - \frac{3\pi}{4}.$$

За да го пресметаме вториот интеграл во (4.2.6), ја параметризираме кривата C_2 . Го пресметуваме векторот $\vec{BD} = (0, 1, -1)$. Правата што поминува низ B и D е:

$$\begin{cases} x = 0 \cdot t + 0 \\ y = 1 \cdot t + 0 \\ z = (-1) \cdot t + 1. \end{cases}$$

Ја параметризираме $[BD]$ со $\vec{r}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}_2(t) = (0, t, -t + 1)$. Да забележиме дека параметризацијата ја запазува ориентацијата на кривата. Векторот на брзина е: $\dot{\vec{r}}_2(t) = (0, 1, -1)$. За интегралот по C_2 имаме:

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}_2(t)) \cdot \dot{\vec{r}}_2(t) dt = \int_0^1 (0 \cdot t - t + 1, 0 - t + 1, 0 \cdot (-t + 1)) \cdot (0, 1, -1) dt \\ &= \int_0^1 (1 - t) dt = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Заменуваме во (4.2.6) и добиваме:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 1 - \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3\pi}{4}.$$

Пример 4.2.9. Електричен полнеж од q_0 кулони е фиксиран во координатниот почеток. Да се пресмета работата што ја извршува електростатската сила на полнеж од q кулони којшто се движи по спиралата C дадена со:

$$\vec{r}(t) : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (\cos 3t, \sin 3t, 2t), \quad (4.2.7)$$

со почетна точка $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)$ и крајна точка $\vec{r}(4\pi) = (1, 0, 8\pi)$.

Електростатското поле генерирано од q_0 е дадено со (види (3.1.5)):

$$\vec{E} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{E}(x, y, z) = k_e q_0 \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

и електростатската сила со која q_0 дејствува на q е $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = q\vec{E}(x, y, z)$. Добиваме:

$$\text{извршената работа} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = q \int_C \vec{E} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Векторот на брзина на $\vec{r}$ е $\dot{\vec{r}}(t) = (-3 \sin 3t, 3 \cos 3t, 2)$. За работата имаме:

$$\begin{aligned} \text{извршената работа} &= q \int_0^{4\pi} \vec{E}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt \\ &= k_e q q_0 \int_0^{4\pi} \frac{(\cos 3t, \sin 3t, 2t)}{(\cos^2 3t + \sin^2 3t + 4t^2)^{3/2}} \cdot (-3 \sin 3t, 3 \cos 3t, 2) dt \\ &= k_e q q_0 \int_0^{4\pi} \frac{-3 \cos 3t \sin 3t + 3 \sin 3t \cos 3t + 4t}{(1 + 4t^2)^{3/2}} dt \\ &= 4k_e q q_0 \int_0^{4\pi} \frac{t dt}{(1 + 4t^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Воведуваме смена $p = 1 + 4t^2$, $dp = 8t dt$ и добиваме:

$$\begin{aligned} \text{извршената работа} &= \frac{k_e q q_0}{2} \int_1^{1+64\pi^2} \frac{dp}{p^{3/2}} = \frac{k_e q q_0}{2} \frac{p^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \Big|_1^{1+64\pi^2} \\ &= k_e q q_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 64\pi^2}} \right). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Забелешка 4.2.10. Ако Φ_E е електростатскиот потенцијал за $\vec{E}$ (види (3.3.2)), тогаш (4.2.8) е точно разликата од потенцијалот во почетната и крајната точка помножена со полнежот q , т. е.

$$\text{извршената работа} = q(\Phi_E(\vec{r}(0)) - \Phi_E(\vec{r}(4\pi))).$$

Интересно е дека извршената работа е иста и кога полнежот q се движи по друга траекторија која ја има истата почетна и крајна точка како и C . Во наредниот дел ќе видиме зошто ова е навистина точно; во суштина, ова својство го имаат сите конзервативни полиња.

Забелешка 4.2.11. Го охрабруваме читателот да го реши истиот проблем како во примерот 4.2.9, кога наместо полнежи имаме материјална точка со маса m_0 фиксирана во координатниот почеток и материјална точка со маса m која се движи по спиралата (4.2.7). Се разбира, сега треба да се определи работата што ја извршува гравитационата сила по траекторијата на масата m . Резултатот е:

$$\text{извршената работа} = G_N m m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 64\pi^2}} - 1 \right) = m(\Phi_G(\vec{r}(0)) - \Phi_G(\vec{r}(4\pi))),$$

каде што Φ_G е гравитациониот потенцијал генериран од m_0 (види (3.3.3)).

Пример 4.2.12. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xz, -yz, 1)$. Кривата C е пресек на делот од хиперболичниот цилиндар:

$$x^2 - y^2 = 1, \quad z\text{-координатата е слободна,} \quad (4.2.9)$$

каде што $x \geq 0$ и $z \geq 0$, со делот од параболоидот $z = 3 - x^2 - y^2$, каде што $z \geq 0$. Кривата C е ориентирана така што нејзината почетна точка е $A(\sqrt{2}, -1, 0)$, а нејзината крајна точка е $B(\sqrt{2}, 1, 0)$. Да се пресмета:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Како што коментиравме во примерот 2.3.6, хиперболичниот цилиндар (4.2.9) е хиперболата $x^2 - y^2 = 1$ движена слободно по z -оската. Нас нè интересира само левата гранка (делот каде $x \geq 0$), поточно само делот од неа кој е над xOy -рамнината (затоа што $z \geq 0$). Бидејќи параметризацијата на делот од хиперболата $x^2 - y^2 = 1$, каде што $x \geq 0$ е $x = \cosh t$, $y = \sinh t$, параметризацијата на C е:

$$x = \cosh t, \quad y = \sinh t, \quad z = 3 - \cosh^2 t - \sinh^2 t; \quad (4.2.10)$$

вредноста на z -координатата се добива од фактот дека: $z = 3 - x^2 - y^2$ на C (бидејќи кривата лежи на параболоидот). Кривата изгледа како на сликата 4.2.3 (а). Треба да определиме во кој интервал се движи t за да (4.2.10) ја даде C . Краевите на бараниот интервал се вредностите на t за кои (4.2.10) ќе ги дадат точките A и B . Вредноста на t за која (4.2.10) ги дава координатите на A се добива со решавање на системот:

$$\begin{cases} \cosh t = \sqrt{2} \\ \sinh t = -1 \\ 3 - \cosh^2 t - \sinh^2 t = 0. \end{cases} \quad (4.2.11)$$

Последната равенка е бесцелна затоа што следува од првите две. Ги собираме првите две равенки и добиваме: $e^t = \sqrt{2} - 1$ (бидејќи $\cosh t + \sinh t = e^t$), од што следува дека: $t = \ln(\sqrt{2} - 1)$. Со замена во (4.2.10), проверуваме дека оваа вредност на t е навистина решение на системот; т. е. A се добива од равенките (4.2.10) за $t = \ln(\sqrt{2} - 1)$. Слично, вредноста на t за која (4.2.10) ги даваат координатите на B се добива со решавање на:

$$\begin{cases} \cosh t = \sqrt{2} \\ \sinh t = 1 \\ 3 - \cosh^2 t - \sinh^2 t = 0. \end{cases} \quad (4.2.12)$$

Исто како и претходно, ги собираме првите две равенки и добиваме: $e^t = \sqrt{2} + 1$, односно $t = \ln(\sqrt{2} + 1)$; со директна замена во (4.2.12) се проверува дека ова е навистина решение на овој систем. Со ова ја добиваме следнава параметризација на C :

$$\vec{r} : [\ln(\sqrt{2} - 1), \ln(\sqrt{2} + 1)] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, 3 - \cosh^2 t - \sinh^2 t).$$

Векторот на брзина е: $\vec{r}'(t) = (\sinh t, \cosh t, -4 \cosh t \sinh t)$, од што следува дека:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\ln(\sqrt{2}-1)}^{\ln(\sqrt{2}+1)} (3 \cosh t - \cosh^3 t - \sinh^2 t \cosh t, -3 \sinh t + \cosh^2 t \sinh t + \sinh^3 t, 1) \cdot (\sinh t, \cosh t, -4 \cosh t \sinh t) dt.$$

По множење и средување добиваме:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = -4 \int_{\ln(\sqrt{2}-1)}^{\ln(\sqrt{2}+1)} \cosh t \sinh t dt.$$

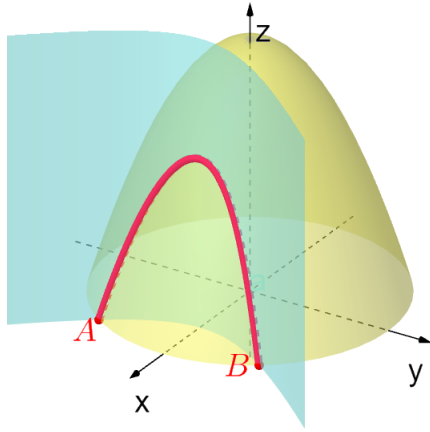
Воведуваме смена $p = \sinh t$, $dp = \cosh t dt$. Бидејќи

$$\sinh(\ln(\sqrt{2}-1)) = -1 \quad \text{и} \quad \sinh(\ln(\sqrt{2}+1)) = 1$$

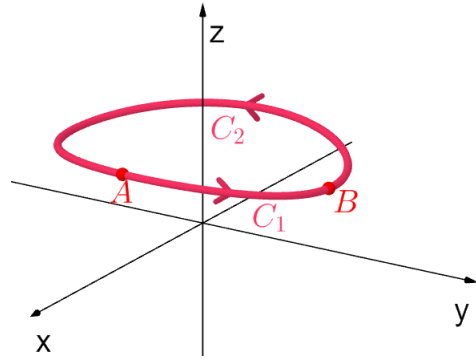
(увери се дека ова е навистина точно!), следува дека:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = -4 \int_{-1}^1 p dp = -4 \cdot \frac{p^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0.$$

Слика 4.2.3:



(а) Кривата од примерот 4.2.12



(б) Затворена крива

Пред да видиме уште неколку примери, ќе воведиме две стандардни ознаки. Кривата C се вика дека е **затворена** ако нејзината почетна и крајна точка се соопваѓаат. Ако C е затворена ориентирана крива, тогаш интегралот од кое било векторско поле $\vec{F}$ по C не зависи од тоа која точка сме ја избрале за почетна. За да го видиме ова, нека A и B се две различни точки од C . Да ја означиме со C_A ориентираната крива C со почетна и крајна точка A и нека C_B е ориентираната крива C со почетна и крајна точка B . Нека C_1 е лакот од A до B и нека C_2 е останатиот лак од B до A ; види ја сликата 4.2.3 (б). Тогаш, од теоремата 4.2.6 (а) се добива:

$$\int_{C_A} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{C_B} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Од ова следува дека, кога сметаме интеграл по затворена ориентирана крива, не е битно која точка ќе ја земеме за почетна; поради ова, од сега никогаш нема да нагласуваме која е почетната точка на затворената крива.

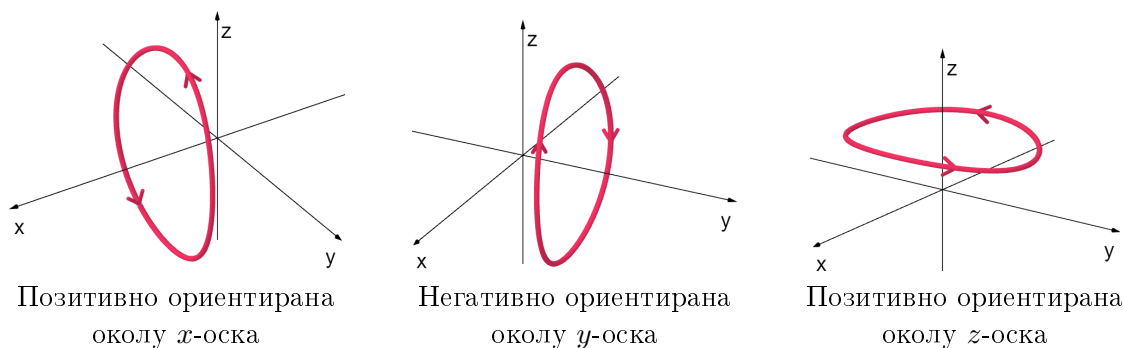
Забелешка 4.2.13. Ако C е затворена ориентирана крива, за интегралот на $\vec{F}$ по C често се користи ознаката:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma},$$

наместо (4.2.1).

Често пати ќе имаме затворена крива која ќе треба да ја ориентираме, т. е. да избереме насока на вртење. За таа цел, ги воведуваме следните поими. Правата ℓ ќе ја викаме **оска на ротација** (или кратко, **оска**) ако за неа имаме избрано насока. Нека C е затворена ориентирана крива која се врти околу оската ℓ . Ќе велиме дека C е **позитивно ориентирана околу оската ℓ** , ако нејзината насока го задоволува **правилото на десна рака**: ако палецот на десната рака е во насока на оската ℓ , тогаш прстите се затвараат во насоката на кривата C . Ако кривата ја има обратната ориентација, тогаш ќе велиме дека е **негативно ориентирана околу оската ℓ** . Ако ℓ е некоја од координатните оски x , y или z , секогаш ќе подразбираме дека тие се ориентирани во насока на позитивните вредности (насоките дадени со ортовите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$); види ја сликата 4.2.4.

Слика 4.2.4: Затворени ориентирани криви околу координатните оски



Пример 4.2.14. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xy, y + z, xz)$. Кривата C е пресек на површините $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = 2 - x^2 - y^2$ и е позитивно ориентирана околу z -оската. Да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

За да ја определиме C заменуваме $z^2 = x^2 + y^2$ во равенката на параболоидот, од што следува дека (види ја сликата 2.3.10 (а))

$$z = 2 - z^2 \iff z^2 + z - 2 = 0.$$

Решенијата на последната равенка се: $z = 1$ и $z = -2$. Бидејќи кривата лежи на $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, нејзината z -координата мора да е ненегативна, од што следува дека $z = 1$. Заменуваме во равенката на параболоидот (или во равенката на конусот) и добиваме $x^2 + y^2 = 1$, т. е. C е единечната кружница подигната на висина $z = 1$. Ја параметризираме C со:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$$

и нејзиниот вектор на брзина е $\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$. Да забележиме дека $\vec{r}$ ја запазува ориентацијата на кривата. За бараниот интеграл имаме:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t, \sin t + 1, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin^2 t + \sin t \cos t + \cos t) dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos t dt. \end{aligned}$$

Последниот интеграл е табличен и лесно се пресметува дека: $\int_0^{2\pi} \cos t dt = 0$. Во останатите два интеграла воведуваме смена: $p = \sin t$, $dp = \cos t dt$, и добиваме:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = -\int_0^0 p^2 dp + \int_0^0 p dp = 0.$$

Пример 4.2.15. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x + y, z, xz)$. Кривата C е пресек на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ со рамнината $x + y = 1$ и е ориентирана во насока на движењето на стрелките на часовникот кога се гледа од координатниот почеток. Да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Кривата изгледа како на сликата 4.2.5 (а). За да ја параметризираме, од рамнината изразуваме $y = 1 - x$ и заменуваме во сферата:

$$x^2 + (1 - x)^2 + z^2 = 1 \iff 2x^2 - 2x + z^2 = 0. \quad (4.2.13)$$

Последната равенка е равенка на елипса. За да ја определиме, го запишуваме $2x^2 - 2x$ како полн квадрат, т. е. бараме константи a и b , такви што $2x^2 - 2x = 2(x + a)^2 + b$. Добиваме: $2x^2 - 2x = 2x^2 + 4ax + 2a^2 + b$, од што следува: $-2 = 4a$ и $0 = 2a^2 + b$. Решаваме и добиваме $a = -1/2$ и $b = -1/2$. Равенките (4.2.13) се еквивалентни со:

$$2(x - 1/2)^2 - 1/2 + z^2 = 0 \iff 4(x - 1/2)^2 + 2z^2 = 1 \iff \frac{(x - 1/2)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{z^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Ова е равенка на елипса во xOz -рамнината со центар во $(1/2, 0, 0)$ и полуоски $1/2$ по x и $1/\sqrt{2}$ по z -оската. Параметризацијата на кривата е:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right);$$

вредноста на y -координатата се добива од релацијата $y = 1 - x$. Векторот на брзина е:

$$\vec{r}(t) = \left(-\frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right).$$

Да забележиме дека оваа параметризација ја поминува кривата од x кон z -оската (види ја нејзината проекција на xOz -рамнината), што е во насока на стрелките на часовникот кога ја гледаме кривата од надвор (од првиот октант). Тоа е точно, ориентацијата во спротивна насока од насоката на стрелките на часовникот кога се гледа од координатниот почеток; т. е. спротивната ориентација од таа што ни треба. За интегралот добиваме:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} \\ = - \int_0^{2\pi} \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin t + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos t \sin t \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right) dt; \end{aligned}$$

знакот минус е затоа што параметризацијата е спротивна од таа што ни треба. Средуваме:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= - \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin^2 t + \frac{1}{4} \sin t \cos t + \frac{1}{4} \cos^2 t \sin t \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin t dt - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t dt. \end{aligned}$$

Првиот интеграл е табличен и лесно се смета дека: $\int_0^{2\pi} \sin t dt = 0$. За вториот интеграл ја применуваме формулата (4.1.7). Во третиот и четвртиот интеграл ставаме смена $q = \cos t$, $dq = -\sin t dt$. Добиваме:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt + \frac{1}{4} \int_1^1 q dq + \frac{1}{4} \int_1^1 q^2 dq \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \cos 2t dt. \end{aligned}$$

За првиот интеграл имаме: $\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$. Во вториот ставаме смена: $p = 2t$, $dp = 2dt$ и добиваме:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \int_0^{4\pi} \cos p dp = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \sin p \Big|_0^{4\pi} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

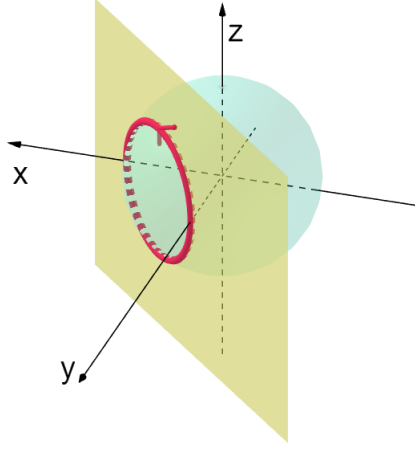
Пример 4.2.16. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xz, y, x + z)$. Кривата C е пресек на елипсоидот:

$$\frac{x^2}{3} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1,$$

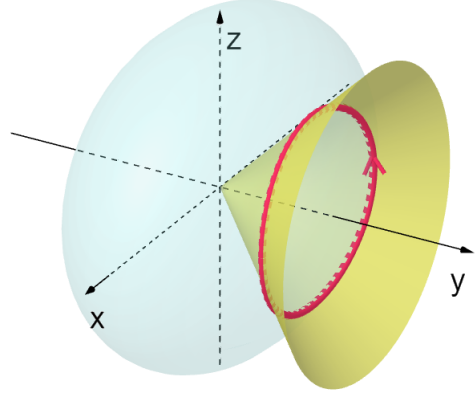
со конусот $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ и е позитивно ориентирана околу y -оската. Да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Слика 4.2.5:



(а) Кривата од примерот 4.2.15



(б) Кривата од примерот 4.2.16

Кривата изгледа како на сликата 4.2.5 (б). Заменуваме $y^2 = x^2 + z^2$ во равенката на елипсоидот и се добива:

$$\frac{x^2}{3} + x^2 + z^2 + \frac{z^2}{2} = 1 \iff \frac{4x^2}{3} + \frac{3z^2}{2} = 1 \iff \frac{x^2}{\frac{3}{4}} + \frac{z^2}{\frac{2}{3}} = 1.$$

Последната равенка е равенка на елипса во xOz -рамнината со полуоски $\sqrt{3}/2$ и $\sqrt{2/3}$ по x и z , соодветно, и затоа можеме да ја параметризираме со:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \quad z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Бидејќи на кривата C важи: $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ (C лежи на конусот), ја добиваме следната параметризација за C :

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \sqrt{\frac{3}{4} \cos^2 t + \frac{2}{3} \sin^2 t}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin t \right).$$

Да забележиме дека оваа параметризација е во насока на движењето на стрелките на часовникот. За нејзината y -координата важи:

$$\sqrt{\frac{3}{4} \cos^2 t + \frac{2}{3} \sin^2 t} = \sqrt{\frac{1}{12} \cos^2 t + \frac{2}{3} \cos^2 t + \frac{2}{3} \sin^2 t} = \sqrt{\frac{1}{12} \cos^2 t + \frac{2}{3}},$$

од што следува дека $\vec{r}$ е дадена со:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{12} \cos^2 t}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin t \right),$$

и нејзиниот вектор на брзина е:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, \frac{-\cos t \sin t}{12\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{12} \cos^2 t}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos t \right).$$

Да забележиме дека кога t се движи од 0 до 2π , параметризацијата $\vec{r}$ се врти од x кон z -оската, што значи дека е негативно ориентирана околу y -оската. Тоа е спротивната ориентација од онаа што ни треба, па:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \sin t, \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{12} \cos^2 t}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin t \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, \frac{-\cos t \sin t}{12\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{12} \cos^2 t}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos t \right) dt;$$

знакот минус е затоа што параметризацијата е спротивна од таа што ни треба. По средување, добиваме:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \cos t \sin^2 t + \frac{1}{12} \cos t \sin t - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 t - \frac{2}{3} \sin t \cos t \right) dt \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} \int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t dt - \frac{7}{12} \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt. \end{aligned}$$

Во првиот и во вториот интеграл ставаме смена: $p = \sin t$, $dp = \cos t dt$, а во третиот го употребуваме идентитетот (4.1.7):

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \frac{\sqrt{6}}{4} \int_0^0 p^2 dp - \frac{7}{12} \int_0^0 p dp - \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} dt - \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} \cos 2t dt = -\frac{\pi\sqrt{2}}{2}; \end{aligned}$$

во последното равенство употребивме дека: $\int_0^{2\pi} \cos 2t dt = 0$ (види го решението на примерот 4.2.15).

4.3. Теорема на Грин

Кога рамнинската крива C е затворена, интегралот по C може да се изрази преку обичен двоен интеграл на областа затворена од C .

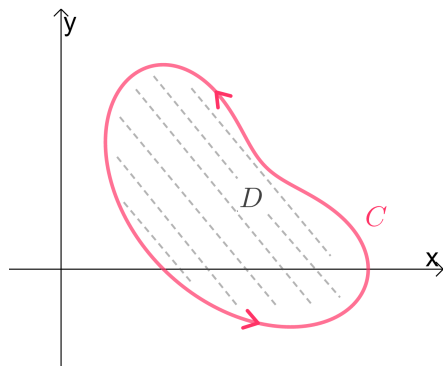
Теорема 4.3.1. (Гринова формула) Нека $C \subseteq \mathbb{R}^2$ е затворена рамнинска крива која затвара област D во рамнината и нека $\vec{F} = (F_1, F_2)$ е векторско поле од две променливи дефинирано во околина на D . Ако C е ориентирана така што областа D е на левата страна¹ (види ја сликата 4.3.1 (а)), тогаш:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy. \quad (4.3.1)$$

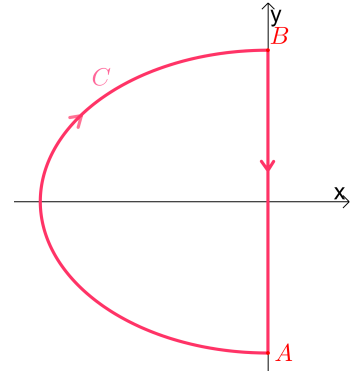
¹За оваа ориентација велиме дека е позитивна.

Забелешка 4.3.2. Претпоставката за ориентацијата на C е клучна. Ако C е ориентирана во спротивна насока, тогаш се појавува дополнителен знак — пред равенството (види ја забелешката (4.2.2)).

