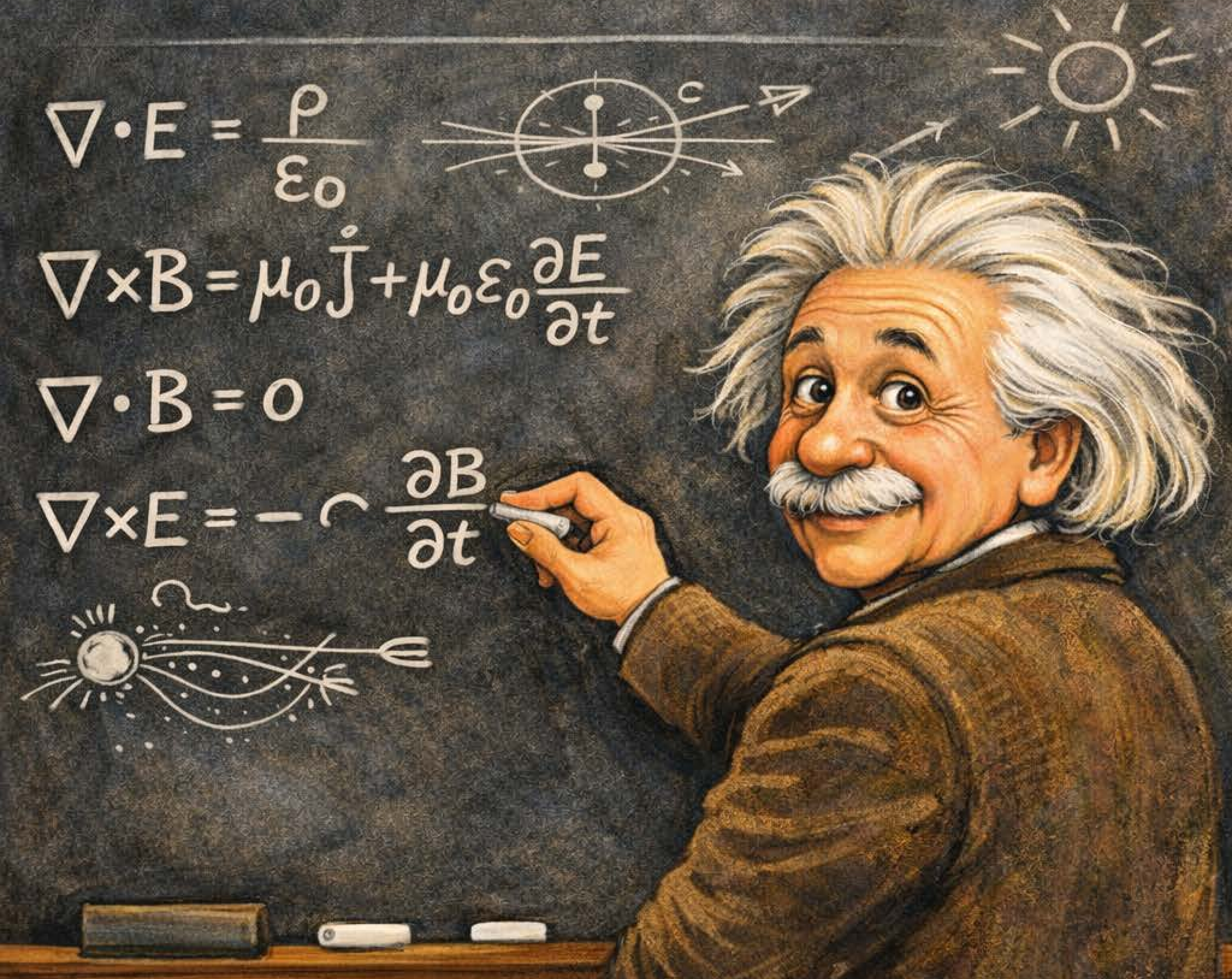
Александар Ѓурчиновски

Збирка решени задачи по Теориска електродинамика со СТР



Скопје 2026

Александар Ѓурчиновски

Збирка решени задачи по Теориска електродинамика со СТР

Скопје 2026

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. „Гоце Делчев“ бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Биљана Ангелова, ректор

Уредник на публикацијата:
проф. д-р Александар Ѓурчиновски

Рецензенти:
1. проф. д-р Олга Галбова
2. проф. д-р Даница Крстовска

Техничка обработка:
проф. д-р Александар Ѓурчиновски

Лектура на македонски јазик:
Татјана Филипоска

Илустратор:
проф. д-р Александар Ѓурчиновски

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

537.8:530.121(075.8)(076)

ЃУРЧИНОВСКИ, Александар
Збирка решени задачи по Теориска електродинамика со СТР [Електронски извор] / Александар Ѓурчиновски ; [илустратор Александар Ѓурчиновски]. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", 2026

Начин на пристапување (URL): https://ukim.edu.mk/e-book/00167. - Текст во PDF формат, содржи 195 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 30.12.2025. - Библиографија: стр. 194-195

ISBN 978-9989-43-536-2

1. Гл. ств. насл.
а) Електродинамика -- Специјална теорија на релативност -- Високошколски учебници -- Вежби

COBISS.MK-ID 67851013

ПРЕДГОВОР

Книгата “Збирка решени задачи по Теориска електродинамика со СТР” (СТР е акроним за “специјална теорија на релативност”) ги содржи задачите што се решаваат на часовите по нумерички вежби по предметот Теориска електродинамика со СТР. Предметот Теориска електродинамика со СТР има седмичен фонд на часови 4 + 3, и го изучуваат студентите од сите насоки во петтиот семестар на првиот циклус студии по физика на Природно-математичкиот факултет при Универзитетот ,,Св. Кирил и Методиј” во Скопје.

Материјалот и нотациите се во согласност со новата наставна програма по предметот, и како основен учебник се користи третото издание на книгата ,,Вовед во електродинамика" од Дејвид Грифитс [1]. Согласно горенаведеното, при именување на физичките величини е употребена терминологијата од овој учебник, што исто така одговара на терминологијата што се користи во повеќето научноистражувачки списанија во Западна Европа и САД. Така на пример, векторските полиња што го опишуваат електромагнетното поле во оваа збирка се именувани како електрично поле $\vec{E}$ и магнетно поле $\vec{B}$, но постои поинаквата терминологија користена во некои учебници во кои што векторот $\vec{B}$ се нарекува вектор на магнетна индукција.

При користење на збирката се претпоставува дека студентот го поминал теорискиот дел на материјалот од книгата од Грифитс, конкретно поглавјата од 7 до 12 од овој учебник. Освен книгата на Грифитс, големо влијание при изборот на задачите имаа и класичните книги и збирки на задачи од Ѓорѓе Мушицки [2] и Божидар Милиќ [3,4] коишто се користат на нашиот факултет повеќе децении, како и многуте референци цитирани во горенаведените книги – некои од нив се наведени во одделот Литература. Им изразувам благодарност на рецензентите проф. д-р Олга Галбова и проф. д-р Даница Крстовска за конструктивните забелешки во врска со текстот.

СОДРЖИНА

1. Релативистичка механика 3

2. Релативистичка трансформација на векторите на електромагнетното поле 58

3. Релативистичко движење на наелектризирани честички во електромагнетно поле 71

4. Електромагнетно поле на полнежи во движење. Зрачење од електромагнетен дипол 88

5. Електромагнетни потенцијали. Максвелов тензор на напон 127

6. Електромагнетни бранови 144

7. Електродинамика на подвижни средини. Релативистичка оптика 157

8. Литература 194

1.

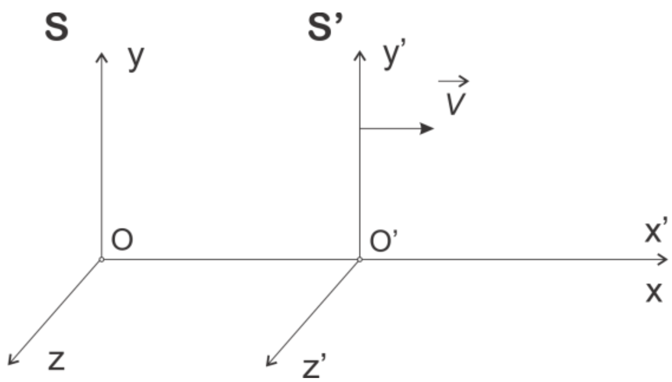
РЕЛАТИВИСТИЧКА МЕХАНИКА

Задача 1.

Да се покаже дека четиридимензионалниот елементарен волумен во просторот на Минковски $dx\,dy\,dz\,cdt$, каде што c е брзината на светлината во вакуум, е инваријантен во однос на промената на референтниот систем.

Решение 1.

При трансформацијата на елементот на волуменот од еден во друг инерцијален референтен систем (од S во S'), ќе избереме дека системите се во стандардна конфигурација, односно, нивните соодветни оски се паралелни, во време $t = t' = 0$ координатните почетоци им се поклопуваат, и системот S' се движи во однос на S со константна брзина V насочена кон позитивната насока на x-оската (види слика).



Слика 1

Соодветно, Лоренцовите трансформации се:

$$x' = \frac{x - \frac{V}{c}ct}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$ct' = \frac{ct - \frac{V}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Преминот $dx'dy'dz'cdt'$ во $dx\,dy\,dz\,cdt$ се врши со користење на релацијата:

$$dx'dy'dz'cdt' = \mathrm{Det}[\boldsymbol{J}(x,y,z,ct)]\;dx\,dy\,dz\,cdt,$$

каде што со $\boldsymbol{J}(x,y,z,ct)$ ја означивме матрицата на трансформација (матрица на Јакоби):

$$\frac{\partial(x',y',z',t')}{\partial(x,y,z,t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} & \frac{\partial x'}{\partial ct} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} & \frac{\partial y'}{\partial ct} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} & \frac{\partial z'}{\partial ct} \\ \frac{\partial ct'}{\partial x} & \frac{\partial ct'}{\partial y} & \frac{\partial ct'}{\partial z} & \frac{\partial ct'}{\partial ct} \end{pmatrix}.$$

Со пресметување на парцијалните изводи со употреба на Лоренцовите трансформации, за детерминантата на матрицата на Јакоби се добива:

$$\mathrm{Det}[\boldsymbol{J}(x,y,z,ct)]=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & -\frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{vmatrix}.$$

Детерминантата може да се реши со разложување по редови или колони, со користење на методот на минори и кофактори. За најпогодно решавање, правиме разложување по редот или колоната што има најмногу нули. Прво ја избираме втората колона, при што добиваме:

$$\mathrm{Det}[\boldsymbol{J}(x,y,z,ct)]=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & -\frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{vmatrix}.$$

Повторно разложуваме по втората колона на последната детерминанта, при што конечно добиваме:

$$\mathrm{Det}[\boldsymbol{J}(x,y,z,ct)]=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & -\frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ -\frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{vmatrix}=1.$$

Бидејќи $\mathrm{Det}[\boldsymbol{J}(x,y,z,ct)]=1$, следува дека елементарниот волумен во просторот на Минковски е инваријантен во однос на Лоренцовите трансформации, односно

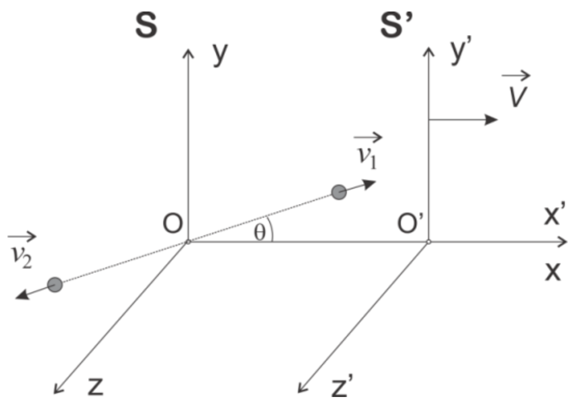
$$dx'dy'dz'cdt' = dx\,dy\,dz\,cdt.$$

■

Задача 2.

Две честички се движат долж права линија една од друга со брзини v_1 и v_2 во однос на даден референтен систем S. Дали може да се најде инерцијален референтен систем S' во однос на кој брзините на овие две честички ќе бидат заемно ортогонални? Колкави агли во тој систем S' ќе образуваат брзините на честичките со правецот на релативната брзина V на системот S' во однос на S?

Решение 2.



Слика 2

Без губење на општоста при решавањето на задачата, ќе земеме правата линија долж која се движат честичките една од друга да лежи во xy-рамнината на референтниот систем S и да поминува низ координатниот почеток O. Брзините на честичките се спротивно насочени една кон друга, а аголот на правата линија по која тие се движат изнесува θ мерено во однос на x-оската. Определуваме референтните системи S' и S да се во стандардна конфигурација, и системот S' во однос на S да се движи со брзина V (види слика). Тогаш, компонентите на векторите на брзините $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ на честичките во референтниот систем S изнесуваат:

$$\vec{v_1} = (v_1 \cos\theta\,, v_1 \sin\theta\,, 0),$$

$$\vec{v_2} = (-v_2 \cos\theta\,, -v_2 \sin\theta\,, 0).$$

За изнаоѓање на соодветните брзини $\vec{v_1}'$ и $\vec{v_2}'$ на честичките во однос на референтниот систем S', ќе ги искористиме формулите за релативистичките трансформации на компонентите на брзините меѓу двата референтни системи, при што за компонентите на брзините на првата честичка добиваме:

$$v'_{1x} = \frac{v_{1x} - V}{1 - \frac{v_{1x}V}{c^2}} = \frac{v_1 \cos\theta - V}{1 - \frac{v_1 V \cos\theta}{c^2}},$$

$$v'_{1y} = \frac{v_{1y}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_{1x}V}{c^2}} = \frac{v_1 \sin\theta\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_1 V \cos\theta}{c^2}},$$

$$v'_{1z} = \frac{v_{1z}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_{1x}V}{c^2}} = 0,$$

односно во векторски облик:

$$\overrightarrow{\mathrm{v}'_1} = \left(\frac{v_1 \cos\theta - V}{1 - \frac{v_1 V \cos\theta}{c^2}}, \frac{v_1 \sin\theta\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_1 V \cos\theta}{c^2}}, 0\right),$$

и на сличен начин, за компонентите на брзината на втората честичка:

$$v'_{2x} = \frac{v_{2x} - V}{1 - \frac{v_{2x}V}{c^2}} = \frac{-v_2 \cos\theta - V}{1 + \frac{v_2 V \cos\theta}{c^2}},$$

$$v'_{2y} = \frac{v_{2y}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_{2x}V}{c^2}} = \frac{-v_2 \sin\theta\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_2 V \cos\theta}{c^2}},$$

$$v'_{2z} = \frac{v_{2z}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_{2x}V}{c^2}} = 0,$$

односно, во векторски облик:

$$\overrightarrow{\mathrm{v}'}_2 = \left(\frac{-v_2 \cos\theta - V}{1 + \frac{v_2 V \cos\theta}{c^2}}, \frac{-v_2 \sin\theta \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_2 V \cos\theta}{c^2}}, 0 \right).$$

За брзините на честичките $\vec{\mathrm{v}}_1{}'$ и $\vec{\mathrm{v}}_2{}'$ во S'-системот да се ортогонални, скаларниот производ на овие два вектора треба да е нула, односно

$$\vec{\mathrm{v}}_1{}' \cdot \vec{\mathrm{v}}_2{}' = v'_{1x} v'_{2x} + v'_{1y} v'_{2y} + v'_{1z} v'_{2z} = 0$$

па следствено, со замена и изразување преку компонентите во S добиваме:

$$\frac{v_1 \cos\theta - V}{\left(1 - \frac{v_1 V \cos\theta}{c^2}\right)} \cdot \frac{-v_2 \cos\theta - V}{\left(1 + \frac{v_2 V \cos\theta}{c^2}\right)} - \frac{v_1 v_2 (\sin\theta)^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_1 V \cos\theta}{c^2}\right)\left(1 + \frac{v_2 V \cos\theta}{c^2}\right)} = 0$$

од каде што, по кратко средување, се добива квадратна равенка по V:

$$\left(1 + \frac{v_1 v_2 (\sin\theta)^2}{c^2}\right) V^2 + (v_2 - v_1) V \cos\theta - v_1 v_2 = 0$$

чии што решенија се:

$$V_{1,2} = \frac{-(v_2 - v_1)\cos\theta \pm \sqrt{(v_2 - v_1)^2 (\cos\theta)^2 + 4 v_1 v_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2 (\sin\theta)^2}{c^2}\right)}}{2\left(1 + \frac{v_1 v_2 (\sin\theta)^2}{c^2}\right)}.$$

При овие вредности на релативната брзина V меѓу референтните системи, брзините на двете честички ќе бидат заемно ортогонални.

Аголот θ_1' што векторот брзината на првата честичка $\vec{\mathrm{v}}_1{}'$ го зафаќа со x'-оската на системот S' изнесува:

$$\theta_1^{\prime} = \arctan\frac{\dfrac{v_1 \sin\theta \sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{v_1 V\cos\theta}{c^2}}}{\dfrac{v_1\cos\theta - V}{1-\dfrac{v_1 V\cos\theta}{c^2}}} = \arctan\frac{v_1 \sin\theta \sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{v_1\cos\theta - V}$$

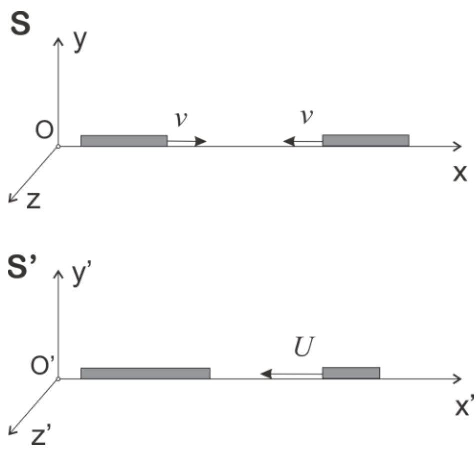
додека аголот $\theta_2^{\prime}$ на векторот на брзината на втората честичка $\vec{v_2}^{\prime}$ во однос на x'-оската на системот S' изнесува

$$\theta_2^{\prime} = \arctan\frac{\dfrac{-v_2 \sin\theta \sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1+\dfrac{v_2 V\cos\theta}{c^2}}}{\dfrac{-v_2\cos\theta - V}{1+\dfrac{v_2 V\cos\theta}{c^2}}} = \arctan\frac{v_2 \sin\theta \sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{v_2\cos\theta + V}.$$

■

Задача 3.

Два линијари, секој со сопствена должина l_0, се движат еден наспроти друг во однос на референтниот систем S долж права која поминува низ нивните должини. Брзините на линијарите во референтниот систем S се еднакви по апсолутна вредност, а интензитетот на секоја брзина е v. Колкава е должината l на едниот линијар во однос на референтниот систем S' сврзан за другиот линијар?



Слика 3

Решение 3.

Без губење на општоста на решението, референтниот систем S' ќе го сврземе за левиот линијар. Претпоставуваме дека во системот S

линијарите се движат по x оската, и дека системите S и S' се во стандардна конфигурација. Тогаш, во однос на референтниот систем S', брзината на левиот линијар е нула, а брзината на десниот линијар U ја добиваме од законот за релативистичко сложување на брзините кој е:

$$U = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} = \frac{-v - v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}},$$

каде што $V = -v$ е релативната брзина на S' во однос на S. Според тоа, должината на десниот линијар во однос на референтниот систем на левиот линијар изнесува:

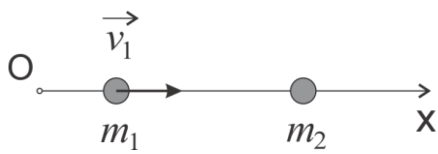
$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}} = l_0\sqrt{1 - \frac{4v^2c^2}{(c^2 + v^2)^2}} = l_0\frac{c^2 - v^2}{c^2 + v^2}.$$

■

Задача 4.

Во однос на референтниот систем S сврзан за лабораторијата, честичка со маса на мирување m_1 и енергија E_1 лета кон честичка со маса на мирување m_2 којашто во овој референтен систем мирува. Да се определи брзината на центарот на маса по судирот на честичките, како и брзината на двете честички во однос на референтниот систем сврзан за центарот на масата.

Решение 4.



Слика 4

Од условот на задачата е очевидно дека движењето е еднодимензионално, па земаме честичките да се движат по x-оската на референтниот систем S сврзан за лабораторијата. Импулсот на произволна честичка со маса на мирување m_0 и брзина $\vec{v}$ се пресметува по релативистичката формула:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2 \frac{\vec{v}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{c^2}\vec{v},$$

каде што E е енергијата на честичката, а c е брзината на светлината во вакуум.

Вкупниот импулс на сите честички во однос на даден референтен систем S е зададен со релацијата

$$\sum_i \vec{p_i} = \sum_i \frac{E_i}{c^2}\vec{v_i} = \frac{1}{c^2}\sum_i E_i\vec{v_i} = \frac{\vec{V}}{c^2}\sum_i E_i$$

каде што $\vec{V}$ по дефиниција е брзината на центарот на маса на системот на честички, која што лесно се изразува од последната релација преку импулсите и енергиите на композитните честички:

$$\vec{V} = \frac{c^2\sum_i \vec{p_i}}{\sum_i E_i}.$$

Во конкретниот случај што го разгледуваме во задачава, втората честичка мирува и нејзиниот импулс е нула, а импулсот на првата честичка изнесува:

$$\vec{p_1} = \frac{m_1\vec{v}_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}},$$

каде $\vec{v}_1 = v_1\hat{x}$. Следствено, за $\vec{V}$ добиваме

$$\vec{V} = \frac{\vec{p_1}c^2}{E_1 + m_2c^2} = \frac{\frac{E_1}{c^2}\vec{v_1}c^2}{E_1 + m_2c^2} = \frac{E_1 v_1}{E_1 + m_2c^2}\hat{x}. \qquad (1)$$

Со користење на релацијата за енергијата на првата честичка

$$E_1 = \frac{m_1c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}$$

по кратки трансформации се добива брзината на првата честичка изразена преку нејзината енергија и маса на мирување:

$$v_1 = c\frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}}{E_1}$$

Со замена во изразот (1), ја добиваме брзината $\vec{V}$ на центарот на маса

$$\vec{V} = \frac{E_1 c\dfrac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}}{E_1}}{E_1 + m_2 c^2}\hat{x} = \frac{c\sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}}{E_1 + m_2 c^2}\hat{x}.$$

Гледаме дека центарот на маса се движи долж *x*-оската на референтниот систем *S* сврзан за лабораторјата.

Во однос на референтниот систем *S'* сврзан за центарот на маса, брзините на честичките се пресметуваат со помош на релацијата за релативистичко собирање на брзините долж *x*-оската:

$$v_x^{\prime} = \frac{v_x - V}{1 - \dfrac{v_x V}{c^2}}.$$

Следствено, за брзините на двете честички соодветно добиваме:

$$v_1^{\prime} = \frac{v_1 - V}{1 - \dfrac{v_1 V}{c^2}} == \frac{c\dfrac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}}{E_1} - c\dfrac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}}{E_1 + m_2 c^2}}{1 - \dfrac{c\dfrac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}}{E_1}\cdot c\dfrac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}}{E_1 + m_2 c^2}}{c^2}} = c\frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}}{E_1 + \dfrac{m_1^2}{m_2}c^2},$$

и

$$v_2^{\prime} = \frac{v_2 - V}{1 - \dfrac{v_2 V}{c^2}} = -V = -c\frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}}{E_1 + m_2 c^2}.$$

■

Задача 5.

Во однос на референтниот систем S сврзан за лабораторијата, мион движејќи се со брзина $v = 0.99c$ поминува пат l = 3 km од местото каде што се создал до местото каде што се распаднал. Да се најдат:
а) Сопственото време на живот $\Delta\tau$ на мионот;
б) Растојанието Δx_0 помеѓу точките на создавање и распаѓање на мионот во однос на референтниот систем S' сврзан за мионот.

Решение 5.

а) Времето на живот на мионот во однос на системот S сврзан за лабораторијата изнесува:

$$\Delta t = \frac{l}{v} = \frac{3000\ \mathrm{m}}{0.99 \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 1{,}01 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}.$$

Оттука, сопственото време на живот на мионот е:

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-6}\mathrm{s}.$$

б) Должината на патот помеѓу точките на создавање и распаѓање на мионот во однос на референтниот систем S' сврзан за него изнесува:

$$\Delta x_0 = l \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 3000\ \mathrm{m} \cdot \sqrt{1 - (0.99)^2} \approx 0.42\ \mathrm{km}.$$

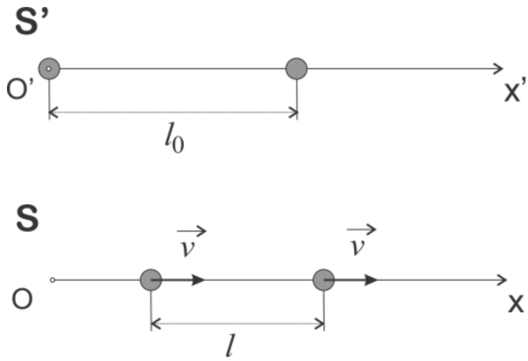
■

Задача 6.

Во однос на лабораторискиот референтен систем S, две нестабилни честички се движат долж права линија во иста насока со брзина $v = 0{,}99c$, каде што c е брзината на светлината во вакуум. Растојанието помеѓу нив во системот S е константно и изнесува l = 120 m. Во некој момент во однос на референтниот систем S' сврзан за честичките, двете честички се распаѓаат едновремено. Колкав е временскиот интервал помеѓу моментите на распаѓање на овие две честички во сметано во однос на референтниот систем *S*? Која честичка ќе се распадне прва?

Решение 6.

Без губење на општоста на решението, ќеземеме дека честичките се движат по *x*-оската на референтниот систем *S*. Во однос на референтниот систем S' сврзан за честичките, тие мируваат и растојанието меѓу нив изнесува



Слика 5

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Во однос на овој референтен систем честичките се распаднале едновремено. Ако со $\Delta t'$ го означиме времето на распаѓање на честичките во S', и земеме дека првата (левата) честичка *A* се распаднала во координатниот почеток во време $\Delta t'$, а втората (десната) честичка *B* во истото тоа време во точката $x' = l_0$, тогаш координатите на просторно-временските настани кои го обележуваат распаѓањето на левата и десната честичка во S' се:

$$A'(ct_A', x_A') = A'(c\Delta t', 0),$$

$$B'(ct_B', x_B') = B'(c\Delta t', l_0).$$

Поради тоа што движењето на честичките е еднодимензионално во однос на просторните координати (движењето се одвива по *x*-оската), при пишување на координатите на настаните ги занемаруваме *y* и *z* координатите кои се нули во двата референтни системи. Со користење на Лоренцовите трансформации помеѓу системите S' и S кои се во стандардна конфигурација,

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$ct = \frac{ct' + \frac{x'v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

ги добиваме соодветните просторно-временски настани кои го опишуваат распадот на честичките во однос на референтниот систем *S*:

$$A(ct_A, x_A) = A\left(\frac{c\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),$$

$$B\,(ct_B, x_B) = B\left(\frac{c\Delta t' + l_0\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{l_0 + v\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

Подетално, за добивање на координатите на настанот *A* од настанот *A'* имаме:

$$x_A = \frac{x'_A + vt'_A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0 + \frac{v}{c}c\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$ct_A = \frac{ct'_A + x'_A\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

и соодветно за координатите на настанот *B* од настанот *B'*:

$$x_B = \frac{x'_B + \frac{v}{c}ct'_B}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l_0 + v\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$ct_B = \frac{ct'_B + x'_B \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c\Delta t' + l_0 \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Следствено, времињата на распад на честичките во однос на референтниот систем *S* се:

$$t_A = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$t_B = \frac{\Delta t' + l_0 \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t_A + \frac{l_0 \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Оттука се гледа дека најпрвин ќе се распадне левата честичка (настан *A*), а потоа десната честичка (настан *B*), при што временскиот интервал помеѓу двете дезинтеграции изнесува:

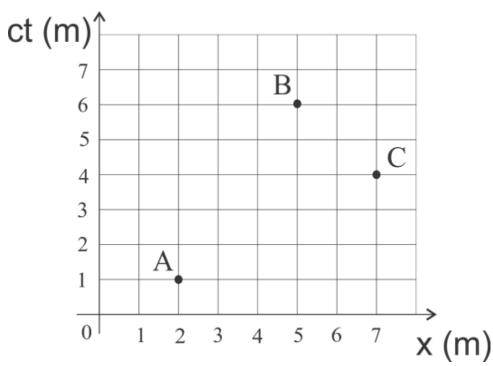
$$\Delta T = t_B - t_A = \frac{l_0 \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{lv}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 20\ \mathrm{ms}.$$

■

Задача 7.

На сликата е зададен просторно-временски дијаграм на кој се прикажани три настани *A*, *B* и *C*. Трите настани се случиле на *x*-оската во некој референтен систем *S*.

а) Да се најде временскиот интервал $\Delta t'_{AB}$ помеѓу настаните *A* и *B* во референтниот систем *S'* во однос на кој што овие два настани се одиграле во иста просторна точка.



Слика 6

б) Да се најде растојанието $\Delta x''_{AC}$

помеѓу настаните A и C во однос на референтниот систем S'' каде што тие се одиграле истовремено.

Решение 7.

а) Од сликата гледаме дека просторно-временските координати на настаните A и B се:

$$(ct_A, x_A) = (1\text{ m}, 2\text{ m}),$$

$$(ct_B, x_B) = (6\text{ m}, 5\text{ m}).$$

Инваријантниот интервал I_{AB} помеѓу настаните A и B изнесува:

$$I_{AB} = -c^2\Delta t_{AB}^2 + \Delta x_{AB}^2 = -16\text{m}^2$$

при што

$$\Delta t_{AB} = t_B - t_A = \frac{5}{c}\text{m},$$

$$\Delta x_{AB} = x_B - x_A = 3\text{m}.$$

Поради тоа што $I_{AB} < 0$, интервалот е од временски тип, па постои референтен систем S' во однос на којшто овие два настани се случиле во иста просторна точка. Од инваријантноста на интервалот следи:

$$-c^2\Delta t_{AB}^2 + \Delta x_{AB}^2 = -c\Delta t'^2_{AB}$$

па за временскиот интервал помеѓу настаните во однос на референтниот систем S' се добива:

$$\Delta t'_{AB} = \sqrt{\Delta t_{AB}^2 - \frac{\Delta x_{AB}^2}{c^2}} = 13\text{ ns}.$$

б) Од сликата забележуваме дека просторно-временските координати на настаните A и C се:

$$(ct_A, x_A) = (1\text{ m}, 2\text{ m}),$$

$$(ct_C, x_C) = (4\ \mathrm{m}, 7\ \mathrm{m}).$$

Инваријантниот интервал I_{AC} помеѓу настаните A и C изнесува:

$$I_{AC} = -c^2 \Delta t_{AC}^2 + \Delta x_{AC}^2 = 16\ \mathrm{m}^2$$

при што

$$\Delta t_{AC} = t_C - t_A = \frac{3}{c}\ \mathrm{m},$$

$$\Delta x_{AC} = x_C - x_A = 5\ \mathrm{m}.$$

Во овој случај $I_{AC} > 0$, па интервалот е од просторен тип, што значи дека постои референтен систем S'' во однос на кој овие два настани се случиле едновремено. Од инваријантноста на интервалот следува:

$$-c^2 \Delta t_{AC}^2 + \Delta x_{AC}^2 = \Delta x''^2_{AC}$$

па од ова го добиваме просторното растојание меѓу настаните A и C во референтниот систем S'' каде тие се случиле во исто време:

$$\Delta x''_{AC} = 4\ \mathrm{m}.$$

■

Задача 8.

Честичка проектил со енергија E, чија што енергија на мирување изнесува E_0, се судира со иста таква честичка што мирува. Ако $E >> E_0$, да се покаже дека вкупната енергија на системот од честички во референтниот систем S' каде вкупниот импулс на системот е нула може да се апроксимира со релацијата $E' \approx \sqrt{2EE_0}$.

Решение 8.

Сумарниот 4-вектор на импулсот на систем составен од N честички ($i = 1, 2, \ldots N$) изнесува:

$$p^\mu = \left(\sum_i \frac{E_i}{c}, \sum_i \vec{p_i} \right).$$

Во нашиов случај за систем од две честички, 4-векторот на импулсот во лабораторискиот референтен систем пред судирот изнесува:

$$p^{\mu} = \left(\frac{E + E_0}{c}, \vec{p}\right),$$

каде што $\vec{p}$ е векторот на релативистичкиот импулс на честичката проектил (честичката мета мирува, па нејзиниот импулс е нула).

Во референтниот систем S' во којшто вкупниот импулс на честичките е нула, 4-векторот на импулсот на системот од честички е:

$$p^{\mu'} = \left(\frac{E'}{c}, 0\right),$$

каде што E' е вкупната енергија на системот од две честички. Од инваријантноста на скаларниот производ на 4-векторот на импулсот следува

$$p^{\mu} p_{\mu} = p^{\mu'} p_{\mu'},$$

односно

$$-\left(\frac{E + E_0}{c}\right)^2 + p^2 = -\frac{E'^2}{c^2}.$$

Ако ја искористиме релацијата која ги сврзува енергијата и импулсот во форма:

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2,$$

се добива

$$p^2 = \frac{1}{c^2}(E^2 - E_0^2),$$

па со замена во изразот од претходниот параграф и користејќи го условот $E >> E_0$ добиваме:

$$-\left(\frac{E + E_0}{c}\right)^2 + \frac{1}{c^2}(E^2 - E_0^2) = -\frac{E'^2}{c^2},$$

а оттука

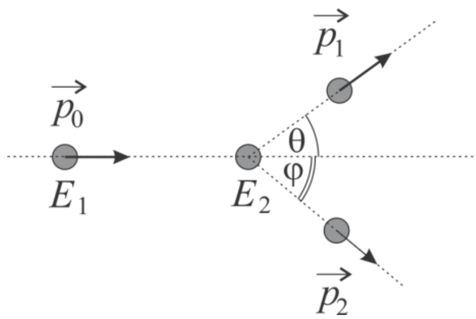
$$E^{\prime} = \sqrt{2E_0(E + E_0)} \approx \sqrt{2EE_0}.$$

■

Задача 9.