Слика 4.3.1:



(а) Ориентацијата во Гриновата формула



(б) Кривата од примерот 4.3.4

Пример 4.3.3. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (2x, xy^2)$. Нека C е единечната кружница $x^2 + y^2 = 1$ ориентирана во спротивна насока од стрелките на часовникот. Да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Бидејќи $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial F_2}{\partial x} = y^2$, од Гриновата формула следува дека:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_D y^2 dx dy,$$

каде што D е внатрешноста на кружницата $x^2 + y^2 = 1$ (Гриновата формула можеме да ја примениме бидејќи ориентацијата на C е таква што областа D е на левата страна). За да го решиме интегралот, воведуваме поларни координати:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

со Јакобијан за смената $|J| = \rho$. Добиваме:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2 \varphi d\varphi d\rho = \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \right) d\rho \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi \right) d\rho \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\rho - \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right) d\rho \\ &= \pi \int_0^1 \rho^3 d\rho - \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) d\rho = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Пример 4.3.4. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (x + y, x^2 + y)$. Кривата C е составена од делот од елипсата со полуоски 3 и 2, каде што $x \leq 0$ заедно со отсечката со крајни точки $A(0, -2)$ и $B(0, 2)$. Ако кривата C е ориентирана во насока на стрелките на часовникот, да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}. \quad (4.3.2)$$

Кривата изгледа како на сликата 4.3.1 (б). Областа D затворена од C е:

внатрешноста на левата страна на елипсата $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ каде што $x \leq 0$.

За интегралот (4.3.2) не можеме директно да ја примениме Гриновата формула затоа што кривата C ја има обратната ориентација од таа за која важи Гриновата формула. Да ја означиме со $\overline{C}$ кривата C ориентирана во спротивна насока од стрелките на часовникот (т. е. ориентирана во спротивна насока од C). Тогаш за интегралот по $\overline{C}$ можеме да ја примениме Гриновата формула:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = - \oint_{\overline{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = - \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_D (2x - 1) dx dy.$$

Во последниот интеграл воведуваме елипсоидни координати:

$$\begin{cases} x = 3\rho \cos \varphi \\ y = 2\rho \sin \varphi, \end{cases}$$

со Јакобијан на смената $|J| = 6\rho$. Бидејќи областа D се добива кога $0 \leq \rho \leq 1$, $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$, имаме:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= -6 \int_0^1 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (6\rho \cos \varphi - 1) \rho d\varphi d\rho \\ &= -36 \int_0^1 \rho^2 \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos \varphi d\varphi \right) d\rho + 6 \int_0^1 \rho \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \right) d\rho \\ &= -36 \int_0^1 \rho^2 \left(\sin \varphi \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \right) d\rho + 6\pi \int_0^1 \rho d\rho = 72 \int_0^1 \rho^2 d\rho + 3\pi = 24 + 3\pi. \end{aligned}$$

Пример 4.3.5. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (xy^2, x + 2y)$. Нека кривата C е делот од елипсата со полуоски 1 и 2, каде што $y \geq 0$ ориентирана во спротивна насока од стрелките на часовникот. Да се пресмета:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Кривата C е делот од елипсата $x^2 + y^2/4 = 1$, каде што $y \geq 0$. Не можеме директно да ја примениме Гриновата формула, затоа што C не е затворена. Идејата е да додадеме и одземеме интеграл од облик $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$, каде што кривата C_1 ќе ја избереме

така што $C \cup C_1$ да е затворена крива. Се разбира, добро е C_1 да ја избереме така што областа која ја затвора $C \cup C_1$ да е едноставна за пресметка на двојниот интеграл. Во нашата ситуација, наједноставниот избор за C_1 е отсечката со крајни точки $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$ ориентирана од A кон B . Тогаш $C \cup C_1$ е затворена и областа D која ја затвора е внатрешноста на горниот дел од елипсата $x^2 + y^2/4 = 1$, каде што $y \geq 0$ (види ја сликата 4.3.2 (а)). Интегралот го запишуваме на следниов начин:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \oint_{C \cup C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}. \quad (4.3.3)$$

За кривата $C \cup C_1$ можеме да ја примениме Гриновата формула:

$$\oint_{C \cup C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (1 - 2xy) dx dy.$$

Воведуваме елипсодни координати:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = 2\rho \sin \varphi, \end{cases}$$

со Јакобијан на смената $|J| = 2\rho$. Бидејќи D се добива кога $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, добиваме:

$$\begin{aligned} \oint_{C \cup C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= 2 \int_0^1 \int_0^\pi (1 - 4\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho \\ &= 2 \int_0^1 \rho \left(\int_0^\pi d\varphi \right) d\rho - 8 \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^\pi \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right) d\rho. \end{aligned}$$

Во внатрешниот интеграл од вториот интеграл воведуваме смена $t = \sin \varphi$, $dt = \cos \varphi d\varphi$, од што следува:

$$\oint_{C \cup C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 2\pi \int_0^1 \rho d\rho - 8 \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^0 t dt \right) d\rho = \pi.$$

Останува да го пресметаме последниот интеграл во (4.3.3). Кривата C_1 (што е отсечката $[AB]$), можеме лесно да ја параметризираме: $\vec{r} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{r}(t) = (t, 0)$. Векторот на брзина е $\dot{\vec{r}}(t) = (1, 0)$ и за интегралот добиваме:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{-1}^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{-1}^1 (0, t) \cdot (1, 0) dt = \int_{-1}^1 0 dt = 0.$$

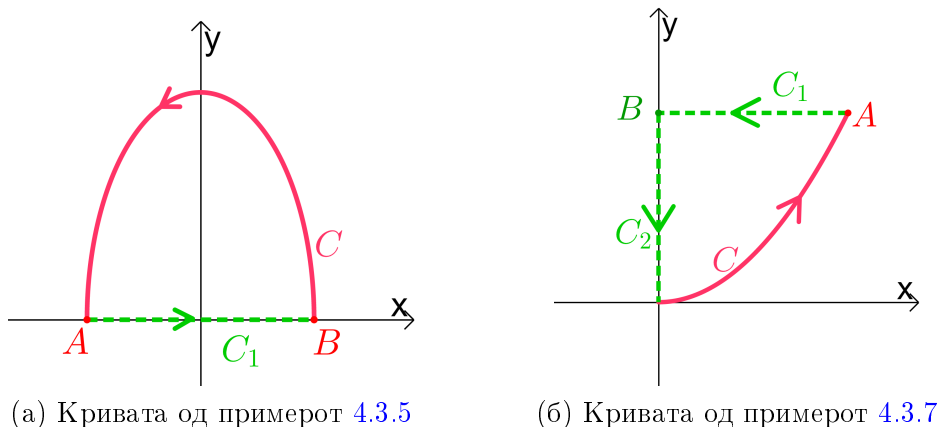
Со заменување во (4.3.3) се добива крајниот резултат:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \pi - 0 = \pi.$$

Забелешка 4.3.6. Целта во оваа техника на затворање на кривата е да се добијат интеграли кои се полесни за пресметка од почетниот. Најчесто, кривата C можеме да ја затвориме на повеќе различни начини. Во претходниот пример, за C_1 можевме да ја

земеме долната половина на елипсата $x^2 + y^2/4 = 1$ (делот каде што $y \leq 0$). Тогаш, по примена на Гриновата формула за $\oint_{C \cup C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$, двојниот интеграл ќе биде по целата внатрешност на елипсата и тој можеме слично да го решиме. Но, $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$ (последниот интеграл во (4.3.3)) е по долната половина на елипсата и тој е подеднакво тежок како и почетниот интеграл. Вештината во затворањето на кривите е да се избере кривата C_1 , така што истовремено и двојниот интеграл од Гриновата формула и линискиот интеграл $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$ да бидат едноставни за пресметка; ова не е секогаш можно и полесно е директно да се евалуира почетниот интеграл. Често (но, не секогаш!), затворањето со отсечки е најдобрата опција.

Слика 4.3.2:



(а) Кривата од примерот 4.3.5

(б) Кривата од примерот 4.3.7

Пример 4.3.7. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (x^2y^2, xy + \sin y)$. Нека кривата C е лакот на параболата $y = x^2$ од $O(0, 0)$ до $A(1, 1)$ ориентиран од O кон A . Да се пресмета:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Кривата може да се затвори со отсечката $[AO]$ и интегралите што ќе се добијат се лесни за евалуација (го охрабруваме читателот да го направи тоа). Друга опција е да ја затвориме C на следниот начин. Да ја означиме со B точката $(0, 1)$. Нека C_1 е отсечката $[AB]$ ориентирана од A кон B и нека C_2 е отсечката $[BO]$ ориентирана од B кон O (види ја сликата 4.3.2 (б)). Ги означуваме со $\overline{C_1}$ и $\overline{C_2}$ отсечките C_1 и C_2 ориентираны во спротивни насоки и интегралот го запишуваме на следниов начин:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} - \int_{\overline{C_1}} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} - \int_{\overline{C_2}} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} \\ &= \oint_{C \cup C_1 \cup C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} + \int_{\overline{C_1}} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} + \int_{\overline{C_2}} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Кривата $C \cup C_1 \cup C_2$ ја затвора областа D дадена со: $0 \leq x \leq 1$ и $x^2 \leq y \leq 1$. За

интегралот по оваа крива ја употребуваме Гриновата формула и добиваме:

$$\begin{aligned}\oint_{C \cup C_1 \cup C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \iint_D (y - 2x^2y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 (y - 2x^2y) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - x^2y^2 \right) \Big|_{y=x^2}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 - \frac{x^4}{2} + x^6 \right) dx = \frac{22}{105}.\end{aligned}$$

Кривата $\overline{C_1}$ ја параметризираме со $\vec{r}_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{r}_1(t) = (t, 1)$. Брзината на $\vec{r}_1$ е $\vec{r}_1'(t) = (1, 0)$ и за интегралот по $\overline{C_1}$ имаме:

$$\int_{\overline{C_1}} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^1 (t^2, t + \sin 1) \cdot (1, 0) dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Слично, ја параметризираме $\overline{C_2}$ со $\vec{r}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{r}_2(t) = (0, t)$. Брзината е $\vec{r}_2'(t) = (0, 1)$ и за интегралот по $\overline{C_2}$ добиваме:

$$\int_{\overline{C_2}} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^1 (0, \sin t) \cdot (0, 1) dt = \int_0^1 \sin t dt = 1 - \cos 1.$$

Заменуваме во (4.3.4) и го добиваме конечниот резултат:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{22}{105} + \frac{1}{3} + 1 - \cos 1 = \frac{54}{35} - \cos 1.$$

Го охрабруваме читателот да ги пресмета директно интегралите во претходните примери за да се увери дека се добиваат истите резултати.

Забелешка 4.3.8. При затворањето на кривата C треба да се внимава полето и неговите изводи да бидат дефинирани во затворената област. На пример, ако треба да се пресмета $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$, каде што

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{1}{x^2 + y^2}, \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

и C е горниот дел од кружницата $x^2 + y^2 = 1$ (делот каде $y \geq 0$) ориентирана во спротивна насока од стрелките на часовникот, кривата C не може да се затвори ниту со отсечката со крајни точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ ниту со долниот дел од кружницата $x^2 + y^2 = 1$ (делот каде што $y \leq 0$), затоа што полето и неговите изводи не се дефинирани во $(0, 0)$. Во оваа ситуација, интегралот $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$ може лесно директно да се пресмета.

4.4. Линиски интеграли од конзервативни полиња

Во примерот 4.2.9 видовме дека линискиот интеграл на електростатското поле е еднаков на разликата од потенцијалите во крајните точки од кривата; во забелешката 4.2.11 коментиравме дека истото се случува и за гравитационото поле. Ќе видиме дека ова е точно за која било крива која ја има истата почетна и крајна точка; т. е. интегралот нема да зависи од кривата туку само од нејзината почетна и крајна точка.

Во суштина, ова својство важи за кое било конзервативно поле.

Нека G е скаларно поле дефинирано во областа $U \subseteq \mathbb{R}^3$ и нека A и B се две произволни точки во U . Нека $C \subseteq U$ е која било крива со почетна точка A и крајна точка B . Сакаме да го пресметаме интегралот на векторското поле $\vec{\nabla}G$ по кривата C . За таа цел, избираме параметризација на C која ја запазува ориентацијата:

$$\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \text{т. ш.} \quad \vec{r}(a) = A, \quad \vec{r}(b) = B.$$

Го пресметуваме изводот на функцијата од една променлива $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto G(\vec{r}(t))$, со помош на верижното правило:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(G(\vec{r}(t))) &= \frac{d}{dt}(G(x(t), y(t), z(t))) \\ &= \frac{\partial G}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial G}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + \frac{\partial G}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t) \\ &= \left(\frac{\partial G}{\partial y}(\vec{r}(t)), \frac{\partial G}{\partial x}(\vec{r}(t)), \frac{\partial G}{\partial z}(\vec{r}(t)) \right) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = \vec{\nabla}G(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t). \end{aligned}$$

Од ова следува дека:

$$\int_C \vec{\nabla}G \cdot d\vec{\sigma} = \int_a^b \vec{\nabla}G(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(G(\vec{r}(t)))dt = G(\vec{r}(t)) \Big|_a^b = G(B) - G(A).$$

Со тоа го добивме следниот исклучително битен резултат.

Теорема 4.4.1. Нека G е скаларно поле дефинирано во областа $U \subseteq \mathbb{R}^3$ и нека A и B се две точки во U . За која било крива C што лежи во U со почетна точка A и крајна точка B , важи:

$$\int_C \vec{\nabla}G \cdot d\vec{\sigma} = G(B) - G(A).$$

Последователно, ако кривата C е затворена (т. е. $A = B$), тогаш:

$$\oint_C \vec{\nabla}G \cdot d\vec{\sigma} = 0.$$

Забелешка 4.4.2. Истиот резултат важи и кога G е скаларно поле од две променливи дефинирано во област $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Забелешка 4.4.3. Овој резултат е аналоген на Њутн-Лајбницовата формула за функции од една променлива: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

Ако $\vec{F}$ е конзервативно векторско поле дефинирано во областа U , тогаш (по дефиниција) тоа е градиент на некое скаларно поле G во U , т. е. $\vec{F} = \vec{\nabla}G$ во U . Теоремата 4.4.1 дава дека вредноста на интегралот $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$ не зависи од кривата $C \subseteq \mathbb{R}^3$, туку само од нејзината почетна точка A и крајна точка B , затоа што:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = G(B) - G(A).$$

Се разбира, од ова следува дека ако C е затворена (т. е. $A = B$), тогаш:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 0.$$

Бидејќи електростатското и гравитационото поле се конзервативни, со помош на теоремата 4.4.1 можеме едноставно да ги решиме проблемите во примерот 4.2.9 и забелешката 4.2.11.

Пример 4.4.4. За проблемот во примерот 4.2.9 имаме (заради $\vec{E} = \vec{\nabla}(-\Phi_E)$):

$$\begin{aligned} \text{извршената работа} &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = q \int_C \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = q(-\Phi_E(\vec{r}(4\pi)) - (-\Phi_E(\vec{r}(0)))) \\ &= k_e q q_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 64\pi^2}} \right). \end{aligned}$$

За проблемот во забелешката 4.2.11 имаме (заради $\vec{\Gamma} = \vec{\nabla}(-\Phi_G)$):

$$\begin{aligned} \text{извршената работа} &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = m \int_C \vec{\Gamma} \cdot d\vec{\sigma} = m(-\Phi_G(\vec{r}(4\pi)) - (-\Phi_G(\vec{r}(0)))) \\ &= G_N m m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 64\pi^2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Пример 4.4.5. Дадено е скаларното поле $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = x^2 y + xz$. Да се пресмета

$$\int_C \vec{\nabla} G \cdot d\vec{\sigma},$$

каде што C е кривата $\vec{r} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (t^2, t, t^3)$.

Од теоремата 4.4.1 следува дека:

$$\int_C \vec{\nabla} G \cdot d\vec{\sigma} = G(\vec{r}(1)) - G(\vec{r}(-1)) = 2 - (-2) = 4.$$

4.5. Нерешени задачи

Задача 4.5.1. Да се пресмета:

$$\int_C G(x, y) d\sigma,$$

каде што

- (а) кривата C е триаголникот со темињата $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(0, 0)$ и скаларното поле G е дадено со $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y) = x^2 + xy$;
- (б) кривата C е делот од кружницата со центар во $(0, 0)$ и радиус 3, каде што $x \geq 0$ и скаларното поле G е дадено со $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y) = x + y + x^2 y^2$;

- (в) кривата C е делот од десната гранка на хиперболата $x^2 - y^2 = 1$ кој се наоѓа помеѓу точките $(2, -\sqrt{3})$ и $(2, \sqrt{3})$ и скаларното поле G е дадено со $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y) = xy$.

Задача 4.5.2. Да се пресмета:

$$\int_C G(x, y, z) d\sigma,$$

каде што

- (а) кривата C се страните на триаголникот со темињата $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ и скаларното поле G е дадено со $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = x^2z + y$;
- (б) кривата C е делот од кружницата со центар во $(0, 0, 0)$, во xOy -рамнината од $A(-5, 0, 0)$ до $B(5, 0, 0)$, каде што $y \geq 0$ заедно со отсечката $[BD]$, каде што D е точката $(0, 0, 3)$ и скаларното поле G е дадено со $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = xy + z$.

Задача 4.5.3. Да се пресмета:

$$\int_C G(x, y) d\sigma,$$

каде што C е работ на триаголникот со темињата $(0, 0)$, $(2, 0)$ и $(0, 2)$, ориентиран по насока на стрелките на часовникот и $G(x, y) = x^2 + 2y$.

Задача 4.5.4. Да се пресмета:

$$\int_C G(x, y) d\sigma,$$

каде што C е горниот лак на кружницата $x^2 + y^2 = 4$ од $(-2, 0)$ до $(2, 0)$ и $G(x, y) = x^3y$.

Задача 4.5.5. Да се пресмета:

$$\int_C G(x, y, z) d\sigma,$$

каде што $G(x, y, z) = x + y + z^2$, а полигонот C е составен од отсечките: $(0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 1)$.

Задача 4.5.6. Дадена е танка жица во облик на кривата:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t),$$

со линиска густина $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Да се определат масата и тежиштето на жицата.

Задача 4.5.7. Танка жица е параметризирана со: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, \pi]$ и има линиска густина $\rho(x, y, z) = 1 + z$. Да се пресмета масата и тежиштето на жицата.

Задача 4.5.8. Да се пресмета:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma},$$

каде што:

- (а) рамнинската крива C е делот од елипсата со центар во $(0, 0)$ и полуоски 1 и 3 по x и y којшто се наоѓа во прв квадрант и е ориентиран во спротивна насока од стрелките на часовникот, додека векторското поле $\vec{F}$ е дадено со $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (x^2y^2, x^2 + y^2 + 1)$;
- (б) рамнинската крива C е делот од $y = x^3$ со почеток во $(0, 0)$ и крај во $(1, 1)$, додека векторското поле $\vec{F}$ е дадено со $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (xy^2, x^2 + y + 3)$.

Задача 4.5.9. Да се пресмета линискиот интеграл:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

за $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (2xy, x^2)$ и кривата $C : y = e^x$ од $x = 0$ до $x = 1$.

Задача 4.5.10. Да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

каде што C е границата на елипсата $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ориентирана во спротивна насока од стрелките на часовникот и векторското поле е дадено со $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (y, x)$ (користете ја Гриновата теорема).

Задача 4.5.11. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xz, z, x + y + z)$. Кривата C е составена од страните на триаголникот со темињата $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ и $D(0, 0, 3)$ и е ориентирана на тој начин што таа поминува низ точките A, B, D, A во тој редослед. Да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Задача 4.5.12. Кривата C е составена од следниве два дела:

- делот од елипсата која што лежи во xOy -рамнината со центар во $(0, 0, 0)$ и полуоски 3 и 1 по x и y со почетна точка $A(3, 0, 0)$ и крајна точка $B(0, 1, 0)$ и каде што важи: $x \geq 0$;
- делот од кружницата која лежи во yOz -рамнината со центар во $(0, 0, 0)$ и радиус 1, со почетна точка $B(0, 1, 0)$ и крајна точка $D(0, 0, 1)$ и каде што важи: $y \geq 0$.

Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x + y + z, x - y, z^2)$. Да се пресмета:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Задача 4.5.13. Кривата C е пресекот на површините: $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ и $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и таа е позитивно ориентирана околу z -оската. Да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma},$$

каде $\vec{F}$ е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x + z, xz, y + z^2)$.

Задача 4.5.14. Кривата C е пресекот на површините: $y = x^2 + z^2$ и $y + z = 1$ и таа е позитивно ориентирана околу y -оската. Да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma},$$

каде што $\vec{F}$ е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xz, x, x + y)$.

Задача 4.5.15. Со помош на Гриновата формула да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma},$$

каде што

- (а) рамнинската крива C е работ на квадратот со темиња во: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ и $(0, 1)$, ориентиран во спротивна насока од стрелките на часовникот, додека векторското поле $\vec{F}$ е дадено со $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (xy, x^2 + y^2 + xy)$;
- (б) рамнинската крива C е работ на триаголникот со темиња во: $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(-1, 0)$, ориентиран во насока на стрелките на часовникот, додека векторското поле $\vec{F}$ е дадено со $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (x - y^2, x + y - 5)$.

Задача 4.5.16. Да се реши задачата 4.5.8 со помош на Гриновата формула откако претходно кривата C соодветно ќе се затвори.

Задача 4.5.17. Кривата C е составена од две парчиња: (1) парцијален дел од $y = \sqrt{x}$ од $x = 0$ до $x = 1$ и (2) праволинискиот сегмент од $(1, 1)$ до $(0, 0)$. За векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (x^2, xy)$, да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

ориентирано по зададениот редослед.

Глава 5.

Површински интеграли

Во оваа глава ќе дефинираме интеграли од скаларни и од векторски полиња по површини во просторот. Површините што ги употребувавме до сега беа зададени како графици на функции од две променливи или преку равенства од обликот $G(x, y, z) = 0$, коишто потоа можевме да ги претставиме како унија од неколку графици на функции од две променливи. Типичен пример е единечната сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ која е составена од графичите на функциите

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{што ја дава горната хемисфера и} \\ f_2(x, y) &= -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{што ја дава долната хемисфера.} \end{aligned}$$

Во првата глава ги скициравме најчесто употребуваните вакви примери. За интегралите што ќе ги воведеме во продолжение, ваквите површини не се доволни. Често ќе треба да интегрираме по делови од сидови на тела и овие површини некогаш ќе биде тешко или непрагматично да се задаваат како равенства $G(x, y, z) = 0$. Но, во нашите ситуации, тие секогаш ќе бидат составени од неколку графици на функции од две променливи. На пример, сидот на коцка е тешко и непрагматично да се запише во облик $G(x, y, z) = 0$, иако тој е многу едноставна површина: се состои од шест квадратни делови од рамнини. Слично, сидот на цилиндрична кутија е тешко да се запише како $G(x, y, z) = 0$, иако е очигледно дека се состои од дел од цилиндар и две кружни делови од рамнини кои го затвараат цилиндарот. Од сега, сите површини ќе бидат составени од неколку графици на функции од две променливи, иако нема секогаш лесно да можат да се запишат преку равенство $G(x, y, z) = 0$.

5.1. Површински интеграли од скаларни полиња

Нека Σ е површина во $\mathbb{R}^3$ и нека G е скаларно поле дефинирано во околина на Σ . Целта е да дефинираме интеграл на G на површината Σ , во ознака:

$$\iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS. \tag{5.1.1}$$

Прво ќе ја разгледаме специјалната ситуација кога Σ е график на функција f од променливите (x, y) , дефинирана на областа $D \subseteq \mathbb{R}^2$, т. е.

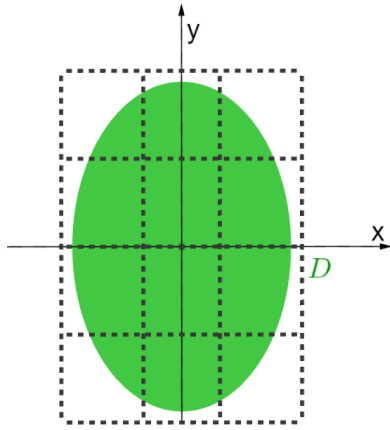
$$\Sigma = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\}; \quad (5.1.2)$$

да забележиме дека D е точно проекцијата на Σ на xOy -рамнината. Ја делиме областа D со мрежа со јазли во точките (x_j, y_k) , како на сликата 5.1.1 (а). Да го означиме со $D_{j,k}$ правоаголникот со темиња во: (x_j, y_k) , (x_{j+1}, y_k) , (x_{j+1}, y_{k+1}) и (x_j, y_{k+1}) . Во секој $D_{j,k}$ избираме произволна точка (x'_j, y'_k) од D ; т. е. $(x'_j, y'_k) \in D_{j,k} \cap D$ и со тоа $A'_{j,k} := (x'_j, y'_k, f(x'_j, y'_k)) \in \Sigma$. Во точката $A'_{j,k}$ повлекуваме рамнина тангентна на Σ и го означуваме со $\Delta\Sigma_{j,k}$ паралелограмот којшто лежи во оваа рамнина и чија проекција на xOy -рамнината е $D_{j,k}$; види ја сликата 5.1.1. Ја формираме интегралната сума

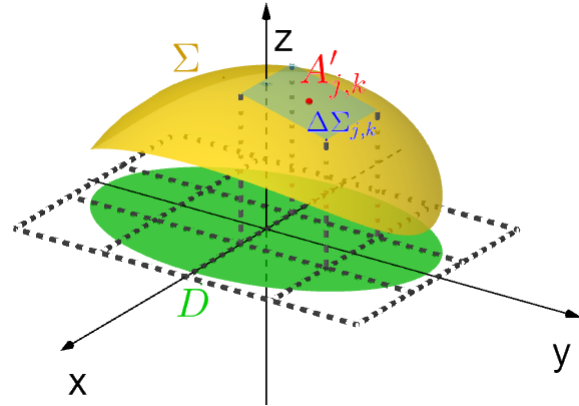
$$\sum_{j,k} G(A'_{j,k})P(\Delta\Sigma_{j,k}) = \sum_{j,k} G(x'_j, y'_k, f(x'_j, y'_k))P(\Delta\Sigma_{j,k}), \quad (5.1.3)$$

каде што $P(\Delta\Sigma_{j,k})$ е плоштината на паралелограмот $\Delta\Sigma_{j,k}$. Интегралот (5.1.1) е лимесот од сумите (5.1.3), кога бројот на делбени точки x_j и y_k тежи кон бесконечност и страните на $\Delta\Sigma_{j,k}$ тежат кон 0.

Слика 5.1.1:



(а) Поделба на областа D



(б) Еден елемент во интегралната сума (5.1.3)

Забелешка 5.1.1. Ако $G(x, y, z) = 1$ на Σ , тогаш интегралната сума (5.1.3) е всушност: $\sum_{j,k} P(\Delta\Sigma_{j,k})$. Ако мрежата е доволно густа, $P(\Delta\Sigma_{j,k})$ е апроксимација за плоштината на делот од Σ кој се наоѓа над $D_{j,k}$; види ја сликата 5.1.1 (б). Кога бројот на делбени точки x_j и y_k тежи кон бесконечност и страните на $\Delta\Sigma_{j,k}$ тежат кон 0, $\sum_{j,k} P(\Delta\Sigma_{j,k})$ ќе тежи кон плоштината на Σ , од што следува дека:

$$\text{плоштина на } \Sigma = \iint_{\Sigma} dS. \quad (5.1.4)$$

Ваквиот начин на пресметка на (5.1.1) е непрагматичен и затоа ќе најдеме поедноставна формула. Клучната идеја е дека $P(\Delta\Sigma_{j,k})$ може да се пресмета. Еден нормален вектор на рамнината на која лежи $\Delta\Sigma_{j,k}$ е:

$$\vec{n}_{j,k} := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x'_j, y'_k), \frac{\partial f}{\partial y}(x'_j, y'_k), -1 \right)$$

и затоа таа може да ја запишеме како:

$$(x - x'_j) \frac{\partial f}{\partial x}(x'_j, y'_k) + (y - y'_k) \frac{\partial f}{\partial y}(x'_j, y'_k) - (z - f(x'_j, y'_k)) = 0. \quad (5.1.5)$$

Темињата на $\Delta\Sigma_{j,k}$ имаат исти x и y -координати како и темињата на $D_{j,k}$, т. е. тие се од облик:

$$\begin{aligned} B'_{j,k} &:= (x_j, y_k, z'_{j,k}), & B'_{j+1,k} &:= (x_{j+1}, y_k, z'_{j+1,k}), \\ B'_{j+1,k+1} &:= (x_{j+1}, y_{k+1}, z'_{j+1,k+1}), & B'_{j,k+1} &:= (x_j, y_{k+1}, z'_{j,k+1}). \end{aligned}$$

Нивните z -координати се добиваат кога x и y -координатите ќе се заменат во (5.1.5); на пример:

$$z'_{j,k} = f(x'_j, y'_k) + (x_j - x'_j) \frac{\partial f}{\partial x}(x'_j, y'_k) + (y_k - y'_k) \frac{\partial f}{\partial y}(x'_j, y'_k)$$

и останатите три се пресметуваат на сличен начин. Од ова добиваме два носечки вектори на паралелограмот $\Delta\Sigma_{j,k}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'_{j,k}B'_{j+1,k}} &= (x_{j+1} - x_j, 0, z'_{j+1,k} - z'_{j,k}) = \left(x_{j+1} - x_j, 0, (x_{j+1} - x_j) \frac{\partial f}{\partial x}(x'_j, y'_k) \right) \\ &= (x_{j+1} - x_j) \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x'_j, y'_k) \right), \\ \overrightarrow{B'_{j,k}B'_{j,k+1}} &= (0, y_{k+1} - y_k, z'_{j,k+1} - z'_{j,k}) = \left(0, y_{k+1} - y_k, (y_{k+1} - y_k) \frac{\partial f}{\partial y}(x'_j, y'_k) \right) \\ &= (y_{k+1} - y_k) \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x'_j, y'_k) \right). \end{aligned}$$

Плоштината на $\Delta\Sigma_{j,k}$ е должината на векторскиот производ на овие вектори:

$$P(\Delta\Sigma_{j,k}) = \left| \overrightarrow{B'_{j,k}B'_{j+1,k}} \times \overrightarrow{B'_{j,k}B'_{j,k+1}} \right|.$$

Означуваме $\Delta x_j := x_{j+1} - x_j$, $\Delta y_k := y_{k+1} - y_k$ и пресметуваме:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'_{j,k}B'_{j+1,k}} \times \overrightarrow{B'_{j,k}B'_{j,k+1}} &= \Delta x_j \Delta y_k \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x'_j, y'_k) \right) \times \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x'_j, y'_k) \right) \\ &= \Delta x_j \Delta y_k \left(\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x'_j, y'_k) \\ 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x'_j, y'_k) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x'_j, y'_k) & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x'_j, y'_k) & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= \Delta x_j \Delta y_k \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x'_j, y'_k), -\frac{\partial f}{\partial y}(x'_j, y'_k), 1 \right) \end{aligned}$$

Последователно (бидејќи $\Delta x_j > 0$, $\Delta y_k > 0$),

$$P(\Delta \Sigma_{j,k}) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x'_j, y'_k)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x'_j, y'_k)\right)^2 + 1} \Delta x_j \Delta y_k.$$

Со тоа го добивме следниов идентитет за интегралната сума (5.1.3):

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k} G(x'_j, y'_k, f(x'_j, y'_k)) P(\Delta \Sigma_{j,k}) \\ &= \sum_{j,k} G(x'_j, y'_k, f(x'_j, y'_k)) \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x'_j, y'_k)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x'_j, y'_k)\right)^2 + 1} \Delta x_j \Delta y_k. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Десната страна е интегрална сума за функцијата од две променливи:

$$D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto G(x, y, f(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2 + 1}, \quad (5.1.7)$$

и затоа, кога бројот на делбени точки x_j и y_k тежи кон бесконечност и Δx_j и Δy_k тежат кон 0, десната страна на (5.1.6) тежи кон интегралот на функцијата (5.1.7) на D . Бидејќи левата страна на (5.1.6) тежи кон површинскиот интеграл G на Σ (по дефиниција), го добивме првиот дел од следното тврдење.

Теорема 5.1.2. Нека Σ е површина во $\mathbb{R}^3$ и G скаларно поле дефинирано во околина на Σ .

- (а) Ако Σ е график на функцијата $f = f(x, y)$ дефинирана на областа $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (значи D е проекцијата на Σ на xOy -рамнината), тогаш:

$$\iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS = \iint_D G(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

- (б) Ако Σ е график на функцијата $f = f(x, z)$ дефинирана на областа $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (значи D е проекцијата на Σ на xOz -рамнината), тогаш:

$$\iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS = \iint_D G(x, f(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} dx dz.$$

- (в) Ако Σ е график на функцијата $f = f(y, z)$ дефинирана на областа $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (значи D е проекцијата на Σ на yOz -рамнината), тогаш:

$$\iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS = \iint_D G(f(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} dy dz.$$

Забелешка 5.1.3. Деловите (б) и (в) се проверуваат на ист начин како (а).

Ако Σ е составена од површините $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$, такви што секоја од нив е како во (а), (б) или (в), тогаш површинскиот интеграл (5.1.1) се дефинира на следниов начин:

$$\iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS := \iint_{\Sigma_1} G(x, y, z) dS + \dots + \iint_{\Sigma_k} G(x, y, z) dS. \quad (5.1.8)$$

Заради ова, (5.1.4) го дава идентитетот:

$$\text{плоштина на } \Sigma = \iint_{\Sigma} dS. \quad (5.1.9)$$

Пример 5.1.4. Дадено е скаларното поле $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = 3xy + xz$. Да се пресмета:

$$\iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS,$$

каде што Σ е делот од рамнината $x + y + z = 1$ којшто се наоѓа во прв октант.

Рамнината $x + y + z = 1$ ја сече x -оската во $A(1, 0, 0)$ (се добива кога $y = 0$ и $z = 0$), ја сече y -оската во $B(0, 1, 0)$ (се добива кога $x = 0$ и $z = 0$) и z -оската во $C(0, 0, 1)$ (се добива кога $x = 0$ и $y = 0$). Значи, Σ е триаголникот со темиња A , B и C ; види ја сликата 5.1.2 (а). Неговата проекција на xOy -рамнината е триаголникот D со темиња во: $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(0, 0)$. Со изразување на z од равенката на рамнината, добиваме дека Σ е график на функцијата $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 1 - x - y$, од што следува:

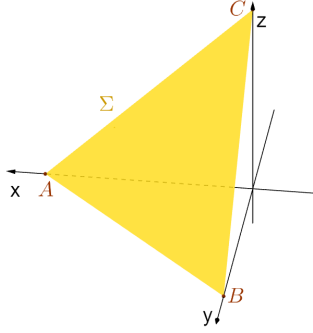
$$\iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS = \iint_D (3xy + x(1 - x - y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Бидејќи $\frac{\partial f}{\partial x} = -1$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$, имаме:

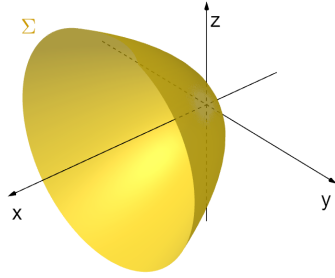
$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS \\ &= \sqrt{3} \iint_D (3xy + x - x^2 - xy) dx dy = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} (2xy + x - x^2) dy dx \\ &= 2\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} xy dy dx + \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x dy dx - \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 dy dx \\ &= 2\sqrt{3} \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} y dy \right) dx + \sqrt{3} \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} dy \right) dx - \sqrt{3} \int_0^1 x^2 \left(\int_0^{1-x} dy \right) dx \\ &= 2\sqrt{3} \int_0^1 x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx + \sqrt{3} \int_0^1 x \cdot y \Big|_0^{1-x} dx - \sqrt{3} \int_0^1 x^2 \cdot y \Big|_0^{1-x} dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 x(1-x)^2 dx + \sqrt{3} \int_0^1 x(1-x) dx - \sqrt{3} \int_0^1 x^2(1-x) dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx + \sqrt{3} \int_0^1 (x - x^2) dx - \sqrt{3} \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3 + x - x^2 - x^2 + x^3) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{3} \left(2 \int_0^1 x dx - 4 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_0^1 x^3 dx \right) \\
&= \sqrt{3} \left(1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6}.
\end{aligned}$$

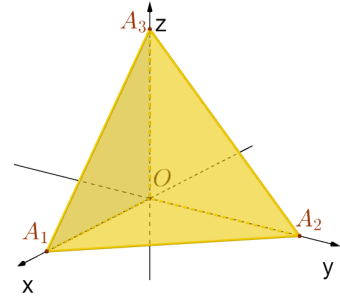
Слика 5.1.2: Површината во



(а) Пример 5.1.4



(б) Пример 5.1.5



(в) Пример 5.1.6

Пример 5.1.5. Нека Σ е делот од параболоидот: $x = y^2 + z^2$, каде што $0 \leq x \leq 9$. Да се пресмета плоштината на Σ .

Плоштината на Σ ќе ја пресметаме со формулата (5.1.9); Σ изгледа како на сликата 5.1.2 (б). Јасно, Σ е графикот на функцијата $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(y, z) = y^2 + z^2$, каде што D е проекцијата на Σ на yOz -рамнината. Областа D се состои од сите (y, z) за кои важи: $y^2 + z^2 \leq 9$ (затоа што $0 \leq x \leq 9$); значи D е ограничена со кружницата во yOz -рамнината со радиус 3. Парцијалните изводи на f се: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$. Од ова добиваме:

$$\iint_{\Sigma} dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} dydz = \iint_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dydz.$$

Воведуваме поларни координати:

$$\begin{cases} y = \rho \cos \varphi \\ z = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Областа D се добива кога: $0 \leq \rho \leq 3$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Бидејќи Јакобијанот за смената е $|J| = \rho$ и $y^2 + z^2 = \rho^2$, имаме:

$$\iint_{\Sigma} dS = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\varphi d\rho = \int_0^3 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\rho = 2\pi \int_0^3 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho.$$

Во последниот интеграл воведуваме смена $t = 1 + 4\rho^2$, $dt = 8\rho d\rho$, и добиваме:

$$\text{плоштината на } \Sigma = \iint_{\Sigma} dS = \frac{\pi}{4} \int_1^{37} \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^{37} = \frac{\pi}{6} (37\sqrt{37} - 1).$$

Пример 5.1.6. Дадено е скаларното поле $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = x + y + z$. Да се пресмета:

$$\iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS,$$

каде што Σ е сидот на тетраедерот со темиња во: $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$ и $O(0, 0, 0)$.

Површината Σ е составена од следниве четири триаголника (види ја сликата 5.1.2 (в)):

Σ_1 : триаголникот со темиња A_1 , A_2 и O , Σ_2 : триаголникот со темиња A_1 , A_3 и O ,
 Σ_3 : триаголникот со темиња A_2 , A_3 и O , Σ_4 : триаголникот со темиња A_1 , A_2 и A_3 .

Следува:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS &= \iint_{\Sigma_1} G(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} G(x, y, z) dS \\ &\quad + \iint_{\Sigma_3} G(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_4} G(x, y, z) dS. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Бидејќи Σ_1 лежи во xOy -рамнината, неговата проекција D_1 на оваа рамнина е истиот триаголник; следува дека Σ_1 е график на функцијата $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x, y) = 0$. Бидејќи $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$, добиваме:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} G(x, y, z) dS &= \iint_{D_1} G(x, y, f_1(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_{D_1} (x + y) dx dy = \iint_{D_1} x dx dy + \iint_{D_1} y dx dy \\ &= \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} dy \right) dx + \int_0^1 y \left(\int_0^{1-y} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 x(1-x) dx + \int_0^1 y(1-y) dy \\ &= \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 y dy - \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Слично, Σ_2 лежи во xOz -рамнината и неговата проекција D_2 на оваа рамнина е истиот триаголник. Од ова следува дека Σ_2 е график на функцијата $f_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x, z) = 0$. Бидејќи $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$, добиваме:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_2} G(x, y, z) dS &= \iint_{D_2} G(x, f_2(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2} dx dz \\ &= \iint_{D_2} (x + z) dx dz = \iint_{D_2} x dx dz + \iint_{D_2} z dx dz. \end{aligned}$$

Последните два интеграла се евалуираат исто како погоре и се добива:

$$\iint_{\Sigma_2} G(x, y, z) dS = \frac{1}{3}.$$

Аналогно, Σ_3 лежи во yOz -рамнината и неговата проекција D_3 на оваа рамнина е истиот триаголник. Значи, Σ_3 е график на функцијата $f_3 : D_3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(y, z) = 0$. Нејзините парцијални изводи се: $\frac{\partial f_3}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial f_3}{\partial z} = 0$. Исто како претходно, добиваме дека:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_3} G(x, y, z) dS &= \iint_{D_3} G(f_3(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)^2} dydz \\ &= \iint_{D_3} (y + z) dydz = \iint_{D_3} y dydz + \iint_{D_3} z dydz = \dots = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(последните интеграла се персметуваат на ист начин како претходно). Останува уште да го пресметаме интегралот по Σ_4 . Тој лежи на рамнината што поминува низ точките A_1 , A_2 и A_3 и нејзината равенка е (од формулата за равенка на рамнина низ три точки):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{односно (по средувањето): } x + y + z = 1.$$

Бидејќи проекцијата на Σ_4 на xOy -рамнината е триаголникот D_1 (од пресметката на интегралот по Σ_1), добиваме дека Σ_4 е графикот на функцијата $f_4 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_4(x, y) = 1 - x - y$ (се добива со изразување на z од равенката на рамнината). Парцијалните изводи на оваа функција се: $\frac{\partial f_4}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial f_4}{\partial y} = -1$, од што следува:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_4} G(x, y, z) dS &= \iint_{D_1} G(x, y, f_4(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_4}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_4}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \sqrt{3} \iint_{D_1} dx dy = \sqrt{3} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} dy \right) dx = \sqrt{3} \int_0^1 (1-x) dx \\ &= \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

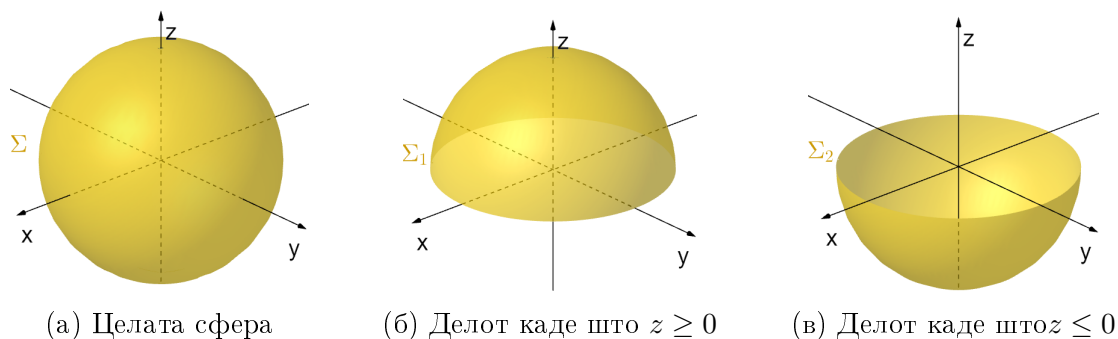
Заменување во (5.1.10) и добиваме:

$$\iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 5.1.7. Дадено е скаларното поле $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = xy + z$. Да се пресмета:

$$\iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS,$$

Слика 5.1.3: Пример 5.1.7



каде што Σ е сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Од $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ изразуваме z и добиваме:

$$z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \quad (5.1.11)$$

Целата сфера не можеме да ја запишеме како график на една функција, но според (5.1.11), можеме горната хемисфера и долната хемисфера посебно да ги запишеме како графици на функции од променливите (x, y) :

$$\text{горната хемисфера е графикот на } f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (5.1.12)$$

$$\text{долната хемисфера е графикот на } f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (5.1.13)$$

каде што D е проекцијата на сферата на xOy -рамнината (проекцијата на горната хемисфера е иста со проекцијата на долната хемисфера и тие се исти со проекцијата на целата сфера); види ја сликата 5.1.3. Да забележиме дека D е точно областа во xOy -рамнината која е ограничена со $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0$, што е кругот ограничен со кружницата $x^2 + y^2 = 1$. Ја означуваме горната хемисфера со Σ_1 и долната хемисфера со Σ_2 . Интегралот на целата сфера го делиме на два дела:

$$\iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} G(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} G(x, y, z) dS. \quad (5.1.14)$$

За да го пресметаме првиот интеграл, од (5.1.12) добиваме:

$$\iint_{\Sigma_1} G(x, y, z) dS = \iint_D G(x, y, f_1(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Бидејќи парцијалните изводи на f_1 се:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

добиваме:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma_1} G(x, y, z) dS &= \iint_D \left(xy + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &= \iint_D \left(xy + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &= \iint_D \left(\frac{xy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + 1 \right) dx dy.
 \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

За да го решиме овој интеграл воведуваме поларни координати:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \tag{5.1.16}$$

Областа D се добива кога: $0 \leq \rho \leq 1$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Бидејќи Јакобијанот за поларните координати е $|J| = \rho$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$, имаме:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma_1} G(x, y, z) dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{1 - \rho^2}} + 1 \right) \rho d\varphi d\rho \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3 \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\varphi d\rho + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\varphi d\rho.
 \end{aligned} \tag{5.1.17}$$

Првиот интеграл го запишуваме на следниов начин:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3 \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\varphi d\rho = \int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right) d\rho.$$

Во внатрешниот интеграл ставаме смена $t = \sin \varphi$, $dt = \cos \varphi d\varphi$, и добиваме:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3 \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\varphi d\rho = \int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left(\int_0^0 t dt \right) d\rho = \int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1 - \rho^2}} \cdot 0 d\rho = 0.$$

Вториот интеграл во (5.1.17) можеме директно да го пресметаме:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\varphi d\rho = \int_0^1 \rho \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\rho = \int_0^1 \rho \cdot \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho d\rho = 2\pi \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^1 = \pi.$$

Значи:

$$\iint_{\Sigma_1} G(x, y, z) dS = \pi.$$

За да го пресметаме:

$$\iint_{\Sigma_2} G(x, y, z) dS,$$

ја користиме параметризацијата на долната хемисфера дадена со (5.1.13):

$$\iint_{\Sigma_2} G(x, y, z) dS = \iint_D G(x, y, f_2(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2} dx dy,$$

Парцијалните изводи на f_2 се:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

од што следува дека:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_2} G(x, y, z) dS &= \iint_D \left(xy - \sqrt{1-x^2-y^2} \right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2}} dx dy \\ &= \iint_D \left(xy - \sqrt{1-x^2-y^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \\ &= \iint_D \left(\frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - 1 \right) dx dy. \end{aligned}$$

Овој интеграл се пресметува на ист начин како и (5.1.15) (со воведување на поларните смени (5.1.16)) и се добива:

$$\iint_{\Sigma_2} G(x, y, z) dS = -\pi.$$

Заменуваме во (5.1.14) и добиваме:

$$\iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS = \pi - \pi = 0.$$

Пред да видиме уште еден пример, ќе го коментираме типичното физичко толкување на површинскиот интеграл од скаларно поле. Нека е даден танок лист направен од некој материјал во облик на површината Σ и нека $\rho(x, y, z)$ е неговата површинска густина во точката (x, y, z) (димензиите на $\rho(x, y, z)$ се [маса]/[должина]²). Тогаш,

$$\text{масата на листот } m = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS. \quad (5.1.18)$$

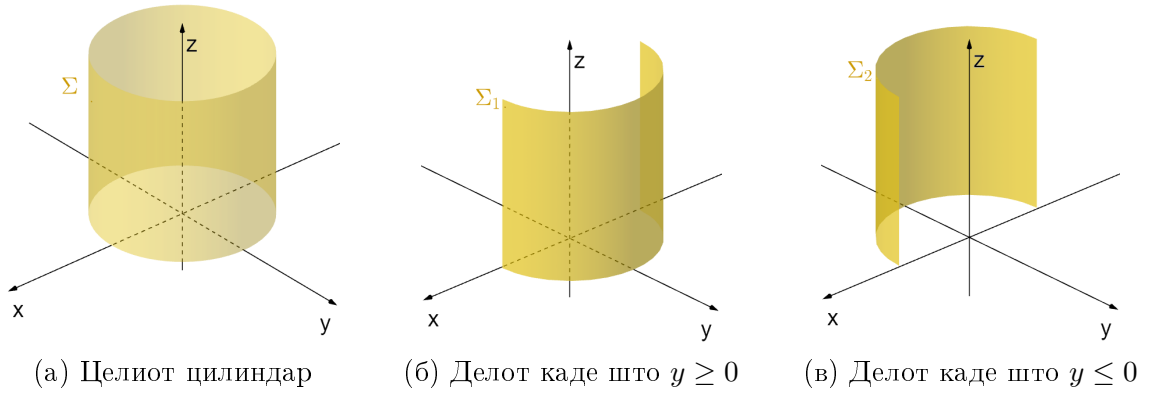
За да се увериме во ова, ќе ја разгледаме прво ситуацијата кога Σ е график на функција $f = f(x, y)$ дефинирана на областа $D \subseteq \mathbb{R}^2$; т. е. Σ е дадена со (5.1.2). Тогаш интегралот на десната страна е границата на интегралните суми (5.1.3) (со $\rho(x, y, z)$ на местото од $G(x, y, z)$); ги користиме истите ознаки како и на почетокот на овој дел. Кога страните на $\Delta\Sigma_{j,k}$ се мали, $P(\Delta\Sigma_{j,k})$ е добра апроксимација за плоштината на делот од Σ кој се наоѓа над $D_{j,k}$. Исто така, површинската густина нема да се променува значително на овој дел и затоа можеме да ја третираме како да е константна и, со тоа, еднаква на $\rho(A'_{j,k})$. Од ова следува дека $\rho(A'_{j,k})P(\Delta\Sigma_{j,k})$ е апроксимација за масата на делот од листот што се наоѓа над $D_{j,k}$. Значи, (5.1.3) (со $\rho(x, y, z)$ на местото од $G(x, y, z)$) е апроксимација за масата на листот која станува сè подобра кога бројот на делбени точки станува сè поголем и страните на $\Delta\Sigma_{j,k}$ стануваат сè помали. По лимес, (5.1.3) тежи кон масата на листот и истовремено тежи кон површинскиот интеграл на ρ ; од ова следува точноста на (5.1.18), кога Σ е график на функција $f = f(x, y)$. На ист начин се проверува точноста на (5.1.18), кога Σ е график на функција $f = f(x, z)$ или график на функција $f = f(y, z)$. Кога Σ е генерална површина составена од $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$,

каде што секоја од површините Σ_j е од некој од овие типови, валидноста на (5.1.18) следува од (5.1.8).