Релативистичка честичка проектил со маса на мирување m_0 се судира со иста таква честичка која што пред судирот мирувала. Да се најде врската помеѓу кинетичката енергија T_0 на упадната честичка пред судирот, нејзината кинетичка енергија T_1 после судирот, и аголот на расејување θ од првобитната насока на честичката пред судирот. Да се смета дека судирот е еластичен.

Решение 9.



Слика 7

Пред судирот првата честичка има кинетичка енергија T_0 и се движи кон втората честичка која мирува. Двете честички се идентични и имаат иста маса на мирување m_0. По судирот, првата честичка се расејува под агол θ во однос на првобитниот правец на движење, а втората се расејува под агол φ. Четири-векторите на импулсот пред судирот P_1^{μ} и по судирот P_2^{μ} изнесуваат:

$$P_1^{\mu} = \left(\frac{E_1 + E_2}{c}, \overrightarrow{p_0}\right),$$

$$P_2^{\mu} = \left(\frac{\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2}{c}, \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}\right).$$

каде што E_1 и E_2 се енергиите на првата и на втората честичка пред судирот, $\overrightarrow{p_0}$ е импулсот на упадната честичка, $\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_2$ се енергиите на соодветните честички по судирот, а $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$ се нивните импулси по расејувањето. Од законот за запазување на 4-импулсот:

$$P_1^\mu = P_2^\mu$$

следуваат релациите кои ги изразуваат законите за запазување на енергијата и импулсот соодветно:

$$E_1 + E_2 = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2,$$

$$\overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}.$$

Енергиите на честичките пред и по судирот може да се изразат преку соодветните кинетички енергии и енергиите на мирување на следниов начин:

$$E_1 = m_0c^2 + T_0,$$

$$\tilde{E}_1 = m_0c^2 + T_1,$$

$$E_2 = m_0c^2,$$

$$\tilde{E}_2 = m_0c^2 + T_2.$$

Со замена во релацијата за запазување на енергијата се добива:

$$m_0c^2 + T_0 + m_0c^2 = m_0c^2 + T_1 + \tilde{E}_2. \qquad (1)$$

Законот за запазување на импулсот може да се запише на следниот начин:

$$\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_0} - \overrightarrow{p_1},$$

од каде по квадрирање на двете страни добиваме:

$$p_2^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1cos\theta. \qquad (2)$$

Квадратот на енергијата на релативистичка честичка може да се запише на два начини, преку импулсот и масата на мирување, или преку кинетичката енергија и масата на мирување:

$$E^2 = (m_0c^2 + T)^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4,$$

од каде што по кратка трансформација се добива релација помеѓу релативистичкиот импулс и кинетичката енергија:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T + 2m_0c^2)}.$$

Користејќи ја последната релација, ги изразуваме импулсите p_0 и p_1 на честичката проектил пред и по судирот преку соодветните кинетички енергии и заменуваме во равенката (2):

$$p_2{}^2 = \frac{T_0(T_0 + 2m_0c^2)}{c^2} + \frac{T_1(T_1 + 2m_0c^2)}{c^2} - \frac{2}{c^2}\sqrt{T_0(T_0 + 2m_0c^2)T_1(T_1 + 2m_0c^2)}\,\mathrm{cos}\theta.$$

Ако енергијата $\tilde{E}_2$ се изрази преку релацијата:

$$\vec{E}_2^2 = p_2^2c^2 + m_0^2c^4$$

и се замени во равенката (1), добиваме:

$$(m_0c^2 + T_0 - T_1)^2 = p_2^2c^2 + m_0^2c^4.$$

Во овој израз го заменуваме изразот за $p_2{}^2$ и го упростуваме добиениот израз, при што конечно се добива формулата која ја изразува бараната врска од условот на задачата:

$$T_1 = \frac{T_0\mathrm{cos}^2\theta}{1 + \frac{T_0}{2m_0c^2}\mathrm{sin}^2\theta}.$$

■

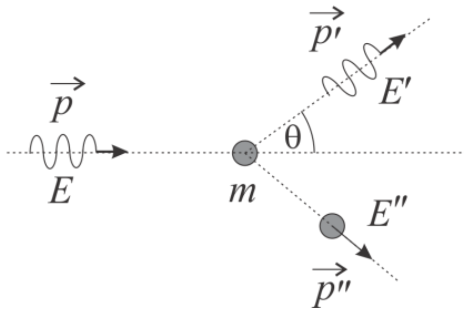
Задача 10.

Честичка проектил со енергија *E* чија што маса на мирување е нула, се судира еластично со неподвижна честичка мета со маса на мирување *m*. Колкава ќе биде енергијата *E'* на честичката проектил по расејувањето ако аголот на расејување е *θ*?

Решение 10.

Процесот на расејувањето на честичките е прикажан на сликата десно. Четири-векторот на импулсот на системот од честички пред судирот е

$$P_1{}^{\mu} = \left(\frac{E + mc^2}{c}, \vec{p}\right),$$



Слика 8

додека 4-векторот на системот по судирот е

$$P_2{}^{\mu} = \left(\frac{E' + E''}{c}, \overrightarrow{p'} + \overrightarrow{p''}\right),$$

каде што $\vec{p}$ е импулсот на упадната честичка, E' и $\overrightarrow{p'}$ се енергијата и импулсот на честичката проектил по расејувањето, а E'' и $\overrightarrow{p''}$ се енергијата и импулсот на честичката мета по судирот. Од условот за константноста на 4-векторот на импулсот, имаме:

$$P_1{}^{\mu} = P_2{}^{\mu}\,.$$

Од еднаквоста на временските компоненти го добиваме законот за запазување на енергијата:

$$E + mc^2 = E' + E''. \tag{1}$$

Со изедначување на просторните компоненти следува законот за запазување на импулсот

$$\vec{p} = \overrightarrow{p'} + \overrightarrow{p''}$$

којшто може да се запише и како

$$\vec{p} - \overrightarrow{p'} = \overrightarrow{p''},$$

од каде со квадрирање на двете страни на равенката добиваме:

$$p^2 + p'^2 - 2pp'cos\theta = p''^2. \tag{2}$$

Упадната честичка нема маса на мирување (на пример, фотон), па за неа релацијата помеѓу нејзината енергија и импулс се упростува:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 = p^2c^2,$$

односно

$$E = pc.$$

Оттука, импулсите на честичката проектил пред и по судирот се:

$$p = \frac{E}{c}, \quad p' = \frac{E'}{c}. \tag{3}$$

Енергијата на втората честичка по судирот е:

$$E''^2 = p''^2c^2 + m^2c^4$$

па релацијата (1) може да се запише на следниов начин:

$$E + mc^2 = E' + E'' = E' + \sqrt{p''^2c^2 + m^2c^4}\,. \tag{4}$$

Со замена на равенките (3) во релацијата (2) се добива:

$$p''^2c^2 = E^2 + E'^2 - 2EE'cos\theta,$$

при што со смена во равенката (4) и по кратко средување конечно, ја добиваме енергијата на честичката-проектил по расејувањето:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{mc^2}(1 - cos\theta)}.$$

■

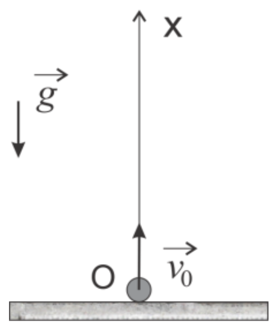
Задача 11.

Честичка со маса на мирување m_0 е фрлена со почетна брзина v_0 вертикално нагоре во поле на Земјина тежа. Да се најде брзината и местоположбата (висината) на честичката над површината на Земјата како функција од времето. Да се смета дека движењето е релативистичко и дека се одвива во близина на површината на Земјата.

Решение 11.

Законот за движење на релативистичката честичка е од облик:

$$\sum \vec{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$



Слика 9

односно, збирот на сите сили кои дејствуваат на телото е еднаков на првиот извод по време од импулсот на телото. Во конкретниот случај, единствена сила која што му дејствува на телото е гравитационата сила, па следствено,

$$m\vec{g} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

при што

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

е релативистичкиот импулс на телото, $\vec{v}$ е брзината во момент t, $\vec{g}$ е гравитациското забрзување на површината на Земјата $\left(g \approx 9{,}81 \frac{m}{s^2}\right)$, а m е релативистичката маса на телото зададена со релацијата

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Со оглед на изнесеното, равенката на движење може да се запише:

$$m\vec{g} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1)$$

Изразот за првиот извод на масата по времето може да се упрости на следниов начин:

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=m_0\frac{d}{dt}\left(1-\frac{\vec{v}\vec{v}}{c^2}\right)^{-1/2}=$$

$$=-\frac{1}{2}m_0\left(1-\frac{\vec{v}\vec{v}}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2}{c^2}\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

$$\frac{dm}{dt}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{d\vec{v}}{dt},$$

па равенката (1) се запишува:

$$m\vec{g}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left(\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\vec{v},$$

односно

$$\vec{g}=\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\vec{v}}{c^2-v^2}.$$

Доколку *x*-оската ја поставиме како на цртежот, вертикално нагоре, со координатниот почеток на површината на Земјата, тогаш проекцијата на последната векторска равенка на оската *x* е:

$$-g=\frac{dv}{dt}+\frac{\left(v\frac{dv}{dt}\right)v}{c^2-v^2},$$

односно

$$-g=\left(\frac{c^2}{c^2-v^2}\right)\frac{dv}{dt},$$

во којашто лесно може да се разделат променливите, при што се добива:

$$-gdt=\frac{dv}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Ако ја проинтегрираме добиената равенка, се добива:

$$-gt = \int \frac{dv}{1-\frac{v^2}{c^2}} + C_1 \tag{2}$$

За решавање на интегралот воведуваме променлива q, со смената:

$$\frac{v}{c} = q\,, \qquad dv = cdq$$

при што

$$\int \frac{dv}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \int \frac{cdq}{1-q^2} = \frac{c}{2}\left[\int \frac{dq}{1-q} + \int \frac{dq}{1+q}\right] = \frac{c}{2}\left[-\ln|1-q| + \ln|1+q|\right]$$

$$= \frac{c}{2}\ln\left|\frac{1+q}{1-q}\right| = \frac{c}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right|.$$

Со замена во релацијата (2) се добива:

$$-gt = \frac{c}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right| + C_1.$$

Од условот $t = 0$, $v = v_0$, за константата C_1 се добива:

$$C_1 = -\frac{c}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{v_0}{c}}{1-\frac{v_0}{c}}\right|,$$

па по замена и средување се добива конечниот израз за брзината на честичката како функција од времето:

$$v = c\,\frac{v_0 - c\tanh\left(\frac{gt}{c}\right)}{c - v_0\tanh\left(\frac{gt}{c}\right)}.$$

Од изразот за брзината како прв извод од местоположбата по времето,

$$v = \frac{dx}{dt}$$

може да се најде и висината на честичката *x*(*t*) над површината на Земјата како функција од времето,

$$x = \int v dt + C_2 = \int \frac{v_0 - c\tanh\left(\frac{gt}{c}\right)}{c - v_0 \tanh\left(\frac{gt}{c}\right)} c dt + C_2$$

каде што константата C_2 се добива со користење на почетните услови, кога $t = 0, x = 0$. Со решавање на интегралот, конечно, за зависноста *x*(*t*) се добива:

$$x = \frac{c^2}{g}\ln\left[\cosh\left(\frac{gt}{c}\right) - \frac{v_0}{c}\sinh\left(\frac{gt}{c}\right)\right].$$

■

<u>Задача 12.</u>

Да се покаже дека кинетичката енергија на релативистичка честичка со релативистички импулс $\vec{p}$ и маса на мирување m_0 може да се запише на следниот начин:

$$T = \frac{p^2}{m_0 + m},$$

каде што m е релативистичката маса на честичката при движење.

<u>Решение 12.</u>

Релацијата за релативистичка енергија *E* на честичка со маса на мирување m_0 која што се движи со брзина *v* е:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

додека релацијата за релативистичкиот импулс е:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Енергијата на честичката може да се запише преку нејзината енергија на мирување $E_0 = m_0c^2$ и нејзината кинетичка енергија *T*:

$$E = E_0 + T = m_0c^2 + T \tag{1}$$

Од друга страна, релацијата која ги сврзува енергијата на честичката, нејзиниот импулс и масата на мирување е:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 = p^2c^2 + E_0^2$$

при што

$$E^2 - E_0^2 = p^2c^2$$

односно

$$(E - E_0)(E + E_0) = p^2c^2.$$

Од равенката (1), во последната равенка заменуваме $E - E_0 =$ *T*, па добиваме:

$$T(E + E_0) = p^2c^2,$$

односно

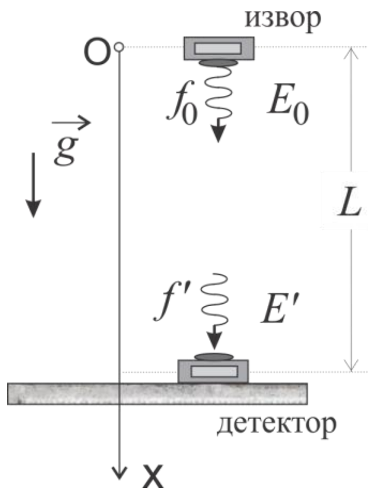
$$T = \frac{p^2c^2}{E + E_0} = \frac{p^2c^2}{mc^2 + m_0c^2},$$

и конечно

$$T = \frac{p^2}{m + m_0}.$$

■

Задача 13.



Слика 10

Радиоактивно јадро спонтано емитира фотони, секој со енергија $E_0 = hf_0$ и импулс $p_0 = \frac{hf_0}{c}$, каде што f_0 е фреквенцијата на секој поединечен емитиран фотон, а h е Планковата константа. Изворот на фотоните е поставен во поле на Земјината гравитација на висина L над површината на Земјата. Фотоните се апсорбираат од детектор којшто е поставен на површината на Земјата вертикално под изворот, и овозможува мерење на фреквенцијата со точност од $\Delta f/f = 10^{-15}$. Детекторот работи врз принцип на Месбауеров ефект. Ако изворот и детекторот се на иста висина над Земјата ($L = 0$), тогаш фреквенцијата на детектираниот фотон f' е еднаква на фреквенцијата f_0 при емисијата на фотонот, меѓутоа ако детекторот и изворот не се наоѓаат на иста висина, тогаш емитираната и детектираната фреквенција не се еднакви. Да се најде:

а) масата на емитираниот фотон;
б) енергијата на фотонот E' пред да се детектира од детекторот;
в) фреквенцијата f' што ќе ја детектира детекторот;
г) под претпоставка дека растојанието меѓу изворот и детекторот на фотони е $L = 10$ m, да се процени дали оваа апаратура може да ја измери фреквенцијата на фотонот.

Решение 13.

а) Според Планковата формула, енергијата на фотонот се пресметува по формулата:

$$E_0 = hf_0.$$

Од друга страна, ја користиме Ајнштајновата релација:

$$E_0 = mc^2$$

па, за масата на фотонот се добива

$$m = \frac{hf_0}{c^2}.$$

б) Прирастот на енергијата на фотонот од местото на емисија до местото на апсорпција е бројно еднаков на работата на гравитационата сила. За инфинитезимално поместување $d\vec{r}$ на фотонот во гравитациското поле важи:

$$dE = \overrightarrow{F} \cdot d\vec{r} = mgdx = g\frac{E}{c^2}dx,$$

каде што позитивната насока на x-оската е земена да биде вертикално надолу, од изворот кон детекторот, во иста насока со гравитационата сила (види цртеж), а координатниот почеток го поставуваме на местото каде што се наоѓа изворот на фотони.

Со разделување на променливите и интегрирање на добиената диференцијална равенка, се добива:

$$\int \frac{dE}{E} = \int \frac{gdx}{c^2} + C_1\,,$$

$$\ln|E| = \frac{gx}{c^2} + C_1.$$

Од условот кога $x = 0$ енергијата на фотонот да е $E = E_0$, за константата на интеграција се добива:

$$C_1 = \ln|E_0|.$$

Земајќи предвид дека енергијата на фотонот е позитивна величина, добиваме:

$$\ln E = \ln E_0 + \frac{gx}{c^2},$$

односно

$$\ln\frac{E}{E_0} = \frac{gx}{c^2},$$

и конечно

$$E = E_0 e^{\frac{gx}{c^2}}.$$

Кога фотонот ќе помине растојание *L* од изворот до детекторот, енергијата *E'* на фотонот е:

$$E' = E_0 e^{\frac{gL}{c^2}} \cong E_0\left(1 + \frac{gL}{c^2}\right),$$

односно, енергијата на фотонот кај детекторот е поголема од неговата енергија при емисија од изворот.

в) Со смена на Планковата релација за енергијата на фотонот во последниот израз за зависноста на енергијата од поминатиот пат *L*, следува:

$$hf' = hf_0\left(1 + \frac{gL}{c^2}\right),$$

односно

$$f' = f_0\left(1 + \frac{gL}{c^2}\right).$$

Од ова е очигледно дека фреквенцијата на детектираниот фотон е поголема од фреквенцијата при емитувањето од изворот, односно настанало таканаречено "гравитациско сино поместување" на фреквенцијата на фотонот.

г) Од последната релација за синото помесување на фреквенцијата на фотонот во гравитациското поле на Земјата, добиваме:

$$f' = f + f\frac{gL}{c^2},$$

односно

$$\frac{f' - f}{f} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{gL}{c^2} \approx 10^{-15},$$

што е во рамките на точноста со којашто мери апаратурата.

■

Задача 14.

Во класичната нерелативистичка механика, Вториот Њутнов закон е изразен преку релацијата $\vec{F} = m\vec{a}$, каде што $\vec{F}$ е вкупната сила којашто дејствува на телото, m е масата на телото, а $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ е забрзувањето. Да се покаже дека во релативистичката механика аналогната релација на класичниот Втор Њутнов закон е:

$$\vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\vec{a} + \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{a})}{c^2 - v^2}\right),$$

каде што $\vec{v}$ е моменталната брзина на телото, а m е масата на мирување на телото.

Решение 14.

Го користиме релативистичкиот израз за силата како прв извод по времето од релативистичкиот импулс:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Со диференцирање на изразот во заградата по времето, земајќи предвид дека брзината на телото, исто така зависи од времето, сукцесивно се добива:

$$\vec{F} = m\left\{\frac{\frac{d\vec{v}}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \vec{v}\frac{d}{dt}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\} =$$

$$= \frac{m\frac{d\vec{v}}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \vec{v}\left[-\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{c^2}2\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\right] =$$

$$= \frac{m\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\vec{v}\frac{1}{c^2}(\vec{v}\vec{a})}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\vec{a} + \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{a})}{c^2 - v^2}\right)$$

што и требаше да се покаже.

■

Задача 15.

Сличноста помеѓу ротацијата и Лоренцовите трансформации е уште повеќе зебележителна ако се воведе т.н. параметар на рапидност θ зададен преку релацијата

$$\theta = \tanh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right),$$

а) Да се изрази матрицата на Лоренц преку параметарот на рапидност θ.
б) Да се изразат релациите за релативистичка трансформација на компонентите на брзините преку параметарот на рапидност θ.

Решение 15.

а) Елементите на матрицата на Лоренц Λ при стандардна конфигурација на референтните системи S и S' се:

$$\Lambda_{\nu}^{\mu\,\prime} = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\beta_v\gamma_v & 0 & 0 \\ -\beta_v\gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

каде што β_v и γ_v се функции од релативната брзина v меѓу референтните системи S и S', зададени експлицитно со

$$\beta_v = \frac{v}{c},$$

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Со користење на врската меѓу релативната брзина и рапидноста $\frac{v}{c} = \tanh\theta$, ги трансформираме елементите на Лоренцовата матрица:

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\theta}} = \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\cosh^2\theta - \sinh^2\theta}} = \cosh\theta,$$

$$-\beta_v\gamma_v = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\tanh\theta\cosh\theta = -\sinh\theta.$$

Следствено, матрицата на Лоренц преку параметарот на рапидност се запишува на следниот начин:

$$\Lambda_{\nu}^{\mu'} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при што е очигледна сличноста со матрицата на ротација, во којашто наместо хиперболични функции фигурираат аналогните на нив тригонометриски функции.

б) Релативистичките релации за трансформација на брзините $\vec{u}$ и $\overrightarrow{u}'$ меѓу референтните системи S и S' можат да се запишат на следниот начин:

$$\frac{u_x{}'}{c} = \frac{\frac{u_x}{c} - \frac{v}{c}}{1-\frac{u_x v}{c^2}},$$

$$\frac{u_y{}'}{c} = \frac{\frac{u_y}{c}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{u_x v}{c^2}},$$

$$\frac{u_z{}'}{c} = \frac{\frac{u_z}{c}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{u_x v}{c^2}}.$$

Ги воведуваме параметрите на рапидност θ, α_x, α_y, α_z, α_x', α'_y и α'_z дефинирани преку релациите:

$$\frac{v}{c} = \tanh\theta\ , \qquad \frac{u_x}{c} = \tanh\alpha_x\ , \qquad \frac{u_y}{c} = \tanh\alpha_y, \qquad \frac{u_z}{c} = \tanh\alpha_z$$

$$\frac{u_{x'}}{c} = \tanh \alpha_x', \qquad \frac{u_{y'}}{c} = \tanh \alpha'_y, \qquad \frac{u_{z'}}{c} = \tanh \alpha'_z$$

Тогаш, релациите за трансформација на компонентите на брзините може да се запишат на следниов начин:

$$\tanh \alpha_x' = \frac{\tanh \alpha_x - \tanh \theta}{1 - \tanh \theta \tanh \alpha_x}, \tag{1}$$

$$\tanh \alpha'_y = \frac{\tanh \alpha_y \sqrt{1 - \tanh^2 \theta}}{1 - \tanh \theta \tanh \alpha_x}, \tag{2}$$

$$\tanh \alpha'_z = \frac{\tanh \alpha_z \sqrt{1 - \tanh^2 \theta}}{1 - \tanh \theta \tanh \alpha_x}. \tag{3}$$

Со користење на својствените релации за хиперболичните функции, равенката (1) може дополнително да се упрости, при што се добива:

$$\tanh \alpha_x' = \tanh(\alpha_x - \theta)$$

односно

$$\alpha_{x'} = \alpha_x - \theta.$$

■

Задача 16.

Две глинени топчиња, секое топче со маса на мирување *m*, летаат едно наспроти друго долж права линија. Брзината на топчињата е иста по модул, и изнесува $v = 3c/5$. Откако ќе се судрат, тие се слепуваат и остануваат залепени. Колкава е масата M на композитната честичка?

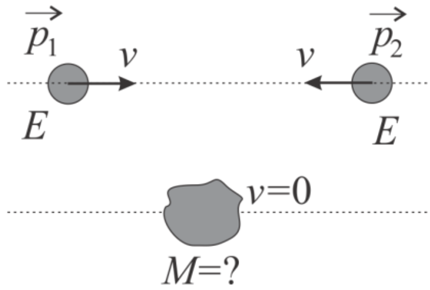
Решение 16.

Бидејќи се работи за идентични честички кои имаат исти брзини, после судирот тие формираат композитна честичка што мирува и чијашто маса на мирување изнесува M. Четиривекторот на импулсот на системот честички пред судирот изнесува:

$$P_1^{\mu} = \left(\frac{2E}{c}, \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}\right),$$

а по судирот соодветниот четиривектор е:

$$P_2^{\mu} = \left(\frac{E'}{c}, \vec{p}\,'\right).$$



Слика 11

Од законот за запазување на 4-векторот на импулс следува еднаквоста на соодветните компоненти на овие 4-вектори, односно релациите:

$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \vec{p}\,'$$

и

$$\frac{2E}{c} = \frac{E'}{c},$$

коишто всушност се законот за запазување на импулсот и енергијата на системот, соодветно.

Со проекција на *x*-оската (насочена од лево кон десно) на релацијата за законот за запазување на импулсот, се добива

$$mv - mv = p',$$

односно

$$p' = 0,$$

со што се покажува дека навистина композитната честичка формирана после судирот мирува. Од законот за запазување на енергијата следува:

$$E' = 2E. \tag{1}$$

Енергијата *E* на секоја од честичките пред судирот е:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c}}},$$

а енергијата на композитната честичка по судирот е:

$$E' = Mc^2.$$

Со замена во релацијата (1) добиваме:

$$Mc^2 = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c}}},$$

односно

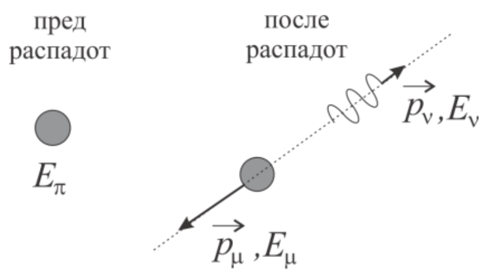
$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c}}}.$$

Оттука се гледа дека масата на честичката *M* што се формира по слепувањето е поголема од збирот на масите на мирување на честичките пред судирот.

■

Задача 17.

Пион во мирување спонтано се распаѓа на мион и неутрино. Да се пресмета енергијата E_μ на мионот што ќе се формира по распадот ако се познати масите на мирување на мионот m_μ и пионот m_π.



Слика 12

Решение 17.

Од законот за запазување на 4-векторот на импулсот добиваме:

$$\left(\frac{E_\pi}{c}\ ,\overrightarrow{p_\pi}\right) = \left(\frac{E_\mu + \ E_\nu}{c}\ ,\overrightarrow{p_\mu} + \overrightarrow{p_\nu}\right)$$

Со изедначување на соодветните компоненти следуваат законите за запазување на импулсот и енергијата при процесот на распаѓање:

$$\frac{E_\pi}{c} = \frac{E_\mu + \ E_\nu}{c},$$

$$\overrightarrow{p_\pi} = \overrightarrow{p_\mu} + \ \overrightarrow{p_\nu}.$$

Енергиите на пионот, мионот и неутриното соодветно изнесуваат:

$$E_\pi = m_\pi c^2,$$

$$E_\mu = \frac{m_\mu c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}}, \tag{1}$$

додека за неутриното коешто е честичка без маса на мирување ја користиме формулата $E^2 = \ p^2\ c^2 + \ m_0^2\ c^4$, од каде што се добива:

$$E_\nu = p_\nu c. \tag{2}$$

Тука v_μ е брзината на мионот после дезинтеграцијата, а p_ν е импулсот на неутриното. Од законот за запазување на импулсот, земајќи предвид дека пред дезинтеграцијата пионот мирувал и неговиот импулс е нула ($\overrightarrow{p_\pi} = \vec{0}$), добиваме:

$$\overrightarrow{p_\mu} = - \ \overrightarrow{p_\nu}$$

односно со проекција на оската по која се движат новоформираните честички една од друга, имаме

$$p_\mu = p_\nu.$$

Следствено, равенката (2) може да се запише:

$$E_\nu = p_\nu c = p_\mu c = \frac{m_\mu v_\mu}{\sqrt{1-\frac{v_\mu^2}{c^2}}} c = \frac{E_\mu}{m_\mu c^2} m_\mu v_\mu c = \frac{E_\mu v_\mu}{c}. \qquad (3)$$

Од друга страна, со квадрирање на изразот (1) за E_μ се добива:

$$1 - \frac{v_\mu^2}{c^2} = \frac{m_\mu^2 c^4}{E_\mu^2}$$

односно

$$\frac{v_\mu}{c} = \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2 c^4}{E_\mu^2}}.$$

Со смена на последниот израз во релацијата (3) добиваме

$$E_\nu = E_\mu \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2 c^4}{E_\mu^2}} = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4}.$$

Последниот израз за E_ν го користиме во законот за запазување на енергијата

$$E_\mu = E_\pi - E_\nu = m_\pi c^2 - \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4},$$

којшто го презапишуваме во следната форма

$$E_\mu - m_\pi c^2 = -\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4},$$

од каде што со квадрирање на двете страни и по кратко средување се добива бараната релација од условот на задачата

$$E_\mu = \frac{m_\mu^2 + m_\pi^2}{2m_\pi} c^2.$$

■

Задача 18.

Во експеримент со анихилација на честички, електрон со маса на мирување m_e и импулс $\overrightarrow{p_e}$ удира во позитрон кој мирува. Масата на мирување на позитронот е иста со масата на мирување на упадниот електрон. Електронот и позитронот по судирот анихилираат, при што се создаваат два фотона. Ако аголот на расејување на едниот фотон е θ во однос на насоката на упадниот електрон, да се пресмета енергијата на тој фотон.

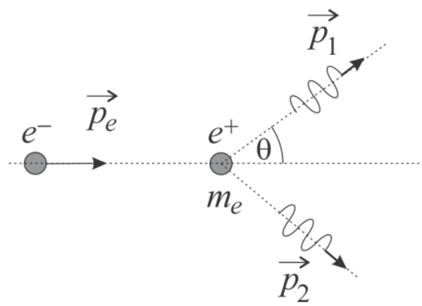
Решение 18.

Четиривекторите на импулсот на системот пред и по судирот соодветно се:

$$P_1^\mu = \left(\frac{E_e + m_e c^2}{c}, \overrightarrow{p_e}\right)$$

и

$$P_2^\mu = \left(\frac{E_1 + E_2}{c}, \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}\right)$$



Слика 13

каде што E_e е енергијата на упадниот електрон, E_1 и E_2 се енергиите на формираните фотони, а $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$ се нивните соодветни импулси.

Од законот за запазување на 4-векторот на импулсот пред и по анихилацијата следуваат законите за запазување на енергијата и импулсот:

$$E_e + m_e c^2 = E_1 + E_2, \tag{1}$$

$$\overrightarrow{p_e} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}. \tag{2}$$

Релацијата (2) може да се запише како:

$$\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_e} - \overrightarrow{p_1},$$

при што по квадрирање на двете страни се добива:

$$p_2^2 = p_e^2 + p_1^2 - 2\, p_e p_1 \cos\theta.$$

Бидејќи за импулсите на формираните фотони важат релациите

$$p_1 = \frac{E_1}{c},$$

$$p_2 = \frac{E_2}{c},$$

со замена во претходната равенка се добива:

$$\frac{E_2^2}{c^2} = p_e^2 + \frac{E_1^2}{c^2} - 2p_e \frac{E_1}{c}\cos\theta \tag{3}$$

Со оглед на тоа што

$$E_e = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4},$$

од равенката (1) се добива

$$E_2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} + m_e c^2 - E_1.$$

Со кревање на квадрат на двете страни од последната равенка имаме:

$$E_2^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4 + E_1^2 + 2m_e c^2 \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4}$$
$$-2E_1\sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} - 2E_1 m_e c^2$$

Последниот израз за E_2^2 го заменуваме во равенката (3), при што по соодветни алгебарски манипулации конечно се добива енергијата на едниот фотон како функција од аголот на расејување θ и параметрите на упадниот електрон

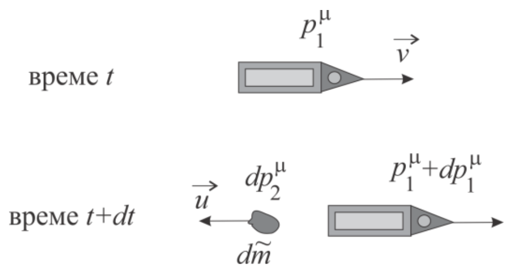
$$E_1 = \frac{m_e c^2}{2} \frac{m_e c + 2\sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2}}{m_e c + \sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2} - p_e \cos\theta}.$$

■

Задача 19.

Вселенска ракета чијашто вкупна маса пред полетувањето изнесува M_0, мирува во координатниот почеток на референтниот систем S. Во моментот $t = 0$ таа почнува да се движи по права линија исфрлајќи делови од својата маса во форма на гас во спротивна насока од движењето. Гасот се исфрла континуирано и рамномерно со константна брзина $\vec{w}$ во однос на референтниот систем сврзан за ракетата. Да се определи брзината на ракетата $\vec{v}$ во зависност од почетната и моменталната маса на мирување на ракетата.

Решение 19.