Со помош на површинскиот интеграл можеме да го определиме и тежиштето на листот: тоа е точката $A^*(x^*, y^*, z^*)$, чиешто координати се дадени со:

$$x^* = \frac{1}{m} \iint_{\Sigma} x \rho(x, y, z) dS, \quad y^* = \frac{1}{m} \iint_{\Sigma} y \rho(x, y, z) dS, \quad z^* = \frac{1}{m} \iint_{\Sigma} z \rho(x, y, z) dS. \quad (5.1.19)$$

Слика 5.1.4: Пример 5.1.8



Пример 5.1.8. Даден е лист во облик на делот од цилиндарот:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 3, \quad (5.1.20)$$

со површинска густина: $\rho(x, y, z) = 3 - z$. Да се пресмета масата и тежиштето на листот.

Масата е дадена со (5.1.18), каде што Σ е (5.1.20). Јасно, Σ не може да се претстави како график на функција од променливи (x, y) , но може да се претстави како графици на функции од променливи (x, z) . За да го направиме тоа, изразуваме y од равенката на цилиндарот и добиваме: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Од ова следува дека Σ е составена од следниве две површини:

$$\Sigma_1 : \text{графикот на функцијата } f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x, z) = \sqrt{1-x^2},$$

$$\Sigma_2 : \text{графикот на функцијата } f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x, z) = -\sqrt{1-x^2},$$

каде што $D \subseteq \mathbb{R}^2$ е проекцијата на Σ на xOz -рамнината; види ја сликата 5.1.4. Да забележиме дека D е правоаголникот $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 3$, во xOz -рамнината (интервалот за x е местото каде што $\sqrt{1-x^2}$ има смисла). (На сличен начин, Σ може да се претстави како графици на две функции од променливи (y, z) .) Следува дека:

$$\text{масата на листот } m = \iint_{\Sigma_1} \rho(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} \rho(x, y, z) dS. \quad (5.1.21)$$

Парцијалните изводи на f_1 се:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0,$$

од што за првиот интеграл добиваме:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} \rho(x, y, z) dS &= \iint_D (3-z) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx dz = \iint_D \frac{3-z}{\sqrt{1-x^2}} dx dz \\ &= \int_0^3 (3-z) \left(\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) dz = \int_0^3 (3-z) \left(\arcsin x \Big|_{-1}^1 \right) dz \\ &= \int_0^3 (3-z) \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) dz = \pi \int_0^3 (3-z) dz = \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

За да го пресметаме интегралот по Σ_2 , прво ги сметаме парцијалните изводи на f_2 :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0.$$

Слично како и за интегралот по Σ_1 , имаме:

$$\iint_{\Sigma_2} \rho(x, y, z) dS = \iint_D (3-z) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx dz = \iint_D \frac{3-z}{\sqrt{1-x^2}} dx dz = \frac{9\pi}{2}$$

(последниот интеграл веќе пресметавме дека е $9\pi/2$). Со замена во (5.1.21) добиваме $m = 9\pi$.

Тежиштето на листот има координати (x^*, y^*, z^*) дадени со (5.1.19). Прво го определуваме x^* :

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{m} \iint_{\Sigma} x \rho(x, y, z) dS = \frac{1}{9\pi} \iint_{\Sigma_1} x \rho(x, y, z) dS + \frac{1}{9\pi} \iint_{\Sigma_2} x \rho(x, y, z) dS \\ &= \frac{1}{9\pi} \iint_D x(3-z) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx dz + \frac{1}{9\pi} \iint_D x(3-z) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx dz \\ &= \frac{2}{9\pi} \iint_D \frac{(3-z)x}{\sqrt{1-x^2}} dx dz = \frac{2}{9\pi} \int_0^3 (3-z) \left(\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) dz. \end{aligned}$$

За внатрешниот интеграл употребуваме смена $t = 1 - x^2$, $dt = -2x dx$:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Кога ќе ги ставиме границите -1 и 1 добиваме вредност 0 , од што следува $x^* = 0$. За y^* имаме:

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{1}{m} \iint_{\Sigma} y \rho(x, y, z) dS = \frac{1}{m} \iint_{\Sigma_1} y \rho(x, y, z) dS + \frac{1}{m} \iint_{\Sigma_2} y \rho(x, y, z) dS \\ &= \frac{1}{m} \iint_D \sqrt{1-x^2} (3-z) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx dz - \frac{1}{m} \iint_D \sqrt{1-x^2} (3-z) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx dz. \end{aligned}$$

Последните два интеграла се исти, но со спротивен знак и затоа $y^* = 0$. На крајот, z^* е:

$$\begin{aligned}
 z^* &= \frac{1}{m} \iint_{\Sigma} z \rho(x, y, z) dS = \frac{1}{9\pi} \iint_{\Sigma_1} z \rho(x, y, z) dS + \frac{1}{9\pi} \iint_{\Sigma_2} z \rho(x, y, z) dS \\
 &= \frac{1}{9\pi} \iint_D z(3-z) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx dz + \frac{1}{9\pi} \iint_D z(3-z) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx dz \\
 &= \frac{2}{9\pi} \iint_D \frac{z(3-z)}{\sqrt{1-x^2}} dx dz = \frac{2}{9\pi} \int_0^3 (3z - z^2) \left(\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) dz \\
 &= \frac{2}{9\pi} \int_0^3 (3z - z^2) \left(\arcsin x \Big|_{-1}^1 \right) dz = \frac{2}{9} \int_0^3 (3z - z^2) dz = 1.
 \end{aligned}$$

Значи, тежиштето се наоѓа во точката $(0, 0, 1)$.

Кратко ќе го коментираме резултатот. Фактот дека површинската густина е дадена со $\rho(x, y, z) = 3 - z$, кажува дека листот станува помалку масивен како што се зголемува z -координатата. Заради тоа, тежиштето се наоѓа поблиску до дното.

5.2. Површински интеграли од векторски полиња

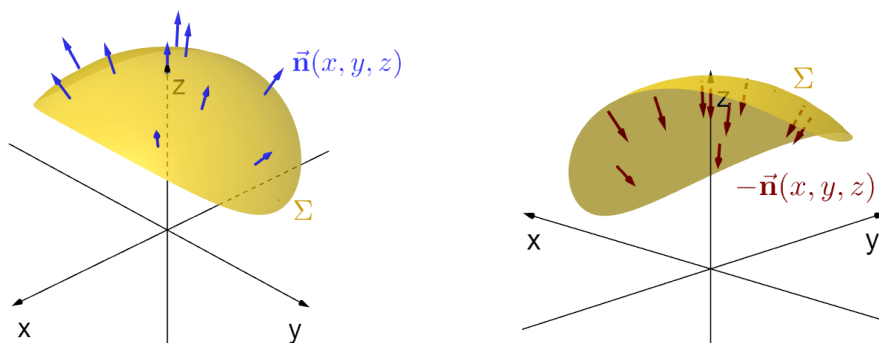
Во овој дел ќе дефинираме интеграли од векторски полиња по површини. Тие го даваат флуksот (протокот) на полето низ површината. За таа цел, прво треба да го воведеме поимот за ориентација на површина. Површината $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ ќе велиме дека е **ориентирана** ако во секоја нејзина точка $(x, y, z) \in \Sigma$ имаме избрано единечен нормален вектор $\vec{n}(x, y, z)$ за Σ , така што овие вектори непрекинато се менуваат по површината; тоа значи дека за блиски точки на Σ , векторите незначително се променуваат. Вака избраните вектори формираат векторско поле $(x, y, z) \mapsto \vec{n}(x, y, z)$ дефинирано на површината кое ќе го викаме **единечно нормално векторско поле на Σ** ; нагласуваме дека ова векторско поле е ориентацијата на површината. Површините за кои можеме да избереме единечно нормално векторско поле се викаат **ориентабилни**. Секоја ориентабилна површина има две ориентации: ако $(x, y, z) \mapsto \vec{n}(x, y, z)$ е единечно нормално векторско поле кое ја дава едната ориентација на Σ , тогаш векторското поле составено од спротивните вектри $(x, y, z) \mapsto -\vec{n}(x, y, z)$ е, исто така, единечно нормално векторско поле на Σ и тоа ја дава другата ориентација; види ја сликата 5.2.1. Изборот на ориентација значи избор на една страна на Σ (определена со векторите $\vec{n}(x, y, z)$) и заради тоа, ориентабилните површини се викаат двострани (имаат две ориентации и со тоа две страни).

Забелешка 5.2.1. Постојат површини кои не се ориентабилни, односно кои имаат една страна. Типичен пример е Мобиусовата лента дадена на сликата 5.2.2. На неа не може да се избере единечно нормално векторско поле кое непрекинато се менува по неа.

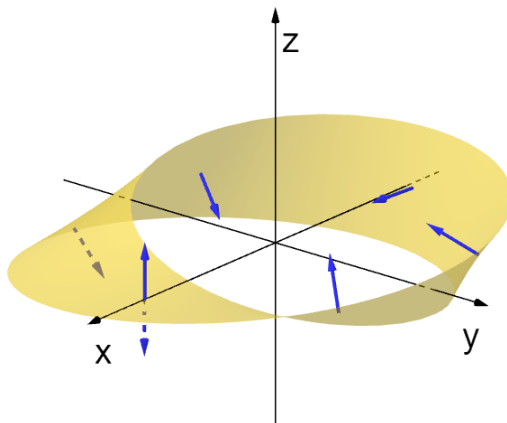
Во ситуациите кои ќе ги разгледуваме, површините секогаш ќе бидат ориентабилни.

Нека $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ е ориентирана површина; уште еднаш, тоа значи дека за неа имаме избрано единечно нормално векторско поле $(x, y, z) \mapsto \vec{n}(x, y, z)$ (т. е. имаме избрано

Слика 5.2.1: Двете ориентации на ориентабилна површина



Слика 5.2.2: На Моебиусовата лента не може да се избере нормално векторско поле



една страна на Σ). Нека $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ е векторско поле од три променливи дефинирано во околина на Σ . Интегралот на $\vec{F}$ на Σ се означува и дефинира со:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} := \iint_{\Sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n})(x, y, z) dS, \quad (5.2.1)$$

каде што десната страна е површински интеграл на скаларното поле:

$$(x, y, z) \mapsto (\vec{F} \cdot \vec{n})(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z)$$

(ваквите интеграли веќе ги разгледавме во претходниот дел). Бидејќи $\vec{n}(x, y, z)$ е единечен нормален вектор на Σ во точката (x, y, z) , $(\vec{F} \cdot \vec{n})(x, y, z)$ е проекцијата на $\vec{F}(x, y, z)$ на $\vec{n}(x, y, z)$, односно, нормалната компонента на $\vec{F}$ на Σ . Таа е позитивна или негативна во зависност од тоа дали аголот помеѓу $\vec{F}(x, y, z)$ и $\vec{n}(x, y, z)$ е помал или поголем од $\pi/2$. Од (5.2.1) следува дека $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ е интегралот по Σ од нормалната компонента на $\vec{F}$ на Σ .

Забелешка 5.2.2. Ако $\bar{\Sigma}$ е површината Σ ориентирана со другата ориентација определена со единечното нормално векторско поле $(x, y, z) \mapsto -\vec{n}(x, y, z)$, тогаш од (5.2.1)

добиваме:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Забелешка 5.2.3. Ако во секоја точка $(x, y, z) \in \Sigma$, $\vec{F}(x, y, z)$ лежи во тангентната рамнина на Σ , тогаш $\vec{F} \cdot \vec{n} = 0$, од што следува дека: $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$.

Ако површина Σ е составена од ориентираните површини $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$, тогаш површинскиот интеграл на векторското поле $\vec{F}$ на Σ се дефинира на следниов начин:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} := \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \dots + \iint_{\Sigma_k} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (5.2.2)$$

Во практика, површината Σ ќе биде составена од неколку површини кои се дадени како графици на функции од две променливи. Кога Σ е график на функција од две променливи, формулата (5.2.1) може да се запише на поедноставен начин. За да го видиме тоа, нека Σ е график на функцијата $f = f(x, y)$ дефинирана на областа $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (т. е. Σ е дадена со (5.1.2)); да забележиме дека D е проекцијата на Σ на xOy -рамнината. Во секоја точка од Σ имаме два нормални вектори (кои не мора да се единечни):

$$\begin{aligned} \vec{n}_1(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right), \quad \text{со должина: } |\vec{n}_1(x, y, z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1}, \\ \vec{n}_2(x, y, z) &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right), \quad \text{со должина: } |\vec{n}_2(x, y, z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1}; \end{aligned}$$

јасно, $\vec{n}_2(x, y, z) = -\vec{n}_1(x, y, z)$. Од нив ги добиваме следните два единечни нормални вектори кои ги даваат двете страни на Σ :

$$\vec{n}_1(x, y, z) = \frac{\vec{n}_1(x, y, z)}{|\vec{n}_1(x, y, z)|}, \quad \vec{n}_2(x, y, z) = \frac{\vec{n}_2(x, y, z)}{|\vec{n}_2(x, y, z)|}. \quad (5.2.3)$$

Кој од овие вектори ќе ни треба, зависи од конкретниот проблем. Должините на $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ се еднакви на факторот што се појавува во формулата за површински интеграл од скаларно поле на Σ ; види ја теоремата 5.1.2 (а). Ако ни треба страната дадена со $\vec{n}_1$, добиваме:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1}} dS \\ &= \iint_D \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1}} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1} dx dy \\ &= \iint_D \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) dx dy. \end{aligned}$$

Ако ни треба другата страна на Σ определена со $\vec{n}_2$, тогаш на аналоген начин ја добиваме истата формула со единствената разлика што, наместо $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$, сега се појавува спротивниот вектор: $-\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$. Добивме:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \left(\pm \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)\right) dx dy, \quad (5.2.4)$$

каде што знакот пред нормалниот вектор се избира во зависност од ориентацијата на Σ .

Ако површината Σ е график на функцијата $f = f(x, z)$ дефинирана на областа $D \subseteq \mathbb{R}^2$, тогаш, слично, во секоја точка имаме два нормални вектори (кои не мора да се единечни):

$$\begin{aligned} \vec{n}_1(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, -1, \frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad \text{со должина: } |\vec{n}_1(x, y, z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \\ \vec{n}_2(x, y, z) &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, 1, -\frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad \text{со должина: } |\vec{n}_2(x, y, z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \end{aligned}$$

Од нив добиваме два единечни нормални вектори $\vec{n}_1(x, y, z)$ и $\vec{n}_2(x, y, z)$ дефинирани со (5.2.3); тие ги определуваат двете страни на Σ . Се разбира, кој од овие вектори ќе ни треба зависи од конкретниот проблем. Бидејќи должините на $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ се еднакви на факторот што се појавува во формулата за површински интеграл од скаларно поле кога површината е график на $f = f(x, z)$ (види ја теоремата 5.1.2 (б)), на ист начин како и претходно, добиваме

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(x, f(x, z), z) \cdot \left(\pm \left(\frac{\partial f}{\partial x}, -1, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) dx dz, \quad (5.2.5)$$

каде знакот пред нормалниот вектор се избира во зависност од ориентацијата на Σ .

На крај, ако Σ е график на функцијата $f = f(y, z)$ дефинирана на областа $D \subseteq \mathbb{R}^2$ тогаш, повторно, во секоја точка имаме два нормални вектори (кои не мора да се единечни):

$$\begin{aligned} \vec{n}_1(x, y, z) &= \left(-1, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad \text{со должина: } |\vec{n}_1(x, y, z)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \\ \vec{n}_2(x, y, z) &= \left(1, -\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad \text{со должина: } |\vec{n}_2(x, y, z)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \end{aligned}$$

Соодветните единечни нормални вектори $\vec{n}_1(x, y, z)$ и $\vec{n}_2(x, y, z)$ кои ги определуваат двете страни на Σ , се дадени со (5.2.3). Слично како и претходно, од теоремата 5.1.2 (в), добиваме:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(f(y, z), y, z) \cdot \left(\pm \left(-1, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) dy dz, \quad (5.2.6)$$

каде што знакот пред нормалниот вектор се избира во зависност од ориентацијата на Σ . Со ова ги добивме следните формули.

Теорема 5.2.4. Нека Σ е ориентирана површина во $\mathbb{R}^3$ и нека $\vec{F}$ е векторско поле дефинирано во околина на Σ .

- (а) Ако Σ е график на функцијата $f = f(x, y)$, дефинирана на областа $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (значи D е проекцијата на Σ на xOy -рамнината), тогаш за интегралот $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ важи равенството (5.2.4) со соодветен избор на знак пред нормалниот вектор, во зависност од ориентацијата на Σ .
- (б) Ако Σ е график на функцијата $f = f(x, z)$, дефинирана на областа $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (значи D е проекцијата на Σ на xOz -рамнината), тогаш за интегралот $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ важи равенството (5.2.5) со соодветен избор на знак пред нормалниот вектор, во зависност од ориентацијата на Σ .
- (в) Ако Σ е график на функцијата $f = f(y, z)$, дефинирана на областа $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (значи D е проекцијата на Σ на yOz -рамнината), тогаш за интегралот $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ важи равенството (5.2.6) со соодветен избор на знак пред нормалниот вектор, во зависност од ориентацијата на Σ .

Ќе разгледаме неколку примери.

Пример 5.2.5. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$. Површината Σ е триаголникот ABC , каде што $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ и $C(0, 0, 3)$, ориентирана во спротивна насока од координатниот почеток (горната страна). Да се пресмета:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Равенката на рамнината што минува низ точките A , B и C е дадена со:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff 6x + 3y + 2z = 6.$$

Проекцијата на Σ на xOy -рамнината е триаголникот D со темиња во $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 2)$. Изразуваме z од равенката на рамнината и добиваме дека Σ е графикот на функцијата $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3 - 3x - 3y/2$. Површината Σ ги има следниве два нормални вектори:

$$\vec{n}_1(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) = \left(-3, -\frac{3}{2}, -1 \right), \quad \vec{n}_2(x, y, z) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) = \left(3, \frac{3}{2}, 1 \right).$$

Јасно, $\vec{n}_2(x, y, z)$ покажува во спротивна страна од координатниот почеток и затоа тој ја дава ориентацијата на Σ што ни треба. Добиваме:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \left(3, \frac{3}{2}, 1 \right) dx dy \\ &= \iint_D \left(x + y, x + 3 - 3x - \frac{3y}{2}, y + 3 - 3x - \frac{3y}{2} \right) \cdot \left(3, \frac{3}{2}, 1 \right) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D \left(-3x + \frac{y}{4} + \frac{15}{2} \right) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} \left(-3x + \frac{y}{4} + \frac{15}{2} \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\left(-3xy + \frac{y^2}{8} + \frac{15y}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=2-2x} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{31}{2} - 22x + \frac{13x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{31x}{2} - 11x^2 + \frac{13x^3}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{20}{3}.
\end{aligned}$$

Пример 5.2.6. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y, z, x + y)$. Нека Σ е делот од сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, каде што $z \geq 0$ и $x \geq 0$, ориентиран во спротивна насока од координатниот почеток. Да се пресмета:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Изразуваме z од равенката на сферата: $z = \pm\sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Бидејќи $z \geq 0$ на делот што ни треба, добиваме: $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$; ова е горната хемисфера и нејзината проекција на xOy -рамнината е кругот со радиус 3 и центар во координатниот почеток. Бидејќи Σ е делот каде што $x \geq 0$, нејзината проекција D на xOy -рамнината е страната од овој круг каде што $x \geq 0$; види ја сликата 5.2.3 (а). Значи, Σ е график на функцијата $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Површината Σ ги има следниве два нормални вектори:

$$\begin{aligned}
\vec{n}_1(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) = \left(-\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, -1 \right); \\
\vec{n}_2(x, y, z) &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, 1 \right).
\end{aligned}$$

Векторот $\vec{n}_1(x, y, z)$ покажува кон координатниот почеток (има негативна z -координата). Бидејќи Σ е ориентирана во спротивна насока од координатниот почеток, нам ни треба векторот $\vec{n}_2(x, y, z)$. За интегралот добиваме:

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, 1 \right) dx dy \\
&= \iint_D (x^2y, \sqrt{9 - x^2 - y^2}, x + y) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, 1 \right) dx dy \\
&= \iint_D \left(\frac{x^3y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} + x + 2y \right) dx dy.
\end{aligned}$$

Воведуваме поларни координати:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi; \end{cases}$$

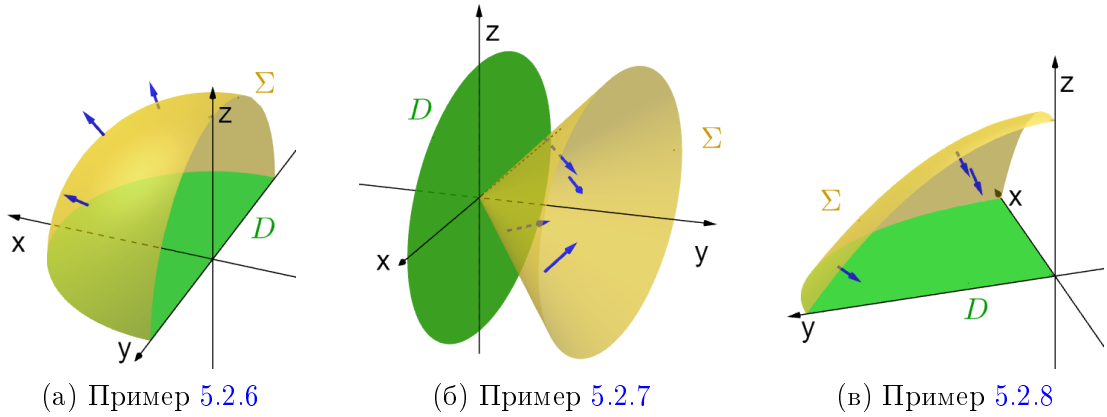
Јакобијанот за смената е $|J| = \rho$. Областа D се добива кога $0 \leq \rho \leq 3$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Бидејќи $x^2 + y^2 = \rho^2$, имаме:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\rho^4 \cos^3 \varphi \sin \varphi}{\sqrt{9 - \rho^2}} + \rho \cos \varphi + 2\rho \sin \varphi \right) \rho d\varphi d\rho \\ &= \int_0^3 \frac{\rho^5}{\sqrt{9 - \rho^2}} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi \right) d\rho + \int_0^3 \rho^2 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \right) d\rho \\ &\quad + 2 \int_0^3 \rho^2 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \right) d\rho. \end{aligned}$$

Во внатрешниот интеграл од првиот интеграл воведуваме смена $t = \cos \varphi$, тогаш $dt = -\sin \varphi d\varphi$ и се добива:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= - \int_0^3 \frac{\rho^5}{\sqrt{9 - \rho^2}} \left(\int_0^1 t^3 dt \right) d\rho + \int_0^3 \rho^2 \left(\sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) d\rho \\ &\quad + 2 \int_0^3 \rho^2 \left(-\cos \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) d\rho \\ &= - \int_0^3 \frac{\rho^5}{\sqrt{9 - \rho^2}} \cdot 0 d\rho + 2 \int_0^3 \rho^2 d\rho + 2 \int_0^3 \rho^2 \cdot 0 d\rho = 2 \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^3 = 18. \end{aligned}$$

Слика 5.2.3: Ориентираната површина Σ и областа D



Пример 5.2.7. Нека Σ е делот од елипсоидниот конус

$$y = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}, \quad \text{каде што } 0 \leq y \leq 1,$$

ориентиран така што нормалните вектори покажуваат кон позитивната y -оска. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x + y, z, xz)$. Да се пресмета:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Површината е график на функцијата $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, z) = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}$, каде што D е проекцијата на Σ на xOz -рамнината (види ја сликата 5.2.3 (б)): тоа е внатрешноста на елипсата

$$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1. \quad (5.2.7)$$

Нормалните вектори на Σ се:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, -1, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{x}{9\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}}, -1, \frac{z}{4\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}} \right), \\ \vec{n}_2(x, y, z) &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, 1, -\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(-\frac{x}{9\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}}, 1, -\frac{z}{4\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}} \right). \end{aligned}$$

Бидејќи Σ е ориентирана така што нормалните вектори треба да покажуваат кон позитивната y -оска, нам ни треба векторот $\vec{n}_2(x, y, z)$. Добиваме:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(x, f(x, z), z) \cdot \left(-\frac{x}{9\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}}, 1, -\frac{z}{4\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}} \right) dx dz \\ &= \iint_D \left(x + \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}, z, xz \right) \cdot \left(-\frac{x}{9\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}}, 1, -\frac{z}{4\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}} \right) dx dz \\ &= \iint_D \left(-\frac{x^2}{9\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}} - \frac{x}{9} + z - \frac{xz^2}{4\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}}} \right) dx dz. \end{aligned}$$

Воведуваме елипсоидни координати:

$$\begin{cases} x = 3\rho \cos \varphi \\ z = 2\rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Јакобијанот за смената е $|J| = 3 \cdot 2 \cdot \rho = 6\rho$. Затоа што ни треба целата внатрешност на елипсата (5.2.7), $0 \leq \rho \leq 1$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Да забележиме дека $x^2/9 + z^2/4 = \rho^2$, од што следува:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(-\frac{9\rho^2 \cos^2 \varphi}{9\rho} - \frac{3\rho \cos \varphi}{9} + 2\rho \sin \varphi - \frac{12\rho^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{4\rho} \right) \cdot 6\rho d\varphi d\rho \\ &= 6 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(-\rho^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{3}\rho^2 \cos \varphi + 2\rho^2 \sin \varphi - 3\rho^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \right) d\varphi d\rho \\ &= -6 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos^2 \varphi d\varphi d\rho - 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos \varphi d\varphi d\rho \\ &\quad + 12 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho - 18 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi d\rho. \end{aligned}$$

Вториот и третиот интеграл се 0 затоа што $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$ и $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$. Добиваме:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -6 \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right) d\rho - 18 \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \right) d\rho.$$

Во првиот интеграл употребуваме $\cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$. Во внатрешниот интеграл на вториот интеграл воведуваме смена $t = \sin \varphi$, $dt = \cos \varphi d\varphi$ и добиваме:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= -3 \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \right) d\rho - 18 \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^0 t^2 dt \right) d\rho \\ &= -3 \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\rho - 3 \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right) d\rho \\ &= -6\pi \int_0^1 \rho^2 d\rho - 3 \int_0^1 \rho^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) d\rho = -6\pi \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 = -2\pi. \end{aligned}$$

Пример 5.2.8. Нека Σ е делот од елипсоидниот параболоид

$$z = 4 - x^2 - \frac{y^2}{2},$$

кој се наоѓа во прв октант ориентиран на тој начин што нормалните вектори покажуваат кон координатниот почеток. Дадено е скаларното поле $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = xyz$. Да се пресмета:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} G \cdot d\vec{S}.$$

Векторското поле $\vec{\nabla} G$ е:

$$\vec{\nabla} G(x, y, z) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right) = (yz, xz, xy).$$

Површината е график на функцијата $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2/2$, каде што D е проекцијата на Σ на xOy -рамнината. Тоа е делот од внатрешноста на елипсата $4 = x^2 + y^2/2$ (се добива кога $z = 0$) што се наоѓа во прв квадрант; види ја сликата 5.2.3 (в). Бидејќи

$$x^2 + y^2/2 = 4 \iff \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1, \quad (5.2.8)$$

D е внатрешноста на делот од елипсата со полуоски 2 по x и $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ по y , што се наоѓа во првиот квадрант од xOy -рамнината. Нормалните вектори на Σ се:

$$\vec{n}_1(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) = (-2x, -y, -1), \quad \vec{n}_2(x, y, z) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) = (2x, y, 1).$$

Затоа што Σ е ориентирана на тој начин што нормалните вектори треба да покажуваат кон координатниот почеток, тие треба да се насочени надолу, од што следува дека нивната z -координата треба да е негативна. Значи, нам ни треба $\vec{n}_1(x, y, z)$. Добиваме:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} G \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(y \left(4 - x^2 - \frac{y^2}{2} \right), x \left(4 - x^2 - \frac{y^2}{2} \right), xy \right) \cdot (-2x, -y, -1) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D \left(-2xy \left(4 - x^2 - \frac{y^2}{2} \right) - xy \left(4 - x^2 - \frac{y^2}{2} \right) - xy \right) dx dy \\
&= - \iint_D \left(3xy \left(4 - x^2 - \frac{y^2}{2} \right) + xy \right) dx dy.
\end{aligned}$$

Ги воведуваме елипсоидните координати:

$$\begin{cases} x = 2\rho \cos \varphi \\ y = 2\sqrt{2}\rho \sin \varphi, \end{cases}$$

со Јакобијан на смената $|J| = 4\sqrt{2}\rho$. Бидејќи D е делот од внатрешноста на елипсата (5.2.8) што се наоѓа во прв квадрант, D се добива за $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Бидејќи $x^2 + y^2/2 = 4\rho^2 \cos^2 \varphi + 4\rho^2 \sin^2 \varphi = 4\rho^2$, имаме:

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} G \cdot d\vec{S} &= -4\sqrt{2} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (12\sqrt{2}\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi (4 - 4\rho^2) + 4\sqrt{2}\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho \\
&= -416 \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^3 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\rho + 384 \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^5 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\rho \\
&= -416 \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right) d\rho + 384 \int_0^1 \rho^5 \left(\int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right) d\rho.
\end{aligned}$$

Во внатрешните интегралите ставаме смена $t = \sin \varphi$, $dt = \cos \varphi d\varphi$ и добиваме:

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} G \cdot d\vec{S} &= -416 \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^1 t dt \right) d\rho + 384 \int_0^1 \rho^5 \left(\int_0^1 t dt \right) d\rho \\
&= -208 \int_0^1 \rho^3 d\rho + 192 \int_0^1 \rho^5 d\rho = -52 + 32 = -20.
\end{aligned}$$

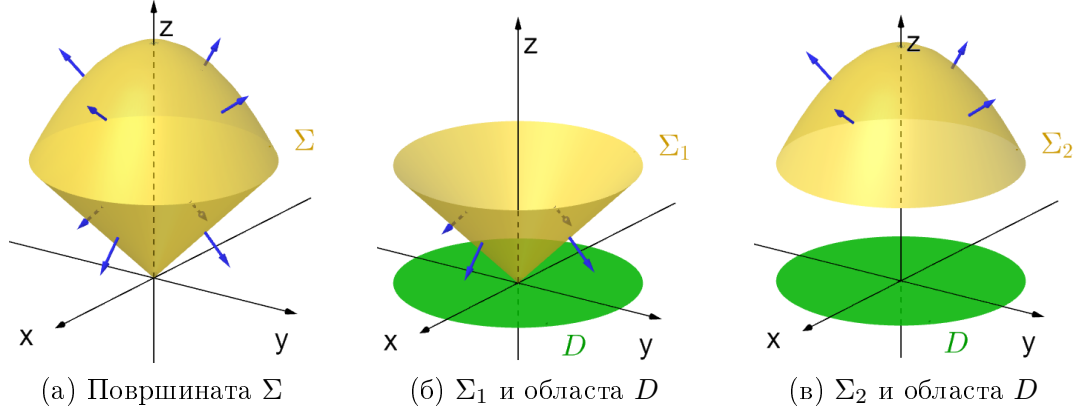
Површината Σ се вика **затворена** ако таа ограничува област во $\mathbb{R}^3$ (на пример, сферата е затворена површина). **Внатрешната страна** на затворената површина Σ е страната определена со единечните нормални вектори коишто покажуваат кон внатрешноста на областа затворена од Σ , додека **надворешната страна** на Σ е таа што е определена од спротивните единечни нормални вектори. Во овие ситуации, за површинскиот интеграл $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ често се користи ознаката:

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Пример 5.2.9. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, y + z, x + y)$. Нека Σ е надворешната страна на сидот на областа ограничена со: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = 2 - x^2 - y^2$. Да се пресмета:

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Површината Σ е составена од следните два дела (види ја сликата 5.2.4):

Слика 5.2.4: Ориентираната површина Σ во примерот 5.2.9

Σ_1 е делот од конусот $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ до пресекот со $z = 2 - x^2 - y^2$, ориентиран на тој начин што нормалните вектори покажуваат во спротивна насока од позитивната z -оска;

Σ_2 е делот од превртениот параболоид $z = 2 - x^2 - y^2$ до пресекот со $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ориентиран на тој начин што нормалните вектори покажуваат во спротивна насока од координатниот почеток.

Интегралот го делиме на два дела:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (5.2.9)$$

За да го најдеме пресекот на $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = 2 - x^2 - y^2$, заменуваме $z^2 = x^2 + y^2$ во $z = 2 - x^2 - y^2$ и добиваме $z = 2 - z^2$, што е еквивалентно со $z^2 + z - 2 = 0$. Решенијата на оваа равенка се: $z = 1$ и $z = -2$. Бидејќи z -координатата е ненегативна на пресекот (пресекот лежи на $z = \sqrt{x^2 + y^2}$), следува дека $z = 1$. Заменуваме во равенката на параболоидот (или конусот) и добиваме $x^2 + y^2 = 1$; тоа значи дека пресекот е кружницата $x^2 + y^2 = 1$ подигната на висина $z = 1$. Заради ова:

$$\Sigma_1 \text{ е график на функцијата } f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\Sigma_2 \text{ е график на функцијата } f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x, y) = 2 - x^2 - y^2,$$

каде што $D \subseteq \mathbb{R}^2$ е кругот ограничен со кружницата $x^2 + y^2 = 1$. Површината Σ_1 ги има следниве два нормални вектори:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right); \\ \vec{n}_2(x, y, z) &= \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right). \end{aligned}$$

Затоа што нормалните вектори на Σ_1 треба да покажуваат во спротивна насока од позитивната z -оска, нам ни треба $\vec{n}_1(x, y, z)$ (овој вектор има негативна z -компонента за разлика од $\vec{n}_2(x, y, z)$). За интегралот по Σ_1 имаме:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(x, y, f_1(x, y)) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right) dx dy \\ &= \iint_D \left(xy\sqrt{x^2 + y^2}, y + \sqrt{x^2 + y^2}, x + y \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right) dx dy \\ &= \iint_D \left(x^2 y + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x \right) dx dy.\end{aligned}$$

Воведуваме поларни координати:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (5.2.10)$$

Областа D се добива кога $0 \leq \rho \leq 1$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Бидејќи Јакобијанот е $|J| = \rho$ и $x^2 + y^2 = \rho^2$, имаме:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi + \rho \sin^2 \varphi - \rho \cos \varphi) \rho d\varphi d\rho \\ &= \int_0^1 \rho^4 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \right) d\rho + \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \right) d\rho \\ &\quad - \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right) d\rho.\end{aligned}$$

Последниот интеграл е 0, затоа што $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$. Во вториот интеграл го употребуваме идентитетот $\sin^2 \varphi = (1 - \cos 2\varphi)/2$, додека во внатрешниот интеграл од првиот интеграл воведуваме смена $t = \cos \varphi$, $dt = -\sin \varphi d\varphi$. Добиваме:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= - \int_0^1 \rho^4 \left(\int_1^{-1} t^2 dt \right) d\rho + \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi \right) d\rho \\ &= - \int_0^1 \rho^4 \cdot 0 d\rho + \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\rho - \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right) d\rho \\ &= \pi \int_0^1 \rho^2 d\rho - \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) d\rho = \pi \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

За да го пресметаме вториот интеграл во (5.2.9), да забележиме дека Σ_2 ги има следниве два нормални вектори:

$$\vec{n}_1(x, y, z) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, -1 \right) = (-2x, -2y, -1), \quad \vec{n}_2(x, y, z) = -\vec{n}_1(x, y, z) = (2x, 2y, 1).$$

Затоа што нормалните вектори на Σ_2 треба да покажуваат во спротивна насока од координатниот почеток, нам ни треба $\vec{n}_2(x, y, z)$ (овој вектор има позитивна z -компонента

за разлика од $\vec{n}_1(x, y, z)$). За интегралот по Σ_2 имаме:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(x, y, f_2(x, y)) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy \\ &= \iint_D (xy(2 - x^2 - y^2), y + 2 - x^2 - y^2, x + y) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy \\ &= \iint_D (2x^2y - 2x^4y - 2x^2y^3 + 2y^2 + 5y - 2y^3 + x) dx dy.\end{aligned}$$

Ги воведуваме поларните смени (5.2.10) и добиваме:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= 2 \int_0^1 \rho^4 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \right) d\rho - 2 \int_0^1 \rho^6 \left(\int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi \right) d\rho \\ &\quad - 2 \int_0^1 \rho^6 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \right) d\rho + 2 \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \right) d\rho \\ &\quad + 5 \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \right) d\rho - 2 \int_0^1 \rho^4 \left(\int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi \right) d\rho \\ &\quad + \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right) d\rho.\end{aligned}$$

Петтиот и седмиот интеграл се 0, затоа што $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$ и $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$. Во внатрешниот интеграл во првиот и во вториот интеграл ставаме смена $t = \cos \varphi$, $dt = -\sin \varphi d\varphi$ и добиваме дека тие се исто така 0 (исто како погоре). Во четвртиот интеграл го употребуваме идентитетот $\sin^2 \varphi = (1 - \cos 2\varphi)/2$ и (исто како погоре) добиваме: $\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi$, од што следува дека: $\int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \right) d\rho = \pi/4$. Добиваме:

$$\iint_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -2 \int_0^1 \rho^6 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \right) d\rho + \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^1 \rho^4 \left(\int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi \right) d\rho.$$

Бидејќи $\sin^3 \varphi = \sin^2 \varphi \sin \varphi = (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi$, имаме:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= -2 \int_0^1 \rho^6 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi \right) d\rho + \frac{\pi}{2} \\ &\quad - 2 \int_0^1 \rho^4 \left(\int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi \right) d\rho.\end{aligned}$$

Во двата внатрешни интеграла воведуваме смена $t = \cos \varphi$, $dt = -\sin \varphi d\varphi$ и добиваме:

$$\iint_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 2 \int_0^1 \rho^6 \left(\int_1^{-1} t^2 (1 - t^2) dt \right) d\rho + \frac{\pi}{2} + 2 \int_0^1 \rho^4 \left(\int_1^{-1} (1 - t^2) dt \right) d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

Со замена во (5.2.9) се добива конечниот резултат:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}.$$

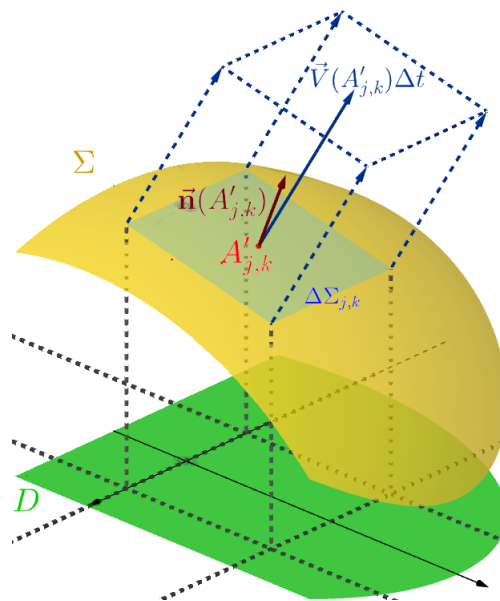
Површинскиот интеграл $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ се вика уште **флукс**, односно проток¹, на полето $\vec{F}$ низ ориентираната површина Σ . Причината за ова е следното физичко значење на (5.2.1). Нека Σ е ориентирана површина со единечно нормално векторско поле $(x, y, z) \mapsto \vec{n}(x, y, z)$ кое ја дава ориентацијата. Даден е флуид со густина $\rho(x, y, z)$ (димензиите на ρ се $[\text{маса}]/[\text{должина}]^3 = [\text{маса}]/[\text{волумен}]$) кој се движи со дадена брзина $\vec{V}(x, y, z)$ (димензиите на $\vec{V}(x, y, z)$ се $[\text{должина}]/[\text{време}]$ и тој е векторот на брзина во точката (x, y, z)). Масата на флуидот кој протекува низ Σ во единица време е дадена со:

$$\left(\begin{array}{l} \text{маса во единица време} \\ \text{која протекува низ } \Sigma \end{array} \right) = \iint_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} \quad (5.2.11)$$

(се разбира, димензиите се $[\text{маса}]/[\text{време}]$). Кога велиме „протекува низ површината“, мислиме во насоката на $\vec{n}$, т. е. масата на флуидот во единица време што излегува од Σ од страната избрана од ориентацијата (поради тоа, ако флуидот тече во обратна насока од ориентацијата на Σ , знакот е негативен). За да видиме зошто (5.2.11) е точно, прво ќе ја разгледаме специјалната ситуација кога Σ е график на функција $f = f(x, y)$ дефинирана на област $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (т. е. Σ е дадена со (5.1.2)); D е проекцијата на Σ на xOy -рамнината (види ја сликата 5.1.1).

Исто како во претходниот дел, ја делиме D со мрежа со јазли во точките (x_j, y_k) како на сликата 5.1.1 (а) и го означуваме со $D_{j,k}$ правоаголникот со темиња во (x_j, y_k) , (x_{j+1}, y_k) , (x_{j+1}, y_{k+1}) и (x_j, y_{k+1}) . Сакаме да определиме колку маса од флуидот протекува низ секој од деловите од површината кои се наоѓаат над правоаголниците $D_{j,k}$ во време Δt . Априори, ова е тешко да се пресмета, но можеме лесно да го апроксимираме на следниот начин. Во секој $D_{j,k}$ избираме произволна точка $(x'_j, y'_k) \in D_{j,k} \cap D$ и означуваме $A'_{j,k} := (x'_j, y'_k, f(x'_j, y'_k)) \in \Sigma$. Во точката $A'_{j,k}$ повлекуваме рамнина тангентна на Σ и го означуваме со $\Delta\Sigma_{j,k}$ паралелограмот којшто лежи во оваа рамнина и чија проекција на xOy -рамнината е $D_{j,k}$; види ја сликата 5.1.1 (б). Кога страните на $\Delta\Sigma_{j,k}$ се мали, $\Delta\Sigma_{j,k}$ е добра апроксимација за делот на Σ кој се наоѓа над $D_{j,k}$. Исто така, $\rho(x, y, z)$ и $\vec{V}(x, y, z)$ незначително ќе се променуваат на овој дел и затоа можеме да ги третираме како константни и, со тоа, еднакви на $\rho(A'_{j,k})$ и $\vec{V}(A'_{j,k})$. Волуменот на флуидот кој поминува низ овој дел за Δt можеме да го апроксимираме со волуменот на паралелопипедот со основа $\Delta\Sigma_{j,k}$ и страна дадена со векторот $\vec{V}(A'_{j,k})\Delta t$ (види ја сликата 5.2.5) и при-

Слика 5.2.5:



¹flux е латински збор што значи проток

тоа

$$\text{волуменот на паралелопипедот} = (\text{висина})P(\Delta\Sigma_{j,k}), \quad (5.2.12)$$

каде што $P(\Delta\Sigma_{j,k})$ е плоштината на $\Delta\Sigma_{j,k}$. Бидејќи $\vec{n}(A'_{j,k})$ е нормален на $\Delta\Sigma_{j,k}$ (по дефиниција, нормалниот вектор на површината во $A'_{j,k}$ е нормален на тангентната рамнина во таа точка) и има должина 1, бараната висина е:

$$\Delta t |\vec{V}(A'_{j,k})| \cos(\angle(\vec{V}(A'_{j,k}), \vec{n}(A'_{j,k}))) = \Delta t (\vec{V}(A'_{j,k}) \cdot \vec{n}(A'_{j,k}));$$

да забележиме дека кога $\angle(\vec{V}(A'_{j,k}), \vec{n}(A'_{j,k}))$ е поголем од $\pi/2$, висината е негативна што ни кажува дека протечениот волумен е во обратна страна од онаа која е определена со ориентацијата на Σ . Бидејќи густината ја третираме како константна на овој дел, масата на флуидот кој поминува за Δt низ овој дел од површината ја апроксимираме со:

$$\rho(A'_{j,k})(\text{волумен на паралелопипедот}) = \rho(A'_{j,k})(\vec{V}(A'_{j,k}) \cdot \vec{n}(A'_{j,k}))\Delta t P(\Delta\Sigma_{j,k}).$$

Поради ова,

$$\left(\begin{array}{c} \text{вкупната маса помината} \\ \text{низ } \Sigma \text{ за } \Delta t \end{array} \right) \approx \sum_{j,k} (\rho(A'_{j,k}) \vec{V}(A'_{j,k}) \cdot \vec{n}(A'_{j,k})) \Delta t P(\Delta\Sigma_{j,k}).$$

Ако поделиме со Δt , ја добиваме масата во единица време:

$$\left(\begin{array}{c} \text{маса во единица време} \\ \text{што протекува низ } \Sigma \end{array} \right) \approx \sum_{j,k} (\rho(A'_{j,k}) \vec{V}(A'_{j,k}) \cdot \vec{n}(A'_{j,k})) P(\Delta\Sigma_{j,k}) \quad (5.2.13)$$

и апроксимацијата станува сè подобра кога бројот на делбени точки станува сè поголем и страните на $\Delta\Sigma_{j,k}$ стануваат сè помали. По лимес, ја добиваме масата на флуидот која протекува во единица време низ Σ . Бидејќи десната страна на (5.2.13) е интегрална сума за површинскиот интеграл по Σ на скаларното поле

$$(x, y, z) \mapsto \rho(x, y, z) \vec{V}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z)$$

(види (5.1.3)), десната страна на (5.2.13) тежи кон $\iint_{\Sigma} (\rho \vec{V} \cdot \vec{n})(x, y, z) dS$ и со тоа ја добивме точноста на (5.2.11). На ист начин се добива точноста на (5.2.11) кога Σ е график на функција $f = f(x, z)$ или график на функција $f = f(y, z)$. На крај, ако Σ е составена од ориентираните површини $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$, каде што секоја од нив е од некој од овие типови, точноста на (5.2.11) следува од (5.2.2).