Слика 14

Нека во време t сметано во однос на референтниот систем S ракетата има 4-импулс p_1^μ (види слика). По бескрајно мал временски интервал dt во однос на референтниот систем S (коешто одговара на сопствен елементарен временски интервал $d\tau$ во однос на референтниот систем сврзан за ракетата), 4-импулсот на ракетата ќе се промени во $p_1^\mu + dp_1^\mu$. Во текот на тој временски интервал ракетата ќе исфрли маса $d\widetilde{m}$ во спротивна насока од движењето чијшто 4-импулс е

$$dp_2^\mu = d\widetilde{m}U^\mu, \tag{1}$$

каде што U^μ е 4-брзината на исфрлената маса:

$$U^\mu = (\gamma_u c\,, \gamma_u u) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,, \frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)$$

(тука со u е означена брзината на масата). Од законот за запазување на 4-импулсот пред и по истекувањето на овој краток временски интервал имаме

$$p_1^\mu = p_1^\mu + dp_1^\mu + dp_2^\mu,$$

односно

$$dp_1^\mu + dp_2^\mu = 0. \tag{2}$$

Четириимпулсот на ракетата во даден момент изнесува:

$$p_1^\mu = mV^\mu,$$

каде што V^μ е 4-векторот на моменталната брзина на ракетата,

$$V^\mu = (\gamma_v c\,, \gamma_v v) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right),$$

(тука со v е означена е моменталната брзина на ракетата) па следствено, елементарниот прираст на 4-импулсот е:

$$dp_1^\mu = d(mV^\mu) = V^\mu dm + mdV^\mu. \tag{3}$$

Со смена на релациите (1) и (3) во изразот (2) добиваме:

$$d(mV^\mu) + d\widetilde{m}U^\mu = 0,$$

односно, по делење на двете страни со елементариот сопствен временски интервал $d\tau$ се добива:

$$\frac{dm}{\mathrm{d}\tau}\, V^\mu + m\,\frac{dV^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \frac{d\,\widetilde{m}}{\mathrm{d}\tau}\, U^\mu = 0 \tag{4}$$

Последната равенка е тензорска равенка, неа ја множиме со V_μ при што се добива:

$$\frac{dm}{\mathrm{d}\tau}\, V^\mu\, V_\mu + m\,\frac{dV^\mu}{\mathrm{d}\tau}\, V_\mu + \frac{d\,\widetilde{m}}{\mathrm{d}\tau}\, U^\mu\, V_\mu = 0.$$

Бидејќи вториот член од левата страна на добиената равенка е скаларен производ од 4-векторот на забрзувањето и 4-векторот на брзината, којшто е нула, следува релацијата:

$$-c^2 \; \frac{dm}{\mathrm{d}\tau} + \frac{d\,\widetilde{m}}{\mathrm{d}\tau} U^\mu\, V_\mu = 0$$

и оттука

$$\frac{d\,\widetilde{m}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{c^2 \; \frac{dm}{\mathrm{d}\tau}}{U^\mu\, V_\mu}.$$

Овој израз го заменуваме во равенката (4), при што се добива:

$$\frac{d\,(mV^\mu)}{\mathrm{d}\tau} + c^2 \; \frac{\frac{dm}{\mathrm{d}\tau}}{(U^\nu V_\nu)} U^\mu = 0. \qquad (5)$$

Ги воведуваме параметрите на рапидност θ и φ на следниов начин:

$$\frac{v}{c} = \tanh\theta,$$

$$\frac{u}{c} = \tanh\varphi,$$

при што Лоренцовите фактори во компонентите на 4-брзините на ракетата V^μ и на исфрлената маса U^μ се запишуваат:

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh\theta}} = \cosh\theta,$$

$$\gamma_u \;=\; \cosh\varphi.$$

Следствено, V^μ и U^μ изразени преку параметрите на рапидност се:

$$V^\mu = (c\cosh\theta\,, c\sinh\theta),$$

$$U^\mu = (c\cosh\varphi\,, c\sinh\varphi).$$

Согласно на тоа, го пресметуваме скаларниот производ меѓу 4-векторите на брзините во именителот во вториот член на левата страна од релацијата (5):

$$V^\mu U_\mu = -U^0V^0 + U^1V^1 = -c^2\cosh\theta\cosh\varphi + c^2\sinh\theta\sinh\varphi =$$

$$= -c^2(\cosh\theta\cosh\varphi - \sinh\theta\sinh\varphi) =$$
$$= -c^2\cosh(\theta-\varphi).$$

Добиениот резултат за $V^\mu U_\mu$ го заменуваме во тензорската диференцијалната равенка (5):

$$\frac{d\,(mV^\mu)}{\mathrm{d}\tau} - \frac{\frac{dm}{\mathrm{d}\tau}}{\cosh(\theta-\varphi)}U^\mu = 0.$$

Оваа тензорска равенка се состои од две обични диференцијални равенки (тука индексот $\mu = 0{,}1$). Без губење на општоста, ја решаваме втората равенка (за $\mu = 1$):

$$\frac{d}{d\tau}(mc\sinh\theta) = \frac{dm}{\mathrm{d}\tau}\frac{c\sinh\varphi}{\cosh(\theta-\varphi)}.$$

Со смената $\alpha = \theta - \varphi$ и по кратко средување добиваме:

$$\frac{dm}{\mathrm{d}\tau}c\sinh\theta + mc\cosh\theta\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{dm}{\mathrm{d}\tau}\frac{c\sinh\varphi}{\cosh\alpha},$$

односно

$$(\sinh\theta\cosh\alpha - \sinh\varphi)\frac{dm}{\mathrm{d}\tau} + m\frac{d\theta}{d\tau}\cosh\alpha\cosh\theta = 0.$$

Ако се земе предвид релацијата:

$$\sinh\varphi = \sinh(\theta-\alpha) = \sinh\theta\cosh\alpha - \cosh\theta\sinh\alpha,$$

претходната равенка може да се запише како

$$(\sinh\theta\cosh\alpha - \sinh\theta\cosh\alpha + \cosh\theta\sinh\alpha)\frac{dm}{\mathrm{d}\tau} + m\frac{d\theta}{d\tau}\cosh\alpha\cosh\theta$$
$$= 0,$$

односно

$$\tanh\alpha\frac{dm}{\mathrm{d}\tau} + m\frac{d\theta}{d\tau} = 0. \tag{6}$$

Доколку се распише членот $\tanh\alpha$ добиваме:

$$\tanh \alpha = \tanh(\theta - \varphi) = \frac{\tanh \theta - \tanh \varphi}{1 - \tanh \theta \tanh \varphi} = \frac{\frac{v}{c} - \frac{u}{c}}{1 - \frac{vu}{c^2}} ,$$

и тој всушност е бројно еднаков на скалираната релативна брзина *w/c* со која се исфрла гасот од ракетата во однос на референтниот систем сврзан за ракетата:

$$\frac{w}{c} \equiv \tanh \alpha.$$

Следствено, со замена во (6) се добива:

$$\frac{w}{c}\frac{dm}{\mathrm{d}\tau} + m\frac{d\theta}{d\tau} = 0,$$

односно

$$\frac{dm}{m} = -\frac{c}{w}d\theta.$$

По елементарно интегрирање на добиената диференцијална равенка следува:

$$-\frac{w}{c}\ln|m| = \theta + C, \tag{7}$$

каде што

$$\theta = \tanh^{-1}\frac{v}{c}. \tag{8}$$

Константата на интегрирање C се добива од условот кога $t(\tau) = 0$, $v = 0,$ и $m = M_0$ па следствено:

$$-\frac{w}{c}\ln|M_0| = \tanh^{-1} 0 + C,$$

односно

$$C = -\frac{w}{c}\ln|M_0|.$$

Со нејзина замена во релацијата (7) добиваме:

$$-\frac{w}{c}\ln|m| = \theta - \frac{w}{c}\ln|M_0| \,,$$

односно

$$\theta = \left(\ln\frac{m}{M_0}\right)^{-\frac{w}{c}}.$$

Со користење на релацијата (8) и замена на последниот резултат за θ се добива:

$$\frac{v}{c} = \tanh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}} = \frac{1 - e^{-2\theta}}{1 + e^{-2\theta}} = \frac{1 - e^{-2(\ln\frac{m}{M_0})^{-\frac{w}{c}}}}{1 + e^{-2(\ln\frac{m}{M_0})^{-\frac{w}{c}}}},$$

па конечно, за брзината на ракетата во зависност од почетната маса M_0 и моменталната маса m се добива:

$$v = c\frac{1 - \left(\frac{m}{M_0}\right)^{\frac{2w}{c}}}{1 + \left(\frac{m}{M_0}\right)^{\frac{2w}{c}}}$$

■

Задача 20.

Да се покаже дека брановата равенка запишана во Декартови координати

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0,$$

каде $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$, е инваријантна во однос на Лоренцовите трансформации.

Решение 20.

Ги користиме Лоренцовите трансформации помеѓу референтните системи S и S' коишто се во стандардна конфигурација,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

каде што v е релативната брзина на S' во однос на S. Земајќи предвид дека брановата функција Ψ зависи од просторните координати и од времето, ги трансформираме соодветните парцијални изводи од S во S':

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x},$$

односно

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial \Psi}{\partial x'} - \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial \Psi}{\partial t'}.$$

Тогаш, за вториот извод на брановата функција по променливата x добиваме

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial z'}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial t'}{\partial x},\end{aligned}$$

односно

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial \Psi}{\partial x'} - \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial \Psi}{\partial t'}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial \Psi}{\partial x'} - \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial \Psi}{\partial t'}\right)\left(-\frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),$$

или по кратко средување

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} - \frac{2\frac{v}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{\partial \Psi}{\partial x' \partial t'} + \frac{v^2}{c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'^2}.$$

На сличен начин, за првиот парцијален извод на Ψ по y се добива:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial y'},$$

и следствено за вториот извод:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\frac{\partial t'}{\partial y},$$

односно

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2},$$

и слично за парцијалните изводи по променливата z:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\frac{\partial z'}{\partial z}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\frac{\partial t'}{\partial z},$$

односно

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z'}\right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2}.$$

За парцијалните изводи по временската променлива имаме:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial \Psi}{\partial x'} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial \Psi}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)\frac{\partial z'}{\partial t}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)\frac{\partial t'}{\partial t}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(-\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial \Psi}{\partial x'} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial \Psi}{\partial t'}\right)\left(-\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t'}\left(-\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial \Psi}{\partial x'} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial \Psi}{\partial t'}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),$$

што може да се среди и да се запише како:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} - \frac{2v}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{\partial \Psi}{\partial x'\partial t'} + \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'^2}.$$

Со замена на изразите за вторите изводи на брановата функција по променливите *x*, *y*, *z* и *t* се добива:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x'^2}-\frac{2\frac{v}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{\partial\Psi}{\partial x'\partial t'}+\frac{v^2}{c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t'^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z'^2}$$
$$-\frac{1}{c^2}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t'^2}+\frac{2\frac{v}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{\partial\Psi}{\partial x'\partial t'}-\frac{v^2}{c^2}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x'^2}$$
$$=0,$$

од каде што после средување на изразот од левата страна на равенката, конечно, се добива:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t'^2}=0$$

со што се покажаува дека брановата равенка е инваријантна во однос на Лоренцовите трансформации.

■

<u>Задача 21.</u>

Да се покаже дека брановата равенка запишана во Декартови координати:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0$$

каде $\Psi=\Psi(x,y,z,t)$, не е инваријантна во однос на Галилеевите трансформации.

<u>Решение 21.</u>

Галилеевите трансформации помеѓу референтните системи S и S' коишто се во стандардна конфигурација и се движат еден во однос на друг со релативна брзина v насочена по нивните x оски, се:

$$x' = x - vt,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = t.$$

Постапувајќи слично како и во претходната задача, за парцијалните изводи на брановата функција добиваме:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial z'}{\partial x}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\frac{\partial z'}{\partial y}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\frac{\partial t'}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\frac{\partial z'}{\partial z}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\frac{\partial t'}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -v\frac{\partial \Psi}{\partial x'} + \frac{\partial \Psi}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)\frac{\partial z'}{\partial t}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)\frac{\partial t'}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} - 2v\frac{\partial \Psi}{\partial x'\partial t'} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'^2}$$

Изразите за вторите изводи ги заменуваме во брановата равенка, при што се добива:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} - \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} + \frac{2v}{c^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x'\partial t'} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'^2} = 0$$

Од последниов израз се гледа дека брановата равенка во *S* при трансформација во референтниот систем *S′* ја менува својата фундаментална форма, односно таа не е инваријантна во однос на Галилеевите трансформации.

■

<u>Задача 22.</u>

Од некоја точка во вселената, надвор од влијанието на небесни гравитациски тела, се испраќа да се движи вселенски брод. Вселенскиот брод се движи еднодимензионално по траекторија опишана со равенката:

$$x(t) = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

во однос на референтниот систем S сврзан за точката на полетување на бродот (v_0 и a се константи). Во однос на овој референтен систем, од моментот на поаѓање до моментот на враќање на вселенскиот брод поминало време T. Да се определи колкаво време T_0 трае ова патување во однос на екипажот којшто патува во вселенскиот брод.

Решение 22.

Вкупното време на патување на вселенскиот брод во однос на референтниот систем S сврзан за местото на полетување се добива од условот кога $t = T$, $x = 0$ којшто го заменуваме во равенката на движење, односно

$$0 = v_0 T - \frac{aT^2}{2}.$$

Следствено

$$T\left(v_0 - \frac{aT}{2}\right) = 0,$$

при што решението $T = 0$ се однесува на времето на почетокот на движењето, а второто решение

$$T = \frac{2v_0}{a} \tag{1}$$

го дава вкупното време на движење на вселенскиот брод во однос на референтниот систем S сврзан за точката на полетување, односно временскиот интервал од моментот на полетување до моментот на пристигнување.

Во однос на референтниот систем S' срзан за вселенскиот брод, вкупното време на патување е сопственото време во однос на екипажот на бродот, и тоа се добива со користење на релацијата:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Со интегрирање на равенката добиваме:

$$\int_0^{T_0} d\tau = \int_0^{T} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

односно

$$T_0 = \int_0^{\frac{2v_0}{a}} dt \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}. \tag{2}$$

Брзината $v(t)$ на вселенскиот брод во однос на системот S е:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 t - \frac{at^2}{2}\right) = v_0 - at,$$

па по смена во равенката (2) се добива:

$$T_0 = \int_0^{\frac{2v_0}{a}} dt \sqrt{1 - \frac{(v_0 - at)^2}{c^2}}.$$

Добиениот интеграл може да се реши, на пример, со воведување на смена

$$\frac{v_0 - at}{c} = \sin z,$$

од каде што

$$dt = -\frac{c}{a}\cos z \, dz.$$

Со решавање на интегралот и со замена на границите на интегрирање, по кратко средување, за вкупното време на патување во однос на екипажот на бродот се добива:

$$T_0 = \frac{c}{a}\left(\frac{v_0}{c}\sqrt{1 - \frac{{v_0}^2}{c^2}} + \arcsin\left(\frac{v_0}{c}\right)\right). \tag{3}$$

За изразот во заградата може да се запише:

$$\frac{v_0}{c}\sqrt{1-\frac{{v_0}^2}{c^2}}+\arcsin\left(\frac{v_0}{c}\right)=\frac{v_0}{c}\sqrt{1-\frac{{v_0}^2}{c^2}}+\arctan\left(\frac{\frac{v_0}{c}}{\sqrt{1-\frac{{v_0}^2}{c^2}}}\right)$$
$$<\frac{v_0}{c}\sqrt{1-\frac{{v_0}^2}{c^2}}+\frac{\frac{v_0}{c}}{\sqrt{1-\frac{{v_0}^2}{c^2}}}=\frac{2\frac{v_0}{c}-\frac{{v_0}^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{{v_0}^2}{c^2}}}<2\frac{v_0}{c},$$

каде што искористивме $\frac{v_0}{c}<1$. Следствено, од равенките (1) и (3) имаме:

$$T_0=\frac{c}{a}\left(\frac{v_0}{c}\sqrt{1-\frac{{v_0}^2}{c^2}}+\arcsin\left(\frac{v_0}{c}\right)\right)<\frac{c}{a}\cdot 2\frac{v_0}{c}=2\frac{v_0}{a}=T,$$

односно

$$T_0<T,$$

што значи дека за екипажот во вселенскиот брод временскиот интервал T_0 на патувањето е помал од оној што ќе го измери набљудувач од референтниот систем *S* сврзан за точката на полетување/пристигање на бродот. Кога екипажот ќе пристигне на местото од каде што тргнале, тие ќе ја искусат временската дилатација, односно за нив времето течело побавно.

■

2.

Релативистичка трансформација на векторите на електромагнетното поле

Задача 23.

За тензорот на електромагнетно поле $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

и неговиот дуален тензор $G^{\mu\nu}$

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

да се пресметаат инваријантните производи:

а) $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$,

б) $G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$,

в) $F^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$.

Решение 23.

а) Прво ги пресметуваме елементите на комплетно коваријантниот тензор $F_{\mu\nu}$ со користење на релацијата:

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} F^{\mu\nu},$$

при што

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

е метричкиот тензор на просторот на Минковски. Следствено,

$$F_{00} = g_{0\mu} g_{0\nu} F^{\mu\nu} = g_{00} g_{00} F^{00} = F^{00} = 0.$$

$$F_{01} = g_{0\mu} g_{1\nu} F^{\mu\nu} = g_{00} g_{11} F^{01} = -F^{01} = -\frac{E_x}{c},$$

$$F_{02} = g_{0\mu} g_{2\nu} F^{\mu\nu} = g_{00} g_{22} F^{02} = -F^{02} = -\frac{E_y}{c},$$

$$F_{03} = g_{0\mu} g_{3\nu} F^{\mu\nu} = g_{00} g_{33} F^{03} = -F^{03} = -\frac{E_z}{c},$$

$$F_{10} = g_{1\mu} g_{0\nu} F^{\mu\nu} = g_{00} g_{11} F^{10} = -F^{10} = \frac{E_x}{c},$$

$$F_{11} = g_{1\mu} g_{1\nu} F^{\mu\nu} = g_{11} g_{11} F^{11} = 0,$$

$$F_{12} = g_{1\mu} g_{2\nu} F^{\mu\nu} = g_{11} g_{22} F^{12} = F^{12} = B_z,$$

$$F_{13} = g_{1\mu} g_{3\nu} F^{\mu\nu} = g_{11} g_{33} F^{13} = F^{13} = -B_y,$$

$$F_{20} = g_{2\mu} g_{0\nu} F^{\mu\nu} = g_{22} g_{00} F^{20} = -F^{20} = \frac{E_y}{c},$$

$$F_{21} = g_{2\mu} g_{1\nu} F^{\mu\nu} = g_{22} g_{11} F^{21} = F^{21} = -B_z,$$

$$F_{22} = g_{2\mu} g_{2\nu} F^{\mu\nu} = g_{22} g_{22} F^{22} = F^{22} = 0,$$

$$F_{23} = g_{2\mu}g_{3\nu}F^{\mu\nu} = g_{22}g_{33}F^{23} = F^{23} = B_x,$$

$$F_{30} = g_{3\mu}g_{0\nu}F^{\mu\nu} = g_{33}g_{00}F^{30} = -F^{30} = \frac{E_z}{c},$$

$$F_{31} = g_{3\mu}g_{1\nu}F^{\mu\nu} = g_{33}g_{11}F^{31} = F^{31} = B_y,$$

$$F_{32} = g_{3\mu}g_{2\nu}F^{\mu\nu} = g_{33}g_{22}F^{32} = F^{32} = -B_x,$$

$$F_{33} = g_{3\mu}g_{3\nu}F^{\mu\nu} = g_{33}g_{33}F^{33} = F^{33} = 0.$$

При пресметувањето на елементите на комплетно коваријантниот тензор $F_{\mu\nu}$ го зедовме предвид Ајнштајновото правило за сумирање по повторливите индекси. Значи за тензорот $F_{\mu\nu}$ добиваме

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Понатаму, го пресметуваме производот:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \\ &= F_{01}F^{01} + F_{02}F^{02} + F_{03}F^{03} + F_{10}F^{10} + F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} \\ &+ F_{20}F^{20} + F_{21}F^{21} + F_{23}F^{23} + F_{30}F^{30} + F_{31}F^{31} + F_{32}F^{32} = \\ &= -2\frac{E_x^2}{c^2} - 2\frac{E_y^2}{c^2} - 2\frac{E_z^2}{c^2} + 2B_x^2 + 2B_y^2 + 2B_z^2 = 2B^2 - 2\frac{E^2}{c^2} \end{aligned}$$

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{2}{c^2}(c^2B^2 - E^2)$$

б) Постапувајќи на идентичен начин како во делот а), за елементите на комплетно коваријантниот тензор $G_{\mu\nu}$ добиваме:

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix},$$

па следствено, го пресметуваме производот:

$$G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = -2B_x^2 - 2B_y^2 - 2B_z^2 + 2\frac{E_x^2}{c^2} + 2\frac{E_y^2}{c^2} + 2\frac{E_z^2}{c^2}$$
$$= -\frac{2}{c^2}(c^2B^2 - E^2).$$

в) На идентичен начин како во претходните делови, пресметуваме:

$$F^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} F_{\mu\nu}G^{\mu\nu},$$

при што се добива

$$F^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -4\frac{B_xE_x}{c} - 4\frac{B_yE_y}{c} - 4\frac{B_zE_z}{c} = -\frac{4}{c}\vec{E}\cdot\vec{B}.$$

■

Задача 24.

Да се покаже дека доколку векторите на електричното и магнетното поле $\vec{E}$ и $\vec{B}$ се ортогонални во еден инерцијален референтен систем, тогаш тие ќе бидат ортогонални во сите други инерцијални референтни системи коишто се во стандардна конфигурација со првиот. Исто така, да се покаже дека ако аголот помеѓу нив е остар или тап во еден инерцијален референтен систем, тогаш тој ќе остане исто така остар или тап во секој друг инерцијален референтен систем каде што постојат овие две полиња.

Решение 24.

За трансформацијата на компонентите на електричното и магнетното поле меѓу референтните системи S и S' коишто се во стандардна конфигурација и чијашто меѓусебна релативна брзина изнесува v, важат релациите:

$$E_x^{\prime} = E_x,$$

$$E_y^{\prime} = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$E_z^{\prime} = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$B_x^{\prime} = B_x,$$

$$B_y^{\prime} = \frac{B_y + \frac{v}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$B_z^{\prime} = \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Согласно на овие релации, го пресметуваме скаларниот производ $\overrightarrow{E}^{\prime} \cdot \overrightarrow{B}^{\prime}$ трансформирајќи ги компонентите од S' во S:

$$\overrightarrow{E}' \cdot \overrightarrow{B}' = E_x'B_x' + E_y'B_y' + E_z'B_z'$$

$$= E_xB_x + \frac{\left(E_y - vB_z\right)\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{\left(E_z + vB_y\right)\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$= E_xB_x + \frac{(E_yB_y + E_zB_z)(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = E_xB_x + E_yB_y + E_zB_z.$$

Согласно на тоа, добиваме:

$$\overrightarrow{E}' \cdot \overrightarrow{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B},$$

односно

$$E'B'\cos\alpha' = EB\cos\alpha.$$

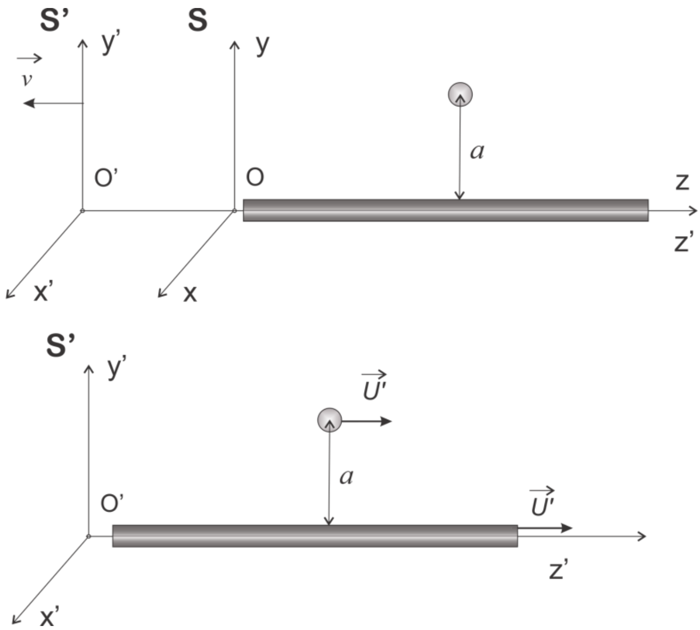
Според тоа, доколку аголот α' меѓу векторите на електромагнетното поле во референтниот систем S' е тап ($\cos\alpha' < 0$) или остар ($\cos\alpha' > 0$), тој останува тап ($\cos\alpha < 0$), односно остар ($\cos\alpha > 0$), во однос на референтниот систем S. Коинцидентно, кога $\cos\alpha' = 0$, следува дека $\cos\alpha = 0$ доколку полињата постојат, односно ортогоналноста меѓу нив е инваријантна.

■

Задача 25.

Рамномерно наелектризиран линиски спроводник со бесконечна должина, има линиска густина на полнеж κ во однос на референтниот систем во којшто спроводникот е во мирување. На растојание a од оската на спроводникот во овој референтен систем е поставен точкаст полнеж со големина e. Да се разгледа оваа постановка во однос на референтен систем во којшто спроводникот се движи долж својата оска со брзина U, и да се најде силата којашто дејствува на полнежот во двата инерцијални референтни системи.

Решение 25.



Слика 15

Во референтниот систем S во којшто спроводникот мирува, со користење на Гаусовиот закон го наоѓаме електричното поле E коешто од симетријата на распределбата на полнежот е во насока радијално од оската на спроводникот:

$$\oint_{\Sigma} \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2} \kappa dl,$$

каде што Гаусовата површина Σ ја земаме да биде цилиндар со висина L и базисен радиус ρ чија што оска се поклопува со оската на спроводникот. Бидејќи полето е радијално, површинскиот интеграл на левата страна од последната релација ни се сведува на површински интеграл по омотот на цилиндарот каде што полето е еднакво по модул во секоја точка, па имаме:

$$E 2\pi\rho L = \frac{\kappa L}{\varepsilon_0},$$

односно

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\kappa}{\rho},$$

каде ρ е радијалното растојание од оската на цилиндерот. Следствено, електричната сила од спроводникот врз полнежот кој во овој референтен систем мирува е:

$$F = eE = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\kappa e}{\rho},$$

или во векторски облик

$$\vec{F} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\kappa e}{\rho}\hat{\rho} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\kappa e}{a}\hat{\rho},$$

каде $\hat{\rho}$ е орт векторот во радијалната насока.

Во однос на референтниот систем S' којшто се движи релативно на системот S со брзина U насочена по негативната z-оска на S, спроводникот и полнежот ќе се движат со истата по модул брзина насочена кон позитивната z'-оска на S'. Согласно на тоа, Лоренцовите трансформации за компонентите на електричното и магнетното поле меѓу двата референтни системи запишани во векторски облик се:

$$\overrightarrow{E_\parallel}' = \overrightarrow{E_\parallel},$$

$$\overrightarrow{E_\perp}' = \frac{\overrightarrow{E_\perp} + \vec{v}\times\overrightarrow{B_\perp}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\overrightarrow{B_\parallel}' = \overrightarrow{B_\parallel},$$

$$\overrightarrow{B_\perp}' = \frac{\overrightarrow{B_\perp} - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\overrightarrow{E_\perp})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

каде што со индексите $\parallel$ и $\perp$ се означени компонентите на векторските полиња коишто се паралелни, соодветно нормални, на насоката на релативната брзина v помеѓу референтните системи. Во конкретниов случај,

$$\vec{v} = -U\hat{z},$$

$$\overrightarrow{E_{\parallel}} = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{E_{\perp}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\kappa}{a}\hat{\rho},$$

$$\overrightarrow{B_{\parallel}} = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{B_{\perp}} = \vec{0},$$

па соодветните компоненти на полињата во S'-системот се:

$$\overrightarrow{E_{\parallel}}' = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{E_{\perp}}' = \frac{\overrightarrow{E_{\perp}}}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\kappa}{a}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}\hat{\rho},$$

$$\overrightarrow{B_{\parallel}}' = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{B_{\perp}}' = \frac{\frac{U}{c^2}\hat{z}\times\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\kappa}{a}\hat{\rho}\right)}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}.$$

Лоренцовата сила од подвижниот спроводник врз подвижната честичка во S' системот е:

$$\vec{F}' = e\overrightarrow{E_{\perp}}' + e\vec{U}' \times \overrightarrow{B_{\perp}}',$$

каде што $\vec{U}' = U\hat{z}$ е брзината на честичката во S'. Со замена на трансформираните компоненти на полињата добиваме:

$$\vec{F}' = e\frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}\hat{\rho} + e\frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{\frac{U^2}{c^2}\hat{z}\times(\hat{z}\times\hat{\rho})}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{e\kappa}{2\pi\varepsilon_0 a\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}\left(\hat{\rho}+\frac{U^2}{c^2}\hat{z}\times\hat{\varphi}\right) = \frac{e\kappa}{2\pi\varepsilon_0 a\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}\left(1-\frac{U^2}{c^2}\right)\hat{\rho}$$

$$= \frac{e\kappa}{2\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}\,\hat{\rho},$$

или конечно

$$\overrightarrow{F'} = \vec{F}\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}.$$

Од резултатот се гледа дека силата врз полнежот во однос на референтниот систем S' ќе има иста насока со аналогната сила во однос на референтниот систем S, меѓутоа ќе се намали согласно Лоренцовиот фактор.

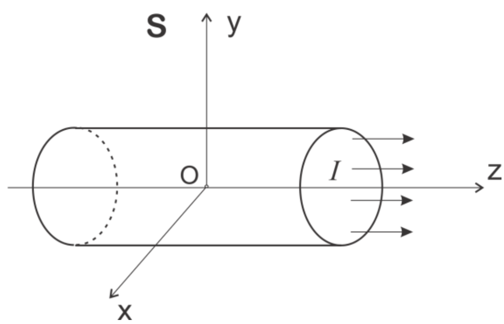
■

Задача 26.

Бесконечно долг кружен цилиндар е рамномерно наелектризиран со полнеж на единица должина $\varkappa$. По цилиндарот тече струја I во правец паралелен на оската на цилиндарот, и таа е рамномерно распределена по напречниот пресек на цилиндарот. Да се најде референтен систем S' што се движи по оската на цилиндарот, така што во однос на S' да постои само електрично или само магнетно поле надвор од цилиндарот, и да се најдат интензитетите на полињата во однос на овој референтен систем.

Решение 26.

Оската на цилиндарот ја поставуваме да се совпаѓа со z-оската на Декартовиот координатен систем придружен кон референтниот систем S, и земаме референтниот систем S' да се движи по позитивната насока на оската z со



Слика 16

константна брзина *u* во однос на системот *S*.

Најпрво да ги пресметаме полињата во *S*-системот. Во однос на овој систем постојат и електрично и магнетно поле. За определување на електричното поле земаме Гаусова површина во форма на цилиндар со радиус ρ и висина *L* чијашто оска се совпаѓа со оската на цилиндарот од задачата. Земаме предвид дека радиусот на Гаусовиот замислен цилиндар ρ треба да е поголем од радиусот на цилиндарот. Бидејќи од симетријата на проблемот, електричното поле е насочено радијално од оската *z*, согласно Гаусовиот закон имаме:

$$\oint \vec{E} d\vec{a} = E 2\pi\rho L = \frac{\varkappa L}{\varepsilon_0},$$

односно

$$\vec{E} = \frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\rho}}{\rho},$$

каде што ρ е растојанието од оската на цилиндерот во радијална насока, а $\hat{\rho}$ е радијалниот орт вектор.

Од Амперовата теорема го пресметуваме магнетното поле

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = B 2\pi\rho = \mu_0 I,$$

односно

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi},$$

каде што $\hat{\varphi}$ е азимуталниот орт вектор.

Земајќи предвид дека системот S' се движи во однос на *S* по *z*-оската со брзина $\vec{v} = u\hat{z}$, и дека во однос на *S* полињата се

$$\overrightarrow{E_{\parallel}} = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{E_{\perp}} = \frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\rho}}{\rho},$$

$$\overrightarrow{B_{\parallel}} = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{B_\perp} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi},$$

релативистичките трансформации на паралелните и нормалните компоненти на векторите на електромагнетното поле во S' се:

$$\overrightarrow{E_\parallel}' = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{B_\parallel}' = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{E_\perp}' = \frac{\overrightarrow{E_\perp} + \vec{v}\times\overrightarrow{B_\perp}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\overrightarrow{E_\perp} + (u\hat{z}\times\overrightarrow{B_\perp})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\rho}}{\rho}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + \frac{\frac{u\mu_0 I}{2\pi\rho}(\hat{z}\times\hat{\varphi})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$
$$= \frac{\frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\rho}}{\rho}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{\frac{u\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\rho}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\hat{\rho}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(\frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0\rho} - \frac{u\mu_0 I}{2\pi\rho}\right),$$

$$\overrightarrow{B_\perp}' = \frac{\overrightarrow{B_\perp} - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\overrightarrow{E_\perp})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\overrightarrow{B_\perp} - \frac{1}{c^2}(u\hat{z}\times\overrightarrow{E_\perp})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{\frac{1}{c^2}\frac{\varkappa u}{2\pi\varepsilon_0\rho}(\hat{z}\times\hat{\rho})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$
$$= \frac{\hat{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} - \frac{u}{c^2}\frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0\rho}\right).$$

Брзината u_1 при којашто електричното поле во S' ќе отсуствува, се добива од изразот $\overrightarrow{E_\perp}' = \vec{0}$, односно

$$\frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0\rho} - \frac{u_1\mu_0 I}{2\pi\rho} = 0,$$

од каде што

$$u_1 = c^2\frac{\varkappa}{I}.$$

Следствено, брзината u_2 при којашто во референтниот систем S' магнетното поле нема да постои следува од изразот $\overrightarrow{B_\perp}' = \vec{0}$, или

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} - \frac{u_2}{c^2}\frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0\rho} = 0,$$

од каде се добива

$$u_2 = \frac{I}{\varkappa}.$$

■

3.

Релативистичко движење на наелектризирани честички во електромагнетно поле

Задача 27.

Аналитички да се опише релативистичкото движење на честичка со маса на мирување m_0 и полнеж e која што се движи во хомогени, константни и меѓусебно паралелни електрично поле и магнетно поле $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Решение 27.

Полињата $\vec{E}$ и $\vec{B}$ земаме да се насочени паралелно на позитивната z-оска. Врз честичката дејствува само Лоренцовата сила, па нејзината равенка на движење во векторска форма се запишува:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B},$$

каде што

$$\vec{P} = P_x\hat{x} + P_y\hat{y} + P_z\hat{z}$$

е векторот на релативистичкиот импулс на честичката,

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$$

е брзината на честичката, а

$$\vec{E} = E\hat{z},$$

$$\vec{B} = B\hat{z},$$

се електричното поле и магнетното поле, соодветно. Со замена во равенката на движење се добива:

$$\frac{d}{dt}\left(P_x\hat{x} + P_y\hat{y} + P_z\hat{z}\right) = eE\hat{z} + e\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ 0 & 0 & B\end{vmatrix},$$

односно

$$\frac{dP_x}{dt}\hat{x} + \frac{dP_y}{dt}\hat{y} + \frac{dP_z}{dt}\hat{z} = eE\hat{z} + e[\hat{x}(B\dot{y}) - \hat{y}(B\dot{x})],$$

или по компоненти

$$\frac{dP_x}{dt} = eB\dot{y}, \tag{1}$$

$$\frac{dP_y}{dt} = -eB\dot{x}, \tag{2}$$

$$\frac{dP_z}{dt} = eE. \tag{3}$$

Релативистичкиот импулс на честичката е даден со формулата

$$\vec{P} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

а релативистичката енергија е:

$$\varepsilon = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Од последните две релации лесно се добива:

$$\vec{v} = \frac{\vec{P}c^2}{\varepsilon},$$

односно запишано по компоненти:

$$v_x = \frac{P_x c^2}{\varepsilon},$$
$$v_y = \frac{P_y c^2}{\varepsilon},$$
$$v_z = \frac{P_z c^2}{\varepsilon}.$$

Со смена на овие изрази во релациите (1)–(3), се добива систем од три диференцијални равенки:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_x}{dt} = eBc^2 \dfrac{P_y}{\varepsilon}, \\ \dfrac{dP_y}{dt} = -eBc^2 \dfrac{P_x}{\varepsilon}, \\ \dfrac{dP_z}{dt} = eE. \end{cases} \qquad (4)$$

Решението на третата равенка се наоѓа лесно:

$$P_z = eEt,$$

каде што константата на интеграција е нула од условот во почетниот момент од времето честичката да е во координатниот почеток и незината брзина по *z*-оската да изнесувала нула.

За решавање на останатите равенки од овој систем постапуваме на следниот начин. Првата равенка од системот (4) ја множиме од двете страни со P_x, а втората со P_y и ги собираме:

$$P_x \frac{dP_x}{dt} + P_y \frac{dP_y}{dt} = 0,$$

односно

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(P_x^2 + P_y^2\right) = 0.$$

Со интегрирање на добиената равенка се добива:

$$P_x^2 + P_y^2 = C_1.$$

Константата C_1 се одредува од условот – големината на импулсот на честичката во почетниот момент од движењето во *xy*-рамнината да изнесува $P_{0\perp}$:

$$P_x^2 + P_y^2 = {P_{0\perp}}^2.$$

Понатаму, втората равенка од системот (4) ја множиме со имагинарната единица $i = \sqrt{-1}$ и ја собираме со првата равенка, при што се добива:

$$\frac{dP_x}{dt} + i\frac{dP_y}{dt} = eBc^2\frac{P_y}{\varepsilon} - ieBc^2\frac{P_x}{\varepsilon} = \\ = \frac{eBc^2}{\varepsilon}\left(P_y - iP_x\right),$$

односно

$$\frac{d}{dt}\left(P_x + iP_y\right) = -\frac{ieBc^2}{\varepsilon(t)}\left(P_x + iP_y\right). \tag{5}$$

Воведуваме функција $\psi = \psi(t)$ дефинирана со релацијата:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{eBc^2}{\varepsilon(t)}, \tag{6}$$

при што диференцијалната равенка (5) се трансформира во:

$$\frac{d}{dt}\left(P_x + iP_y\right) = -i\frac{d\psi}{dt}\left(P_x + iP_y\right),$$

односно

$$\frac{d\left(P_x + iP_y\right)}{\left(P_x + iP_y\right)} = -id\psi.$$

Добиената диференцијална равенка лесно се интегрира:

$$\ln\left|P_x + iP_y\right| = -i\psi + C_2,$$

односно

$$P_x + iP_y = C_3 \; e^{-i\psi} = C_3 \; (\cos\psi - i\sin\psi),$$

од каде со изедначување на реалниот и имагинарниот дел од левата и десната страна се добива:

$$P_x = C_3 \;\; \cos\psi(t), \tag{7}$$

$$P_y = -C_3 \;\; \sin\psi(t). \tag{8}$$

За енергијата на честичката ја користиме релацијата

$$\varepsilon = \sqrt{P^2c^2 + m_0^2c^4} = \sqrt{\left(P_x^2 + P_y^2\right)c^2 + P_z^2c^2 + m_0^2c^4}$$
$$= \sqrt{{P_{0\perp}}^2c^2 + m_0^2c^4 + e^2E^2t^2c^2}.$$

Со смена во равенката (6) се добива:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{eBc^2}{\sqrt{{P_{0\perp}}^2c^2 + m_0^2c^4 + e^2E^2t^2c^2}}$$

од каде што со интеграција се добива:

$$\psi(t) = \frac{cB}{E}\sinh^{-1}\left(\frac{ceEt}{\sqrt{{P_{0\perp}}^2c^2 + m_0^2c^4}}\right).$$

Со овој резултат и релациите (7) и (8) имаме

$$P_x = \frac{c^2}{\varepsilon}v_x = C_3 \;\; \cos\psi(t)\,,$$

$$P_y = \frac{c^2}{\varepsilon}v_y = -C_3 \;\; \sin\psi(t).$$

Бидејќи $v_x = \frac{dx}{dt}$ и $v_y = \frac{dy}{dt}$, а со оглед на тоа што

$$dt = \frac{dt}{d\psi}d\psi = \frac{\varepsilon}{eBc^2}d\psi,$$

последните две релации се запишуваат:

$$dx = \frac{C_3}{eB} \cos\psi(t)\, d\psi,$$

$$dy = -\frac{C_3}{eB} \sin\psi(t)\, d\psi.$$

Со интегрирање и земање предвид на почетниот услов дека кога $t = 0$, тогаш $x = y = 0$, односно на почетокот од движењето честичката се наоѓала во координатниот почеток, се добива:

$$x(t) = \frac{C_3}{eB} \sin\psi(t), \tag{9}$$

$$y(t) = \frac{C_3}{eB} (1 - \cos\psi(t)). \tag{10}$$

Последната релација за $y(t)$ може да се запише во следнава форма:

$$y(t) - \frac{C_3}{eB} = -\frac{C_3}{eB} \cos\psi(t) \tag{11}$$

па со квадрирање на равенките (9) и (11) и нивно собирање се добива:

$$x^2 + \left(y - \frac{C_3}{eB}\right)^2 = \left(\frac{C_3}{eB}\right)^2$$

односно проекцијата на траекторијата на xy-рамнината е кружница. За движењето по насоката на оската z имаме:

$$P_z = \frac{\varepsilon}{c^2} v_z = eEt,$$

односно

$$\frac{dz}{dt} = \frac{ec^2E}{\varepsilon} t = \frac{ec^2Et}{\sqrt{{P_{0\perp}}^2 c^2 + m_0^2 c^4 + e^2E^2t^2c^2}},$$

од каде што после интегирањето се добива:

$$z(t)=\frac{1}{eE}\sqrt{{P_{0\perp}}^2c^2+m_0^2c^4+e^2E^2t^2c^2}=\frac{\varepsilon(t)}{eE}. \tag{12}$$

Со релациите (9), (10) и (12) се дадени конечните равенки кои ја опишуваат траекторијата по којашто се движи релативистичката честичка.

■

Задача 28.

Наелектризирана честичка со маса на мирување m_0 и полнеж e се забрзува без почетна брзина во хомогено електрично поле на линеарен акцелератор помеѓу две точки со потенцијална разлика U и меѓусебно растојание L. Ако τ_Lе времето за кое честичката ќе прелета помеѓу тие две точки мерено во лабораторискиот референтен систем, а τ_s истото тоа време мерено во однос на референтниот систем сврзан за честичката, да се покаже дека односот τ_s/τ_L не зависи од должината L на акцелераторот, туку е функција f од аргументот $\frac{eU}{m_0c^2}$, односно

$$\frac{\tau_s}{\tau_L}=f\left(\frac{eU}{m_0c^2}\right).$$

Решение 28.

На честичката дејствува само Лоренцова сила, па равенката на движење е зададена со:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=e\vec{E}+e\vec{v}\times\vec{B}=e\vec{E},$$

при што е земено дека во линеарниот акцелератор постои само електричното поле $\vec{E}$. Бидејќи движењето е еднодимензионално, земаме дека тоа се одвива долж x-оската, па добиваме:

$$\frac{dP_x}{dt} = eE,$$

односно

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = eE,$$

и следствено

$$d\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = eEdt.$$

По интегрирањето добиваме:

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = eEt + C_1.$$

Бидејќи во почетниот момент t = 0 брзината на честичката била нула и таа се наоѓала во координатниот почеток, за константата на интеграција се добива $C_1 = 0$, па следува

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{eE}{m_0}t}{\sqrt{1+\left(\frac{eE}{m_0 c}\right)^2 t^2}}, \tag{1}$$

односно

$$x(t) = \int \frac{\frac{eE}{m_0}t}{\sqrt{1+\left(\frac{eE}{m_0 c}\right)^2 t^2}} dt.$$

За решавање на интегралот ја воведуваме смената:

$$1 + \left(\frac{eE}{m_0 c}\right)^2 t^2 = z,$$

при што

$$dt = \frac{1}{2t}\left(\frac{m_0 c}{eE}\right)^2 dz.$$

Следсвено, за интегралот имаме:

$$x(t) = \int \frac{\frac{eE}{m_0} t \frac{1}{2t}\left(\frac{m_0 c}{eE}\right)^2}{\sqrt{z}} dz = \frac{m_0 c^2}{2eE} \int z^{-\frac{1}{2}} dz,$$

односно

$$x(t) = \frac{m_0 c^2}{eE} \sqrt{1 + \left(\frac{eE}{m_0 c}\right)^2 t^2} + C_2.$$

Бидејќи кога $t = 0$, $x = 0$, па за интеграционата константа добиваме:

$$C_2 = \frac{m_0 c^2}{eE}.$$

Со смена се добива конечниот израз за $x(t)$:

$$x(t) = \frac{m_0 c^2}{eE}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{eE}{m_0 c}\right)^2 t^2} + 1\right].$$

Од условот на задачата, кога $x = L$, $t = \tau_L$, каде што τ_L е времето на прелет мерено во однос на лабораторискиот референтен систем, од последната равенка следува:

$$L = \frac{m_0 c^2}{eE}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{eE}{m_0 c}\right)^2 {\tau_L}^2} + 1\right],$$

односно

$$\tau_L = \frac{m_0 Lc}{eU}\sqrt{\frac{e^2U^2}{m_0^2c^4} + 2\frac{eU}{m_0c^2}}. \tag{2}$$

Сопственото време на прелет се добива од релацијата

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

во која што после замена на изразот за брзината од равенката (1) добиваме

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\frac{eE}{m_0}t}{\sqrt{1 + \left(\frac{eE}{m_0c}\right)^2 t^2}}\right)^2}.$$

Со интегирање на последниот израз се добива

$$\tau_s = \int_0^{\tau_L} dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\frac{eE}{m_0}t}{\sqrt{1 + \left(\frac{eE}{m_0c}\right)^2 t^2}}\right)^2},$$

односно со оглед на релацијата (2)

$$\tau_s = \frac{m_0 Lc}{eU}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{e^2U^2}{m_0^2c^4} + 2\frac{eU}{m_0c^2}}. \tag{3}$$

Следствено, од равенките (2) и (3),

$$\frac{\tau_s}{\tau_L} = f(\alpha) = \frac{\sinh^{-1}\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}},$$

каде што

$$\alpha = \frac{eU}{m_0 c^2},$$

што и требаше да се покаже.

■

Задача 29.

Наелектризирана релативистичка честичка со маса на мирување m_0 и полнеж e упаѓа со енергија ε_0 во закочно хомогено електрично поле E чија што насока е спротивна од насоката на движење на честичката. Да се најде растојанието S коешто ќе го помине честичката до местото на застанување.

Решение 29.

На честичката дејствува Лоренцовата сила, во којашто во овој случај фигурира само електричното поле $\vec{E}$, па нејзината равенка на движење е:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{f} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = e\vec{E},$$

каде што $\vec{P}$ е релативистичкиот импулс на честичката, а $\vec{f}$ е силата што дејствува врз неа, во случајот Лоренцовата сила.

Од друга страна важи релацијата за енергетскиот баланс при движењето (промена на енергијата со времето)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{f}\vec{v} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\vec{v} = e\vec{E}\vec{v} = -eEv, \tag{1}$$

каде што зедовме дека полето $\vec{E}$ е спротивно насочено од брзината $\vec{v}$ на честичката. Енергијата на честичката се пресметува по релацијата:

$$\varepsilon = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2}$$

Со замена на равенката (2) во релацијата (1) се добива:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -eE\dot{x},$$

којашто понатаму може лесно да се интегрира, при што се добива:

$$\varepsilon(t) = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -eEx + C_1.$$

Константата на интеграција C_1 ја наоѓаме од почетните услови: во почетниот момент од времето t = 0 честичката се наоѓала во координатниот почеток x = 0 и нејзината енергија изнесувала $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, од каде што добиваме $C_1 = \varepsilon_0$, па следствено

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -eEx + \varepsilon_0.$$

Во моментот на застанување, брзината на честичката ќе биде нула, а координатата каде таа ќе застане изнесува $x = S$, па се добива

$$m_0c^2 = -eES + \varepsilon_0,$$

од каде што за растојанието S после кое честичката ќе допре добиваме:

$$S = \frac{\varepsilon_0 - m_0c^2}{eE}.$$

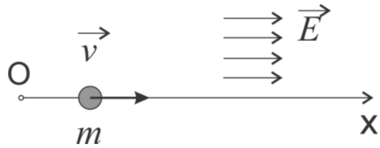
■

Задача 30.

Честичка со маса на мирување m_0 и полнеж e се наоѓа во константно хомогено електрично поле $\vec{E}$. Почетната брзина на честичката е нула. Да се изрази кинетичката енергија на честичката како функција од сопственото време τ.

Решение 30.

Бидејќи движењето е еднодимензионално, земаме полето $\vec{E}$ да биде паралелно на *x*-оската, а честичката на почетокот се наоѓала во координатниот почеток на оваа оска.



Слика 17

Енергијата на честичката ε се пресметува со формулата:

$$\varepsilon = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 + T,$$

каде што T е кинетичката енергија на честичката

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \tag{1}$$

На честичката дејствува Лоренцова сила којашто во случајов е само електрична, па равенката на движење се запишува:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{E},$$

каде $\vec{P}$ е релативистичкиот импулс. Последната равенка ја проектираме на x-оската:

$$\frac{dP_x}{dt} = eE,$$

односно

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = eE.$$

Резултантната диференцијална равенка лесно се интегрира, при што добиваме:

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = eEt + C_1.$$

Константата на интеграција следи од почетниот услов кога $t = 0$ тогаш $v = 0$, па следува $C_1 = 0$, односно

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = eEt.$$

Со кратка трансформација, од последната равенка може да се изрази брзината v на честичката како функција од координатното време t

$$v(t) = \frac{\frac{eEt}{m_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{eEt}{m_0 c}\right)^2}}. \tag{2}$$

За да ја добиеме зависноста на брзината од сопственото време τ, ја користиме равенката

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}},$$

којашто со замена на изразот за брзината од релацијата (1) станува

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{\left(\frac{eEt}{m_0 c}\right)^2}{1+\left(\frac{eEt}{m_0 c}\right)^2}} = dt\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{eE}{m_0 c}\right)^2 t^2}}.$$

Со интегрирање на последната релација имаме:

$$\tau = \int \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{eE}{m_0 c}\right)^2 t^2}}\, dt + C_2.$$

За решавање на интегралот, ја воведуваме смената

$$\sinh\alpha = \frac{eEt}{m_0 c},$$

а оттука

$$dt = \frac{m_0 c}{eE}\cosh\alpha\, d\alpha,$$

при што интегралот последователно се трансформира на следниот начин:

$$\tau = \int \sqrt{\frac{1}{1+\sinh^2\alpha}}\frac{m_0 c}{eE}\cosh\alpha\, d\alpha + C_2 = \int \frac{\frac{m_0 c}{eE}\cosh\alpha}{\cosh\alpha}\, d\alpha + C_2$$
$$= \frac{m_0 c}{eE}\alpha + C_2 = \frac{m_0 c}{eE}\sinh^{-1}\frac{eEt}{m_0 c},$$

каде што зедовме дека кога $t = 0$ тогаш $\tau = 0$, па константата на интеграција е $C_2 = 0$. Следствено

$$t = \frac{m_0 c}{eE}\sinh\left(\frac{eE}{m_0 c}\tau\right). \tag{3}$$

Со замена на (3) во (2) се добива брзината на честичката во функција од сопственото време τ

$$v(\tau) = \frac{c\sinh\left(\frac{eE}{m_0 c}\tau\right)}{\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{eE}{m_0 c}\tau\right)}}.$$

Последната релација ја заменуваме во изразот (1) за кинетичката енергија на честичката, при што по кратко средување, конечно се добива зависноста на T од сопственото време τ:

$$T(\tau) = m_0 c^2 \left[\cosh\left(\frac{eE}{m_0 c}\tau\right) - 1\right].$$

■

Задача 31.

Релативистичка наелектризирана честичка се движи во електромагнетно поле. Да се изрази забрзувањето на честичката преку векторите на електричното поле $\vec{E}$ и магнетното поле $\vec{B}$, и брзината $\vec{v}$ на честичката.

Решение 31.

Врз честичката дејствува Лоренцовата сила $\vec{f} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, па равенката на движење се запишува како:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \tag{1}$$

каде што $\vec{P}$ е релативистичкиот импулс на честичката

$$\vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\varepsilon \vec{v}}{c^2}, \tag{2}$$

а ε е нејзината енергија

$$\varepsilon = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Со смена на (2) во (1) добиваме:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon \vec{v}}{c^2}\right) = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B},$$

односно

$$\frac{1}{c^2}\vec{v}\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{1}{c^2}\varepsilon\frac{d\vec{v}}{dt}=e\vec{E}+e\vec{v}\times\vec{B}. \tag{3}$$

Ја запишуваме равенката за енергетскиот баланс при движењето:

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\vec{f}\vec{v}=e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\vec{v}=e\vec{E}\vec{v}$$

којашто ја заменуваме во равенката (3) и добиваме:

$$\frac{1}{c^2}\vec{v}(e\vec{E}\vec{v})+\frac{1}{c^2}\varepsilon\frac{d\vec{v}}{dt}=e\vec{E}+e\vec{v}\times\vec{B},$$

односно

$$\frac{1}{c^2}\varepsilon\frac{d\vec{v}}{dt}=e\vec{E}+e\vec{v}\times\vec{B}-\frac{e}{c^2}\vec{v}(\vec{E}\vec{v}).$$

Следствено, за забрзувањето на честичката се добива:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{ec^2}{\varepsilon}\left[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\vec{v}(\vec{E}\vec{v})\right].$$

■

4.

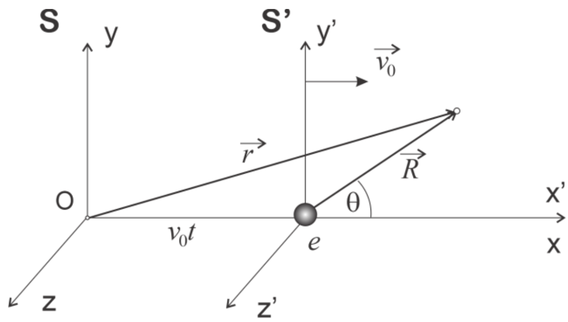
Електромагнетно поле на полнежи во движење. Зрачење од електромагнетен дипол

Задача 32.

Да се најдат векторите на електромагнетното поле $\vec{E}$ и $\vec{B}$ формирани од точкаст полнеж *e* којшто се движи рамномерно праволиниски со брзина v_0. Резултатот да се изрази како функција од аголот θ помеѓу правецот на движење и радиус-векторот $\vec{R}$ кој ги спојува моменталната положба на полнежот и точката во која што се бара полето.

Решение 32.

Земаме полнежот да се движи со брзина v_0 долж *x*-оската на референтниот систем *S*. Нека S' е референтен систем врзан за полнежот, и во однос на овој референтен систем полнежот мирува во координатниот почеток. Следствено, во S' системот полнежот создава само



Слика 18

електрично поле $\overrightarrow{E'}$ во просторот околу себе, и тоа е зададено со Кулоновиот закон

$$\overrightarrow{E'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r'^2}\widehat{r'}. \tag{1}$$

Во овој референтен систем магнетното поле отсуствува

$$\overrightarrow{B}' = \vec{0}. \tag{2}$$

Со користење на векторските равенки за релативистичка трансформација на полињата меѓу системите *S* и *S'*,

$$\overrightarrow{E_{\parallel}}' = \overrightarrow{E_{\parallel}}, \tag{3}$$

$$\overrightarrow{E_{\perp}}' = \frac{\overrightarrow{E_{\perp}} + \vec{u} \times \overrightarrow{B_{\perp}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{4}$$

$$\overrightarrow{B_{\parallel}}' = \overrightarrow{B_{\parallel}}, \tag{5}$$

$$\overrightarrow{B_{\perp}}' = \frac{\overrightarrow{B_{\perp}} - \frac{1}{c^2}(\vec{u} \times \overrightarrow{E_{\perp}})}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{6}$$

при што земаме предвид дека системите *S* и *S'* се поставени во стандардна конфигурација, а релативната брзина $\vec{u}$ на *S* во однос на S' изнесува:

$$\vec{u} = -v_0 \hat{x}.$$

Тука со индексите ∥ и ⊥ ги означивме компонентите на векторските полиња кои се соодветно паралелни и нормални на релативната брзина $\vec{u}$ помеѓу референтните системи. Од равенката (1), полето $\overrightarrow{E}'$ го изразуваме преку компонентите:

$$\overrightarrow{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}} (x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}').$$

Оттука, за трансформацијата на паралелната компонента според релацијата (3) имаме:

$$\overrightarrow{E_{\parallel}}' = \overrightarrow{E_{\parallel}} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x'\hat{x}'}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}, \tag{7}$$

а согласно релацијата (4), нормалната компонента трансформирана во референтниот систем S се запишува:

$$\overrightarrow{E_\perp} = \frac{\overrightarrow{E_\perp}'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\frac{y'\hat{y}' + z'\hat{z}'}{\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)^{3/2}}. \tag{8}$$

Од релацијата (5), за паралелната компонента на векторот на магнетното поле добиваме:

$$\overrightarrow{B_\parallel}' = \overrightarrow{B_\parallel} = \vec{0}, \tag{9}$$

и следствено, од релацијата (6), за нормалната компонента во референтниот систем S се добива:

$$\overrightarrow{B_\perp} = \frac{\overrightarrow{B_\perp}' + \frac{1}{c^2}(\vec{u}\times\overrightarrow{E_\perp})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\left[-v_0\hat{x}\times\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\frac{y'\hat{y}' + z'\hat{z}'}{\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)^{3/2}}\right)\right],$$

односно

$$\overrightarrow{B_\perp} = \frac{v_0 e}{c^2 4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\frac{1}{\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)^{3/2}}(y'\hat{y}' + z'\hat{z}'). \tag{10}$$

Компонентите на електричното поле и магнетното поле во референтниот систем S дадени преку релациите (7)–(10) не се изразени преку координатите на системот S, туку преку соодветните коорсинати на S', па затоа ги користиме Лоренцовите трансформации:

$$x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$y' = y,$$

$$z^{'} = z,$$

$$t^{'} = t.$$

Притоа, со замена во изразите (7) и (8), за $\overrightarrow{E_{\parallel}}$ и $\overrightarrow{E_{\perp}}$ се добива:

$$\overrightarrow{E_{\parallel}} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\frac{(x-v_0t)\hat{x}}{\left(\frac{(x-v_0t)^2}{1-\frac{v_0^2}{c^2}}+y^2+z^2\right)^{3/2}},$$

$$\overrightarrow{E_{\perp}} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\frac{y\hat{y}+z\hat{z}}{\left(\frac{(x-v_0t)^2}{1-\frac{v_0^2}{c^2}}+y^2+z^2\right)^{3/2}},$$

па сумарниот вектор на електричното поле во референтниот систем S во којшто полнежот се движи е:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_{\parallel}} + \overrightarrow{E_{\perp}} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left[(x-v_0t)\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}\right]\left(1-\frac{{v_0}^2}{c^2}\right)}{\left[(x-v_0t)^2+(y^2+z^2)\left(1-\frac{{v_0}^2}{c^2}\right)\right]^{3/2}}. \quad (11)$$

Слично, со замена на Лоренцовите трансформации за координатите во релациите (9) и (10), за магнетното поле во системот S имаме:

$$\vec{B} = \overrightarrow{B_{\parallel}} + \overrightarrow{B_{\perp}} = \frac{v_0 e}{c^2 4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\frac{y\hat{z}-z\hat{y}}{\left(\frac{(x-v_0t)^2}{1-\frac{v_0^2}{c^2}}+y^2+z^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{v_0}{c^2}\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(1-\frac{{v_0}^2}{c^2}\right)(y\hat{z}-z\hat{y})}{\left[(x-v_0t)^2+(y^2+z^2)\left(1-\frac{{v_0}^2}{c^2}\right)\right]^{3/2}},$$

односно

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\overrightarrow{v_0} \times \vec{E}. \tag{12}$$

Го воведуваме радиус-векторот $\vec{R}$ меѓу моменталната положба на полнежот и точката во којашто се бара полето

$$\vec{R} = \vec{r} - \overrightarrow{v_0}t = (x - v_0 t)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z},$$

при што земаме дека во однос на референтниот систем *S*, после време t од почетокот на движењето, радиус-векторот на местоположбата на полнежот изнесува $\overrightarrow{v_0}t$, а радиус векторот којшто ја определува точката каде што го бараме полето е $\vec{r}$. Од условот на задачата, θ е аголот помеѓу $\vec{R}$ и $\overrightarrow{v_0}$, па со квадрирање на релацијата:

$$\vec{R} + \overrightarrow{v_0}t = \vec{r}$$

добиваме

$$R^2 + v_0^2 t^2 - 2Rv_0 t\cos\theta = r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{13}$$

каде што

$$R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{(x - v_0 t)^2 + y^2 + z^2}. \tag{14}$$

Со користење на последните две релации (13) и (14), полињата што ги создава полнежот во референтниот систем *S* зададени со релациите (11) и (12) се запишуваат преку величините $\vec{R}$ и θ на следниот начин

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3}\frac{\left(1 - \frac{{v_0}^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{{v_0}^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{\overrightarrow{v_0} \times \vec{R}}{R^3}\frac{\left(1 - \frac{{v_0}^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{{v_0}^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

■

Задача 33.

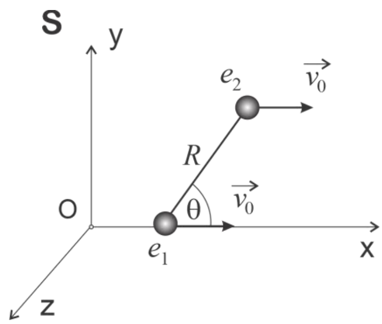
Да се најде силата на заемнодејство помеѓу два точкасти полнежи e_1 и e_2 во референтниот систем S во којшто тие се движат со константна брзина $\overrightarrow{v_0}$ по паралелни прави, така што правата која ги спојува прави агол θ со правецот на нивното движење. Растојанието помеѓу полнежите е константно и изнесува R.

Решение 33.

Користејќи ги резултатите од претходната задача, електричното и магнетното поле на првиот полнеж во однос на системот S на местото каде што се наоѓа вториот полнеж изнесуваат

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3}\frac{\left(1-\frac{{v_0}^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{{v_0}^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\overrightarrow{B_1} = \frac{\mu_0 e_1}{4\pi}\frac{\overrightarrow{v_0}\times\vec{R}}{R^3}\frac{\left(1-\frac{{v_0}^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{{v_0}^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}.$$



Слика 19

Ја пресметуваме Лоренцовата сила $\overrightarrow{f_{21}}$ со којашто првиот полнеж му дејствува на вториот

$$\overrightarrow{f_{21}} = e_2\left(\overrightarrow{E_1}+\overrightarrow{v_0}\times\overrightarrow{B_1}\right)$$

$$= e_1 e_2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\overrightarrow{v_0}\times\left(\overrightarrow{v_0}\times\vec{R}\right)}{R^3}\right)\frac{\left(1-\frac{{v_0}^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{{v_0}^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\vec{R}+\frac{1}{c^2}\overrightarrow{v_0}\left(\overrightarrow{v_0}\vec{R}\right)-\frac{{v_0}^2}{c^2}\vec{R}\right)\frac{\left(1-\frac{{v_0}^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{{v_0}^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Бидејќи

$$\vec{R} = R\cos\theta\,\hat{x} + R\sin\theta\,\hat{y},$$

и

$$\overrightarrow{v_0} = v_0\hat{x},$$

со замена во последниот израз и по кратко средување, за Лоренцовата сила на заемното дејство се добива:

$$\overrightarrow{f_{21}} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[R\cos\theta\,\hat{x} + \left(1 - \frac{{v_0}^2}{c^2}\right)R\sin\theta\,\hat{y}\right]\frac{\left(1 - \frac{{v_0}^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{{v_0}^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

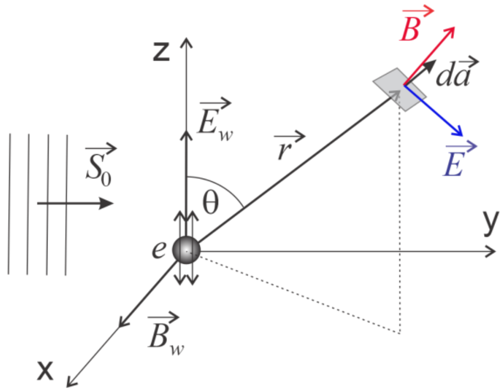
■

Задача 34.

Врз слободен електрон во мирување упаѓа линеарно поларизиран монохроматски електромагнетен бран. Под дејство на Лоренцовата сила електронот ќе почне да врши присилени осцилации. Сметајќи дека електронот при овој осцилаторен процес се однесува како дипол, да се пресмета диференцијалниот пресек на расејување, односно делот од енергијата на упадното зрачење што електронот ќе го израчи во даден правец во единица време. Колкав дел од енергијата на упадниот бран се расејува од слободниот електрон во сите правци (ова е т.н. вкупен пресек на расејување)?

Решение 34.

Декартовиот координатен систем го поставуваме на тој начин што електронот се наоѓа во координатниот почеток, а електромагнетниот бран е поларизиран во *xz*-рамнина и се простира кон позитивната насока на *y*-оската.



Слика 20

Следствено, просторно-временската зависност на векторите на електричното и магнетното поле на бранот – $\vec{E}_w$ и $\vec{B}_w$, е изразена преку релациите:

$$\vec{E}_w(\vec{r},t) = E_0\hat{z}\cos(ky-\omega t),$$

$$\vec{B}_w(\vec{r},t) = B_0\hat{x}\cos(ky-\omega t),$$

каде што ω е фреквецијата на бранот, а амплитудите E_0 и B_0 на електричното и магнетното поле се константи и се меѓусебно сврзани со релацијата:

$$B_0 = \frac{E_0}{c}. \tag{1}$$

Во точката на координатниот почеток каде што се наоѓа електронот, $y = 0$, па имаме:

$$\vec{E}_w(t) = E_0\hat{z}\cos(\omega t), \tag{2}$$

$$\vec{B}_w(t) = \frac{E_0}{c}\hat{x}\cos(\omega t). \tag{3}$$

Следствено, на електронот поради интеракцијата со упадниот бран ќе му дејствува Лоренцовата сила, која во случајов се пресметува како:

$$\vec{F} = e\left(\vec{E}_w + \vec{v} \times \vec{B}_w\right) = e\left(E_0 \hat{z}\cos(\omega t) + \frac{\vec{v} \times \hat{x}}{c} E_0 \cos(\omega t)\right). \tag{4}$$

Поради тоа што вториот член во заградата ја содржи вредноста на брзината на светлината c во именителот, може да се земе дека тој е многупати помал од првиот член, па изразот (4) за силата од упадниот бран врз електронот може да се апроксимира со

$$\vec{F} \cong eE_0 \hat{z}\cos(\omega t). \tag{5}$$

Претпоставуваме дека движењето на електронот е нерелативистичко, па според тоа, равенката на движење (5) се запишува

$$m\ddot{\vec{r}} = eE_0 \hat{z}\cos(\omega t).$$

Со користење на последниот резултат, го запишуваме диполниот момент на електронот:

$$\ddot{\vec{P}} = e\ddot{\vec{r}} = \frac{e^2}{m}\overrightarrow{E_0}\cos(\omega t), \tag{6}$$

каде што $\overrightarrow{E_0} = E_0 \hat{z}$.