Ако нè интересира само колку волумен од флуидот протекува низ Σ во единица време, тогаш на ист начин ја добиваме формулата:

$$\left(\begin{array}{c} \text{волумен во единица време} \\ \text{кој протекува низ } \Sigma \end{array} \right) = \iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{S} \quad (5.2.14)$$

(димензиите се $[\text{волумен}]/[\text{време}]$), каде што, како и претходно, $\vec{V}(x, y, z)$ е брзината на флуидот. Формулата (5.2.14) е слична со (5.2.11); се разбира, густината $\rho(x, y, z)$ не фигурира затоа што нè интересира волуменот, а не масата.

Пример 5.2.10. Флуид со густина $\rho(x, y, z) = 1/(1 + x^2 + y^2 + z^2)$ се движи со брзина $\vec{V}(x, y, z) = (z, y^2, x^2)$. Да се определи масата во единица време на флуидот што протекува низ внатрешниот сид на делот од цилиндарот $x^2 + y^2 = 1$ каде $0 \leq z \leq 2$.

Треба да пресметаме:

$$\iint_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S},$$

каде што Σ е внатрешната страна на делот од цилиндарот $x^2 + y^2 = 1$, каде што $0 \leq z \leq 2$. Да забележиме дека Σ не може да ја претставиме како график на функција од (x, y) , но може да ја претставиме како графици на функции од (y, z) . За да го видиме ова, изразуваме x и добиваме: $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$. Од ова следува дека можеме да ја поделиме Σ на два дела (тие што соодветствуваат на знаците $+$ и $-$), така што секој од нив да биде график на функција од (y, z) . Проекцијата на Σ на yOz -рамнината е правоаголникот $D \subseteq \mathbb{R}^2$ определен со $-1 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$. Следува дека Σ е составена од површините:

$$\Sigma_1 : \text{графикот на функцијата } f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}, f_1(y, z) = \sqrt{1 - y^2},$$

$$\Sigma_2 : \text{графикот на функцијата } f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}, f_2(y, z) = -\sqrt{1 - y^2};$$

ориентациите на Σ_1 и Σ_2 се наследени од Σ . Интегралот го делиме на два дела:

$$\iint_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S}. \quad (5.2.15)$$

Нормалните вектори на Σ_1 се:

$$\vec{n}_1(x, y, z) = \left(-1, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) = \left(-1, -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}, 0 \right);$$

$$\vec{n}_2(x, y, z) = \left(1, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, -\frac{\partial f_1}{\partial z} \right) = \left(1, \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}, 0 \right).$$

Затоа што ни треба внатрешната страна на цилиндарот, нормалните вектори на Σ_1 треба да имаат негативна x -координата, од што следува дека ни треба векторот $\vec{n}_1(x, y, z)$. За првиот интеграл во (5.2.15) добиваме:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \rho(f_1(y, z), y, z) \vec{V}(f_1(y, z), y, z) \cdot \left(-1, -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}, 0 \right) dydz \\ &= \iint_D \frac{1}{2 + z^2} (z, y^2, 1 - y^2) \cdot \left(-1, -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}, 0 \right) dydz \\ &= - \iint_D \frac{1}{2 + z^2} \left(z + \frac{y^3}{\sqrt{1 - y^2}} \right) dydz \\ &= - \iint_D \frac{z}{2 + z^2} dydz - \iint_D \frac{y^3}{(2 + z^2)\sqrt{1 - y^2}} dydz \end{aligned}$$

$$= - \int_0^2 \frac{z}{2+z^2} \left(\int_{-1}^1 dy \right) dz - \int_0^2 \frac{1}{2+z^2} \left(\int_{-1}^1 \frac{y^3 dy}{\sqrt{1-y^2}} \right) dz.$$

За да го пресметаме внатрешниот интеграл од вториот интеграл воведуваме смена $t = 1 - y^2$, $dt = -2ydy$:

$$\begin{aligned} \int \frac{y^3 dy}{\sqrt{1-y^2}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{(1-t)dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = -\sqrt{t} + \frac{t^{3/2}}{3} \\ &= -\sqrt{1-y^2} + \frac{(1-y^2)^{3/2}}{3}, \end{aligned}$$

од што следува:

$$\int_{-1}^1 \frac{y^3 dy}{\sqrt{1-y^2}} = \left(-\sqrt{1-y^2} + \frac{(1-y^2)^{3/2}}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 0.$$

Добиваме:

$$\iint_{\Sigma_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = -2 \int_0^2 \frac{z dz}{2+z^2}.$$

Во последниот интеграл воведуваме смена $s = 2 + z^2$, $ds = 2z dz$ и добиваме:

$$\iint_{\Sigma_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = - \int_2^6 \frac{ds}{s} = -\ln s \Big|_2^6 = -(\ln 6 - \ln 2) = -\ln 3.$$

За да го пресметаме вториот интеграл во (5.2.15), ги определуваме нормалните вектори на Σ_2 :

$$\begin{aligned} \vec{n}_1(x, y, z) &= \left(-1, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) = \left(-1, \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 0 \right), \\ \vec{n}_2(x, y, z) &= \left(1, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, -\frac{\partial f_2}{\partial z} \right) = \left(1, -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 0 \right). \end{aligned}$$

Затоа што ни треба внатрешната страна на цилиндарот, нормалните вектори на Σ_2 треба да имаат позитивна x -координата, од што следува дека ни треба векторот $\vec{n}_2(x, y, z)$. За интегралот добиваме:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \rho(f_2(y, z), y, z) \vec{V}(f_2(y, z), y, z) \cdot \left(1, -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 0 \right) dy dz \\ &= \iint_D \frac{1}{2+z^2} (z, y^2, 1-y^2) \cdot \left(1, -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 0 \right) dy dz \\ &= \iint_D \frac{1}{2+z^2} \left(z - \frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}} \right) dy dz \\ &= \iint_D \frac{z}{2+z^2} dy dz - \iint_D \frac{y^3}{(2+z^2)\sqrt{1-y^2}} dy dz. \end{aligned}$$

Последните два интеграла веќе ги пресметавме; тие се еднакви на $\ln 3$ и 0 , од што следува дека $\iint_{\Sigma_2} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = \ln 3$, и конечниот резултат е:

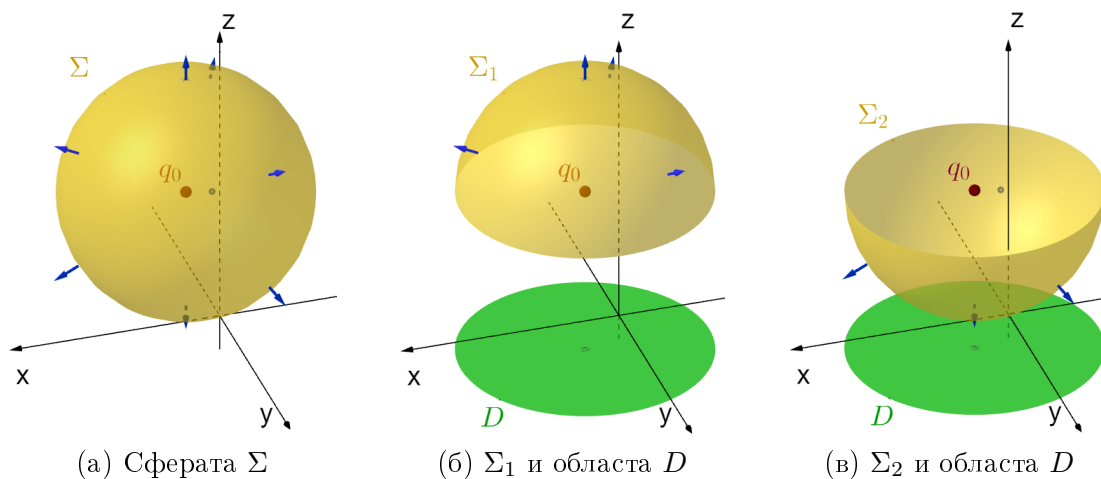
$$\iint_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = -\ln 3 + \ln 3 = 0.$$

Ова значи дека колку маса во единица време од флуидот протекува кон внатрешноста на Σ исто толку протекува во обратната насока (кон надворешната страна).

Го охрабруваме читателот да го определи и волуменот во единица време на флуидот кој протекува низ цилиндарот. Се разбира, за ова треба да се пресмета (5.2.14) (јасно, густината $\rho(x, y, z)$ е непотребна).

Забелешка 5.2.11. И кога полето $\vec{F}$ не е брзина на флуид, интегралот $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ и понатаму често се вика флуks на $\vec{F}$ низ Σ .

Слика 5.2.6: Надворешната страна на сферата во Пример 5.2.12



Пример 5.2.12. Да се определи флуksот на електростатското поле генерирано од полнеж од q_0 кулони кој се наоѓа во точката (x_0, y_0, z_0) низ надворешната страна на сферата со центар во (x_0, y_0, z_0) и радиус $r > 0$.

Електростатското поле генерирано од q_0 е дадено со (види (3.1.5)):

$$\vec{E} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_0, y_0, z_0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{E}(x, y, z) = k_e q_0 \frac{(x - x_0, y - y_0, z - z_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}.$$

Треба да пресметаме:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S},$$

каде што Σ е надворешната страна на сферата $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$. Од равенката на сферата изразуваме:

$$(z - z_0)^2 = r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 \iff z = z_0 \pm \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}.$$

Нека Σ_1 и Σ_2 се хемисферите:

$$z = z_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} \quad \text{и} \quad z = z_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$$

(тие што се над и под $z = z_0$) ориентирани како и Σ ; види ја сликата 5.2.6. Нивните проекции на xOy -рамнината се местата каде што:

$$r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2. \quad (5.2.16)$$

Значи, проекцијата на Σ_1 и на Σ_2 е кругот $D \subseteq \mathbb{R}^2$ со центар во (x_0, y_0) и радиус r даден со (5.2.16); види ја сликата 5.2.6 (б) и (в). Добиваме дека:

$$\Sigma_1 \text{ е график на } f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x, y) = z_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2};$$

$$\Sigma_2 \text{ е график на } f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x, y) = z_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}.$$

Го делиме интегралот на два дела:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (5.2.17)$$

Површината Σ_1 ги има следниве два нормални вектори:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right) \\ &= \left(-\frac{x - x_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}, -\frac{y - y_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}, -1 \right), \\ \vec{n}_2(x, y, z) &= \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, 1 \right) \\ &= \left(\frac{x - x_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}, \frac{y - y_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}, 1 \right). \end{aligned}$$

Бидејќи ни треба надворешната страна од сферата, нормалните вектори на Σ_1 треба да имаат позитивна z -координата (треба да бидат насочени нагоре), од што следува дека нам ни треба $\vec{n}_2(x, y, z)$. За првиот интеграл во (5.2.17) имаме:

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_D \vec{E}(x, y, f_1(x, y)) \\ &\quad \cdot \left(\frac{x - x_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}, \frac{y - y_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}, 1 \right) dx dy \\ &= \frac{k_e q_0}{r^3} \iint_D \left(x - x_0, y - y_0, \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{x - x_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}, \frac{y - y_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}, 1 \right) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k_e q_0}{r^3} \iint_D \left(\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2} \right) dx dy \\
&= \frac{k_e q_0}{r^3} \iint_D \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} dx dy.
\end{aligned}$$

Воведуваме поларни координати:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \varphi \\ y = y_0 + \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (5.2.18)$$

(поларните координати се поместени за x_0 и y_0 , затоа што центарот на кругот D е во (x_0, y_0)). Областа D се добива кога $0 \leq \rho \leq r$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Бидејќи Јакобијанот е $|J| = \rho$ и $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$, добиваме:

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{k_e q_0}{r} \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\varphi d\rho = \frac{k_e q_0}{r} \int_0^r \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\rho \\
&= \frac{2\pi k_e q_0}{r} \int_0^r \frac{\rho d\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}.
\end{aligned}$$

Воведуваме смена $t = r^2 - \rho^2$, $dt = -2\rho d\rho$ и добиваме:

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\pi k_e q_0}{r} \int_{r^2}^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\pi k_e q_0}{r} \int_0^{r^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\pi k_e q_0}{r} \cdot \frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}} \Big|_0^{r^2} = 2\pi k_e q_0.$$

За да го пресметаме вториот интеграл во (5.2.17), ги определуваме двата нормални вектори на Σ_2 :

$$\begin{aligned}
\vec{n}_1(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, -1 \right) \\
&= \left(\frac{x-x_0}{\sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}}, \frac{y-y_0}{\sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}}, -1 \right), \\
\vec{n}_2(x, y, z) &= \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right) \\
&= \left(-\frac{x-x_0}{\sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}}, -\frac{y-y_0}{\sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}}, 1 \right).
\end{aligned}$$

Бидејќи ни треба надворешната страна од сферата, нормалните вектори на Σ_2 треба да имаат негативна z -координата (треба да бидат насочени надолу), од што следува дека нам ни треба $\vec{n}_1(x, y, z)$. За интегралот добиваме:

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\
&= \iint_D \vec{E}(x, y, f_2(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\frac{x - x_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}, \frac{y - y_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}, -1 \right) dx dy \\
&= \frac{k_e q_0}{r^3} \iint_D \left(x - x_0, y - y_0, -\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} \right) \\
& \quad \cdot \left(\frac{x - x_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}, \frac{y - y_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}, -1 \right) dx dy \\
&= \frac{k_e q_0}{r^3} \iint_D \left(\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}} + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} \right) dx dy \\
&= \frac{k_e q_0}{r^3} \iint_D \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}} dx dy.
\end{aligned}$$

Последниот интеграл веќе го пресметавме погоре; неговата вредност е $2\pi k_e q_0$. Со заменување во (5.2.17), го добиваме крајниот резултат:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi k_e q_0 + 2\pi k_e q_0 = 4\pi k_e q_0. \quad (5.2.19)$$

Забелешка 5.2.13. Да забележиме дека радиусот $r > 0$ на сферата не фигурира во крајниот резултат (5.2.19) за флуksот на електростатското поле. Ова својство на електростатското поле се вика Гаусов закон и тој важи и кога флуksот се пресметува по надворешната страна на произволна затворена површина во чијашто внатрешност се наоѓа полнежот q_0 , т. е. без разлика на површината флуksот секогаш е еднаков на $4\pi k_e q_0$.

5.3. Теорема на Стокс

Нека $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ е површина ограничена со затворената крива C . Површината Σ и кривата C се **компатабилно ориентиран** ако нивните ориентации го задоволуваат следното својство. Во секоја точка од C , ако палецот на десната рака е во насока на ориентацијата на C и показалецот покажува кон Σ , тогаш средниот прст е во насока на единичните нормални вектори кои ја даваат ориентацијата на Σ ; види ја сликата 5.3.1. Теоремата на Стокс дава врска помеѓу линискиот интеграл по C и површинскиот интеграл по Σ , кога тие се компатабилно ориентиран.

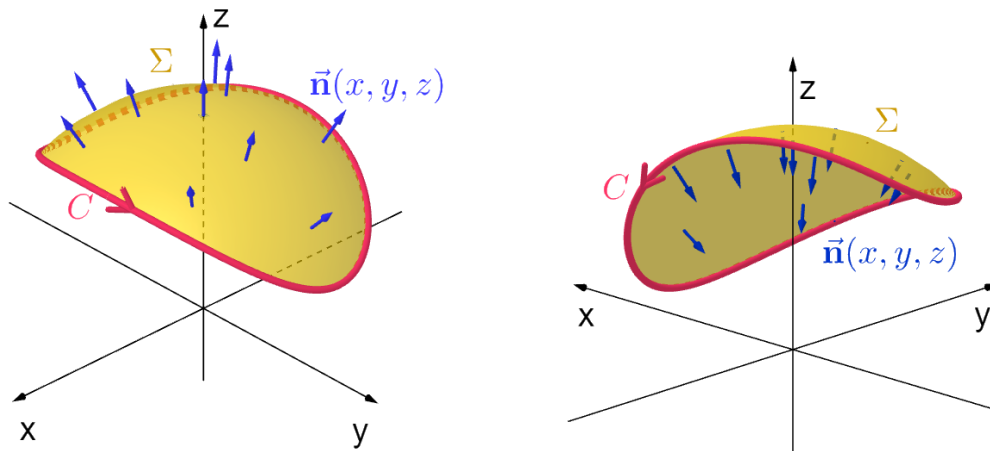
Теорема 5.3.1. (Стоксова формула) Нека Σ е ориентирана површина ограничена со затворената ориентирана крива C и нека Σ и C се компатабилно ориентиран. Ако $\vec{F}$ е векторско поле дефинирано во околина на Σ , тогаш,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Пример 5.3.2. Кривата C е пресек на површините: $z = 2 - x^2 - y^2$ и $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и е позитивно ориентирана околу z -оската. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xy, x^2z, y + z)$. Да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Слика 5.3.1: Две компатабилни ориентации на површина и затворена крива



За да ја определеме кривата, заменуваме $z^2 = x^2 + y^2$ во $z = 2 - x^2 - y^2$ и добиваме $z = 2 - z^2$, што е еквивалентно со $z^2 + z - 2 = 0$. Решенијата на оваа равенка се: $z = 1$ и $z = -2$. Бидејќи кривата лежи на $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, z -координатата треба да е ненегативна, од што следува дека $z = 1$. Со заменување во која било од равенките од површините се добива $x^2 + y^2 = 1$; т. е. C е единечната кружница подигната на висина $z = 1$ (види ја сликата 2.3.10 (а)). За да ја примениме Стоксовата формула треба да најдеме површина која е ограничена со C . Има бесконечно многу различни избори за површината Σ (и сите ќе ја дадат истата вредност на интегралот); се разбира, добро е да избереме што е можно поедноставна површина за интегралот да биде лесен за пресметка. Во оваа ситуација, за Σ можеме да го земеме делот од рамнината $z = 1$ ограничен со C . Тогаш, Σ е график на функцијата $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 1$, каде што D е проекцијата на Σ на xOy -рамнината; тоа е внатрешноста на кружницата $x^2 + y^2 = 1$. Двата нормални вектори на Σ се:

$$\vec{n}_1(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) = (0, 0, -1) \quad \text{и} \quad \vec{n}_2(x, y, z) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) = (0, 0, 1). \quad (5.3.1)$$

За C и Σ да бидат компатабилно ориентирани, ни треба векторот $\vec{n}_2(x, y, z)$. За Стоксовата формула ни треба $\vec{\nabla} \times \vec{F}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & x^2z & y+z \end{vmatrix} = \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 2xz \vec{k} - x \vec{k} - 0 \cdot \vec{j} - x^2 \vec{i} = (1 - x^2, 0, 2xz - x).$$

Стоксовата формула дава:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot (0, 0, 1) dx dy$$

$$= \iint_D (1 - x^2, 0, 2x - x) \cdot (0, 0, 1) dx dy = \iint_D x dx dy.$$

Воведуваме поларни координати:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

со Јакобијан за смената $|J| = \rho$. Бидејќи D се добива кога $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, добиваме:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos \varphi d\varphi d\rho = \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right) d\rho = \int_0^1 \rho^2 \left(\sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) d\rho = 0.$$

Во решението, наместо делот од рамнината $z = 1$ ограничен со C , за Σ можевме да го земеме делот од параболоидот $z = 2 - x^2 - y^2$ до $z = 1$ или, пак, делот од конусот $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ до $z = 1$, затоа што и овие површини се ограничени со C . Го избравме делот од рамнината $z = 1$, затоа што површинскиот интеграл што се добива по примената на Стоксовата формула е наједноставен за решавање. Кога е можно да се избере дел од рамнина која е ограничена со дадената крива, често (но не секогаш!), интегралите што се добиваат се полесни за евалуација.

Пример 5.3.3. Кривата C е пресек на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ со параболоидот $z = x^2 + y^2$ и е негативно ориентирана околу z -оската. За векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xz, z, xyz)$, да се пресмета:

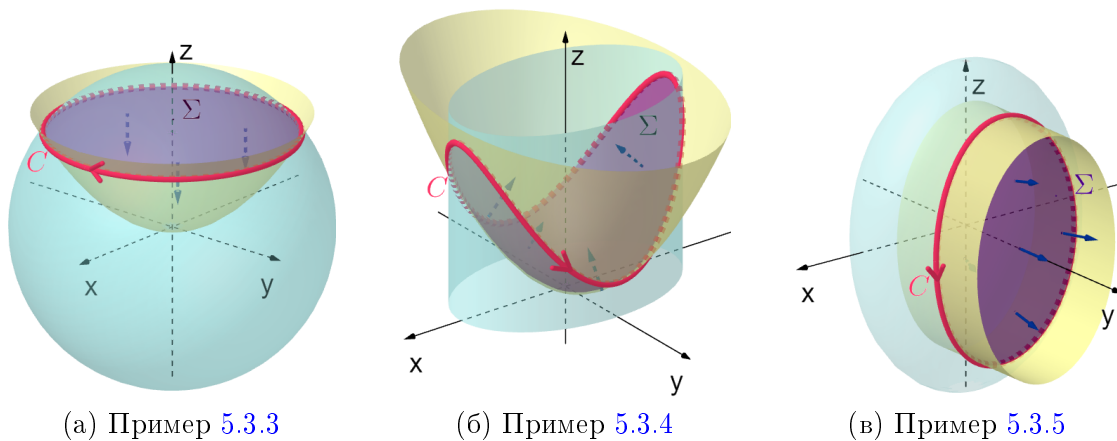
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Заменуваме $z = x^2 + y^2$ во $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ и добиваме $z + z^2 = 2$. Решенијата на оваа равенка се: $z = 1$ и $z = -2$. Бидејќи кривата лежи на параболоидот $z = x^2 + y^2$, z -координатата треба да е ненегативна, од што следува дека $z = 1$. Заклучуваме дека C е кружницата $x^2 + y^2 = 1$ подигната на висина $z = 1$. Исто како во претходниот пример, за површината Σ го избираме делот од рамнината $z = 1$ ограничен со C ; види ја сликата 5.3.2 (а). Тогаш, Σ е график на функцијата $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 1$, каде што D е внатрешноста на кружницата $x^2 + y^2 = 1$. Нормалните вектори на Σ се дадени со (5.3.1). За C и Σ да бидат компатабилно ориентирани, ни треба векторот $\vec{n}_1(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Бидејќи роторот на $\vec{F}$ е:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & z & xyz \end{vmatrix} = xz \vec{i} + x \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} - 0 \cdot \vec{k} - yz \vec{j} - \vec{i} = (xz - 1, x - yz, 0),$$

Стоксовата формула дава

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D (x - 1, x - y, 0) \cdot (0, 0, -1) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0.$$

Слика 5.3.2: Кривата C и компатабилно ориентираната површина Σ 

Пример 5.3.4. Кривата C е пресек на елипсоидниот цилиндар

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z\text{-координатата е слободна,} \quad (5.3.2)$$

со елипсоидниот параболоид $z = x^2 + y^2/16$ и е позитивно ориентирана околу z -оската. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, yz, x + yz)$. Да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

За површината Σ го избираме делот од параболоидот $z = x^2 + y^2/16$ којшто се наоѓа во внатрешноста на цилиндарот (5.3.2); види ја сликата 5.3.2 (б). Проекцијата D на површината Σ на xOy -рамнината е основата на цилиндарот (5.3.2); односно, D е внатрешноста на елипсата

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Значи Σ е график на функцијата $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2/16$. Нормалните вектори на Σ се:

$$\vec{n}_1(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) = \left(2x, \frac{y}{8}, -1 \right) \quad \text{и} \quad \vec{n}_2(x, y, z) = -\vec{n}_1(x, y, z) = \left(-2x, -\frac{y}{8}, 1 \right).$$

За C и Σ да бидат компатабилно ориентирани, нормалните вектори на Σ треба да покажуваат нагоре, односно да имаат позитивна z -координата. Од каде што следува дека ни е потребен векторот $\vec{n}_2(x, y, z)$. Роторот на $\vec{F}$ е:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z & yz & x + yz \end{vmatrix} = z\vec{i} + x^2\vec{j} + 0 \cdot \vec{k} - 0 \cdot \vec{k} - \vec{j} - y\vec{i} = (z - y, x^2 - 1, 0).$$

Од Стоксовата формула добиваме:

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(x^2 + \frac{y^2}{16} - y, x^2 - 1, 0 \right) \cdot \left(-2x, -\frac{y}{8}, 1 \right) dx dy \\ &= \iint_D \left(-2x^3 - \frac{xy^2}{8} + 2xy - \frac{x^2y}{8} + \frac{y}{8} \right) dx dy.\end{aligned}$$

Воведуваме елипсоидни координати:

$$\begin{cases} x = 3\rho \cos \varphi \\ y = 2\rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Јакобијанот за смената е $|J| = 6\rho$ и областа D се добива кога: $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. За интегралот имаме:

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= 6 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(-54\rho^3 \cos^3 \varphi - \frac{3}{2}\rho^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + 12\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{9}{4}\rho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi + \frac{1}{4}\rho \sin \varphi \right) \rho d\varphi d\rho \\ &= -324 \int_0^1 \rho^4 \left(\int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi d\varphi \right) d\rho - 9 \int_0^1 \rho^4 \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \right) d\rho \\ &\quad + 72 \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right) d\rho - \frac{27}{2} \int_0^1 \rho^4 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \right) d\rho \\ &\quad + \frac{3}{2} \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \right) d\rho.\end{aligned}$$

Последниот интеграл е 0, затоа што $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$. Во внатрешните интеграли во вториот и во третиот интеграл воведуваме смена $t = \sin \varphi$, $dt = \cos \varphi d\varphi$, по што директно се добива дека тие се 0. Слично, во внатрешниот интеграл од четвртиот интеграл воведуваме смена $s = \cos \varphi$, $ds = -\sin \varphi d\varphi$, по што добиваме дека и тој е 0. Следува дека:

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= -324 \int_0^1 \rho^4 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \right) d\rho \\ &= -324 \int_0^1 \rho^4 \left(\int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi \right) d\rho.\end{aligned}$$

Во внатрешниот интеграл воведуваме смена $t = \sin \varphi$, $dt = \cos \varphi d\varphi$ и добиваме:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = -324 \int_0^1 \rho^4 \left(\int_0^0 (1 - t^2) dt \right) d\rho = 0.$$

Пример 5.3.5. Кривата C е пресек на елипсоидот:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad (5.3.3)$$

со делот од елипсоидниот цилиндар:

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = 1, \text{ каде } y \geq 0 \quad (5.3.4)$$

и е позитивно ориентирана околу y -оската. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x^2z, x^2y + yz, y^2z)$. Да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

За површината Σ ќе го избереме делот од елипсоидот (5.3.3) којшто се наоѓа во внатрешноста на делот од цилиндарот (5.3.4); види ја сликата 5.3.2 (в). Проекцијата D на површината Σ на xOz -рамнината е основата на цилиндарот (5.3.4); односно, D е внатрешноста на елипсата:

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Изразуваме y од равенката на елипсоидот и добиваме:

$$y = \pm 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16}}.$$

На површината Σ важи: $y \geq 0$ (по услов), од што следува дека Σ е график на функцијата:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, z) = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16}}.$$

Нормалните вектори на Σ се:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, -1, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(-\frac{2x}{9\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16}}}, -1, -\frac{z}{8\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16}}} \right); \\ \vec{n}_2(x, y, z) &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, 1, -\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{2x}{9\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16}}}, 1, \frac{z}{8\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16}}} \right). \end{aligned}$$

За C и Σ да бидат компатабилно ориентирани, нормалните вектори на Σ треба да имаат позитивна y -координата. Од ова следува дека ни треба векторот $\vec{n}_2(x, y, z)$. Роторот на $\vec{F}$ е:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z & x^2y + yz & y^2z \end{vmatrix} = 2yz\vec{i} + x^2\vec{j} + 2xy\vec{k} - 0\cdot\vec{k} - 0\cdot\vec{j} - y\vec{i} = ((2z-1)y, x^2, 2xy).$$

Ја применуваме Стоксовата формула и добиваме:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D \left(2(2z-1)\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}}, x^2, 4x\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}} \right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{2x}{9\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}}}, 1, \frac{z}{8\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}}} \right) dx dz \\
&= \iint_D \left(\frac{25xz}{18} - \frac{4x}{9} + x^2 \right) dx dz.
\end{aligned}$$

Воведуваме елипсоидни координати:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ z = 2\rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Јакобијанот за смената е $|J| = 2\rho$ и областа D се добива кога $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. За интегралот добиваме:

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{25}{9} \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi - \frac{4}{9} \rho \cos \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi \right) \rho d\varphi d\rho \\
&= \frac{50}{9} \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right) d\rho - \frac{8}{9} \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right) d\rho \\
&\quad + 2 \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right) d\rho.
\end{aligned}$$

Вториот интеграл е 0, затоа што $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$. Во внатрешниот интеграл од првиот интеграл ставаме смена $t = \sin \varphi$, $dt = \cos \varphi d\varphi$, по што директно се добива дека и тој е 0. Во последниот интеграл го употребуваме идентитетот $\cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$ од што следува дека:

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \right) d\rho \\
&= \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\rho + \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho + \int_0^1 \rho^3 \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) d\rho = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Го охрабруваме читателот да ги пресмета директно интегралите во претходните примери за да се увери дека се добиваат истите резултати.

Забелешка 5.3.6. Гриновата формула е специјален случај од Стоксовата формула. Ако полето $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ е такво да F_1 и F_2 зависат само од променливите x и y и ако $F_3 = 0$, тогаш:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Во оваа ситуација, ако површината Σ лежи во xOy -рамнината и со тоа и кривата C која ја затвора Σ лежи во xOy -рамнината, интегралите $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$ и $\iint_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$ се еднакви на интегралите на левата и на десната страна во (4.3.1) (добро е читателот да се увери дека ориентациите во Стоксовата формула се соовпаѓаат со тие во Гриновата).

5.4. Теорема на Гаус-Остроградски

Теоремата на Гаус-Остроградски дава врска помеѓу површинскиот интеграл по затворена површина и (обичниот) троен интеграл по внатрешноста затворена со таа површина.

Теорема 5.4.1. (Формула на Гаус-Остроградски) Нека U е област во $\mathbb{R}^3$ и нека затворената површина Σ е надворешната страна на сидот на U . Ако $\vec{F}$ е векторско поле дефинирано во околина на U , тогаш:

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_U \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) dx dy dz. \quad (5.4.1)$$

Забелешка 5.4.2. Десната страна е обичен троен интеграл од скаларното поле $(x, y, z) \mapsto \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z)$.

Забелешка 5.4.3. Ако $\bar{\Sigma}$ е внатрешната страна на сидот U (т. е. $\bar{\Sigma}$ е површината Σ со спротивната ориентација), тогаш од забелешката 5.2.2 следува дека:

$$\oint_{\bar{\Sigma}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \iiint_U \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) dx dy dz.$$

Забелешка 5.4.4. Теоремите на Грин, Стокс и на Гаус-Остроградски имаат слична природа: тие даваат врска помеѓу интегралот на комбинација од парцијални изводи на $\vec{F}$ во некој регион со интегралот на $\vec{F}$ по границата на тој регион.

Формулата на Гаус-Остроградски го има следното интуитивно толкување. Бидејќи $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z)$ е нумеричка карактеристика за тоа дали $\vec{F}$ се однесува како извор или одвод во (x, y, z) , десната страна на (5.4.1) е „сумата на сите извори и одводи“ во U и теоремата на Гаус-Остроградски кажува дека таа е еднаква на протокот (флуксот) низ сидовите на U (сè што извира/истекува во U мора да помине низ сидовите на U).

Пример 5.4.5. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y, xz, xyz^2)$. Нека Σ е надворешната страна на сидот на коцката со темиња во: $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$. Да се пресмета:

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

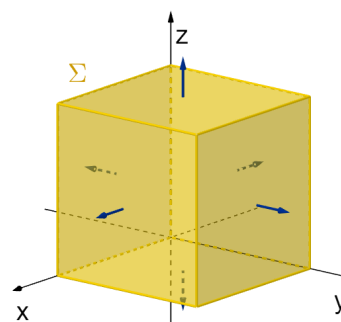
Коцката U е дадена со: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Дивергенцијата на $\vec{F}$ е

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz^2) = 2xy + 2xyz$$

и формулата на Гаус-Остроградски дава:

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_U \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) dx dy dz = \iiint_U (2xy + 2xyz) dx dy dz$$

Слика 5.4.1:



$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (2xy + 2xyz) dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left((2xyz + xyz^2) \Big|_{z=0}^{z=1} \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 3xy dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{3xy^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x dx = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Пример 5.4.6. Да го решиме интегралот во примерот 5.2.9 со помош на теоремата на Гаус-Остроградски.

Нека U е областа затворена со Σ . Во решението на примерот 5.2.9, видовме дека проекцијата D на xOy -рамнината и на делот од конусот $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и на делот од параболоидот $z = 2 - x^2 - y^2$ од кој е составена Σ е внатрешноста на кружницата $x^2 + y^2 = 1$. Според тоа U се добива кога $(x, y) \in D$, $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$. Бидејќи

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(y + z) + \frac{\partial}{\partial z}(x + y) = yz + 1,$$

формулата на Гаус-Остроградски дава:

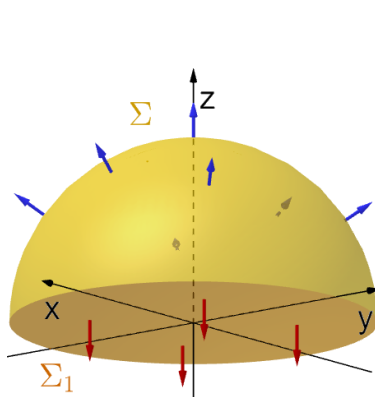
$$\begin{aligned}
\oiint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_U \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) dx dy dz = \iiint_U (yz + 1) dx dy dz \\
&= \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} (yz + 1) dz \right) dx dy = \iint_D \left(\left(\frac{yz^2}{2} + z \right) \Big|_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=2-x^2-y^2} \right) dx dy \\
&= \iint_D \left(\frac{y(2-x^2-y^2)^2}{2} + 2 - x^2 - y^2 - \frac{y(x^2+y^2)}{2} - \sqrt{x^2+y^2} \right) dx dy.
\end{aligned}$$

Воведуваме поларни координати:

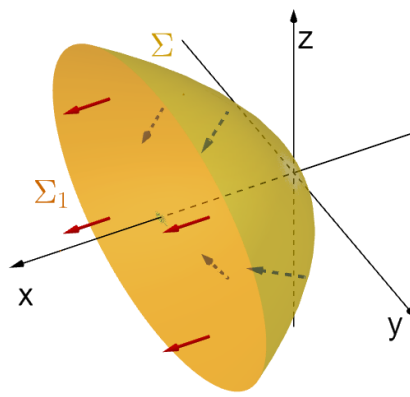
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

со Јакобијан за смената $|J| = \rho$. Областа D се добива кога $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, од што следува дека:

$$\begin{aligned}
\oiint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \left(\frac{(2-\rho^2)^2 \rho \sin \varphi}{2} + 2 - \rho^2 - \frac{\rho^3 \sin \varphi}{2} - \rho \right) \rho d\varphi d\rho \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (2-\rho^2)^2 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \right) d\rho - \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^4 \left(\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \right) d\rho \\
&\quad + \int_0^1 (2\rho - \rho^2 - \rho^3) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\rho \\
&= 0 - 0 + 2\pi \int_0^1 (2\rho - \rho^2 - \rho^3) d\rho = 2\pi \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Слика 5.4.2: Површините Σ и Σ_1 

(а) Пример 5.4.7



(б) Пример 5.4.8

Пример 5.4.7. Нека Σ е делот од сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, каде што $z \geq 0$, ориентирана така што нормалните вектори покажуваат во спротивна насока од координатниот почеток. За векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y^2, x + y + z, xz)$, да се пресмета:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Површината Σ не е затворена и затоа не можеме директно да ја примениме теоремата на Гаус-Остроградски. Идејата е да додадеме и да одземеме интеграл од обликот $\iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}$, каде што површината Σ_1 ќе ја избереме така што $\Sigma \cup \Sigma_1$ да биде затворена. Добро е да ја избереме Σ_1 , така што областа затворена со $\Sigma \cup \Sigma_1$ да е едноставна за пресметка на тројниот интеграл. Во нашата ситуација, наједноставниот избор за Σ_1 е да го земеме делот од рамнината $z = 0$ (тоа е xOy -рамнината) ограничена со кружницата $x^2 + y^2 = 1$ и ориентирана во насока на негативната z -оска. Тогаш, $\Sigma \cup \Sigma_1$ е затворена површина и областа U која таа ја ограничува е горната полутопка; види ја сликата 5.4.2 (а). Интегралот го запишуваме на следниов начин:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Sigma \cup \Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (5.4.2)$$

Во првиот интеграл ја употребуваме теоремата на Гаус-Остроградски. Бидејќи

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x + y + z) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = 2xy^2 + 1 + x,$$

добиваме:

$$\oiint_{\Sigma \cup \Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_U \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) dx dy dz = \iiint_U (2xy^2 + x + 1) dx dy dz.$$

Воведуваме сферни координати:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta, \end{cases}$$

со Јакобијан за смената $|J| = \rho^2 \sin \theta$. Областа U се добива кога $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (затоа што е горната полутопка). За интегралот добиваме:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma \cup \Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (2\rho^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \sin^3 \theta + \rho \cos \varphi \sin \theta + 1) \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho \\ &= 2 \int_0^1 \rho^5 \left(\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \right) d\theta \right) d\rho \\ &\quad + \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \left(\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right) d\theta \right) d\rho \\ &\quad + \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\theta \right) d\rho. \end{aligned}$$

Вториот интеграл е 0, затоа што $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$. Во внатрешниот интеграл од првиот интеграл воведуваме смена $t = \sin \varphi$, $dt = \cos \varphi d\varphi$, по што тој директно се пресметува дека е 0. Од ова следува дека:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma \cup \Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\theta \right) d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \right) d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho^2 \left(-\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} \right) d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Останува да го пресметаме вториот интеграл во (5.4.2). Бидејќи Σ_1 е внатрешноста на единечната кружница $x^2 + y^2 = 1$ во xOy -рамнината, нејзината проекција D на xOy -рамнината е повторно единечниот круг и заради тоа Σ_1 е график на функцијата $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 0$. Нормалните вектори на Σ_1 се $\vec{n}_1(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) = (0, 0, -1)$ и $\vec{n}_2(x, y, z) = -\vec{n}_1(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Бидејќи Σ_1 е ориентирана на тој начин што нејзините нормални вектори се во насока на негативната z -оска, ни треба векторот $\vec{n}_1(x, y, z)$. За интегралот по Σ_1 добиваме:

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D (x^2 y^2, x + y, 0) \cdot (0, 0, -1) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0.$$

Заменуваме во (5.4.2) и го добиваме конечниот резултат:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{2\pi}{3} - 0 = \frac{2\pi}{3}.$$

Пример 5.4.8. Нека Σ е делот од:

$$x = \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \text{ каде } 0 \leq x \leq 1, \quad (5.4.3)$$

ориентирана на тој начин што нормалните вектори покажуваат кон позитивната x -оска. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xz, xy + z, yz)$. Да се пресмета:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Бидејќи Σ не е затворена, не можеме директно да ја примениме теоремата на Гаус-Остроградски. Слично како во претходниот пример, целта е да ја затвориме Σ со некоја површина Σ_1 . За Σ_1 ќе го земеме делот од рамнината $x = 1$ којшто е отсечен со Σ ; види ја сликата 5.4.2 (б). Со заменување $x = 1$ во (5.4.3), добиваме дека Σ_1 е внатрешноста на елипсата:

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad (5.4.4)$$

поместена во $x = 1$. Да ја означиме со U областа која е ограничена со $\Sigma \cup \Sigma_1$. За да можеме да ја примениме теоремата на Гаус-Остроградски, сидот на U треба да е ориентиран на тој начин што нормалните вектори покажуваат во спротивна насока од U . За таа цел, ја ориентиравме Σ_1 на тој начин што нејзините нормални вектори се во насока на позитивната x -оска. Да забележиме дека ориентацијата на Σ е во спротивната насока. Нека $\bar{\Sigma}$ е површината Σ со спротивната ориентација. Теоремата на Гаус-Остроградски може да се примени за површината $\bar{\Sigma} \cup \Sigma_1$, затоа што таа ја дава надворешната страна на сидот на U . Заради ова, бараниот интеграл го запишуваме на следниов начин:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= - \iint_{\bar{\Sigma}} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} \\ &= - \oint_{\bar{\Sigma} \cup \Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

За првиот интеграл можеме да ја примениме формулата на Гаус-Остроградски. Бидејќи

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xy + z) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = z + x + y,$$

добиваме:

$$\oint_{\bar{\Sigma} \cup \Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_U \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) dx dy dz = \iiint_U (x + y + z) dx dy dz.$$

Бидејќи проекцијата D на областа U на yOz -рамнината е внатрешноста на елипсата (5.4.4), U се добива кога $(y, z) \in D$, $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq x \leq 1$. Од ова следува дека:

$$\oint_{\bar{\Sigma} \cup \Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(\int_{\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}}^1 (x + y + z) dx \right) dy dz$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D \left(\left(\frac{x^2}{2} + (y+z)x \right) \Big|_{x=\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}}^{x=1} \right) dydz \\
&= \iint_D \left(\frac{1}{2} + y + z - \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \right)^2 - (y+z) \left(\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \right) \right) dydz.
\end{aligned}$$

Воведуваме елипсоидни координати:

$$\begin{cases} y = 3\rho \cos \varphi \\ z = 2\rho \sin \varphi, \end{cases} \quad (5.4.6)$$

со Јакобијан за смената $|J| = 6\rho$. Областа D се добива кога $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, од што следува дека (да забележиме дека $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = \rho^2$)

$$\begin{aligned}
\oiint_{\Sigma \cup \Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= 6 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + 3\rho \cos \varphi + 2\rho \sin \varphi - \frac{1}{2}\rho^4 - (3\rho \cos \varphi + 2\rho \sin \varphi)\rho^2 \right) \rho d\varphi d\rho \\
&= 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho - \rho^5) d\varphi d\rho + 18 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos \varphi d\varphi d\rho \\
&\quad + 12 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho - 18 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^4 \cos \varphi d\varphi d\rho \\
&\quad - 12 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin \varphi d\varphi d\rho.
\end{aligned}$$

Бидејќи $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$ и $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$, сите интеграли, освен првиот, се 0. Добиваме:

$$\oiint_{\Sigma \cup \Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 3 \int_0^1 (\rho - \rho^5) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\rho = 6\pi \int_0^1 (\rho - \rho^5) d\rho = 2\pi.$$

Останува да го пресметаме уште вториот интеграл во (5.4.5). Да забележиме дека проекцијата на Σ_1 на yOz -рамнината е областа D (внатрешноста на елипсата (5.4.4)). Значи, Σ_1 е график на функцијата $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(y, z) = 1$. Двата нормални вектори на Σ_1 се: $\vec{n}_1(x, y, z) = \left(-1, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (-1, 0, 0)$ и $\vec{n}_2(x, y, z) = -\vec{n}_1(x, y, z) = (1, 0, 0)$. Бидејќи Σ_1 е ориентирана на тој начин што нејзините нормални вектори се во насока на позитивната x -оска, ни треба векторот $\vec{n}_2(x, y, z)$. За интегралот по Σ_1 имаме:

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D (z, y + z, yz) \cdot (1, 0, 0) dydz = \iint_D z dydz.$$

Ги воведуваме елипсоидните координати (5.4.6) и добиваме:

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 12 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho = 12 \int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \right) d\rho = 0.$$

Со заменување во (5.4.5) се добива конечниот резултат:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -2\pi + 0 = -2\pi.$$

Го охрабруваме читателот да ги пресмета директно интегралите во претходните примери за да се увери дека се добиваат истите резултати.

Забелешка 5.4.9. При затворањето на површината Σ треба да се внимава полето и неговите изводи да бидат дефинирани во затворената област. На пример, ако треба да се пресмета $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$, каде што:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

и Σ е горната хемисфера од $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ($z \geq 0$), ориентирана така што нормалните вектори се во спротивна насока од координатниот почеток, Σ не може да се затвори ниту со рамнината $z = 0$ ниту со долната хемисфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$, затоа што полето и неговите изводи не се дефинирани во $(0, 0, 0)$. Во оваа ситуација, интегралот $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ може лесно директно да се пресмета.

5.5. Скаларен потенцијал за конзервативно поле

Како последица од теоремата на Стокс, можеме парцијално да го одговориме прашањето (3.3.4), т. е. дали $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ имплицира дека $\vec{F}$ е конзервативно. Како што напоменавме по (3.3.4), ова зависи од областа каде што $\vec{F}$ е дефинирано. Ќе ја разгледаме наједноставната ситуација кога $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ е дефинирано на целиот простор, т. е. $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Најпрво ќе видиме дека ако C е затворена крива без самопресеци, тогаш:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 0. \quad (5.5.1)$$

Ова следува од Стоксовата теорема. Клучниот факт е дека можеме да најдеме ориентирана површина Σ чијашто граница е C која е компатабилно ориентирана со кривата. Еден начин како можеме да ја конструираме Σ е да избереме точка T далеку од C и потоа да ја врземе со линија T со секоја точка од C и притоа да внимаваме овие линии да не се сечат; добиената површина Σ е конусна површина над кривата C . Тогаш Стоксовата теорема ја дава точноста на (5.5.1):

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Дефинираме скаларно поле $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ на следниот начин. Фиксираме една точка A , на пример координатниот почеток $(0, 0, 0)$. Потоа, за која било точка X со координати (x, y, z) избираме крива без самопресеци C_X , што ги врзува A со X и дефинираме:

$$G(x, y, z) := \int_{C_X} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}. \quad (5.5.2)$$

Ако C'_X е која било друга крива без самопресеци која ја врзува A со X и не ја сече C_X , тогаш кривата составена од C_X споена со $\overline{C'_X}$ (ова е кривата C'_X помината во спротивна насока) е затворена крива C за која (5.5.1) имплицира:

$$0 = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{C_X} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} - \int_{C'_X} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} \implies \int_{C_X} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{C'_X} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma},$$

од што добиваме дека дефиницијата на G преку (5.5.2) не зависи од патот на интеграција. Од овој факт, со избор на специфични патишта во (5.5.2) може да се докаже дека $\frac{\partial G}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial G}{\partial y} = F_2$ и $\frac{\partial G}{\partial z} = F_3$ (ова не е тривијално!), од што следува дека: $\vec{\nabla}G = \vec{F}$, т. е. $\vec{F}$ е конзервативно со потенцијал G . Нагласуваме дека фактот што $\vec{F}$ е дефинирано на целиот $\mathbb{R}^3$, е клучен за точноста (5.5.1), а со тоа и за конзервативноста на $\vec{F}$, затоа што имавме слобода да ја избереме површината Σ каде што $\vec{F}$ е дефинирано, а со тоа и да ја употребиме Стоксовата теорема за да го пресметаме (5.5.1). Ако областа каде што $\vec{F}$ е дефинирано има дупки, ова не може секогаш да се направи. На пример, полето $\vec{F}(x, y, z) := (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ е дефинирано на $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-оска}\}$ (на z -оската важи $x = y = 0$ и именителите се 0). Ако C е кружница околу z -оската, која било површина која ја има C како граница мора да помине низ z -оската и на неа не можеме да ја примениме Стоксовата теорема, затоа што $\vec{F}$ не е дефинирано на пресекот на површината со z -оската. Инцидентно, можеме директно да провериме дека (5.5.1) не е секогаш точно: ако C е кружницата $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, тогаш $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 2\pi \neq 0$ (пресметај!). Иако $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ (пресметај!), $\vec{F}$ не е конзервативно на $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-оска}\}$, поради теоремата 4.4.1. Ова поле е конзервативно ако го разгледуваме на некои помали области од $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-оска}\}$; на пример, за $G(x, y, z) := -\arctan(\frac{x}{y}) + C$, важи $\vec{\nabla}G = \vec{F}$ (провери!), но G не е дефинирано на $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-оска}\}$, затоа што не е дефинирано на xOz -рамнината (каде што $y = 0$).