Поради осцилаторното движење, електронот ќе зрачи енергија во форма на диполно електромагнетно зрачење која што во секоја точка од просторот околу осцилирачкиот електрон е опишано со векторите на електрично и на магнетно поле $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Од своја страна, ова диполно зрачење се карактеризира со вектор на Поинтинг $\vec{S}$ по дефиниција зададен со релацијата

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \tag{7}$$

и тој е бројно еднаков на енергијата израчена од електронот во единица плоштина во единица време

$$\left|\vec{S}\right| = \frac{dW}{da\,dt}.$$

Оттука, за моќноста на зрачењето емитувано од електронот имаме:

$$\frac{dW}{dt}=\vec{S}d\vec{a}=\vec{S}\hat{r}da=\vec{S}\hat{r}r^2d\Omega \tag{8}$$

каде што го воведовме елементарниот просторен агол $d\Omega$ преку релацијата:

$$d\Omega=\frac{da}{r^2}.$$

Релацијата (8) за моќноста на зрачењето од електронот, со оглед на равенката (7) може да се запише:

$$\frac{dW}{dt}=\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\hat{r}r^2d\Omega=\frac{1}{\mu_0}\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|r^2d\Omega. \tag{9}$$

Векторите на електричното и магнетното поле на диполното електромагнетно зрачење од електронот изнесуваат:

$$\vec{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^3}\frac{\ddot{\vec{P}}(t_0)\times\hat{r}}{r}, \tag{10}$$

$$\vec{E}=c\left(\vec{B}\times\hat{r}\right), \tag{11}$$

каде што

$$t_0=t-\frac{|\vec{r}|}{c}$$

е ретардациското време. Со замена на релациите (10) и (11) во (9), по кратко средување добиваме:

$$\frac{dW}{dt}=\frac{1}{\mu_0}\left|c\left(\vec{B}\times\hat{r}\right)\times\vec{B}\right|r^2d\Omega=\frac{cr^2}{\mu_0}\left|\hat{r}B^2-\vec{B}\left(\vec{B}\hat{r}\right)\right|d\Omega=\frac{cr^2}{\mu_0}B^2d\Omega.$$

Со смена на (6) во (10), а потоа со замена на добиениот резултат за магнетното поле $\vec{B}$ од диполното зрачење на електронот во последната релација добиваме:

$$\frac{dW}{dt}=\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}\frac{e^4}{m^2}\left[E_0^2\cos^2(\omega t_0)\sin^2\theta\right]d\Omega. \tag{12}$$

Со овој израз е зададена моќноста на зрачењето на електронот, односно енергијата во единица време што се зрачи од електронот во просторен агол $d\Omega$. Бидејќи моќноста на зрачењето зависи од времето преку членот $\cos^2(\omega t_0)$, за фреквенции ω на упадното зрачење кои одговараат на видливиот спектар овој член рапидно осцилира околу некоја средна вредност, па изразот (12) го усреднуваме по еден период на осцилирање, при што се добива средната вредност на моќноста на зрачењето од електронот

$$\overline{\frac{dW}{dt}} = \frac{e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 m^2} E_0^2 \sin^2\theta \, d\Omega. \tag{13}$$

Од друга страна, енергијата на рамниот електромагнетен бран што упаѓа на електронот којашто минува во единица плоштина во единица време е бројно еднаква на модулот на Поинтинговиот вектор $\overrightarrow{S_0}$ на ова зрачење, односно

$$\left|\overrightarrow{S_0}\right| = \frac{dW_0}{dadt},$$

каде што

$$\overrightarrow{S_0} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}_w \times \vec{B}_w\right) \frac{1}{\mu_0}\left|\left(E_0 \hat{z}\cos(ky - \omega t)\right) \times \left(\frac{E_0}{c}\hat{x}\cos(ky - \omega t)\right)\right| =$$
$$= \frac{E_0^2}{c\mu_0}\cos^2(ky - \omega t)\,\hat{y},$$

при кое пресметување ги зедовме предвид релациите (1) и (2) за електромагнетните полиња на упадниот рамен бран. Следствено, во точката на координатниот почеток каде се наоѓа електронот

$$\frac{dW_0}{dadt} = \frac{E_0^2}{c\mu_0}\cos^2(\omega t).$$

Слично како и претходно, ја усреднуваме последната релација во рамките на еден период на осцилирање, па за флуксот на моќноста на упадниот бран добиваме:

$$\overline{\frac{dW_0}{dadt}} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}. \tag{14}$$

Следствено, делот од енергијата на упадниот бран што се расејува од слободниот електрон во даден правец изнесува:

$$\frac{\overline{\frac{dW}{dt}}}{\frac{dW_0}{dadt}} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, d\Omega, \tag{15}$$

и тој се нарекува диференцијален пресек на расејување. Вкупниот (тоталниот) пресек на расејување σ го добиваме кога во релацијата (15) за елементарниот просторен агол ставиме $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ и проинтегрираме по сите точки од просторот, односно

$$\sigma = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta d\varphi = 2\pi\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2 \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta. \tag{16}$$

Резултантниот интеграл се запишува:

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta - \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta =$$

$$\left[-\cos\theta - \int \cos^2\theta\, d(\cos\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \left[-\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{4}{3},$$

па за конечниот израз за тоталниот пресек на расејување добиваме:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2.$$

■

Задача 35.

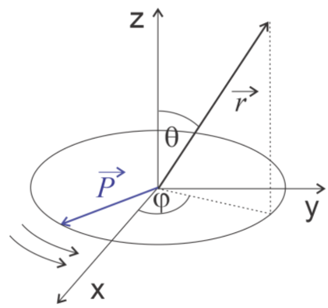
Електричен дипол со константен по модул диполен момент P_0 ротира околу фиксна точка во рамнина со константна аголна брзина Ω. Да се најдат полињата $\vec{E}$ и $\vec{B}$ во секоја точка од просторот околу диполот.

Решение 35.

Векторите на електричното и магнетното поле на полето во просторот околу диполот се пресметуваат по формулите

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{\ddot{\vec{P}}(t_0) \times \hat{r}}{r}, \tag{1}$$

$$\vec{E} = c(\vec{B} \times \hat{r}), \tag{2}$$



Слика 21

каде што

$$t_0 = t - \frac{|\vec{r}|}{c}$$

е ретардациското време. Земаме рамнината во која што ротира диполот да биде *xy*-рамнината, па векторот на диполниот момент $\vec{P}$ се запишува:

$$\vec{P}(t_0) = P_0 \cos(\Omega t_0)\,\hat{x} + P_0 \sin(\Omega t_0)\,\hat{y},$$

од каде што за вториот извод по времето добиваме:

$$\ddot{\vec{P}}(t_0) = -\Omega^2 \vec{P} = -\Omega^2 P_0[\cos(\Omega t_0)\,\hat{x} + \sin(\Omega t_0)\,\hat{y}]. \tag{3}$$

Орт векторите на Декартовиот координатен систем $\hat{x}, \hat{y}$ и $\hat{z}$ изразени преку сферните орт вектори $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ и $\hat{\varphi}$ се:

$$\hat{x} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\theta} - \sin\varphi\,\hat{\varphi},$$

$$\hat{y} = \sin\theta\sin\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \cos\varphi\,\hat{\varphi},$$

$$\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta},$$

па со смена во равенката (3) се добива:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{P}}(t_0) = -\Omega^2 P_0[&\cos(\Omega t_0)\sin\theta\cos\varphi\,\hat{r} + \cos(\Omega t_0)\cos\theta\cos\varphi\,\hat{\theta} \\ &- \cos(\Omega t_0)\sin\varphi\,\hat{\varphi} + \sin(\Omega t_0)\sin\theta\sin\varphi\,\hat{r} \\ &+ \sin(\Omega t_0)\cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \sin(\Omega t_0)\cos\varphi\,\hat{\varphi}]\end{aligned}$$

Со помош на последниот израз го пресметуваме магнетното поле во релацијата (1):

$$\vec{B} = -\frac{\Omega^2 P_0}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\{[\cos(\Omega t_0)\sin\theta\cos\varphi\,\hat{r} + \cos(\Omega t_0)\cos\theta\cos\varphi\,\hat{\theta} - \cos(\Omega t_0)\sin\varphi\,\hat{\varphi} + \sin(\Omega t_0)\sin\theta\sin\varphi\,\hat{r} + \sin(\Omega t_0)\cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \sin(\Omega t_0)\cos\varphi\,\hat{\varphi}]\times\hat{r}\}$$

што по кратко средување се сведува на:

$$\vec{B} = \frac{\Omega^2 P_0}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\left[-\sin(\Omega t_0 - \varphi)\,\hat{\theta} + \cos\theta\cos(\Omega t_0 - \varphi)\,\hat{\varphi}\right].$$

За векторот на електричното поле согласно равенката (2) имаме:

$$\vec{E} = c\left(\vec{B}\times\hat{r}\right) = \frac{\Omega^2 P_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\left\{\left[-\sin(\Omega t_0 - \varphi)\,\hat{\theta} + \cos\theta\cos(\Omega t_0 - \varphi)\,\hat{\varphi}\right]\times\hat{r}\right\},$$

односно

$$\vec{E} = \frac{\Omega^2 P_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\left[\cos\theta\cos(\Omega t_0 - \varphi)\,\hat{\theta} + \sin(\Omega t_0 - \varphi)\,\hat{\varphi}\right].$$

За да го увидиме типот на поларизацијата на бранот на зрачењето што се шири околу ротирачкиот дипол, ги запишуваме θ и φ компонентите на резултантното електрично поле:

$$E_\theta = \frac{\Omega^2 P_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\cos\theta\cos(\Omega t_0 - \varphi), \tag{4}$$

$$E_\varphi = \frac{\Omega^2 P_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin(\Omega t_0 - \varphi). \tag{5}$$

За да го елиминараме времето, равенките (4) и (5) ги запишуваме во облик

$$\frac{E_\theta}{\cos\theta}\frac{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}{\Omega^2 P_0} = \cos(\Omega t_0 - \varphi),$$

$$E_\varphi \frac{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}{\Omega^2 P_0} = \sin(\Omega t_0 - \varphi),$$

при што по квадрирање на двете страни од последните две равенки и нивно собирање, се добива:

$$\frac{E_\theta^2}{\left(\frac{\Omega^2 P_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\cos\theta\right)^2} + \frac{E_\varphi^2}{\left(\frac{\Omega^2 P_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\right)^2} = 1$$

што претставува равенка на елипса во однос на компонентите E_θ и E_φ на векторот на електричното поле. Следствено, зрачењето од ротирачкиот дипол претставува сферен бран со елиптична поларизација.

■

<u>Задача 36.</u>

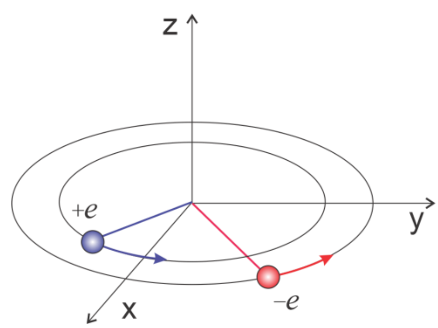
Два точкасти полнежи со големина $+e$ и $-e$ се движат по концентрични кружници со радиуси a и $2a$. Секој од полнежите се движи по соодветната кружница со константна по модул брзина v_0. Да се најде вкупната моќност на зрачењето од овој систем усреднета по периодот на движење.

<u>Решение 36.</u>

Земаме полнежите да се движат во *xy*-рамнината, а центарот на секоја од кружниците да биде во координатниот почеток. Траекториите на полнежите се опишани со радиус-векторите:

$$\overrightarrow{r_+} = a\cos\omega_+ t\,\hat{x} + a\sin\omega_+ t\,\hat{y},$$

$$\overrightarrow{r_-} = 2a\cos\omega_- t\,\hat{x} \pm 2a\sin\omega_- t\,\hat{y},$$



Слика 22

каде што $\overrightarrow{r_+}$ и ω_+ се радиус-векторот и аголната брзина на позитивниот полнеж, а $\overrightarrow{r_-}$ и ω_- се соодветните величини коишто одговараат на негативниот полнеж. Во втората равенка знакот $\pm$ го има следното значење: тој е + кога негативниот полнеж се движи како и позитивниот полнеж во насока спротивна на стрелките на часовникот, а е $-$ кога негативниот полнеж се движи во насока на стрелките на часовникот, спротивно на насоката на движење на позитивниот полнеж. На тој начин едновремено ги разгледуваме двата случаја на движење на полнежите. Аголните брзини на полнежите можат да се изразат преку нивната брзина v_0 и радиусот на соодветната кружница по која што се движи секој од нив

$$\omega_+ = \frac{v_0}{a},$$

$$\omega_- = \frac{v_0}{2a},$$

па добиваме

$$\overrightarrow{r_+} = a\cos\frac{v_0}{a}t\,\hat{x} + a\sin\frac{v_0}{a}t\,\hat{y},$$

$$\overrightarrow{r_-} = 2a\cos\frac{v_0}{2a}t\,\hat{x} \pm 2a\sin\frac{v_0}{2a}t\,\hat{y}.$$

Вкупниот диполен момент на системот изнесува:

$$\vec{P} = e\overrightarrow{r_+} - e\overrightarrow{r_-} = ae\left[\cos\frac{v_0}{a}t - 2\cos\frac{v_0}{2a}t\right]\hat{x} + ae\left[\sin\frac{v_0}{a}t \mp 2\sin\frac{v_0}{2a}t\right]\hat{y}.$$

Со воведување на смената

$$\frac{v_0}{2a} = \overline{\omega}$$

за диполниот момент се добива

$$\vec{P} = ae[\cos 2\overline{\omega}t - 2\cos\overline{\omega}t]\hat{x} + ae[\sin 2\overline{\omega}t \mp 2\sin\overline{\omega}t]\hat{y},$$

и оттука

$$\ddot{\vec{P}} = ae[-4\overline{\omega}^2\cos 2\overline{\omega}t + 2\overline{\omega}^2\cos\overline{\omega}t]\hat{x} + ae[-4\overline{\omega}^2\sin 2\overline{\omega}t \pm 2\overline{\omega}^2\sin\overline{\omega}t]\hat{y},$$

па имаме

$$\left|\ddot{\vec{P}}(t)\right|^2 = 4a^2e^2\varpi^4[5 - 4\cos[(2 \mp 1)\varpi t]]. \qquad (1)$$

Вкупната моќност на зрачењето се пресметува со формулата на Лармор:

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{6\pi c}\left|\ddot{\vec{P}}(t_0)\right|^2, \qquad (2)$$

каде што

$$t_0 = t - \frac{|\vec{r}|}{c}$$

е ретардациското време. Со смена на релацијата (1) во Ларморовата формула (2) добиваме:

$$\mathcal{P} = \frac{4\mu_0 a^2 e^2 \varpi^4}{6\pi c}[5 - 4\cos[(2 \mp 1)\varpi t]].$$

Усреднетата моќност за време на еден период на ротација $T = 2\pi/\varpi$ е

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{P} dt,$$

односно

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{20\mu_0 a^2 e^2 \varpi^4}{6\pi c T}\int_0^T dt - \frac{16\mu_0 a^2 e^2 \overline{w}^4}{6\pi c T}\int_0^T \cos[(2 \mp 1)\varpi t]\, dt,$$

па конечно, за усреднетата моќност на зрачењето се добива:

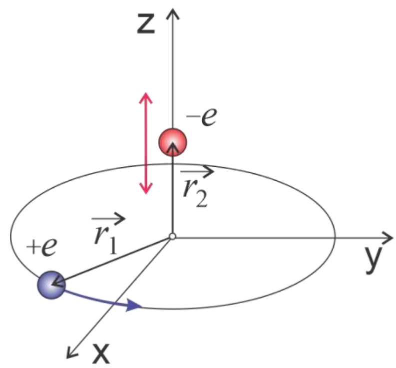
$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{20\mu_0 a^2 e^2 \varpi^4}{6\pi c} = \frac{5\mu_0 e^2 {v_0}^4}{24\pi c a^2}.$$

Се гледа дека усреднетата моќност на зрачењето не зависи од насоката на движењето на полнежите.

■

Задача 37.

Електронеутрален систем се состои од два точкасти полнежи со големина $+e$ и $-e$. Позитивниот полнеж се движи по кружница со радиус a со константна аголна брзина ω, а негативниот полнеж врши хармониски осцилации долж правата којашто поминува низ центарот на кружницата нормално на рамнината во којашто лежи кружницата. Амплитудата на осцилации на негативниот полнеж изнесува a, рамнотежната положба му се наоѓа во центарот на кружницата, а периодот на осцилирање му е $T = 2\pi/\omega$. Да се најде средната вредност на интензитетот на зрачење на овој систем.



Слика 23

Решение 37.

Земаме кружницата по којашто се движи позитивниот полнеж да лежи во *xy*-рамнината и нејзиниот центар да е во координатниот почеток, а правата по која што осцилира негативниот полнеж да е *z*-оската. Следствено на тоа, местоположбата на позитивниот полнеж е определена со

$$\vec{r_1} = a\cos\omega t\,\hat{x} + a\sin\omega t\,\hat{y},$$

додека радиус-векторот којшто ја определува местоположбата на вториот полнеж е:

$$\vec{r_2} = a\sin(\omega t + \delta)\,\hat{z},$$

каде што δ е почетната фаза на осцилирање. Електричното поле и магнетното поле на диполниот систем се пресметуваат по формулите

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\ddot{\vec{P}}(t_0) \times \hat{r}}{r}, \tag{1}$$

$$\vec{E} = c\big(\vec{B} \times \hat{r}\big), \tag{2}$$

каде што

$$t_0 = t - \frac{|\vec{r}|}{c}$$

е ретардациското време. За вкупниот диполен момент на системот имаме

$$\vec{P} = e\overrightarrow{r_1} - e\overrightarrow{r_2} = ea[\cos\omega t\,\hat{x} + \sin\omega t\,\hat{y} - \sin(\omega t + \delta)\hat{z}],$$

а оттука

$$\ddot{\vec{P}} = -ae\omega^2[\cos\omega t\,\hat{x} + \sin\omega t\,\hat{y} - \sin(\omega t + \delta)\hat{z}]. \tag{3}$$

Интензитетот на зрачење е бројно еднаков на модулот на векторот на Поинтинг:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\big(\vec{E} \times \vec{B}\big),$$

односно

$$I = \big|\vec{S}\big| = \frac{1}{\mu_0}\big|\vec{E} \times \vec{B}\big| = \frac{1}{\mu_0}\big|c\big(\vec{B} \times \hat{r}\big) \times \vec{B}\big| = \frac{1}{\mu_0}|B^2\hat{r}| = \frac{cB^2}{\mu_0}.$$

Со замена на изразот за $\vec{B}$ од равенката (1), се добива

$$I = \frac{c}{\mu_0}\frac{{\mu_0}^2}{16\pi^2c^2r^2}\left|\ddot{\vec{P}}(t_0) \times \hat{r}\right|^2. \tag{4}$$

Бидејќи

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z},$$

со земање предвид на релацијата (3), за векторскиот производ под апсолутната вредност во релацијата (4) имаме:

$$\ddot{\vec{P}}(t_0) \times \hat{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -ae\omega^2 \cos\omega t_0 & -ae\omega^2 \sin\omega t_0 & ae\omega^2 \sin(\omega t_0 + \delta) \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{vmatrix}$$
$$= -ae\omega^2[\sin\omega t_0 \cos\theta + \sin\theta\sin\varphi\sin(\omega t_0 + \delta)]\hat{x}$$
$$+ ae\omega^2[\cos\omega t_0 \cos\theta + \sin\theta\cos\varphi\sin(\omega t_0 + \delta)]\hat{y}$$
$$+ ae\omega^2[\cos\omega t_0 \sin\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi\sin(\omega t_0 + \delta)]\hat{z}.$$

Со замена во изразот (4) и по кратко средување, за интензитетот се добива:

$$I(t) = \frac{e^2a^2\omega^4\mu_0}{16\pi^2cr^2}[\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2(\omega t_0 + \delta)\,\gamma$$
$$+ 2\sin\theta\cos\theta\sin(\omega t_0 + \delta)\cos(\omega t_0 - \varphi)$$
$$+ \sin^2\theta\sin^2\varphi\cos^2\omega t_0 + \sin^2\theta\cos^2\varphi\sin^2\omega t_0$$
$$- 2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\omega t_0\cos\omega t_0].$$

Средната вредност на интензитетот по еден период на осцилации $T = 2\pi/\omega$ се одредува со користење на формулата:

$$\bar{I} = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt,$$

од каде што, по одредени пресметки конечно се добива:

$$\bar{I} = \frac{e^2a^2\omega^4\mu_0}{16\pi^2r^2c}[1 + \sin\theta\cos\theta\sin(\varphi + \delta)].$$

■

Задача 38.

За опишување на процесите во коишто учествува јадрото на атомот, во нуклеарната физика се користи јадрениот модел на течна капка. Моделот е формулиран во 1929 година од Гамов, а во 1938та година Мајтнер и Фриш го искористиле за да ја објаснат нуклеарната фисија. Во овој модел јадрото е претставено како електричен дипол во облик на рамномерно волуменски наелектризирана капка којашто пулсира, при што нејзината густина на полнеж е константна со времето, а формата и е променлива. Нека равенката што ја опишува површината на пулсирачката капка во даден момент од времето е:

$$R(\theta, t) = R_0(1 + \cos\theta \cos\omega t),$$

каде што R е радијалната сферна координата дадена како функција од поларниот агол θ и времето t, а ω е аголната фреквенција на пулсирање. Да се најде вкупната енергија што се зрачи во единица време од ваквиот модел на диполна капка усреднета по периодот на пулсирање на капката.

Решение 38.

Диполниот момент на произволна континуирана распределба на полнеж се пресметува по формулата

$$\vec{P} = \int \vec{r}\, dq = \int_{\tau} \rho \vec{r}\, d\tau, \qquad (1)$$

каде што ρ е волуменската густина на распределбата на полнежот, којашто во нашиот случај е константа, а τ е волуменот на интеграција, којшто во случајот е волуменот на пулсирачката капка. Радиус-векторот $\vec{r}$ запишан преку сферните координати во Декартова репрезентација е:

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + r\cos\theta\,\hat{z},$$

додека елементарниот волумен $d\tau$ е:

$$d\tau = r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi.$$

Со смена на последните две релации во интегралот (1), и земање предвид на границите на интеграција коишто во случајот го опишуваат волуменот на капката во даден момент t, за диполниот момент добиваме:

$$\vec{P}(t) = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R(\theta,t)} (\sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}) r^3 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi,$$

каде што

$$R(\theta, t) = R_0(1 + \cos\theta \cos\omega t).$$

По интеграцијата, за диполниот момент се добива:

$$\vec{P}(t) = 4\pi\rho R_0^4 \left(\frac{1}{3}\cos\omega t + \frac{1}{5}\cos^3\omega t\right)\hat{z}. \tag{2}$$

Моќноста на зрачењето се пресметува по Ларморовата формула:

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{6\pi c}\left|\ddot{\vec{P}}(t_0)\right|^2, \tag{3}$$

каде што

$$t_0 = t - \frac{|\vec{r}|}{c}$$

е ретардациското време. Вториот извод на диполниот момент по времето го пресметуваме од формулата (2):

$$\ddot{\vec{P}}(t) = -4\pi\rho R_0^4\omega^2\left(\frac{9}{5}\cos^3\omega t - \frac{13}{15}\cos\omega t\right).$$

Со замена на последниот израз во равенката на Лармор (3), за моќноста се добива:

$$\mathcal{P}(t) = \frac{8\pi\rho^2 R_0^8\omega^4}{3\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{81}{25}\cos^6\omega t_0 - \frac{54}{75}\cos^4\omega t_0 + \frac{169}{225}\cos^2\omega t_0\right),$$

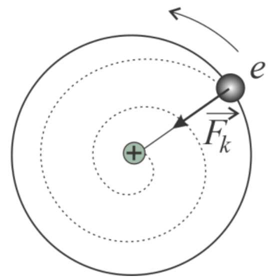
па следствено, за средната моќност на зрачењето од пулсирачката капка добиваме

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{29}{50}\frac{\pi\rho^2 R_0^8\omega^4}{\varepsilon_0 c^3}.$$

■

Задача 39.

Во Боровата теорија за водородниот атом, електронот којшто се наоѓа во основна состојба се движи по кружна траекторија со радиус $a_0 = 5 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$ околу јадрото на атомот. Притоа се претпоставува дека електронот и јадрото си заемнодејствуваат преку Кулоновата сила. Според резултатите на класичната електродинамика, полнеж којшто се движи забрзано емитува електромагнетно зрачење. Согласно на тоа, електронот којшто има центрипетално забрзување по својата траекторија треба да зрачи, преку зрачењето да ја губи својата енергија со текот на времето, и евентуално да падне во јадрото. Да се определи времето потребно за електронот преку ваквиот класичен процес на зрачење да го достигне јадрото.



Слика 24

Решение 39.

При движењето на електронот со полнеж $-e$ по кружната орбита околу јадрото, на него дејствува Кулоновата сила од позитивно наелектризираното јадро со полнеж $+e$

$$F_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}.$$

Кулоновата сила при ваквото кружно движење игра улога на центрипеталната сила, односно

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Оттука за брзината на електронот се добива:

$$v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr}} \approx 0.0075c,$$

каде што со c ја означивме брзината на светлината во вакуум. Движењето на електронот околу јадрото е причина за постоење на диполен момент којшто се пресметува како

$$\vec{P} = -e\vec{r}. \tag{1}$$

Моќноста на зрачењето на диполот електрон-јадро се пресметува според класичната формула на Лармор:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{\mu_0}{6\pi c}\left|\ddot{\vec{P}}(t_0)\right|^2, \tag{2}$$

каде што

$$t_0 = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c},$$

е ретардациското време. Од равенката (1) за вториот извод по времето на диполниот момент добиваме:

$$\ddot{\vec{P}} = -e\ddot{\vec{r}} = -e\vec{a}$$

каде што $a = \frac{v^2}{r}$ е центрипеталното забрзување, кое што за дадена орбита е константно и не зависи од времето, па:

$$\left|\ddot{\vec{P}}(t_0)\right| = \frac{ev^2}{r}.$$

Со замена во релацијата (2), за моќноста на зрачењето на електронот којшто се движи по стационарна орбита со радиус *r* се добива:

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr^2}\right)^2. \tag{3}$$

Од друга страна, моќноста на зрачењето $\mathcal{P}$ е израчената енергија во единица време, и таа е бројно еднаква на негативната вредност на промената на вкупната енергија на електронот W_e во единица време долж неговата траекторија на движење, односно,

$$\mathcal{P} = -\frac{dW_e}{dt},$$

па со оглед на равенката (3) имаме:

$$\frac{dW_e}{dt} = -\frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr^2}\right)^2. \tag{4}$$

Вкупната енергија на електронот W_e е збир од неговата кинетичка енергија и потенцијална енергија:

$$W_e = W_k + W_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr^2}\right) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r},$$

односно

$$W_e = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r},$$

па

$$\frac{dW_e}{dt} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}. \tag{5}$$

Со замена на (5) во (4) се добива:

$$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr^2}\right)^2,$$

а оттука

$$dt = -3c\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 mc}{e^2}\right)^2 r^2 dr.$$

Последнава равенка ја интегрираме одбирајќи дека кога $t = 0$ електронот бил во основната орбитална состојба карактеризирана со $r = a_0$, а во време $t = T$ тој го достигнал јадрото на атомот $r = 0$,

$$\int_0^T dt = -3c\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 mc}{e^2}\right)^2 \int_{a_0}^0 r^2 dr,$$

па следствено, времето потребно за електронот преку процесот на зрачење да го достигне јадрото изнесува:

$$T = 3c\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 mc}{e^2}\right)^2 \frac{a_0^3}{3} \approx 1{,}3\ \mathrm{ps}.$$

Ваквиот резултат е во противречност со експериментите, бидејќи атомот на водородот е стабилен систем и електронот нема да падне во јадрото, односно електронот не зрачи додека се наоѓа во Боровата орбита иако неговото движење е забрзано. Затоа, за објаснување на појавите и процесите во микросветот, во почетокот на минатиот век била создадена квантната механика, а подоцна и квантната електродинамика.

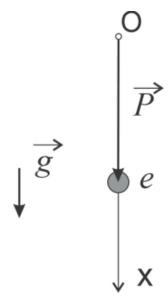
■

Задача 40.

Електрон е пуштен од мирување, од некоја висина над површината на Земјата и паѓа под дејство на силата на гравитацијата. Да се пресмета делот од потенцијалната енергија на електронот којшто ќе се оддаде на зрачење после првиот сантиметар од паѓањето.

Решение 40.

Претпоставуваме дека на електронот му дејствува само гравитациската сила $\vec{F} = m\vec{g}$ и дека неговото движење е нерелативистичко, па со користење на вториот Њутнов закон:



Слика 25

$$\sum F_i = m\vec{a}$$

во овој случај добиваме:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g},$$

од каде што со просто интегрирање се добива траекторијата на движење на електронот во векторски облик

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{g}t^2}{2},$$

при што зедовме дека во почетниот момент од времето електронот бил во координатниот почеток и неговата брзина била нула. Бидејќи електронот се движи рамномерно забрзано, тој ќе зрачи. Согласно, прво го пресметуваме диполниот момент на електронот при неговото движење:

$$\vec{P}(t) = -e\vec{r}(t) = -e\frac{\vec{g}t^2}{2},$$

и следува

$$\ddot{\vec{P}}(t) = -e\ddot{\vec{r}}(t) = -e\vec{g}. \tag{1}$$

Последната релација ја заменуваме во Ларморовата формула за моќноста на зрачната енергија од електронот:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{\mu_0}{6\pi c}\left|\ddot{\vec{P}}(t_0)\right|^2 \tag{2}$$

каде што

$$t_0 = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

е ретардациското време. Со замена на (1) во (2) за моќноста на зрачењето на електронот имаме

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu_0 e^2 g^2}{6\pi c}.$$

Ако последнава равенка се проинтегрира од моментот на пуштање на електронот $t = 0$ до $t = T$, се добива:

$$W(T) = \frac{\mu_0 e^2 g^2}{6\pi c}T. \tag{3}$$

Во рамките на овој временски интервал електронот којшто слободно паѓа поминал пат h од местото на пуштање,

$$h = \frac{gT^2}{2},$$

и оттука за времето T добиваме:

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Со смена во релацијата (4) за вкупната иззрачена енергија од електронот добиваме:

$$W(T) = \frac{\mu_0 e^2 g^2}{6\pi c}\sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (4)$$

За истиот временски интервал, промената на гравитациската потенцијална енергија на електронот изнесува:

$$\Delta U_g = -mgh,$$

па за делот од потенцијалната енергија на електронот којшто ќе се оддаде на зрачење после првиот сантиметар од паѓањето добиваме:

$$\eta = \left|\frac{W_T}{\Delta U_{pot}}\right| = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}\sqrt{\frac{2g}{h}} \approx 2{,}76 \cdot 10^{-22}.$$

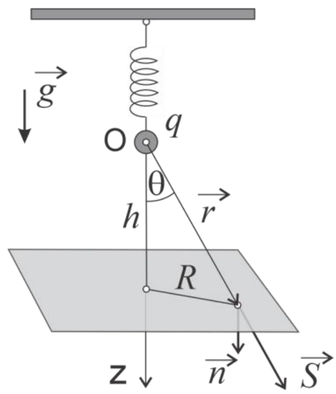
■

Задача 41.

Честичка со маса m и полнеж q којашто е закачена на крајот од вертикално закачена пружина со константа на еластичност κ, се повлекува на растојание d од рамнотежната положба и се пушта да осцилира. Движењето се одвива во поле на гравитациска сила на површината на Земјата. Да се најде интензитетот на зрачењето што поминува низ хоризонтална рамна подлога поставена под пружината во секоја точка од подлогата, како функција од радијалното растојание R со почеток во точката на подлогата која што се наоѓа вертикално под пружината. За која вредност на R овој интензитет ќе има максимална вредност?

Решение 41.

Вертикалната пружина одбираме да лежи на *z*-оската, чијшто координатен почеток се совпаѓа со рамнотежната положба на пружината.



Слика 26

Според тоа, лесно се покажува дека честичката ќе врши врши хармониски осцилации според законот:

$$z(t) = d\cos\omega t,$$

каде што ω е аголната фреквенцијата на осцилирање зададена со формулата

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Диполниот момент на ваквиот осцилаторен систем изнесува:

$$\vec{P}(t) = qz(t)\,\hat{z} = qd\cos\omega t\,\hat{z}.$$

Електричното поле и магнетното поле на диполот се пресметуваат со релациите:

$$\vec{E}(r,\theta,t) = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{P}}(t_0)}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\hat{\theta},$$

$$\vec{B}(r,\theta,t) = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{P}}(t_0)}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\hat{\varphi},$$

каде што θ е поларниот агол во однос на позитивната *z*-оска, а $t_0 = t - \frac{r}{c}$ е ретардациското време. Според тоа, векторот на Поинтинг е:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \frac{\mu_0\left|\ddot{\vec{P}}(t_0)\right|^2}{16\pi^2 c^2}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)\hat{\theta}\times\hat{\varphi} = \frac{\mu_0\left|\ddot{\vec{P}}(t_0)\right|^2}{16\pi^2 c^2}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)\hat{r},$$

а неговата средна вредност во рамките на еден период на осцилирање $T = 2\pi/\omega$ изнесува

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4}{32\pi^2 c}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)\hat{r}.$$

Интензитетот на зрачењето во произволна точка од подлогата, зададена со равенката $z = \hbar$, е бројно еднаков на модулот од проекцијата на Поинтинговиот вектор $\langle\vec{S}\rangle$ во насока на нормалниот единечен вектор $\vec{n} = \hat{z}$ од површината во точката каде што го бараме интензитетот, односно:

$$I = \frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4}{32\pi^2 c}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)\cos\theta. \tag{1}$$

Од сликата се очигледни релациите:

$$\sin\theta = \frac{R}{r},$$

$$\cos\theta = \frac{\hbar}{r},$$

па со замена во изразот (1), за интензитетот се добива:

$$I = \frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4}{32\pi^2 c}\frac{R^2\hbar}{\left(R^2+\hbar^2\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Условот за екстремна вредност на функцијата $I(R)$ следува од формулата:

$$\left.\frac{dI}{dR}\right|_{R=R_0} = 0,$$

откаде што добиваме дека:

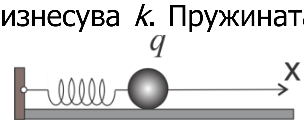
$$R_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\hbar}$$

е вредноста за *R* при којашто интензитетот на зрачењето е максимално.