Во наредните неколку примери ќе илустрираме како се определува потенцијалот за полето $\vec{F}$ ако знаеме дека е конзервативно. Во нашите ситуации, полето $\vec{F}$ ќе биде дефинирано на $\mathbb{R}^3$ така што, имајќи ја предвид горната дискусија, за да провериме дали $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ е конзервативно, доволно е да провериме дека $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.

Пример 5.5.1. Дадено е векторското поле:

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (2xyz^3 + ye^{xy}, x^2z^3 + xe^{xy}, 3x^2yz^2 + \cos z).$$

Да се провери дека $\vec{F}$ е конзервативно и потоа да се определи неговиот потенцијал.

За да провериме дека $\vec{F}$ е конзервативно, го сметаме неговиот ротор:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^3 + ye^{xy} & x^2z^3 + xe^{xy} & 3x^2yz^2 + \cos z \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \frac{\partial}{\partial y} (3x^2yz^2 + \cos z) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial z} (2xyz^3 + ye^{xy}) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial x} (x^2z^3 + xe^{xy}) \\ &\quad - \vec{k} \frac{\partial}{\partial y} (2xyz^3 + ye^{xy}) - \vec{j} \frac{\partial}{\partial x} (3x^2yz^2 + \cos z) - \vec{i} \frac{\partial}{\partial z} (x^2z^3 + xe^{xy}) \\ &= 3x^2z^2 \vec{i} + 6xyz^2 \vec{j} + (2xz^3 + e^{xy} + xye^{xy}) \vec{k} \\ &\quad - (2xz^3 + e^{xy} + xye^{xy}) \vec{k} - 6xyz^2 \vec{j} - 3x^2z^2 \vec{i} \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

од што следува дека $\vec{F}$ е конзервативно. Неговиот потенцијал е скаларно поле G :

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ за кое важи: $\vec{F} = \vec{\nabla}G$, односно:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y, z) = 2xyz^3 + ye^{xy} \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, z) = x^2z^3 + xe^{xy} \\ \frac{\partial G}{\partial z}(x, y, z) = 3x^2yz^2 + \cos z. \end{cases} \quad (5.5.3)$$

Избираме една од равенките и ја интегрираме; на пример, во третата равенка ќе побараме интеграл по z (можевме да ја земеме првата и да бараме интеграл по x или втората и да бараме интеграл по y). Добиваме:

$$G(x, y, z) = \int (3x^2yz^2 + \cos z)dz = x^2yz^3 + \sin z + C_1(x, y); \quad (5.5.4)$$

бидејќи баравме интеграл по z , а G зависи од x , y и z , константата од интеграција може да зависи од x и y , т. е. $C_1 = C_1(x, y)$. За да ја определиме $C_1(x, y)$, бараме извод по y од (5.5.4) и го изедначуваме со втората равенка во (5.5.3) (исто, можевме да бараме извод по x од (5.5.4) и да изедначиме со првата равенка во (5.5.3)):

$$x^2z^3 + \frac{\partial C_1}{\partial y}(x, y) = x^2z^3 + xe^{xy} \iff \frac{\partial C_1}{\partial y}(x, y) = xe^{xy}.$$

Последната равенка ја интегрираме по y и добиваме:

$$C_1(x, y) = \int xe^{xy}dy = e^{xy} + C_2(x);$$

бидејќи баравме интеграл по y , а C_1 е функција од x и y , константата од интеграција може да зависи од x , т. е. $C_2 = C_2(x)$. Заменуваме во (5.5.4) и добиваме:

$$G(x, y, z) = x^2yz^3 + \sin z + e^{xy} + C_2(x). \quad (5.5.5)$$

За да ја определиме C_2 , бараме извод по x од (5.5.5) и изедначуваме со првата равенка во (5.5.3):

$$2xyz^3 + ye^{xy} + C_2'(x) = 2xyz^3 + ye^{xy} \iff C_2'(x) = 0.$$

Бараме интеграл од последната равенка и добиваме: $C_2(x) = \int 0dx = C$, каде што C е константа која не зависи од ниедна променлива. Со замена во (5.5.5) го добиваме потенцијалот G :

$$G(x, y, z) = x^2yz^3 + \sin z + e^{xy} + C.$$

Го охрабруваме читателот да провери дека навистина $\vec{\nabla}G = \vec{F}$.

Пример 5.5.2. Дадено е векторското поле:

$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (\cosh y + z \cosh(xz), z + x \sinh y, y + x \cosh(xz)).$$

Да се провери дека $\vec{F}$ е конзервативно и потоа да се определи неговиот потенцијал.

Како и претходно, прво сметаме:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cosh y + z \cosh(xz) & z + x \sinh y & y + x \cosh(xz) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{i} \frac{\partial}{\partial y}(y + x \cosh(xz)) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial z}(\cosh y + z \cosh(xz)) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial x}(z + x \sinh y) \\
&\quad - \vec{k} \frac{\partial}{\partial y}(\cosh y + z \cosh(xz)) - \vec{j} \frac{\partial}{\partial x}(y + x \cosh(xz)) - \vec{i} \frac{\partial}{\partial z}(z + x \sinh y) \\
&= \vec{i} + (\cosh(xz) + xz \sinh(xz)) \vec{j} + \sinh y \vec{k} \\
&\quad - \sinh y \vec{k} - (\cosh(xz) + xz \sinh(xz)) \vec{j} - \vec{i} \\
&= \vec{0},
\end{aligned}$$

од што следува дека $\vec{F}$ е навистина конзервативно. За да го определиме неговиот потенцијал $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, како и претходно, условот $\vec{F} = \vec{\nabla} G$ го запишуваме како:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y, z) = \cosh y + z \cosh(xz) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, z) = z + x \sinh y \\ \frac{\partial G}{\partial z}(x, y, z) = y + x \cosh(xz) \end{cases} \quad (5.5.6)$$

Втората равенка ја интегрираме по y (како и претходно, неважно која равенка ќе ја избереме: во ситуацијата најлесно се интегрира втората) и добиваме:

$$G(x, y, z) = \int (z + x \sinh y) dy = yz + x \cosh y + C_1(x, z). \quad (5.5.7)$$

За да ја определиме $C_1(x, z)$, бараме извод по x и ја изедначуваме со првата равенка во (5.5.6):

$$\cosh y + \frac{\partial C_1}{\partial x}(x, z) = \cosh y + z \cosh(xz) \iff \frac{\partial C_1}{\partial x}(x, z) = z \cosh(xz).$$

Последната равенка ја интегрираме по x и добиваме:

$$C_1(x, z) = \int z \cosh(xz) dx = \sinh(xz) + C_2(z),$$

од што, со замена во (5.5.7), следува:

$$G(x, y, z) = yz + x \cosh y + \sinh(xz) + C_2(z). \quad (5.5.8)$$

За да ја определиме функцијата $C_2(z)$, бараме извод по z од (5.5.8) и изедначуваме со третата равенка во (5.5.6):

$$y + x \cosh(xz) + C_2'(z) = y + x \cosh(xz) \iff C_2'(z) = 0.$$

Со интегрирање на последната равенка добиваме: $C_2(z) = \int 0 dz = C$ каде C е константа која не зависи од променливите. Со замена во (5.5.8) се добива:

$$G(x, y, z) = yz + x \cosh y + \sinh(xz) + C.$$

Го охрабруваме читателот да провери дека $\vec{\nabla} G = \vec{F}$.

Пример 5.5.3. Дадено е векторското поле:

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (xyz \cos(xyz) + \sin(xyz), x^2 z \cos(xyz), x^2 y \cos(xyz)).$$

Да се провери дека $\vec{F}$ е конзервативно и потоа да се определи неговиот потенцијал.

Како и претходно, прво сметаме:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz \cos(xyz) + \sin(xyz) & x^2 z \cos(xyz) & x^2 y \cos(xyz) \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y \cos(xyz)) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial z} (xyz \cos(xyz) + \sin(xyz)) \\ &\quad + \vec{k} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 z \cos(xyz)) - \vec{k} \frac{\partial}{\partial y} (xyz \cos(xyz) + \sin(xyz)) \\ &\quad - \vec{j} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y \cos(xyz)) - \vec{i} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 z \cos(xyz)) \\ &= (x^2 \cos(xyz) - x^3 y z \sin(xyz)) \vec{i} + (2xy \cos(xyz) - x^2 y^2 z \sin(xyz)) \vec{j} \\ &\quad + (2xz \cos(xyz) - x^2 y z^2 \sin(xyz)) \vec{k} - (2xz \cos(xyz) - x^2 y z^2 \sin(xyz)) \vec{k} \\ &\quad - (2xy \cos(xyz) - x^2 y^2 z \sin(xyz)) \vec{j} - (x^2 \cos(xyz) - x^3 y z \sin(xyz)) \vec{i} \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

од што следува дека $\vec{F}$ е навистина конзервативно. За да го определиме потенцијалот $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, условот $\vec{F} = \vec{\nabla} G$ го запишуваме како:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y, z) = xyz \cos(xyz) + \sin(xyz) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, z) = x^2 z \cos(xyz) \\ \frac{\partial G}{\partial z}(x, y, z) = x^2 y \cos(xyz) \end{cases} \quad (5.5.9)$$

Втората равенка ја интегрираме по y :

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= \int x^2 z \cos(xyz) dy \quad (\text{смена } t = xyz, dt = xz dy) \\ &= x \int \cos t dt = x \sin t + C_1(x, z) = x \sin(xyz) + C_1(x, z). \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

За да ја определиме $C_1(x, z)$, бараме извод по x од (5.5.10) и го изедначуваме со првата равенка во (5.5.9):

$$\sin(xyz) + xyz \cos(xyz) + \frac{\partial C_1}{\partial x}(x, z) = xyz \cos(xyz) + \sin(xyz) \iff \frac{\partial C_1}{\partial x}(x, z) = 0.$$

Последното равенство го интегрираме по x : $C_1(x, z) = \int 0 dx = C_2(z)$. Со замена во (5.5.10) се добива:

$$G(x, y, z) = x \sin(xyz) + C_2(z).$$

Бараме извод по z и изедначуваме со третата равенка во (5.5.9):

$$x^2 y \cos(xyz) + C'_2(z) = x^2 y \cos(xyz) \iff C'_2(z) = 0.$$

Последното равенство го интегрираме по z : $C_2(z) = \int 0 dz = C$, каде што C е константа која не зависи од променливите. За потенцијалот добивме:

$$G(x, y, z) = x \sin(xyz) + C.$$

Го охрабруваме читателот да провери дека: $\vec{\nabla} G = \vec{F}$.

Ако $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ е векторско поле од две променливи дефинирано на област $U \subseteq \mathbb{R}^2$, повторно има смисла да разгледуваме кога $\vec{F} = (F_1, F_2)$ е конзервативно, односно кога постои скаларно поле $G : U \rightarrow \mathbb{R}$, такво што $\vec{\nabla} G = \vec{F}$. Ако $\vec{F}$ е конзервативно, т. е. $\vec{F} = \vec{\nabla} G$ тогаш

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

т. е.

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}. \quad (5.5.11)$$

Прашањето е дали од (5.5.11) следува дека $\vec{F}$ е конзервативно. Слично како и погоре, тоа зависи од областа каде што е дефинирано $\vec{F}$. Ако $\vec{F}$ е дефинирано на $\mathbb{R}^2$, т. е. $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, тогаш како и погоре може да се покаже дека од (5.5.11) следува дека $\vec{F}$ е конзервативно, т. е. постои $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, такво што $\vec{\nabla} G = \vec{F}$. Начинот како се определува потенцијалот за конзервативното поле $\vec{F}$ е сличен како и во тродимензионалната ситуација.

Пример 5.5.4. Дадено е векторското поле:

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = (2x + 4xy, 2x^2).$$

Да се провери дека $\vec{F}$ е конзервативно и потоа да се определи неговиот потенцијал.

За да провериме дека $\vec{F}$ е конзервативно, сметаме:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 4x, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = 4x.$$

Бидејќи $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, следува дека $\vec{F}$ е конзервативно. За да го определиме неговиот потенцијал $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, условот $\vec{\nabla} G = \vec{F}$ го запишуваме како:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = 2x + 4xy \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = 2x^2 \end{cases} \quad (5.5.12)$$

Го интегрираме второто равенство во (5.5.12) по y (наместо ова, можевме да го интегрираме првото равенство во (5.5.12) по x) и добиваме:

$$G(x, y) = \int 2x^2 dy = 2x^2 y + C_1(x); \quad (5.5.13)$$

бидејќи баравме интеграл по y , а G зависи од x и y , константата од интеграција C_1 може да зависи од x , т. е. $C_1 = C_1(x)$. За да ја определеме C_1 , бараме извод од (5.5.13) по x и го изедначуваме со првата равенка во (5.5.12):

$$4xy + C_1'(x) = 2x + 4xy \iff C_1'(x) = 2x.$$

Последното равенство го интегрираме по x и добиваме: $C_1(x) = \int 2x dx = x^2 + C$, каде што C е константа која не зависи од променливите. Со замена во (5.5.13) следува:

$$G(x, y) = 2x^2y + x^2 + C.$$

Го охрабруваме читателот да провери дека навистина важи: $\vec{\nabla}G = \vec{F}$.

Пример 5.5.5. Дадено е векторското поле:

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = (\sin y - y \sin(xy), x \cos y - x \sin(xy)).$$

Да се провери дека $\vec{F}$ е конзервативно и потоа да се определи неговиот потенцијал.

За да провериме дека $\vec{F}$ е конзервативно, сметаме:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \cos y - \sin(xy) - xy \cos(xy), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \cos y - \sin(xy) - xy \cos(xy).$$

Бидејќи $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\vec{F}$ е конзервативно. За да го најдеме неговиот потенцијал $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, условот $\vec{\nabla}G = \vec{F}$ го запишуваме како:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \sin y - y \sin(xy) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = x \cos y - x \sin(xy) \end{cases} \quad (5.5.14)$$

Ја интегрираме првата равенка по x (како и претходно, не е важно која равенка ќе ја интегрираме) и добиваме:

$$G(x, y) = \int (\sin y - y \sin(xy)) dx = x \sin y + \cos(xy) + C_1(y); \quad (5.5.15)$$

константата од интеграцијата C_1 може да зависи од y затоа што баравме интеграл по x , а G зависи од x и y . За да ја определеме C_1 , бараме извод од (5.5.15) по y и изедначуваме со втората равенка во (5.5.14):

$$x \cos y - x \sin(xy) + C_1'(y) = x \cos y - x \sin(xy) \iff C_1'(y) = 0.$$

Со интеграција на последното равенство по y се добива $C_1(y) = \int 0 dy = C$, каде што C е константа која не зависи од променливите. Заменуваме во (5.5.15) за да го добиеме потенцијалот:

$$G(x, y) = x \sin(y) + \cos(xy) + C.$$

Го охрабруваме читателот да провери дека: $\vec{\nabla}G = \vec{F}$.

5.6. Нерешени задачи

Задача 5.6.1. Да се пресмета површинскиот интеграл:

$$\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS,$$

каде што Σ е горната страна на квадратот $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, во рамнината $z = 2$.

Задача 5.6.2. Да се пресмета:

$$\iint_{\Sigma} G(x, y, z) dS,$$

каде што

- (а) површината Σ е делот од конусот: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, каде што $0 \leq z \leq 1$ и G е скаларното поле $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = xyz$;
- (б) површината Σ е сидот на телото затворено со: $z = 4 - x^2 - y^2$ и $z = 0$, додека G е скаларното поле $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = x + yz$.

Задача 5.6.3. Нека D е единичниот круг во xOy -рамнината со центар во координатниот почеток. Да се пресмета плоштината на графикот на функцијата $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Задача 5.6.4. Даден е танок лист во облик на површината $x = y^2 + z^2$, $0 \leq x \leq 9$, со површинска густина $\rho(x, y, z) = x + y^2 + z^2$. Да се пресмета масата и тежиштето на листот.

Задача 5.6.5. Да се пресмета:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

каде што

- (а) Σ е: $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, ориентирана во спротивна насока од координатниот почеток и $\vec{F}$ е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x + y, z, xz)$;
- (б) Σ е:

$$z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

ориентирана така што нормалните вектори покажуваат во спротивна насока од позитивната z -оска, додека $\vec{F}$ е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x, xy, z)$;

- (в) Σ е делот од: $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, којшто се наоѓа во прв октант и е ориентиран во спротивна насока од координатниот почеток, додека $\vec{F}$ е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (y + z, yz, x + z)$;

(г) Σ е надворешната страна на делот од елипсоидниот цилиндар:

$$\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

и $\vec{F}$ е векторското поле $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xz, y^2z, x + z^2)$.

Задача 5.6.6. Да се пресмета:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} G \cdot d\vec{S},$$

каде што

- (а) Σ е делот од $x = y^2 + z^2$, $1 \leq x \leq 4$, којшто се наоѓа во прв октант и е ориентиран на тој начин што нормалните вектори покажуваат кон позитивната x -оска, додека G е скаларното поле $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = xy + xz^2$;
- (б) Σ е делот од надворешната страна на сферата: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, којшто се наоѓа помеѓу рамнините: $z = 0$ и $z = 1$, додека G е скаларното поле $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y, z) = xy + z$.

Задача 5.6.7. Да се пресмета:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

каде што:

- (а) Σ е внатрешната страна на сферата: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $\vec{F}$ е векторското поле $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, y^2z)$;
- (б) Σ е надворешната страна на елипсоидот:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

и $\vec{F}$ е векторското поле $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x + z, yz, z)$.

Задача 5.6.8. Да се определи флуksот на гравитационото поле генерирано од материјална точка со маса m_0 која се наоѓа во (x_0, y_0, z_0) низ надворешната страна на сферата со центар во (x_0, y_0, z_0) и радиус $r > 0$. Што може да се заклучи за зависноста на флуksот од радиусот на сферата?

Задача 5.6.9. Флуид со густина $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ се движи со брзина $\vec{V}(x, y, z) = (z, xy, -x)$. Да се определи масата во единица време на флуидот која протекува низ делот од површината $z = 1 - x^2 - y^2$, кој се наоѓа во прв октант и е ориентиран во спротивна насока од координатниот почеток. Да се определи и волуменот во единица време кој протекува низ оваа површина.

Задача 5.6.10. Да се пресметаат линиските интеграли во задачите 4.5.11, 4.5.13 и 4.5.14, со помош на Стоксовата формула.

Задача 5.6.11. Кривата C е пресекот на површините: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и $z = 1$. За векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z^2)$, да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

со примена на Стоксовата теорема (најдете соодветна површина и ориентација).

Задача 5.6.12. Нека Σ е делот од рамнината $x + y + z = 3$ каде што $x^2 + y^2 \leq 1$, ориентирана во спротивна насока од координатниот почеток. Да се пресмета:

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

за $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, x^2)$, директно и со користење на Стоксовата теорема.

Задача 5.6.13. Дадено е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (y+z, x+z, x+y)$. Кривата C е кружницата $x^2 + y^2 = 2^2$ во рамнината $z = 1$, позитивно ориентирана. Да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

со помош на Стоксовата теорема (изберете соодветна површина).

Задача 5.6.14. Кривата C е пресек на елипсоидниот цилиндар:

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1, \quad z \geq 0,$$

со цилиндарот $x^2 + z^2 = 16$, y -координатата е слободна, и е позитивно ориентирана околу z -оската. Со помош на Стоксовата формула, да се пресмета:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma},$$

каде што $\vec{F}$ е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2, x^2 + z^2, yz)$.

Задача 5.6.15. Нека Σ е надворешната страна на тетраедерот со темиња во: $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$. Со помош на теоремата на Гаус-Остроградски, да се пресмета:

$$\iiint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

каде што $\vec{F}$ е векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x + y + z, ye^x, xz)$.

Задача 5.6.16. Да се пресмета интегралот во задачата 5.6.7 (а), со помош на теоремата на Гаус-Остроградски.

Задача 5.6.17. Нека Σ е надворешниот сид на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Да се пресмета:

$$\iiint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

каде $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$, со помош на теоремата на Гаус-Остроградски.

Задача 5.6.18. Да се пресмета површинскиот интеграл:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

каде $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, и Σ е надворешниот сид на цилиндричната површина $x^2 + y^2 = 4$ со $0 \leq z \leq 3$, заедно со горната и долната база.

Задача 5.6.19. Да се пресмета интегралот во задачата 5.6.5, со помош на теоремата на Гаус-Остроградски, откако претходно површината Σ соодветно ќе се затвори.

Задача 5.6.20. Да се покаже дека $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (e^x y^3 + y, 3e^x y^2 + x)$, е конзервативно поле и да се најде потенцијалот.

Задача 5.6.21. Да се покаже дека $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (2xy^3, 3x^2 y^2 + \cos y)$, е конзервативно поле и да се најде потенцијалот.

Задача 5.6.22. Да се покаже дека $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + 2yz^3, 3y^2 z + 2z)$, е конзервативно поле и да се најде потенцијалот.

Задача 5.6.23. Да се покаже дека $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (12x^2, \cos y \cos z, 1 - \sin y \sin z)$, е конзервативно поле и да се најде потенцијалот.

Задача 5.6.24. Да се провери дали векторското поле $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (2x \cos y, x^2 \sin y + 3z^2, 6yz)$, е конзервативно. Ако е, да се определи потенцијалот.

Задача 5.6.25. Да се пресмета линискиот интеграл:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

за $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (y^2, 2xy)$ и кривата C која е дел од кружница $x^2 + y^2 = 4$, од точката $(2, 0)$ до точката $(-2, 0)$ по полукружницата горе. (Користи дали полето е конзервативно или не.)

Библиографија

- [1] Б. Андоновиќ, З. Мисајлески, Т. Димовски. Збирка решени задачи од Математика 1 за студентите од Технолошко-металуршкиот факултет, УКИМ, Скопје, 2013.
- [2] С. Геговска-Зајкова, К. Хаџи-Велкова Санева. Предавања по предметот Функции од повеќе променливи и диференцијални равенки (интерна скрипта), ФЕИТ, Скопје, 2018.
- [3] J. R. Hass, C. E. Heil, M. D. Weir, P. Bogacki. Thomas' Calculus, 15th edition, Pearson Publications, 2023.
- [4] Б. Јолевска-Тунеска, С. Геговска-Зајкова, Е. Хаџиева, К. Санева, Б. Начевска-Настовска. Збирка решени испитни задачи од Математика 2, Електротехнички факултет, Скопје, 2004.
- [5] J. Marsden, A. Tromba. Vector Calculus Sixth Edition, W. H. Freeman, 2011.
- [6] З. Мисајлески. Диференцијално и интегрално сметање II (на функции од повеќе променливи), УКИМ, Скопје, 2024.
- [7] М. Оровчанец, М. Шоптрајанов. Збирка решени задачи од математичка анализа 2, УКИМ, Скопје, 2019.
- [8] Б. Пиперевски. Математичка анализа II, Електротехнички факултет, Скопје, 2004.
- [9] M.R. Spiegel. Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis, Shaum's Outline Series, 1959.
- [10] J. Stewart. Calculus: Early Transcendentals, 8th edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2012.

Ниту еден дел од оваа публикација не смее да биде репродуциран на било кој начин без претходна писмена согласност од авторите.

Е-издание: <https://ukim.edu.mk/e-book/00154>