■

Задача 42.

Топче со маса m и полнеж q се наоѓа на едниот крај од еластичната пружина чијшто коефициент на еластичност изнесува k. Пружината е поставена на хоризонтална подлога и е зацврстена за вториот крај. Топчето се изместува од рамнотежната положба, при што започнува да осцилира и да зрачи електромагнетна енергија. Да се покаже дека при мали загуби на енергијата на осцилаторот неговото движење може да се опише со помош на дополнителна сила во вториот Њутнов закон што е правопропорционална со третиот извод по време од елонгацијата на пружината. Да се разгледа нерелативистички случај на осцилации.



Слика 27

Решение 42.

Доколку топчето не би зрачело при осцилациите на пружината, тогаш на него би дејствувала само еластичната сила пропорционална со елонгацијата

$$\overrightarrow{F_{el}} = -kx\hat{x},$$

па неговата диференцијална равенка на движење согласно Вториот Њутнов закон е:

$$m\vec{a} = -kx(t)\hat{x},$$

односно

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x, \tag{1}$$

каде што

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

е сопствената фреквенција на осцилациите на пружината. Општото решение на оваа диференцијална равенка е:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{2}$$

каде што x_0 е амплитудата на осцилациите, а φ е почетната фаза. Диференцијалната равенка на движење (1) може да се запише на поинаков начин со користење на трансформацијата на вториот извод по времето од променливата x:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\dot{x^2}\right),$$

при што добиваме:

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dx}\left(\dot{x^2}\right) + m\omega_0^2 x = 0,$$

од каде што следува првиот интеграл на движење:

$$\frac{m\dot{x^2}}{2} + \frac{mw_0^2 x^2}{2} = W_{\text{мех}}, \tag{3}$$

што всушност е вкупната механичка енергија $W_{\text{мех}}$ на осцилаторот. Оваа механичка енергија би била константа доколку топчето не би зрачело електромагнетна енергија, но тоа не е така бидејќи топчето е наелектризирано и се движи забрзано.

Од друга страна, диполниот момент на ваквата осцилаторна пружина е:

$$\vec{P}(t) = -qx(t)\hat{x} = -qx_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)\,\hat{x},$$

од каде што

$$\ddot{\vec{P}}(t) = q x_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)\, \hat{x}.$$

Со оглед на последната релација, моќноста на зрачењето на осцилаторот следува од Ларморовата формула:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu_0}{6\pi c}\left|\ddot{\vec{P}}(t_0)\right|^2 = \frac{\mu_0 q {x_0}^2 {\omega_0}^4}{6\pi c}\sin^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Доколку усредниме по периодот на осцилирање

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

за вкупната израчена енергија во единица време усреднета по периодот на осцилации добиваме:

$$\langle\frac{dW}{dt}\rangle = \frac{\mu_0 q {x_0}^2 {\omega_0}^4}{12\pi c}. \tag{4}$$

Последната релација за усреднетата моќност може да се запише поинаку. Прво, ја пресметуваме вредноста на производот на првиот и третиот извод по времето од елонгацијата на пружината $\dot{x}\dddot{x}$ усреднета по периодот на осцилации

$$\langle\dot{x}\dddot{x}\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}\dddot{x}\, dt. \tag{5}$$

Согласно равенката (2), имаме

$$\dot{x} = \omega_0 x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

$$\dddot{x} = -\omega_0^3 x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

па со замена во интегралот (5) добиваме:

$$\langle\dot{x}\dddot{x}\rangle_T = \langle -{x_0}^2 {\omega_0}^4 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\rangle_T = -\frac{{x_0}^2 {\omega_0}^4}{2}.$$

Со оглед на последната релација, средната вредност на моќноста на зрачењето (4) може да се запише:

$$\langle\frac{dW}{dt}\rangle = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\langle\dot{x}\dddot{x}\rangle_T. \tag{6}$$

Понатаму, од релацијата (3) за временската промена на вкупната механичка енергија на осцилаторот добиваме:

$$\frac{dW_{\text{мех}}}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + m\omega_0^2 x\dot{x}. \tag{7}$$

Промената на механичката енергија на осцилаторот во единица време е бројно еднаква на моќноста на зрачењето емитувано од наелектризираното топче, односно:

$$-\frac{dW_{\text{мех}}}{dt} = \frac{dW}{dt}. \tag{8}$$

Од условот на задачата, доколку претпоставиме дека загубите на енергијата на осцилаторот поради зрачењето се многу мали со текот на времето (т.н. адијабатска апроксимација), тогаш со користење на релацијата (6) може да ја искористиме апроксимацијата $\langle\dot{x}\dddot{x}\rangle \approx \dot{x}\dddot{x}$, односно:

$$\langle\frac{dW}{dt}\rangle \approx \frac{dW}{dt} = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\dot{x}\dddot{x},$$

па со замена на последната релација и релацијата (7) во равенката (8) за балансот на енергијата, добиваме:

$$m\dot{x}\ddot{x} + m\omega_0^2 x\dot{x} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\dot{x}\dddot{x},$$

односно, по кратењето со $\dot{x}$ од двете страни на равенката,

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\dddot{x}.$$

Добиениот израз одговара на Вториот Њутнов закон (1) кога ќе се земе предвид ефектот на зрачењето на осцилаторот во адијабатска апроксимација. Притоа се појавува дополнителна сила пропорционална со првиот извод на забрзувањето a на наелектризираната честичка по времето

$$F_R = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\dddot{x} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\frac{da}{dt},$$

која се нарекува сила на радијациона реакција, позната и како сила на Абрахам-Лоренц.

■

Задача 43.

Топче со занемарливи димензии е наелектризирано со полнеж q и е поставено во координатниот почеток на *x*-оската. Во почетниот момент од времето топчето мирувало и имало почетно забрзување a_0. Да се запише равенката на движењето на топчето.

Решение 43.

Бидејќи топчето е наелектризирано и се движи забрзано, на него ќе дејствува дополнителната сила на радијациска реакција F_R дадена преку равенката на Абрахам-Лоренц:

$$F_R = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\dddot{x} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\frac{da}{dt}.$$

Потоа, вториот Њутнов закон за топчето го запишуваме како:

$$F_R = ma,$$

односно

$$\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\frac{da}{dt} = ma,$$

од каде што добиваме:

$$\frac{da}{a} = \frac{6\pi mc}{\mu_0 q^2}dt.$$

Со интегрирање на последната релација имаме:

$$a(t) = Ce^{\frac{6\pi mc}{\mu_0 q^2}t}.$$

Во почетниот момент од времето, $a(t=0) = a_0$, па за константата на интеграција добиваме $C = a_0$, односно

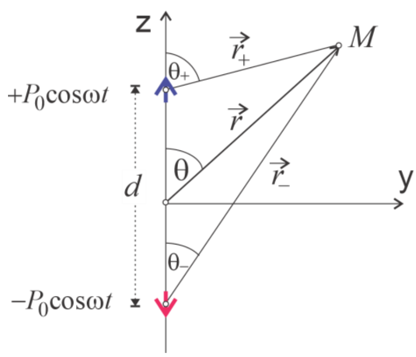
$$a(t) = a_0 e^{\frac{6\pi mc}{\mu_0 q^2}t}.$$

Последниот резултат укажува на тоа дека забрзувањето на честичката со текот на времето експоненцијално се зголемува кон бескрајност, иако честичката губи енергија преку зрачењето. Овој парадокс е присутен и кога се користи релативистичката верзија на Ларморовата формула (односно формулата на Ленар) за да се изведе релативистичката сила на радијациската реакција, и е еден од проблемите со кој се соочува класичната електродинамика при опишување на движењето на точкасти полнежи.

■

Задача 44.

Да се разгледа зрачењето од електричен квадрупол којшто се состои од два спротивноориентирани временски променливи електрични диполи, поставени на растојание *d* еден од друг како што е прикажано на сликата. Да се пресметаат во прв ред на апроксимација по *d*:



Слика 28

а) скаларниот и векторскиот потенцијал на електромагнетното поле на квадруполот;
б) електричното и магнетното создадени од квадруполот;
в) векторот на Поинтинг и моќноста на зрачењето.

Решение 44.

а) Скаларните потенцијали V_+ и V_- на електромагнетните полиња создадени од секој од диполите се пресметуваат по формулата:

$$V_\pm(r_\pm, \theta_\pm) = \mp \frac{P_0 \omega}{4\pi c \varepsilon_0} \left(\frac{\cos\theta_\pm}{r_\pm} \right) \sin\left[\omega \left(t - \frac{r_\pm}{c} \right) \right]. \qquad (1)$$

Според принципот на суперпозиција, сумарниот скаларен потенцијал од двата диполи е скаларниот потенцијал на електричниот квадрупол којшто тие го формираат, односно

$$V = V_+ + V_-.$$

Од цртежот со користење на косинусната теорема е очигледна следната релација за растојанијата r_+ и r_-:

$$r_\pm = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \mp 2r\frac{d}{2}\cos\theta} \cong r\left(1 \mp \frac{d}{2r}\cos\theta\right),$$

при што ја искористивме апроксимацијата $d \ll r$. Следствено

$$\frac{1}{r_\pm} = \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right). \qquad (2)$$

Од сликата уште добиваме:

$$r\cos\theta = \frac{d}{2} + r_+\cos\theta_+,$$
$$r_-\cos\theta_- = \frac{d}{2} + r\cos\theta,$$

од каде што се добива:

$$\cos\theta_\pm = \frac{r\cos\theta \mp \frac{d}{2}}{r_\pm}.$$

Со оглед на апроксимацијата (2), последната релација се запишува:

$$\cos\theta_\pm \cong \left(r\cos\theta \mp \frac{d}{2}\right)\frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right) \cong \cos\theta \mp \frac{d}{2r}\sin^2\theta. \qquad (3)$$

Тогаш,

$$\sin\left[\omega\left(t-\frac{r_\pm}{c}\right)\right]\cong\sin\left[\omega t-\frac{\omega r}{c}\left(1\mp\frac{d}{2r}\cos\theta\right)\right]$$
$$\cong\sin(\omega t_0)-\frac{\omega d}{2c}\cos\theta\cos\omega t_0, \qquad (4)$$

каде што

$$t_0=t-\frac{r}{c}.$$

Со користење на овие апроксимации, скаларниот потенцијал на електричниот квадрупол формиран од диполите може да се апроксимира

$$V=V_+ + V_- \cong -\frac{P_0\omega^2 d}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\left[\cos\theta\cos\omega t_0+\frac{c}{\omega r}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin(\omega t_0)\right],$$

којшто во апроксимација за радијациска зона, кога $r\gg\frac{\omega}{c}$, се сведува на:

$$V(r,\theta,t)\cong-\frac{P_0\omega^2 d}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\cos^2\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]. \qquad (5)$$

Од друга страна, векторскиот потенцијал формиран од секој од диполите изнесува:

$$\overrightarrow{A_\pm}=\mp\frac{\mu_0\omega P_0}{4\pi r_\pm}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r_\pm}{c}\right)\right]\hat{z}.$$

Слично како и во претходниот случај, со користење на истите апроксимации, за векторскиот потенцијал на квадруполот во радијациската зона се добива:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\overrightarrow{A_+}+\overrightarrow{A_-}\cong-\frac{\mu_0\omega^2 P_0 d}{4\pi r c}\cos\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\hat{z}. \qquad (6)$$

б). По елементарни пресметки, за електричното поле на квадруполот се добива:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cong\frac{\mu_0\omega^3 P_0 d}{4\pi r c}\sin\theta\cos\theta\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\hat{\theta},$$

додека за магнетното поле добиваме:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \cong \frac{\mu_0 \omega^3 P_0 d}{4\pi r c^2} \sin\theta \cos\theta \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\varphi}.$$

в) Векторот на Поинтинг е:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0 \omega^3 P_0 d}{4\pi r c} \sin\theta \cos\theta \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right)^2 \hat{r},$$

интензитетот на зрачење е модулот на Поинтинговиот вектор усреднет по периодот $T = 2\pi/\omega$, односно

$$I = \left| \langle \vec{S} \rangle_T \right| = \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 \omega^3 P_0 d}{4\pi r c} \sin\theta \cos\theta \right)^2,$$

а моќноста на зрачењето е еднаква на:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \oint \langle \vec{S} \rangle_T d\vec{a} = \frac{\mu_0 \omega^6 P_0^2 d^2}{60\pi c^3}.$$

■

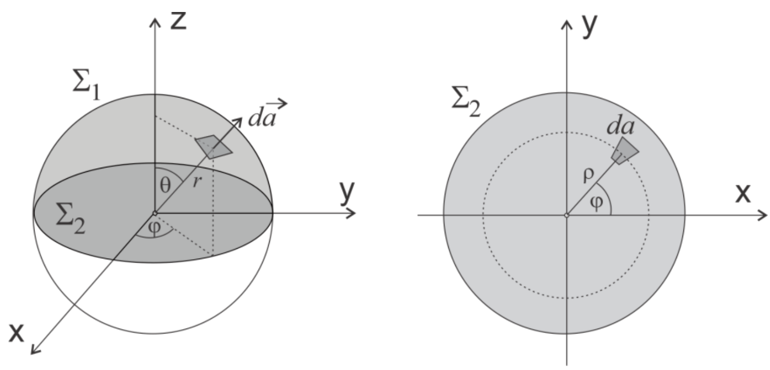
5.

Електромагнетни потенцијали. Максвелов тензор на напон

Задача 45.

Топка со радиус R е рамномерно волуменски наелектризирана со полнеж Q. Со користење на Максвеловиот тензор на напон, да се пресмета вкупната електромагнетна сила што дејствува врз северната хемисфера на топката.

Решение 45.



Слика 29

Вкупната електромагнетна сила што дејствува врз некоја распределба на полнежи во волумен τ од просторот ограничен со површина Σ се пресметува според формулата:

$$\vec{F} = \oint_{\Sigma} \overleftrightarrow{T}\, d\vec{a} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\tau} \vec{S}\, d\tau,$$

каде што $\overleftrightarrow{T}$ е Максвеловиот тензор на напон, а

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

е векторот на Поинтинг, каде $\vec{E}$ и $\vec{B}$ се векторите на електричното поле и магнетното поле соодветно. Во нашиот случај се работи за стационарен полнеж којшто формира само електрично поле во просторот коешто не зависи од времето, па силата се пресметува како:

$$\vec{F} = \oint_{\Sigma} \overleftrightarrow{T} \, d\vec{a}.$$

Тука Σ е вкупната затворена површина која ја ограничува северната полутопка.

Површинскиот интеграл го делиме на два дела, првиот по сферната површина Σ_1 на горната полутопка $(r = R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, а вториот дел по дискот Σ_2 со радиус *R* којшто е формиран како пресек на топката со *xy*-рамнината $(0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$. За да го пресметаме Максвеловиот тензор по сферната површина Σ_1 на горната полутопка, најпрвин го пресметуваме електричното поле во тие точки од просторот со користење на Гаусовата теорема:

$$\oint \vec{E} \, d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Бидејќи електричното поле на сферната површина е константно по модул и радијално насочено, добиваме:

$$E 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

па

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \hat{r},$$

каде орт векторот $\hat{r}$ преку сферните координати θ и φ во Декартова репрезентација е зададен со релацијата:

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\varphi \, \hat{x} + \sin\theta \sin\varphi \, \hat{y} + \cos\theta \, \hat{z},$$

односно

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta\,\hat{z}.$$

Бидејќи постојат само стационарни полнежи, магнетното поле отсуствува. За компонентите на скаларниот производ на Максвеловиот тензор на напон и векторот на елементарната плоштина важи:

$$(\overleftrightarrow{T}d\vec{a})_j = T_{jx}da_x + T_{jy}da_y + T_{jz}da_z,$$

па следствено, за компонентите на силата имаме:

$$F_j = \oint T_{jx}da_x + \oint T_{jy}da_y + \oint T_{jz}da_z.$$

Бидејќи за сферната површина ќе важи:

$$d\vec{a} = da\hat{r} = R^2\sin\theta\, d\theta d\varphi\,\hat{r},$$

тогаш за Декартовите компоненти на елементарната површина добиваме:

$$da_x = R^2\sin^2\theta\cos\varphi\, d\theta d\varphi,$$

$$da_y = R^2\sin^2\theta\sin\varphi\, d\theta d\varphi,$$

$$da_z = R^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta d\varphi.$$

За силата врз сферната површина Σ_1 на горната полутопка сега имаме:

$$\overrightarrow{F_1} = \hat{x}\int(T_{xx}da_x + T_{xy}da_y + T_{xz}da_z) + \hat{y}\int(T_{yx}da_x + T_{yy}da_y + T_{yz}da_z) + \\ + \hat{z}\int(T_{zx}da_x + T_{zy}da_y + T_{zz}da_z). \qquad (1)$$

Останува да се пресметаат елементите на Максвеловиот тензор на напон на површината Σ_1:

$$T_{xx} = \varepsilon_0 \left(E_x^2 - \frac{1}{2}E^2 \right) = \varepsilon_0 \left(E_x^2 - \frac{1}{2}\left(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right) \right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2\right) =$$
$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 (\sin^2\theta\cos^2\varphi - \sin^2\theta\sin^2\varphi - \cos^2\theta),$$

$$T_{yy} = \varepsilon_0 \left(E_y^2 - \frac{1}{2}E^2 \right) = \varepsilon_0 \left(E_y^2 - \frac{1}{2}\left(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right) \right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_y^2 - E_x^2 - E_z^2\right) =$$
$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 (\sin^2\theta\sin^2\varphi - \sin^2\theta\cos^2\varphi - \cos^2\theta),$$

$$T_{zz} = \varepsilon_0 \left(E_z^2 - \frac{1}{2}E^2 \right) = \varepsilon_0 \left(E_z^2 - \frac{1}{2}\left(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right) \right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2\right) =$$
$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\varphi - \sin^2\theta\sin^2\varphi) =$$
$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta),$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \varepsilon_0 E_x E_y = \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi,$$

$$T_{xz} = T_{zx} = \varepsilon_0 E_x E_z = \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \sin\theta\cos\theta\cos\varphi,$$

$$T_{yz} = T_{zy} = \varepsilon_0 E_y E_z = \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \sin\theta\cos\theta\sin\varphi.$$

Понатаму, ги пресметуваме интегралите во изразот (1) за силата $\overrightarrow{F_1}$:

$$\int T_{xx} da_x = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} R^2 \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 [(\sin^2\theta\cos^2\varphi - \sin^2\theta\sin^2\varphi$$
$$- \cos^2\theta)(\sin^2\theta\cos\varphi)]\, d\theta d\varphi =$$

$$= R^2 \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^3\varphi\, d\theta d\varphi \right.$$

$$- \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\theta d\varphi -$$

$$\left. - \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^2\theta\cos\varphi\, d\theta d\varphi \right] = 0,$$

$$\int T_{xy} da_y = R^2\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\theta d\varphi = 0,$$

$$\int T_{xz} da_z = R^2\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^2\theta\cos\varphi\, d\theta d\varphi = 0,$$

$$\int T_{yx} da_x = R^2\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^2\theta\sin\varphi\, d\theta d\varphi = 0,$$

$$\int T_{yy} da_y = R^2 \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\sin^3\varphi\, d\theta d\varphi \right.$$

$$- \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\sin\varphi\cos^2\varphi\, d\theta d\varphi -$$

$$\left. - \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^2\theta\sin\varphi\, d\theta d\varphi \right] = 0,$$

$$\int T_{yz} da_z = R^2\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^2\theta\sin\varphi\, d\theta d\varphi = 0,$$

$$\int T_{zx} da_x = R^2 \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^2\varphi \cos\theta \, d\theta d\varphi =$$

$$= R^2 \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos\theta \, d\theta = R^2 \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \frac{\pi}{4},$$

$$\int T_{zy} da_y = R^2 \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \sin^2\varphi \cos\theta \, d\theta d\varphi =$$

$$= R^2 \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos\theta \, d\theta = R^2 \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \frac{\pi}{4},$$

$$\int T_{zz} da_z = R^2 \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta \cos^3\theta - \sin^3\theta \cos\theta) d\theta d\varphi = 0.$$

Следствено, за силата $\overrightarrow{F_1}$ се добива

$$\overrightarrow{F_1} = 2R^2 \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \frac{\pi}{4} \, \hat{z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{8R^2} \, \hat{z}.$$

За силата $\overrightarrow{F_2}$ по дискот Σ_2 со радиус R којшто е формиран како пресек на топката со *xy*-рамнината аналогно запишуваме:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_2} = \int \overleftrightarrow{T} d\vec{a} = & \int (T_{xx} da_x + T_{xy} da_y + T_{xz} da_z) \\ & + \int (T_{yx} da_x + T_{yy} da_y + T_{yz} da_z) \\ & + \int (T_{zx} da_x + T_{zy} da_y + T_{zz} da_z). \end{aligned} \quad (2)$$

Затоа што топката е рамномерно наелектризирана по волуменот, волуменската густина на полнеж η има константна вредност и изнесува:

$$\eta = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Со користење на Гаусовата теорема, земајќи за Гаусова површина сфера со радиус $\rho < R$, добиваме

$$\oint \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \eta d\tau,$$

следува

$$4\pi\rho^2 E = \frac{\eta}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\rho^3,$$

односно

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\rho\hat{\rho},$$

каде што

$$\hat{\rho} = \cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}.$$

Следствено, за компонентите на векторот на електричното поле во точките од површината Σ_2 запишуваме:

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\rho\cos\varphi,$$

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\rho\sin\varphi,$$

$$E_z = 0.$$

Слично како и при пресметувањето на компонентите за силата $\overrightarrow{F_1}$, и во овој случај се добива дека резултантната сила $\overrightarrow{F_2}$ ќе поседува само компонента по z-оската, односно

$$\overrightarrow{F_2} = \hat{z}\int (T_{zx}da_x + T_{zy}da_y + T_{zz}da_z). \tag{3}$$

Доколку ги пресметаме компонентите на Максвеловиот тензор на напон под интегралот, добиваме:

$$T_{xz} = T_{zx} = \varepsilon_0 E_x E_z = 0,$$

$$T_{yz} = T_{zy} = \varepsilon_0 E_y E_z = 0,$$

$$T_{zz} = \varepsilon_0 \left(E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) = \varepsilon_0 \left(-\frac{1}{2} \left(E_x^2 + E_y^2 \right) \right) = -\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 R^6} \rho^2,$$

а за компонентите на векторот на елементарната плоштина имаме:

$$d\vec{a} = -\rho d\rho d\varphi \hat{z},$$

односно

$$da_x = 0,$$

$$da_y = 0,$$

$$da_z = -\rho d\rho d\varphi,$$

при што зедовме предвид дека интегрирањето се врши во поларни координати по дискот Σ_2. Со смена во релацијата (3) за силата $\overrightarrow{F_2}$ се добива

$$\overrightarrow{F_2} = \hat{z} \int T_{zz} da_z = \hat{z} \ \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 R^6} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^3 d\rho d\varphi = \frac{Q^2}{16\pi \varepsilon_0 R^2} \ \hat{z}.$$

Конечно, за вкупната сила $\vec{F}$ која што дејствува врз северната полутопка се добива

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{8R^2} \hat{z} + \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R^2} \hat{z} = \frac{3Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2} \hat{z}.$$

■

Задача 46.

Низ бесконечно долга спроводна жица тече електрична струја, чијашто временска зависност е зададена на следниот начин:

$$\text{а).}\ I(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ I_0, & t > 0 \end{cases};$$

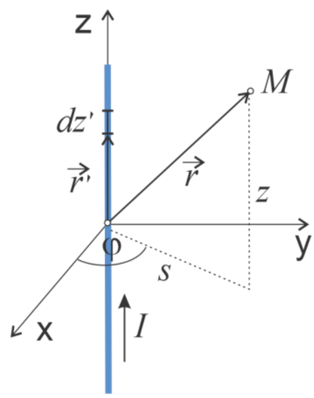
$$\text{б).}\ I(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ kt, & t > 0 \end{cases};$$

$$\text{в).}\ I(t) = q_0 \delta(t),$$

каде што I_0, k и q_0 се позитивни константи, а $\delta(t)$ е Дираковата делта функција. Да се најдат електричното и магнетното поле околу жицата во сите три случаи.

Решение 46.

Временската зависност на скаларниот и векторскиот потенцијал $\varphi(\vec{r},t)$ и $\vec{A}(\vec{r},t)$ на електромагнетното поле во некоја точка од просторот определена со радиус-векторот $\vec{r}$ формирано од произволна континуирана волуменска распределба на полнежи и струи, е зададена со ретардациските формули



Слика 30

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_R)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\tau', \tag{1}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_R)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\tau', \tag{2}$$

каде што ρ е волуменската густина на полнеж, $\vec{j}$ е волуменската густина на струја, а

$$t_R = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} \tag{3}$$

е ретардациското време. Електричното и магнетното поле тогаш се добиваат од електромагнетните потенцијали преку следниве релации:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{5}$$

Бидејќи спроводникот не е наелектризиран (тој е електронеутрален), $\rho = 0$, од што следува дека скаларниот потенцијал е нула, односно

$$\varphi(\vec{r}, t) = 0.$$

Во задачата е избран линиски спроводник, којшто го поставуваме по *z*-оската на Декартовиот координатен систем ($\vec{r}\,' = z'\hat{z}$), па за густината на струјата може да запишеме:

$$\vec{j}(\vec{r}\,', t_R) = \vec{j}(x', y', z', t_R) = I(z', t_R)\delta(x')\delta(y')\hat{z}.$$

Тогаш, релацијата (2) за векторскиот ретардациски потенцијал се сведува на:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \hat{z}}{4\pi} \int \frac{I(z', t_R)}{|\vec{r} - z'\hat{z}|} dz'.$$

Бидејќи во цилиндрични координати (s, φ, z) имаме:

$$\vec{r} = s\hat{s} + z\hat{z} = s\cos\varphi\,\hat{x} + s\sin\varphi\,\hat{y} + z\hat{z},$$

последната равенка се сведува на:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \hat{z}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(z', t_R)}{\sqrt{s^2 + (z - z')^2}} dz'. \tag{6}$$

Затоа што се работи за бесконечна жица, поради симетријата на проблемот потенцијалите и полињата во дадена точка *M* од просторот не треба да зависат од координатата *z*. За да го упростиме решавањето на интегралите во ретардациониот потенцијал $\vec{A}(\vec{r},t)$, во понатамошните пресметки ќе земеме $z = 0$, при што конечните резултати остануваат исти.

а) Во овој случај

$$I(z',t_R) = I(t_R) = \begin{cases} 0, & t_R \leq 0 \\ I_0, & t_R > 0 \end{cases}. \tag{7}$$

Да ги трансформираме неравенствата во овој услов со користење на релацијата (3). Тогаш, неравенството $t_R > 0$ е еквивалентно на:

$$t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c} = t - \frac{\sqrt{s^2 + z'^2}}{c} > 0,$$

односно

$$ct > \sqrt{s^2 + z'^2},$$

од каде што се добива:

$$|z'| < \sqrt{c^2t^2 - s^2}. \tag{8}$$

На ист начин, за неравенството $t_R \leq 0$ добиваме дека тоа е еквивалентно на:

$$|z'| \geq \sqrt{c^2t^2 - s^2}. \tag{9}$$

Следствено, изразот за временската зависност на струјата (7) се препишува во обликот:

$$I(t_R) = \begin{cases} 0, & |z'| \geq \sqrt{c^2t^2 - s^2} \\ I_0, & -\sqrt{c^2t^2 - s^2} < z' < \sqrt{c^2t^2 - s^2} \end{cases}$$

којшто е погоден за директно решавање на интегралот во равенката (6):

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0\hat{z}}{4\pi}\int_{-\infty}^{-\sqrt{c^2t^2-s^2}}0\cdot dz'+\int_{-\sqrt{c^2t^2-s^2}}^{\sqrt{c^2t^2-s^2}}\frac{I_0}{\sqrt{s^2+z'^2}}dz'+\int_{\sqrt{c^2t^2-s^2}}^{\infty}0\cdot dz'$$
$$=\frac{\mu_0\hat{z}}{4\pi}I_0\int_{-\sqrt{c^2t^2-s^2}}^{\sqrt{c^2t^2-s^2}}\frac{1}{\sqrt{s^2+z'^2}}dz',$$

односно

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\ln\left(\frac{ct+\sqrt{c^2t^2-s^2}}{s}\right)\hat{z}.$$

Со користење на релациите (4) и (5) следуваат формулите за електричното поле и магнетното поле околу спроводникот:

$$\vec{E}(s,t)=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\ln\left(\frac{ct+\sqrt{c^2t^2-s^2}}{s}\right)\hat{z}\right]=-\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi\sqrt{c^2t^2-S^2}}\hat{z},$$

$$\vec{B}(s,t)=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\vec{\nabla}\times\left[\ln\left(\frac{ct+\sqrt{c^2t^2-s^2}}{s}\right)\hat{z}\right]=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi S}\frac{ct}{\sqrt{c^2t^2-s^2}}\hat{\varphi}.$$

б) Во овој случај струјата е зададена како:

$$I(z',t_R)=I(t_R)=\begin{cases}0, & t_R\le 0\\ kt_R, & t_R>0\end{cases}. \qquad (7)$$

Ако постапиме на ист начин како и под а), го добиваме трансформираниот израз за струјата:

$$I(t_R)=\begin{cases}0, & |z'|\ge\sqrt{c^2t^2-s^2}\\ k\left(t-\dfrac{\sqrt{s^2+z'^2}}{c}\right), & -\sqrt{c^2t^2-s^2}<z'<\sqrt{c^2t^2-s^2}\end{cases}$$

па равенката (6) во овој случај се сведува на:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 \hat{z}}{4\pi} \int_{-\sqrt{c^2t^2-s^2}}^{\sqrt{c^2t^2-s^2}} \frac{k\left(t - \frac{\sqrt{s^2+z'^2}}{c}\right)}{\sqrt{s^2+z'^2}} dz'$$
$$= \frac{\mu_0 k\, \hat{z}}{2\pi}\left[t \ln\left(\frac{ct+\sqrt{c^2t^2-s^2}}{s}\right) - \frac{1}{c}\sqrt{c^2t^2-s^2}\right]$$

Со замена на овој израз во изразите (4) и (5), за векторите на електричното поле и магнетното поле се добива:

$$\vec{E}(s,t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\ln\left(\frac{ct+\sqrt{c^2t^2-s^2}}{s}\right)\hat{z},$$

$$\vec{B}(s,t) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\vec{\nabla}\times\left\{\left[t\ln\left(\frac{ct+\sqrt{c^2t^2-s^2}}{s}\right) - \frac{\sqrt{c^2t^2-s^2}}{c}\right]\hat{z}\right\}$$
$$= \frac{\mu_0 k}{2\pi c s}\sqrt{c^2t^2-s^2}\,\hat{\varphi}$$

в) Во овој случај

$$I(z',t_R) = I(t_R) = q_0\delta(t_R) = q_0\delta\left(t - \frac{\sqrt{s^2+z'^2}}{c}\right),$$

па интегралот за векторскиот потенцијал се сведува на:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 \hat{z}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_0\delta\left(t - \frac{\sqrt{s^2+z'^2}}{c}\right)}{\sqrt{s^2+z'^2}} dz' = \frac{q_0\mu_0\hat{z}}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\delta\left(t - \frac{\sqrt{s^2+z'^2}}{c}\right)}{\sqrt{s^2+z'^2}} dz'.$$

За решавање на интегралот ја воведуваме смената

$$u = t - \frac{\sqrt{s^2+z'^2}}{c},$$

од каде имаме:

$$z' = \sqrt{c^2(t-u)^2 - s^2},$$

односно

$$dz' = -\frac{c\sqrt{s^2 + z'^2}}{z'}du = -\frac{c\sqrt{s^2 + z'^2}}{\sqrt{c^2(t-u)^2 - s^2}}du,$$

па следствено добиваме:

$$\int_0^\infty \frac{\delta\left(t - \frac{\sqrt{s^2 + z'^2}}{c}\right)}{\sqrt{s^2 + z'^2}} dz'$$

$$= -\int_{t-s/c}^{-\infty} \frac{\delta(u)}{\sqrt{s^2 + z'^2}} \frac{c\sqrt{s^2 + z'^2}}{\sqrt{c^2(t-u)^2 - s^2}} du$$

$$= \int_{-\infty}^{t-s/c} \frac{c\delta(u)}{\sqrt{c^2(t-u)^2 - s^2}} du = \frac{c}{\sqrt{c^2t^2 - s^2}}$$

кога $t > \frac{s}{c}$. Следствено, за векторскиот потенцијал се добива:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \begin{cases} 0, & t \le \frac{s}{c} \\ \frac{q_0\mu_0}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{c^2t^2 - s^2}} \hat{z}, & t > \frac{s}{c} \end{cases}$$

Сопред ова очигледно е дека електромагнетното поле од жицата во точката определена со радијалната цилиндрична координата s ќе постои кога $t > \frac{s}{c}$, и векторите на електричното поле и магнетното поле ќе изнесуваат:

$$\vec{E}(s, t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{cases} 0, & t \le \frac{s}{c} \\ \frac{q_0\mu_0 c^3 t}{2\pi} \frac{1}{(c^2t^2 - s^2)^{3/2}} \hat{z}, & t > \frac{s}{c} \end{cases},$$

$$\vec{B}(s, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{cases} 0, & t \le \frac{s}{c} \\ -\frac{q_0\mu_0 c}{2\pi} \frac{s}{(c^2t^2 - s^2)^{3/2}} \hat{\varphi}, & t > \frac{s}{c} \end{cases}.$$

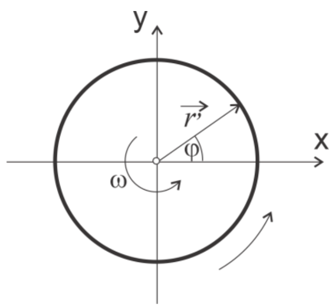
■

Задача 47.

Прстен со радиус *a* е наелектризиран нерамномерно, така што неговата линиска густина на полнеж се менува во зависност од поларниот агол φ според релацијата $\lambda = \lambda_0 \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|$. Прстенот се врти околу својата оска со константна аголна брзина ω. Да се најдат потенцијалите на електромагнетното поле во центарот на прстенот.

Решение 47.

Прстенот го поставуваме да лежи во *xy*-рамнината, со центар во координатниот почеток. Бидејќи полнежот се врти со константна аголна брзина околу оската *z* којашто поминува низ неговиот центар нормално на рамнината на прстенот, линиската густина на распределбата на полнежот станува временски зависна и се определува по формулата



Слика 31

$$\lambda(\varphi, t) = \lambda_0 \left|\sin\frac{\varphi - \omega t}{2}\right|.$$

Скаларниот потенцијал се пресметува со ретардациската формула за линиска распределба на полнеж

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda(\vec{r}\,', t_R)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dl'. \tag{1}$$

Во нашиот случај

$$\vec{r}\,' = a\cos\varphi\,\hat{x} + a\sin\varphi\,\hat{y},$$

$$\vec{r} = 0,$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = a,$$

$$t_R = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c} = t - \frac{a}{c},$$

$$dl' = a d\varphi,$$

па со замена во изразот (1), за скаларниот потенцијал во центарот на прстенот се добива

$$V(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda(\varphi,t_R)}{a}ad\varphi=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{\varphi-\omega t_R}{2}\right|d\varphi.$$

За да го решиме интегралот ја воведуваме смената:

$$\frac{\varphi-\omega t_R}{2}=\eta,$$

од каде што

$$d\varphi=2d\eta,$$

па, за потенцијалот имаме:

$$V(\vec{r},t)=\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\omega t_R}{2}}^{\pi-\frac{\omega t_R}{2}}|\sin\eta|d\eta=\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}|\sin\eta|d\eta=\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\sin\eta\,d\eta,$$

односно

$$V(\vec{r},t)=\frac{\lambda_0}{\pi\varepsilon_0}.$$

Векторскиот потенцијал е даден со ретардациската формула за линиски струи:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0\hat{\varphi}}{4\pi}\int\frac{I(\vec{r}\,',t_R)}{a}dl'. \tag{2}$$

За струјата имаме:

$$\vec{I}(\vec{r}\,',t)=\lambda\vec{v}=\lambda\omega a\hat{\varphi}=\lambda_0\omega a\left|\sin\frac{\varphi-\omega t}{2}\right|\hat{\varphi}$$
$$=\lambda_0\omega a\left|\sin\frac{\varphi-\omega t}{2}\right|(-\sin\varphi\,\hat{x}+\cos\varphi\,\hat{y}),$$

па со замена во формулата (2) за векторскиот потенцијал се добива:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 \lambda_0 \omega a}{4\pi}\left[-\hat{x}\int_0^{2\pi} \sin\varphi \left|\sin\frac{\varphi - \omega t_R}{2}\right| d\varphi \right.$$
$$\left. + \hat{y}\int_0^{2\pi} \cos\varphi \left|\sin\frac{\varphi - \omega t_R}{2}\right| d\varphi\right],$$

откаде на сличен начин како и претходно, по соодветно средување и пресметка на интегралите добиваме:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 \lambda_0 \omega a}{3\pi}\left\{\sin\left[\omega\left(t - \frac{a}{c}\right)\right]\hat{x} - \cos\left[\omega\left(t - \frac{a}{c}\right)\right]\hat{y}\right\}.$$

■

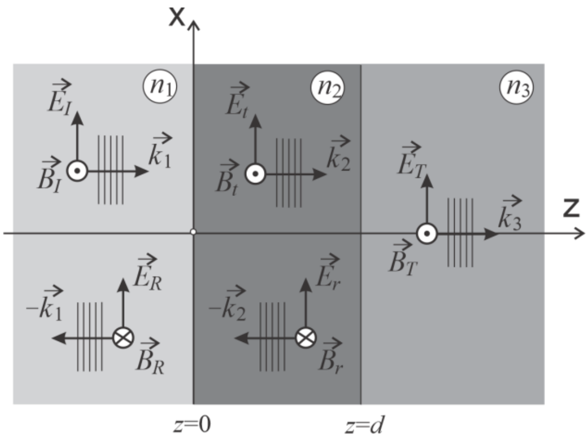
6.

Електромагнетни бранови

Задача 48.

Рамен монохроматски бран којшто се шири со аголна фреквенција ω во диелектрична средина со индекс на прекршување n_1, упаѓа нормално врз планпаралелна плочка со индекс на прекршување n_2, поминува низ неа, и потоа продолжува да се шири низ трета средина со индекс на прекршување n_3. Дебелината на планпаралелната плочка изнесува d. Да се определи коефициентот на трансмисија на бранот низ плочката. Да се претпостави дека сите три средини се линеарни, хомогени, диелектрични средини, и дека релативната магнетна пермеабилност на секоја средина е блиска до единица, односно $\mu_{r1} = \mu_{r2} = \mu_{r3} \approx 1$.

Решение 48.



Слика 32

Ширењето на бранот низ трите средини е шематски прикажано на сликата десно. Насоката на ширење ја земаме да биде по оската z, така што бранот доаѓа од првата средина лево ($z < 0$), поминува низ планпаралелната плочка $0 \le z \le d$ и продолжува во третата средина десно $(z > 0)$. Брановите карактеристики во првата средина се дадени со брановиот број k_1 и брзината v_1 на бранот, па векторите на упадното електрично поле и магнетно поле $\vec{E_I}$ и $\vec{B_I}$ се запишуваат:

$$\overrightarrow{E_I} = E_I e^{i(k_1 z - \omega t)}\, \hat{x},$$

$$\overrightarrow{B_I} = \frac{1}{v_1} E_I e^{i(k_1 z - \omega t)}\, \hat{y},$$

при што одбравме поларизацијата на упадниот бран да биде во рамнината на цртежот. Бранот упаѓа на површината на планпаралелната плочка $z = 0$, каде што делумно се одбива, а делумно се прекршува. Одбиениот дел од бранот се шири во првата средина налево, па векторите на овој дел од електромагнетното поле се:

$$\overrightarrow{E_R} = E_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}\, \hat{x},$$

$$\overrightarrow{B_R} = -\frac{1}{v_1} E_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}\, \hat{y}.$$

Прекршениот бран се шири низ плочката надесно, па за него векторите на полињата се:

$$\overrightarrow{E_t} = E_t e^{i(k_2 z - \omega t)}\, \hat{x},$$

$$\overrightarrow{B_t} = \frac{1}{v_2} E_t e^{i(k_2 z - \omega t)}\, \hat{y},$$

каде што k_2 и v_2 се брановиот број и брзината на бранот во плочката. Бранот евентуално пристигнува до десната површина на плочката $z = d$ каде што повторно делумно се одбива и делумно се прекршува. Одбиениот бран се шири налево во плочката, и неговите вектори на електромагнетното поле се:

$$\overrightarrow{E_r} = E_r e^{i(-k_2 z - \omega t)}\, \hat{x},$$

$$\overrightarrow{B_r} = -\frac{1}{v_2} E_r e^{i(-k_2 z - \omega t)}\, \hat{y},$$

додека прекршениот бран продолжува во третата средина надесно, и за него полињата се:

$$\overrightarrow{E_T} = E_T e^{i(k_3 z - \omega t)}\, \hat{x},$$

$$\overrightarrow{B_T} = \frac{1}{v_3} E_T e^{i(k_3 z - \omega t)}\,\hat{y},$$

каде што k_3 и v_3 се брановиот број и брзината на бранот во третата средина. На границите определени со површините на плочката важат граничните услови коишто во овој случај се определени со релациите:

$$\overrightarrow{E_1^{\parallel}} = \overrightarrow{E_2^{\parallel}}, \tag{1}$$

$$\overrightarrow{B_1^{\parallel}} = \overrightarrow{B_2^{\parallel}}, \tag{2}$$

при што индексот 1 одговара на средината лево од соодветната гранична површина, а индексот 2 на средината десно од површината. Притоа во секоја средина треба да се земе сумарниот вектор на електричното односно магнетното поле од сите полиња што постојат во тој дел од просторот. Согласно, лево од упадната површина $z = 0$ сумарниот вектор на електричното поле изнесува $\overrightarrow{E_I}$ + $\overrightarrow{E_R}$, додека магнетното поле е $\overrightarrow{B_I}$ + $\overrightarrow{B_R}$. Внатре во плочката ($0 \leq z \leq d$) соодветните полиња се $\overrightarrow{E_t}$ + $\overrightarrow{E_r}$, односно $\overrightarrow{B_t}$ + $\overrightarrow{B_r}$, додека десно од површината $z = d$ полињата се $\overrightarrow{E_T}$ и $\overrightarrow{B_T}$. Следствено, за граничните услови (1) и (2) за површината $z = 0$ добиваме:

$$E_I + E_R = E_t + E_r, \tag{3}$$

$$E_I - E_R = \frac{v_1}{v_2}(E_t + E_r), \tag{4}$$

а соодветните гранични услови за површината $z = d$ се:

$$E_t e^{ik_2 d} + E_r e^{-ik_2 d} = E_T e^{ik_3 d}, \tag{5}$$

$$E_t e^{ik_2 d} - E_r e^{-ik_2 d} = \frac{v_2}{v_3} E_T e^{ik_3 d}. \tag{6}$$

Со воведување на параметрите α и β зададени со:

$$\alpha = \frac{v_2}{v_3} = \frac{n_3}{n_2},$$

$$\beta = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

релациите (3)–(6) се запишуваат:

$$E_I + E_R = E_t - E_r, \tag{7}$$

$$E_I - E_R = \beta(E_t + E_r), \tag{8}$$

$$E_t e^{ik_2 d} + E_r e^{-ik_2 d} = E_T e^{ik_3 d}, \tag{9}$$

$$E_t e^{ik_2 d} - E_r e^{-ik_2 d} = \alpha E_T e^{ik_3 d}. \tag{10}$$

Ги собираме равенките (7) и (8), при што се добива:

$$2E_I = (1+\beta)E_t + (1-\beta)E_r. \tag{11}$$

Равенките (9) и (10) прво ги собираме, а потоа ги одземаме, при што се добиваат соодветно релациите:

$$E_t = \frac{1+\alpha}{2} E_T e^{i(k_3 - k_2)d}, \tag{12}$$

$$E_r = \frac{1-\alpha}{2} E_T e^{i(k_3 + k_2)d}. \tag{13}$$

Со замена на (12) и (13) во (11) добиваме:

$$E_I = \frac{1}{2}\left[(1+\alpha\beta)\cos k_2 d - i(\alpha+\beta)\sin k_2 d\right] E_T e^{ik_3 d}, \tag{14}$$

па со користење на резултантната релација лесно се пресметува коефициентот на трансмисија низ планпаралелната плочка:

$$T = \alpha\beta \left|\frac{E_T}{E_I}\right|^2 = \frac{4n_1 n_3}{(n_1+n_3)^2 + \frac{(n_1^2 - n_2^2)(n_3^2 - n_2^2)}{n_2^2}\sin^2(k_2 d)}.$$

■

Задача 49.

Да се покаже дека кај рамен монохроматски бран којшто се простира низ средина со спроводност σ, енергиите на електричното поле и магнетното поле на бранот, W_E и W_M, не се меѓусебно еднакви. Да се испитаат граничните случаи кога $\sigma \to 0$ и $\sigma \to \infty$.

Решение 49.

Прво ги запишуваме Максвеловите равенки за спроводни средини:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{4}$$

при што во четвртата равенка зедовме предвид дека за спроводната средина важи Омовиот закон, односно

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}.$$

Бидејќи во средината се шири рамен монохроматски бран, претпоставуваме решенија на Максвеловите равенки во облик:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \tag{5}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{B_0} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \tag{6}$$

каде што $\overrightarrow{E_0}$ и $\overrightarrow{B_0}$ се комплексните амплитуди на векторите на електричното поле, односно магнетното поле на бранот. Со замена на (5) и (6) во Максвеловите равенки (1)–(4), добиваме:

$$\vec{k} \cdot \overrightarrow{E_0} = 0, \tag{7}$$

$$\vec{k} \cdot \overrightarrow{B_0} = 0, \tag{8}$$

$$\vec{k} \times \overrightarrow{E_0} = \omega \overrightarrow{B_0}, \tag{9}$$

$$\vec{k} \times \overrightarrow{B_0} = -i\mu\sigma\overrightarrow{E_0} - \varepsilon\mu\omega\overrightarrow{E_0}, \tag{10}$$

при што ги искористивме следните трансформации на соодветните членови во оригиналните равенки:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{E_0} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right) = \overrightarrow{E_0}\, e^{-i\omega t} \vec{\nabla} \cdot \left(e^{i\vec{k}\vec{r}}\right) = \overrightarrow{E_0} e^{-i\omega t} i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{B_0} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right) = \overrightarrow{B_0} e^{-i\omega t} \vec{\nabla} \cdot \left(e^{i\vec{k}\vec{r}}\right) = \overrightarrow{B_0} e^{-i\omega t} i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times \left(\overrightarrow{E_0} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right) = (\vec{\nabla} \times \overrightarrow{E_0}) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} - \overrightarrow{E_0} \times \vec{\nabla}\left(e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right) = \\ &= -\overrightarrow{E_0} \times \left(e^{-i\omega t} i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}}\right) = -ie^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \overrightarrow{E_0} \times \vec{k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \left(\overrightarrow{B_0} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right) = (\vec{\nabla} \times \overrightarrow{B_0}) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} - \overrightarrow{B_0} \times \vec{\nabla}\left(e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right) = \\ &= -\overrightarrow{B_0} \times \left(e^{-i\omega t} i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}}\right) = -ie^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \overrightarrow{B_0} \times \vec{k},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{E_0} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right) = \overrightarrow{E_0} e^{i\vec{k}\vec{r}} (-i\omega) e^{-i\omega t} = -i\omega \overrightarrow{E_0} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)},$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{B_0} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right) = \overrightarrow{B_0} e^{i\vec{k}\vec{r}} (-i\omega) e^{-i\omega t} = -i\omega \overrightarrow{B_0} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}.$$

Резултантните релации (7)–(10) се Максвеловите равенки напишани во доменот на фреквенции. Доколку ги пресметаме модулите на равенките (9) и (10), соодветно добиваме:

$$k\underline{E_0} = \omega \underline{B_0},$$

$$k\underline{B_0} = \sqrt{\mu^2\sigma^2 + \varepsilon^2\mu^2\omega^2}\, \underline{E_0},$$

при што $\underline{E_0}$ и $\underline{B_0}$ се реалните амплитуди на векторот на електричното поле и магнетното поле на бранот. Ако ги поделиме последните две равенки една со друга се добива:

$$\frac{\underline{E_0}^2}{\underline{B_0}^2} = \frac{\omega}{\sqrt{\mu^2\sigma^2 + \varepsilon^2\mu^2\omega^2}}.$$

Ако двете страни на последната релација ги помножиме со $\frac{\varepsilon}{2}$ и ги поделиме со $\frac{1}{2\mu}$, се добива:

$$\frac{\frac{\varepsilon E_0^2}{2}}{\frac{B_0^2}{2\mu}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}},$$

односно

$$\frac{W_E}{W_M} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}}.$$

Се гледа дека односот помеѓу енергиите на електричното поле и магнетното поле на бранот, не е еднаков на нула во спроводни средини, кога $\sigma \neq 0$. Во граничните случаеви, кога $\sigma \to 0$, тогаш $\frac{W_E}{W_M} \to 1$, додека кога $\sigma \to \infty$, следува $\frac{W_E}{W_M} \to 0$.

■

Задача 50.

Врската помеѓу густината на струјата и електричното поле во јонизиран гас со занемарливо движење на јоните е дадена со обопштениот Омов закон:

$$\vec{j} + \tau\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \sigma\vec{E},$$

каде што τ е некоја константа со димензија на време, а σ е електричната спроводливост на гасот. Да се најде односот на енергиите на електричното поле и магнетното поле на рамен монохроматски бран којшто се простира низ оваа материјална средина.

Решение 50.

Бидејќи во јонизираниот гас се движи рамен монохроматски бран, тогаш за векторите $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{j}$ внатре во гасот ќе важат релациите:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)}, \tag{1}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{B_0} e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)}, \tag{2}$$

$$\vec{j} = \overrightarrow{J_0} e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)}, \tag{3}$$

па со смена во генерализираниот Омов закон имаме:

$$(\overrightarrow{J_0} - i\omega\tau\overrightarrow{J_0}) e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)} = \sigma \overrightarrow{E_0} e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)}$$

односно

$$\overrightarrow{J_0} = \frac{\sigma}{1 - i\omega\tau} \overrightarrow{E_0}. \tag{4}$$

Бидејќи јонизираниот гас е спроводна средина, за него ќе важат Максвеловите равенки за спроводни средини:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \tag{5}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{6}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{8}$$

Равенките (1)–(4) ги заменуваме во четвртата Максвелова равенка (8), при што ги користиме релациите:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\overrightarrow{B_0} e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)}\right) &= (\vec{\nabla} \times \overrightarrow{B_0}) e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)} - \overrightarrow{B_0} \times \vec{\nabla}\left(e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)}\right) \\ &= -i e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)} \overrightarrow{B_0} \times \vec{k}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{E_0} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right) = -i\omega \overrightarrow{E_0} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}.$$

Притоа ја добиваме репрезентацијата на оваа равенка во доменот на фреквенции:

$$\vec{k} \times \overrightarrow{B_0} = -\left(\frac{\sigma\mu}{1 - i\omega\tau} + \varepsilon\mu\omega\right)\overrightarrow{E_0}. \tag{9}$$

За останатите три Максвелови равенки ги добиваме истите релации во доменот на фреквенции како и во претходната задача:

$$\vec{k} \cdot \overrightarrow{E_0} = 0, \tag{10}$$

$$\vec{k} \cdot \overrightarrow{B_0} = 0, \tag{11}$$

$$\vec{k} \times \overrightarrow{E_0} = \omega \overrightarrow{B_0}. \tag{12}$$

Следствено, со употреба на модулите од двете страни на равенките (9) и (12) добиваме:

$$k\underline{E_0} = \omega \underline{B_0}, \tag{13}$$

$$k\underline{B_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma\mu}{1+\omega^2\tau^2} + \varepsilon\mu\omega\right)^2 + \left(\frac{\sigma\mu\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\right)^2}\ \underline{E_0}, \tag{14}$$

при што го искористивме упростувањето:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sigma\mu}{1-i\omega\tau} + \varepsilon\mu\omega\right| &= \left|\frac{\sigma\mu(1+i\omega\tau)}{(1-i\omega\tau)(1+i\omega\tau)} + \varepsilon\mu\omega\right| = \\ &= \left|\frac{\sigma\mu}{1+\omega^2\tau^2} + \varepsilon\mu\omega + i\frac{\sigma\mu\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sigma\mu}{1+\omega^2\tau^2} + \varepsilon\mu\omega\right)^2 + \left(\frac{\sigma\mu\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\right)^2}.\end{aligned}$$

Со делењеto на равенките (13) и (14), на сличен начин како и во претходната задача, го добиваме односот на енергиите на електричното поле и на магнетното поле на бранот во јонизираниот гас

$$\frac{W_E}{W_M}=\frac{\frac{\varepsilon E_0^2}{2}}{\frac{B_0^2}{2\mu}}=\frac{\varepsilon\mu\omega}{\sqrt{\left(\frac{\sigma\mu}{1+\omega^2\tau^2}+\varepsilon\mu\omega\right)^2+\left(\frac{\sigma\mu\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\right)^2}}.$$

■

Задача 51.

Монохроматски електромагнетен бран се движи низ нехомоген диелектрик чија што диелектична константа се менува долж *z*-оската според законот $\varepsilon=\varepsilon_0 f(z)$, каде што f е произволна функција од координатата *z*. Магнетната пермеабилност на диелектрикот е еднаква на премеабилноста на вакуум. Насоката на движење на бранот прави некој агол со *z*-оската. Да се најдат диференцијалните равенки за електричното поле и магнетното поле на овој бран, и да се применат во конкретниот случај кога векторот на електричното поле на бранот е нормален на рамнината образувана од насоката на простирање на бранот и *z*-оската.

Решение 51.

Одбираме правецот на простирање на електромагнетниот бран да лежи во *xz* рамнината. Во општ случај, векторите на електричното поле и на магнетното поле на монохроматски бран во нехомогена средина се со обликот:

$$\vec{E}=\overrightarrow{E_0}(x,y,z)e^{-i\omega t}, \tag{1}$$

$$\vec{B}=\overrightarrow{B_0}(x,y,z)e^{-i\omega t}, \tag{2}$$

каде што $\overrightarrow{E_0}$ и $\overrightarrow{B_0}$ се комплексните амплитуди на полињата кои не се константни, туку зависат од просторните координати, а ω е аголната фреквенција на бранот. Максвеловите равенки во диелектрични средини се:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0, \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{6}$$

каде што векторите $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ и $\vec{H}$ се меѓусебно сврзани со конститутивните релации:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 f(z) \vec{E}, \tag{7}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}. \tag{8}$$

Со замена на (7) и (8) во четвртата Максвелова равенка (6) имаме:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon(z)\vec{E}\right). \tag{9}$$

Со замена на релациите за полињата (1) и (2) во третата и четвртата Максвелова равенка (5) и (6), со земање предвид на конститутивните равенки (7) и (8) се добива:

$$\vec{\nabla} \times \overrightarrow{E_0} = i\omega \overrightarrow{B_0}, \tag{10}$$

$$\vec{\nabla} \times \overrightarrow{B_0} = -i\frac{\omega}{c^2} f(z)\overrightarrow{E_0}. \tag{11}$$

Со земање ротор од двете страни на последните две равенки, по кратко средување имаме:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \overrightarrow{E_0}\right) = i\omega \vec{\nabla} \times \overrightarrow{B_0} = i\omega \left(-i\frac{\omega}{c^2} f(z)\overrightarrow{E_0}\right),$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \overrightarrow{B_0}\right) = -i\frac{\omega}{c^2}\left(\vec{\nabla} \times f(z)\overrightarrow{E_0}\right),$$

односно

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{E_0}\right) - \nabla^2 \overrightarrow{E_0} = \frac{\omega^2}{c^2} f(z)\overrightarrow{E_0}, \tag{12}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\overrightarrow{B_0}\right)-\nabla^2\overrightarrow{B_0}=-i\frac{\omega}{c^2}\left[f(z)\left(\vec{\nabla}\times\overrightarrow{E_0}\right)-\overrightarrow{E_0}\times\left(\vec{\nabla}f(z)\right)\right]. \qquad (13)$$

Од равенката (11) за $\overrightarrow{E_0}$ имаме:

$$\overrightarrow{E_0}=-i\frac{c^2}{\omega f(z)}\vec{\nabla}\times\overrightarrow{B_0},$$

па со смена во релацијата (13) по средувањето добиваме:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\overrightarrow{B_0}\right)-\nabla^2\overrightarrow{B_0}=\frac{\omega^2}{c^2}f(z)\overrightarrow{B_0}+\frac{1}{f(z)}\left(\vec{\nabla}f(z)\right)\times\left(\vec{\nabla}\times\overrightarrow{B_0}\right). \qquad (14)$$

Следствено, со земање предвид на (4), диференцијалните равенки (12) и (14) се запишуваат:

$$\nabla^2\overrightarrow{E_0}+\frac{\omega^2}{c^2}f(z)\overrightarrow{E_0}-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\overrightarrow{E_0}\right)=\vec{0}, \qquad (15)$$

$$\nabla^2\overrightarrow{B_0}+\frac{\omega^2}{c^2}f(z)\overrightarrow{B_0}+\frac{1}{f(z)}\left(\vec{\nabla}f(z)\right)\times\left(\vec{\nabla}\times\overrightarrow{B_0}\right)=\vec{0}. \qquad (16)$$

Резултантните равенки (15) и (16) се парцијални диференцијални равенки чии што решенија се амплитудите на векторите на електромагнетното поле $\overrightarrow{E_0}$ и $\overrightarrow{B_0}$. Со нивно добивање, а согласно релациите (1) и (2), ги наоѓаме и самите вектори на полињата $\vec{E}$ и $\vec{B}$. За да го решиме системот (15)–(16) постапуваме на следниот начин. Бидејќи нехомогеноста на средината е долж *z*-оската, а зедовме правецот на движење на бранот, односно неговиот бранов вектор $\vec{k}$ да лежи во *xz*-рамнината,

$$\vec{k}=p\hat{x}+q\hat{z}$$

следува дека $\overrightarrow{E_0}$ и $\overrightarrow{B_0}$ не треба да зависат од *y*-координатата. Тогаш претпоставуваме решение на системот (15)–(16) од облик на рамен бран

$$\overrightarrow{E_0}(x,y,z)=\overrightarrow{\mathcal{E}_0}(z)e^{ipx}, \qquad (17)$$

$$\overrightarrow{B_0}(x,y,z)=\overrightarrow{\mathcal{B}_0}(z)e^{ipx}, \qquad (18)$$

при што, настрана од експонентот e^{ipx}, целокупната останата зависност е од променливата z и таа ја изразивме преку комплексните векторски функции $\overrightarrow{\mathcal{E}_0}(z)$ и $\overrightarrow{\mathcal{B}_0}(z)$. Во случајот кога векторот на електричното поле е нормален на *xz*-рамнината, тој поседува само *y*-компонента, па за дивергенцијата на амплитудата $\overrightarrow{E_0}$ имаме:

$$\vec{\nabla}\cdot\overrightarrow{E_0}=\frac{\partial E_{0x}}{\partial x}+\frac{\partial E_{0y}}{\partial y}+\frac{\partial E_{0z}}{\partial z}=\frac{\partial E_{0y}}{\partial y}=0,$$

каде зедовме предвид дека согласно релацијата (17), $\overrightarrow{E_0}$ не зависи од променливата *y*. Согласно на тоа, равенката (15) за амплитудата на електричното поле се сведува на:

$$\nabla^2\overrightarrow{E_0}+\frac{\omega^2}{c^2}f(z)\overrightarrow{E_0}=0,$$

односно, со смена на (17) во последниот резултат добиваме:

$$\frac{d^2\overrightarrow{\mathcal{E}_0}}{dz^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2}f(z)-s^2\right)\overrightarrow{\mathcal{E}_0}=0. \tag{19}$$

Со решавање на (19) за позната функција $f(z)$, со земање предвид на релациите (1) и (17), го добиваме електричното поле $\vec{E}$ на бранот. Потоа, со користење на релацијата (10) го добиваме и векторот на амлитудата на магнетното поле

$$\overrightarrow{B_0}=\frac{\vec{\nabla}\times\overrightarrow{E_0}}{i\omega},$$

а оттука и магнетното поле $\vec{B}$ на бранот зададено преку релацијата (2).

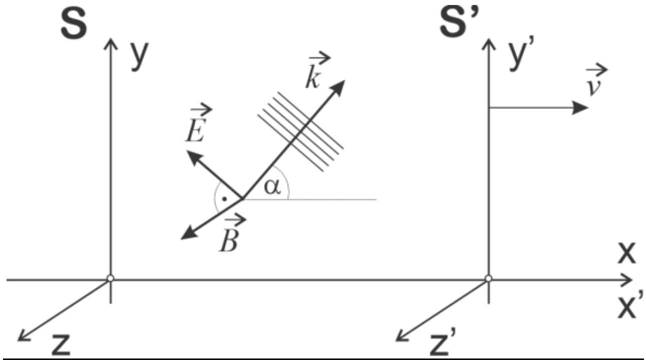
■

7.

Електродинамика на подвижни средини. Релативистичка оптика

Задача 52.

Извор којшто се наоѓа во вакуум е сместен во координатниот почеток на референтниот систем *S*. Тој емитува рамни електромагнетни бранови со аголна фреквенција ω и бранов вектор $\vec{k}$ којшто лежи во *xy* рамнината и прави агол α во однос на оската *x*. Амплитудата на електромагнетниот бран е E_0. Да се пресметаат брановите карактеристики во однос на системот S' којшто се наоѓа во стандардна конфигурација во однос на системот *S* и се движи по неговата *x*-оска со брзина v. Векторот на поларизацијата на бранот лежи во *xy* рамнината.



Слика 33

Решение 52.

Земајќи предвид дека векторот на електричното поле $\vec{E}$ лежи во *xy* рамнината (види слика), равенките на електричното поле и на магнетното поле на бранот се запишуваат:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \overrightarrow{E_0}\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi),$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\hat{k}\times\vec{E}}{c},$$

при што

$$\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} = k\cos\alpha\,\hat{x} + k\sin\alpha\,\hat{y}$$

е брановиот вектор изразен преку компонентите:

$$k_x = k\cos\alpha, \tag{1}$$

$$k_y = k\sin\alpha, \tag{2}$$

векторот

$$\overrightarrow{E_0} = E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y} = -E_0\sin\alpha\,\hat{x} + E_0\cos\alpha\,\hat{y}$$

е амплитудата на електричното поле, а φ е почетната фаза на брановите осцилации. Според тоа, компонентите на векторите на електромагнетното поле на бранот во референтниот систем S се:

$$E_x = -E_0\sin\alpha\cos(k_x x + k_y y - \omega t + \varphi), \tag{3}$$

$$E_y = E_0\cos\alpha\cos(k_x x + k_y y - \omega t + \varphi), \tag{4}$$

$$E_z = 0, \tag{5}$$

$$B_x = 0, \tag{6}$$

$$B_y = 0, \tag{7}$$

$$B_z = \frac{1}{c}E_0\cos(k_x x + k_y y - \omega t + \varphi). \tag{8}$$

За да ги добиеме соодветните компоненти на полињата во референтниот систем S', ги користиме релативистичките трансформациски формули:

$$E_x^{'} = E_x,$$

$$E_y' = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$E_z' = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$B_x' = B_x,$$

$$B_y' = \frac{B_y + \frac{v}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$B_z' = \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

при што во нив со смена на релациите (3)–(8) добиваме:

$$E_x' = -E_0 \sin\alpha \cos(k_x x + k_y y - \omega t + \varphi), \tag{9}$$

$$E_y' = \frac{E_0 \left(\cos\alpha - \frac{v}{c}\right) \cos(k_x x + k_y y - \omega t + \varphi)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{10}$$

$$E_z' = 0, \tag{11}$$

$$B_x' = 0, \tag{12}$$

$$B_y' = 0, \tag{13}$$

$$B_z' = \frac{\frac{E_0}{c} \left(1 - \frac{v}{c} \cos\alpha\right) \cos(k_x x + k_y y - \omega t + \varphi)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{14}$$

Релациите (9)–(14) не се комплетни трансформации на полињата, бидејќи во нив во аргументот на косинусната функција (фазата на бранот) се уште фигурираат просторно-временските координати *x*, *y*, *z* и *t* од референтниот систем *S*. Нив ги изразуваме преку соодветните координати x', y', z' и t' во S' системот со користење на Лоренцовите трансформации:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$y = y',$$

$$z = z',$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Со нивно користење, го трансформираме аргументот на косинусната функција во релациите (9), (10) и (14):

$$k_x x + k_y y - \omega t + \varphi = k_x \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + k_y y' - \omega \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \varphi =$$
$$= \frac{\left(k_x - \frac{\omega v}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x' + k_y y' - \frac{k_x v - \omega}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t' + \varphi$$

Во последниот израз земаме предвид дека множителите пред x', y' и t' се константи, па нив соодветно ги означуваме со:

$$k_x' = \frac{\left(k_x - \frac{\omega v}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{15}$$

$$k_y' = k_y, \tag{16}$$

$$\omega' = \frac{\omega - k_x v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{17}$$

па за трансформацијата на фазата може да се запише:

$$k_x x + k_y y - \omega t + \varphi = k_x' x' + k_y' y' - \omega' t' + \varphi$$

од што се гледа дека нејзината форма останува инваријантна при премин од S во S' системот. Формулите (15)–(17) ги претставуваат релативистичките трансформации на компонентите на брановиот вектор и аголната фреквенција на бранот помеѓу референтните системи.

Со оглед на овие резултати, релациите (9), (10) и (14) се запишуваат:

$$E_x' = -E_0 \sin\alpha \cos(k_x' x' + k_y' y' - \omega' t' + \varphi), \tag{18}$$

$$E_y' = \frac{E_0 \left(\cos\alpha - \frac{v}{c}\right) \cos(k_x' x' + k_y' y' - \omega' t' + \varphi)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{19}$$

$$B_z' = \frac{\frac{E_0}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha\right) \cos(k_x' x' + k_y' y' - \omega' t' + \varphi)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{20}$$

Соодветно на (1) и (2), за брановиот вектор $\vec{k}'$ во однос на референтниот систем S' имаме:

$$\vec{k}' = k_x' \hat{x} + k_y' \hat{y}, \tag{21}$$

$$k_x' = k' \cos\alpha', \tag{22}$$

$$k_y' = k' \sin\alpha', \tag{23}$$

каде што α' е аголот образуван од брановиот вектор $\vec{k}'$ со позитивната насока на x' оската. Од трансформационите релации (15)–(17), со оглед на (1), (2), (22) и (23), добиваме:

$$k^{\prime}\cos\alpha^{\prime}=\frac{\left(k\cos\alpha-\frac{\omega v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{24}$$

$$k^{\prime}\sin\alpha^{\prime}=k\sin\alpha, \tag{25}$$

$$\omega^{\prime}=\frac{\omega-kv\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{26}$$

Последната равенка (26) е изразот за релативистички Доплеров ефект со која се опишува промената на фреквенцијата на бранот со промената на референтниот систем на набљудувачот како последица на релативната брзина меѓу референтните системи. Со делење на равенките (24) и (25) се добива:

$$\tan\alpha^{\prime}=\frac{\sin\alpha^{\prime}}{\cos\alpha^{\prime}},=\frac{k\sin\alpha\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{k\cos\alpha-\frac{\omega v}{c^2}}=\frac{\sin\alpha\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\cos\alpha-\frac{v}{c}}, \tag{27}$$

којашто ја претставува релацијата за релативистичка аберација на светлинскиот зрак. Доколку ги квадрираме и ги собереме равенките (24) и (25), добиваме:

$$\begin{aligned}
k^{\prime 2}=\left(k^{\prime}\cos\alpha^{\prime}\right)^2+\left(k^{\prime}\sin\alpha^{\prime}\right)^2&=k^2\left(\frac{\cos\alpha-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2+k^2\sin^2\alpha\\
&=k^2\left(\frac{\cos^2\alpha-\frac{2v}{c}\cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}+\sin^2\alpha-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\alpha}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\\
&=k^2\left(\frac{1-\frac{2v}{c}\cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}\cos^2\alpha}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right),
\end{aligned}$$

па следствено

$$k' = k\frac{1-\frac{v}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (28)$$

Од друга страна, од релацијата (26) имаме:

$$\omega' = \omega\frac{1-\frac{k}{\omega}v\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \omega\frac{1-\frac{v}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (29)$$

каде што ја искористивме релацијата $c = \frac{\omega}{k}$. Од последните две равенки следува:

$$\frac{\omega'}{k'} = \frac{\omega}{k} = c,$$

односно фазната брзина на електромагнетниот бран во вакуум не се менува со промената на референтниот ситем, и таа е еднаква на брзината на светлината во ваккум *c*. Со користење на инверзната аберациона формула на релацијата (27),

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\cos\alpha' + \frac{v}{c}}$$

во тригонометриските релации

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}},$$

ги добиваме релациите за $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ изразени преку променливите во S' системот:

$$\sin\alpha = \frac{\sin\alpha'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c}\cos\alpha'},$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha'};$$

Со замена на последниве два израза во релациите (18)–(20), за компонентите на електромагнетното поле во референтниот систем *S*′, конечно, добиваме:

$$E_x' = E_{0x}' \cos(k_x' x' + k_y' y' - \omega' t' + \varphi), \tag{30}$$

$$E_y' = E_{0y}' \cos(k_x' x' + k_y' y' - \omega' t' + \varphi), \tag{31}$$

$$E_z' = 0, \tag{32}$$

$$B_x' = 0, \tag{33}$$

$$B_y' = 0, \tag{34}$$

$$B_z' = B_{0z}' \cos(k_x' x' + k_y' y' - \omega' t' + \varphi), \tag{35}$$

каде што

$$E_{0x}' = -E_0 \frac{\sin\alpha' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha'}, \tag{36}$$

$$E_{0y}' = \frac{E_0 \cos\alpha' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha'}, \tag{37}$$

$$B_{0z}' = \frac{E_0}{c} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha'} \tag{38}$$

се соодветните компоненти на амплитудите на полињата. Оттука, за амплитудите на електричното поле и на магнетното поле на бранот во *S*′ системот добиваме:

$$E_0' = \sqrt{E_{0x}'^2 + E_{0y}'^2} = E_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha}, \tag{39}$$

$$B_0' = B_{0z}' = \frac{E_0}{c} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha}. \tag{40}$$

■

<u>**Задача 53.**</u>

При визуелното набљудување на објекти, сликата што ја гледаме се формира од оние точки на објектот од коишто емитираните фотони пристигнуваат едновремено во окото. Притоа, доколку објектот се движи релативистички со константна брзина, се набљудува деформација на сликата поради релативистичкото движење, познат како ефект на Лампа-Пенроуз-Терел.

Во оваа задача се бара да се опише овој ефект теориски разгледувајќи два прости случаја на релативистичко движење на прачка чијашто сопствена должина изнесува l_0 во однос на референтниот систем S' каде што таа мирува. Визуелното набљудување на прачката го врши набљудувач којшто се наоѓа во координатниот почеток на референтниот систем S. Системот S' е поставен во стандардна конфигурација во однос на системот S, и се движи во однос на него со брзина v долж неговата x-оска.

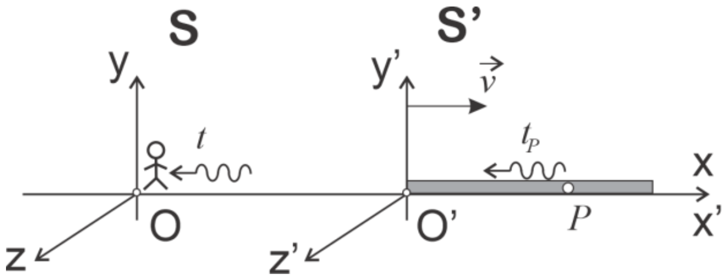
Колкава е должината на прачката која што ја гледа набљудувачот во системот S, ако

а) прачката е поставена да лежи на x'-оската во референтниот систем S'?

б) прачката е поставена да лежи на y'-оската во референтниот систем S'?

Решение 53.

а) Одбираме левиот крај од прачката да се совпаѓа со координатниот почеток O' на референтниот систем S' во којшто таа мирува.



Слика 34

Нека во однос на системот S во којшто прачката се движи со брзина v долж оската x, во време $t_p(x)$ од произволна точка P од прачката со координати $(x,0,0)$ се емитува фотон кон набљудувачот којшто се наоѓа во координатниот почеток O. Фотонот ќе стигне до набљудувачот во време t, односно

$$x = c(t - t_p). \tag{1}$$

Во однос на системот S' врзан за прачката, фотонот е емитиран во време $t_p'(x')$ од истата точка на прачката, меѓутоа нејзините координати во овој референтен ситем S' се $(x',0,0)$. Ако ги искористиме Лоренцовите трансформации кои ги сврзуваат координатите на овој настан во двата референтни системи

$$x' = \gamma(x - vt_p), \tag{2}$$

$$t_p' = \gamma\left(t_p - \frac{xv}{c^2}\right), \tag{3}$$

каде што $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, добиваме:

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt_p, \tag{4}$$

$$t_p = \frac{t_p^{'}}{\gamma} + \frac{xv}{c^2}. \tag{5}$$

Со замена на (4) во (1) се добива:

$$t_p = \frac{1}{1 + \frac{v}{c}}\left(t - \frac{x'}{c\gamma}\right).$$

Резултатот го користиме за да го елиминираме времето на емисија на фотонот t_p во равенката (2):

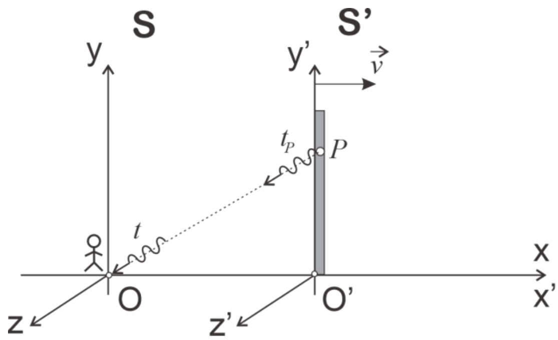
$$x(x', t) = x' \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} + \frac{vt}{1 + \frac{v}{c}}. \tag{6}$$

Последната релација ја дава зависноста на координатата x на местото на емитувањето на фотонот во однос на референтниот систем S како функција од времето на обсервација t на фотонот од набљудувачот во овој систем и координатата на местото на емисија на фотонот x' во однос на референтниот систем S' каде што прачката мирува.

Ако земеме предвид дека од секоја точка долж прачката се емитуваат фотони кон набљудувачот, и секој од нив пристига во неговото око во ист момент од времето t, тогаш со оглед на релацијата (6), должината на прачката што ќе ја види набљудувачот во неговиот референтен систем S изнесува:

$$\Delta x = x(l_0, t) - x(0, t) = l_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

б) Во овој случај прачката ја поставуваме долж y'-оската, така што долниот крај од прачката да се совпаѓа со координатниот почеток O' на референтниот систем S' во којшто таа мирува.



Слика 35

Нека во однос на системот *S* во којшто прачката се движи со брзина v долж оската *x*, во време $t_p(x,y,0)$ од произволна точка *P* од прачката со координати (*x*, *y*, 0) се емитува фотон кон набљудувачот којшто се наоѓа во координатниот почеток *O*. Фотонот ќе стигне до набљудувачот во време t, односно

$$\sqrt{x^2+y^2}=c\left(t-t_p\right). \tag{7}$$

Во однос на системот S' врзан за прачката, фотонот е емитиран во време $t_p'(y')$ од точка со координати (0, *y'*, 0). На ист начин како и претходно, со користење на Лоренцовите трансформации добиваме:

$$x=\frac{x'}{\gamma}+vt_p=vt_p, \tag{8}$$

$$y=y', \tag{9}$$

$$t_p=\frac{t_p'}{\gamma}+\frac{xv}{c^2}. \tag{10}$$

Со смена на (8) и (9) во (7) се добива:

$$c\left(t-t_p\right)=\sqrt{\left(vt_p\right)^2+y'^2}.$$

Последната релација ја квадрираме и средуваме, по што се добива квадратна равенка по t_p:

$$(v^2-c^2)t_p^2+2c^2tt_p+y'^2-c^2t^2=0,$$

чиешто решение е:

$$t_p = \gamma^2 t - \frac{\gamma^2}{c}\sqrt{v^2t^2 + \frac{y^2}{\gamma^2}}. \tag{11}$$

Второто решение го отфрламе како нереално, со оглед на условот $t_p < t$. Со користење на последната релација (11) го елиминираме времето t_p во равенката (8), при што се добива:

$$x(y,t) = \frac{\gamma^2 v}{c}\left(ct - \sqrt{v^2t^2 + \frac{y^2}{\gamma^2}}\right), \tag{12}$$

при што ја зедовме предвид и релацијата (9).

Согласно резултатот (12), набљудувачот во системот *S* во однос на којшто вертикално поставената прачка се движи со константна брзина долж *x*-оската ќе види дека во момент на време *t* во однос на неговиот часовник местоположбата на долната точка *A* на прачката е зададена со координатите:

$$x_A = \gamma^2 vt\left(1 - \frac{v}{c}\right),$$

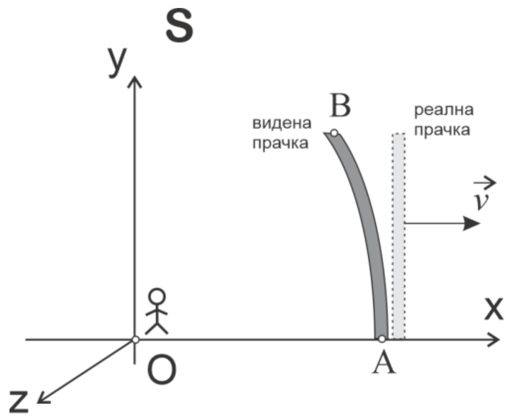
$$y_A = 0,$$

додека координатите на нејзината горна точка се:

$$x_B = \frac{\gamma^2 v}{c}\left(ct - \sqrt{v^2t^2 + \frac{{l_0}^2}{\gamma^2}}\right),$$

$$y_B = l_0,$$

односно, бидејќи $x_A > x_B$, прачката ќе биде искривена, односно свиена, како што е прикажано на сликата.



Слика 36

Искривеноста на прачката ќе зависи од моментот t кога таа е видена од набљудувачот. Согласно тоа, должината на прачката што ќе ја види набљудувачот во системот S се пресметува по формулата:

$$l = \int_A^B dl = \int_0^{l_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy, \tag{13}$$

каде што, со оглед на (12),

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left[\frac{\gamma^2 v}{c}\left(ct - \sqrt{v^2 t^2 + \frac{y^2}{\gamma^2}}\right)\right] = -\frac{vy}{c\sqrt{v^2 t^2 + \frac{y^2}{\gamma^2}}}.$$

Со замена на последниот резултат во интегралот (13), за видената должина на прачката се добива:

$$l = \int_0^{l_0} \sqrt{\frac{v^2 t^2 + y^2}{v^2 t^2 + \frac{y^2}{\gamma^2}}}\, dy = \gamma^2 l_0 - \gamma^3 t \frac{v^3}{c^2} \arctan\left(\frac{l_0}{\gamma v t}\right),$$

и таа зависи од моментот на гледање t.

Лесно се покажува дека во граничните случаеви, кога $t = 0$ тогаш $l = \gamma^2 l_0$, а кога $t \to \infty$ тогаш $l \to l_0$.

■

Задача 54.

а) Да се конструира тензорот на поле во материјални средини $D^{\mu\nu}$ во којшто фигурираат векторите на полињата $\vec{D}$ и $\vec{H}$ од Максвеловите равенки во материјални средини. Равенките на Максвел потоа да се запишат во тензорски облик преку тензорот на поле $D^{\mu\nu}$ и четиривекторот на густината на слободните струи J_f^{μ}. Да се конструира и тензорот $H^{\mu\nu}$ којшто е дуален на тензорот на поле во материјални средини $D^{\mu\nu}$.

б) Да се изведат релативистичките трансформации на полињата $\vec{D}$ и $\vec{H}$ при премин од референтниот систем S во референтниот систем S', ако двата референтни системи се во стандардна конфигурација, и S' се движи по x-оската на S со константна брзина v.

в) Со помош на тензорите $D^{\mu\nu}$, $H^{\mu\nu}$, на оригиналниот тензор на поле $F^{\mu\nu}$ и неговиот дуален тензор $G^{\mu\nu}$, конститутивните релации на Минковски за линеарни средини во тензорски облик се запишуваат на следниов начин:

$$D^{\mu\nu} U_\nu = c^2 \varepsilon F^{\mu\nu} U_\nu,$$

$$H^{\mu\nu} U_\nu = \frac{1}{\mu} G^{\mu\nu} U_\nu,$$

каде што ε и μ се диелектричната константа и магнетната пермеабилност на материјалот во референтниот систем каде што тој мирува, U_ν е 4-векторот на брзината на материјалот, а c е брзината на светлината во вакуум. Да се изведат конститутивните равенки на Минковски во 3-векторски облик зададен преку функционалните зависности:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}),$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B}).$$

Решение 54.

а) Поаѓаме од Максвеловите равенки запишани во општ облик коишто важат за било која седина. Тие се:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \tag{4}$$

каде што ρ и $\vec{j}$ се волуменските густини на сите полнежи и струи (слободните и сврзаните). За равенките (1)–(4) да се запишат во тензорски облик, се воведува антисиметричниот тензор на електромагнетното поле $F^{\mu\nu}$ и неговиот дуален тензор $G^{\mu\nu}$, чиишто елементи се:

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$G^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Следствено, Максвеловите равенки (1)–(4) во тензорски облик се:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \mu_0 J^{\mu}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0, \tag{8}$$

каде што J^{μ} е четиривекторот на густината на струите. При пишувањето на (7) и (8) е применето Ајнштајновото правило за сумирање кога индексите се повторуваат.

Од друга страна, Максвеловите равенки во материјални средини се запишуваат:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f, \tag{9}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{10}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{11}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J_f} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{12}$$

каде што векторските полиња $\vec{D}$ и $\vec{H}$ се дефинирани со релациите:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M},$$

во кои $\vec{P}$ и $\vec{M}$ се векторите на електричната поларизација и на магнетната поларизација на средината соодветно, а ρ_f и $\vec{J_f}$ се волуменските густини на слободните полнежи и струи во материјалот. Со споредба со равенките (1)–(4) очигледно е дека во материјални средини по форма се разликуваат само нехомогените равенки (9) и (12), додека хомогените равенки (10) и (11) се исти како равенките (2) и (3) во општиот систем на равенките на Максвел. Ако првата нехомогена равенка (9) од материјалните Максвелови равенки ја поделиме со ε_0, а четвртата равенка (12) ја помножиме со μ_0 се добива:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0}, \tag{9a}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\mu_0 \vec{H} \right) = \mu_0 \overrightarrow{J_f} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} \right). \tag{12a}$$

Ако направиме сопредба со соодветните равенки во оригиналниот систем (1)–(4), се гледа дека равенката (9*а*) се трансформира во равенката (1) со трансформацијата:

$$\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} \to \vec{E}, \qquad \rho_f \to \rho, \tag{13}$$

додека равенката (12*а*) се трансформира во равенката (4) со трансформацијата

$$\mu_0 \vec{H} \to \vec{B}, \qquad \overrightarrow{J_f} \to \vec{J}. \tag{14}$$

Согласно тоа, со примена на трансформациите (13) и (14) во релациите (5)–(8) се добива:

$$D^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cD_x & cD_y & cD_z \\ -cD_x & 0 & H_z & -H_y \\ -cD_y & -H_z & 0 & H_x \\ -cD_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & -cD_x & cD_y \\ -H_y & cD_z & 0 & -cD_x \\ -H_z & -cD_y & cD_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial D^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = J_f^\mu, \tag{17}$$

$$\frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \tag{18}$$

со коишто се изразуваат тензорот на поле во материјални средини $D^{\mu\nu}$ и неговиот дуален тензор $H^{\mu\nu}$, како и Максвеловите равенки во материјални средини (9)–(12) запишани преку тензорските равенки (17) и (18).

б) Релациите за релативистичка трансформација на компонентите на векторите на електричното поле и магнетното поле, $\vec{E}$ и $\vec{B}$, при премин од S во S' следуваат од Лоренцовата трансформација на тензорот на поле $F^{\mu\nu}$

$$F^{\sigma'\gamma'} = \Lambda^{\sigma'}{}_{\mu}\Lambda^{\gamma'}{}_{\nu}\, F^{\mu\nu}, \tag{19}$$

каде што матрицата на Лоренц Λ при стандардна конфигурација на референтните системи S и S' е:

$$\Lambda^{\gamma'}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\beta_v\gamma_v & 0 & 0 \\ -\beta_v\gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а β_v и γ_v се функции од релативната брзина v меѓу референтните системи S и S', зададени експлицитно со:

$$\beta_v = \frac{v}{c},$$

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Со распишување на равенката (19) по компоненти, се добиваат трансформациите на компонентите на полињата $\vec{E}$ и $\vec{B}$:

$$E_x' = E_x, \tag{20}$$

$$E_y' = \gamma\left(E_y - vB_z\right), \tag{21}$$

$$E_z' = \gamma\left(E_z + vB_y\right), \tag{22}$$

$$B_x' = B_x, \tag{23}$$

$$B_y' = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \tag{24}$$

$$B_z^{\prime} = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right), \tag{25}$$

Со примена на трансформациите (13) и (14) во овие равенки ги добиваме аналогните релативистички трансформации на компонентите на полињата $\vec{D}$ и $\vec{H}$:

$$D_x^{\prime} = D_x, \tag{26}$$

$$D_y^{\prime} = \gamma\left(D_y - \frac{v}{c^2}H_z\right), \tag{27}$$

$$D_z^{\prime} = \gamma\left(D_z + \frac{v}{c^2}H_y\right), \tag{28}$$

$$H_x^{\prime} = H_x, \tag{29}$$

$$H_y^{\prime} = \gamma\left(H_y + vD_z\right), \tag{30}$$

$$H_z^{\prime} = \gamma\left(H_z - vD_y\right). \tag{31}$$

в) Земајќи предвид дека компонентите на 4-векторот на брзината на материјалната средина се:

$$U_\nu = (-\gamma_u c, \gamma_u \vec{u}),$$

каде што $\vec{u}$ е векторот на брзината на материјалот, а

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

првата тензорска конститутивна равенка на Минковски

$$D^{\mu\nu}U_\nu = c^2\varepsilon F^{\mu\nu}U_\nu \tag{32}$$

за $\mu = 0$ се запишува

$$D^{0\nu}U_\nu = c^2\varepsilon F^{0\nu}U_\nu,$$

односно

$$D^{00}U_0 + D^{01}U_1 + D^{02}U_2 + D^{03}U_3 = c^2\varepsilon(F^{00}U_0 + F^{01}U_1 + F^{02}U_2 + F^{03}U_3),$$

па со смена на елементите на тензорите на поле $F^{\mu\nu}$ и $D^{\mu\nu}$од (5) и (15) добиваме:

$$cD_x\gamma_u u_x + cD_y\gamma_u u_y + cD_z\gamma_u u_z = c^2\varepsilon\left(\gamma_u u_x\frac{E_x}{c} + \gamma_u u_y\frac{E_y}{c} + \gamma_u u_z\frac{E_z}{c}\right),$$

или запишано векторски:

$$\left(\vec{D}\cdot\vec{u}\right) = \varepsilon\left(\vec{E}\cdot\vec{u}\right). \tag{33}$$

Слично, од втората тензорска конститутивна равенка на Минковски:

$$H^{\mu\nu}U_\nu = \frac{1}{\mu}G^{\mu\nu}U_\nu \tag{34}$$

за $\mu = 0$ имаме:

$$H^{0\nu}U_\nu = \frac{1}{\mu}G^{0\nu}U_\nu,$$

$$H^{00}U_0 + H^{01}U_1 + H^{02}U_2 + H^{03}U_3 = \frac{1}{\mu}(G^{00}U_0 + G^{01}U_1 + G^{02}U_2 + G^{03}U_3),$$
$$H_x\gamma_u u_x + H_y\gamma_u u_y + H_z\gamma_u u_z = \frac{1}{\mu}\left(\gamma_u u_x B_x + \gamma_u u_y B_y + \gamma_u u_z B_z\right),$$

или конечно:

$$\left(\vec{H}\cdot\vec{u}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\vec{B}\cdot\vec{u}\right). \tag{35}$$

Аналогно, за $\mu = 1$, од тензорските равенки (32) и (34) следува:

$$D^{1\nu}U_\nu = c^2\varepsilon F^{1\nu}U_\nu,$$

$$D^{10}U_0 + D^{11}U_1 + D^{12}U_2 + D^{13}U_3 = c^2\varepsilon(F^{10}U_0 + F^{11}U_1 + F^{12}U_2 + F^{13}U_3),$$

$$c^2\gamma_u D_x + \gamma_u H_z u_y - \gamma_u H_y u_z = c^2\varepsilon\left(c\gamma_u\frac{E_x}{c} + \gamma_u u_y B_z - \gamma_u u_z B_y\right),$$

$$D_x + \frac{1}{c^2}\left(\vec{u} \times \vec{H}\right)_x = \varepsilon\left[E_x + \left(\vec{u} \times \vec{B}\right)_x\right],$$

односно

$$H^{1\nu}U_\nu = \frac{1}{\mu}G^{1\nu}U_\nu,$$

$$H^{10}U_0 + H^{11}U_1 + H^{12}U_2 + H^{13}U_3 = \frac{1}{\mu}(G^{10}U_0 + G^{11}U_1 + G^{12}U_2 + G^{13}U_3),$$

$$c^2\gamma_u H_x - c\gamma_u u_y D_x + c\gamma_u u_z D_y = \frac{1}{\mu}\left(c\gamma_u B_x - \gamma_u u_y \frac{E_z}{c} + \gamma_u u_z \frac{E_y}{c}\right),$$

$$H_x - \left(\vec{u} \times \vec{D}\right)_x = \frac{1}{\mu}\left[B_x - \frac{1}{c^2}\left(\vec{u} \times \vec{E}\right)_x\right],$$

и слично за $\mu = 2$ и $\mu = 3$, при што се добиваат две векторски равенки за полињата $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$:

$$\vec{D} + \frac{1}{c^2}\left(\vec{u} \times \vec{H}\right) = \varepsilon\left[\vec{E} + \left(\vec{u} \times \vec{B}\right)\right], \tag{36}$$

$$\vec{H} - \left(\vec{u} \times \vec{D}\right) = \frac{1}{\mu}\left[\vec{B} - \frac{1}{c^2}\left(\vec{u} \times \vec{E}\right)\right]. \tag{37}$$

Од релациите (33) (35), (36) и (37) лесно се добива:

$$\vec{D} = {\gamma_u}^2\varepsilon\left\{\left(1 - \frac{w^2u^2}{c^4}\right)\vec{E} + \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)\left[\left(\vec{u} \times \vec{B}\right) - \frac{1}{c^2}\left(\vec{E} \cdot \vec{u}\right)\vec{u}\right]\right\}, \tag{38}$$

$$\vec{H} = \frac{{\gamma_u}^2}{\mu}\left\{\left(1 - \frac{u^2}{w^2}\right)\vec{B} + \left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{c^2}\right)\left[\left(\vec{u} \times \vec{E}\right) + \left(\vec{B} \cdot \vec{u}\right)\vec{u}\right]\right\}, \tag{39}$$

каде што

$$w = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}} = \frac{c}{n}$$

е фазната брзина на бранот во средината во референтниот систем каде што средината мирува. Последните две равенки се конститутивните равенки на Минковски во тридимензионален векторски облик. Изразени преку индексот на прекршување, тие се запишуваат

$$\vec{D} = \gamma_u{}^2 \varepsilon \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{c^2 n^2}\right) \vec{E} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left[(\vec{u} \times \vec{B}) - \frac{1}{c^2} (\vec{E} \cdot \vec{u}) \vec{u} \right] \right\}, \quad (40)$$

$$\vec{H} = \frac{\gamma_u{}^2}{\mu} \left\{ \left(1 - \frac{n^2 u^2}{c^2}\right) \vec{B} + \frac{n^2 - 1}{c^2} \left[(\vec{u} \times \vec{E}) + (\vec{B} \cdot \vec{u}) \vec{u} \right] \right\}. \quad (41)$$

Во апроксимација на нерелативистички брзини на средината, кога $u \ll c$, конститутивните равенки (40) и (41) се сведуваат на:

$$\vec{D} \cong \varepsilon \left[\vec{E} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) (\vec{u} \times \vec{B}) \right],$$

$$\vec{H} \cong \frac{1}{\mu} \left[\vec{B} + \frac{n^2 - 1}{c^2} (\vec{u} \times \vec{E}) \right].$$

■

Задача 55.

Материјална точка наелектризирана со полнеж со големина q се движи со константна брзина $\vec{v}$ во бесконечна хомогена изотропна диелектрична средина чија што диелектрична константа изнесува ε, а магнетната пермеабилност и е μ. Да се најдат векторите на електромагнетното поле $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$ и $\vec{D}$ создадени од полнежот во секоја точка од просторот. Да се разгледа случајот кога брзината на полнежот е помала од фазната брзина c/n на електромагнетниот бран во средината.

Решение 55.

Најпрво ќе ги најдеме соодветните полиња $\vec{E}'$, $\vec{B}'$, $\vec{H}'$ и $\vec{D}'$ во референтниот систем S' сврзан за полнежот. Во однос на овој референтен систем, полнежот мирува, а диелектричната средина се движи со брзина $-\vec{v}$. Земајќи предвид дека во диелектрикот нема слободни полнежи и струи, и дека стационарниот полнеж сместен во координатниот почеток создава стационарни полиња коишто не зависат од времето, Максвеловите равенки во системот S' се:

$$\vec{\nabla}\cdot\overrightarrow{D'} = q\delta\left(\overrightarrow{r'}\right), \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\overrightarrow{B'} = 0, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla}\times\overrightarrow{E'} = 0, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\times\overrightarrow{H'} = 0, \tag{4}$$

каде што δ е Дираковата делта-функција којашто ја опишува местоположбата на полнежот којшто мирува во координатниот почеток на S'. Конститутивните равенки на Минковски во случајов се:

$$\overrightarrow{D'} - \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\times\overrightarrow{H'}\right) = \varepsilon\left[\overrightarrow{E'} - \left(\vec{v}\times\overrightarrow{B'}\right)\right], \tag{5}$$

$$\overrightarrow{H'} + \left(\vec{v}\times\overrightarrow{D'}\right) = \frac{1}{\mu}\left[\overrightarrow{B'} + \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\times\overrightarrow{E'}\right)\right]. \tag{6}$$

Ако равенката (5) ја помножиме векторски со $\vec{v}$ од лево, се добива:

$$\vec{v}\times\overrightarrow{D'} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\left(\vec{v}\times\overrightarrow{H'}\right) + \varepsilon\left[\vec{v}\times\overrightarrow{E'} - \vec{v}\times\left(\vec{v}\times\overrightarrow{B'}\right)\right].$$

Со замена на последниов израз за $\vec{v}\times\overrightarrow{D'}$ во равенката (6) следува релацијата:

$$\overrightarrow{H'} + \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\left(\vec{v}\times\overrightarrow{H'}\right) + \varepsilon\left[\vec{v}\times\overrightarrow{E'} - \vec{v}\times\left(\vec{v}\times\overrightarrow{B'}\right)\right] = \frac{1}{\mu}\left[\overrightarrow{B'} + \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\times\overrightarrow{E'}\right)\right],$$

којашто со оглед на равенките:

$$\vec{v}\times\left(\vec{v}\times\overrightarrow{H'}\right) = \vec{v}\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{H'}\right) - v^2\overrightarrow{H'} = v^2\overrightarrow{H'_{\parallel}} - v^2\overrightarrow{H'} = -v^2\overrightarrow{H'_{\perp}},$$

$$\vec{v}\times\left(\vec{v}\times\overrightarrow{B'}\right) = \vec{v}\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{B'}\right) - v^2\overrightarrow{B'} = v^2\overrightarrow{B'_{\parallel}} - v^2\overrightarrow{B'} = -v^2\overrightarrow{B'_{\perp}}$$

се сведува на:

$$\overrightarrow{H}' - \frac{v^2}{c^2}\overrightarrow{H'_\perp} + \varepsilon\left[\vec{v}\times\overrightarrow{E}' + v^2\overrightarrow{B'_\perp}\right] = \frac{1}{\mu}\left[\overrightarrow{B}' + \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\times\overrightarrow{E}'\right)\right]. \tag{7}$$

Ја множиме конститутивната равенка (6) скаларно со брзината $\vec{v}$, при што добиваме:

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{H}' = \frac{1}{\mu}\vec{v}\cdot\overrightarrow{B}',$$

односно

$$\overrightarrow{H'_\parallel} = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{B'_\parallel},$$

од каде

$$\overrightarrow{B'_\perp} = \overrightarrow{B}' - \overrightarrow{B'_\parallel} = \overrightarrow{B}' - \mu\overrightarrow{H'_\parallel}. \tag{8}$$

Со смена на (8) во (7) и дивергенција од двете страни на резултантната равенка добиваме:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\vec{\nabla}\cdot\overrightarrow{H'_\perp} + \left(1+\frac{v^2}{c^2}n^2\right)\vec{\nabla}\cdot\overrightarrow{H'_\parallel} = 0 \tag{9}$$

при што ги искористивме Максвеловите равенки (2)–(4) и релациите:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{v}\times\overrightarrow{E}'\right) = \overrightarrow{E}'\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right) - \vec{v}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\overrightarrow{E}'\right) = 0,$$

$$\varepsilon\mu = \frac{n^2}{c^2},$$

каде што n е индексот на прекршување на диелектричната средина во однос на референтниот систем S во којшто таа мирува.

Од последната Максвелова равенка (4) следува дека полето $\overrightarrow{H}'$ може да се запише како негативен градиент од некоја скаларна функција φ' којашто како и $\overrightarrow{H}'$ не зависи од времето:

$$\overrightarrow{H}' = -\vec{\nabla}\varphi' = -\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\hat{x} - \frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\hat{y} - \frac{\partial\varphi'}{\partial z'}\hat{z}. \tag{10}$$

Доколку оската z'ја поставиме во насока на брзината на средината, тогаш со оглед на последната релација:

$$\overrightarrow{H'_{\parallel}} = -\frac{\partial\varphi'}{\partial z'}\hat{z},$$

$$\overrightarrow{H'_{\perp}} = -\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\hat{x} - \frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\hat{y},$$

па со смена на последниве две равенки во релацијата (9) добиваме:

$$\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y'^2} + \frac{1-\beta^2 n^2}{1-\beta^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial z'^2} = 0, \tag{11}$$

каде што $\beta = \frac{v}{c}$. Согласно условот на задачата, $v < c/n$, па равенката (11) е парцијална диференцијална равенка од елиптичен тип. За да ја решиме равенката, најпрвин правиме смена на променливите:

$$\widetilde{x}' = x'\sqrt{\frac{1-\beta^2 n^2}{1-\beta^2}}, \tag{12}$$

$$\widetilde{y}' = y'\sqrt{\frac{1-\beta^2 n^2}{1-\beta^2}}, \tag{13}$$

$$\widetilde{z}' = z', \tag{14}$$

при што диференцијалната равенка (11) се сведува на равенка на Лаплас:

$$\frac{\partial^2\varphi'}{\partial \widetilde{x}'^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial \widetilde{y}'^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial \widetilde{z}'^2} = 0. \tag{15}$$

Бидејќи диелектричната средина е бесконечна, односно го исполнува целиот простор, за Лапласовата равенка да важи во секоја точка од просторот, нејзиното решение треба да е линеарна функција од координатите:

$$\varphi = \varphi\left(\widetilde{x'}, \widetilde{y'}, \widetilde{z'}\right) = A\tilde{x} + B\tilde{y} + C\tilde{z} + D,$$

па следствено за векторското поле $\overrightarrow{H'}$ добиваме:

$$\overrightarrow{H'} = -\vec{\nabla}\varphi' = -A\hat{x} - B\hat{y} - C\hat{z},$$

односно $\overrightarrow{H'}$ мора да е константен вектор, ист во секоја точка од диелектрикот. Бидејќи во исто време $\overrightarrow{H'}$ мора да тежи кон нула во точките во бескрајност, следствено:

$$\overrightarrow{H'} = \vec{0} \tag{16}$$

во секоја точка од просторот.

Со земање предвид на последниот резултат (16), конститутивните равенки (5) и (6) се упростуваат:

$$\overrightarrow{D'} = \varepsilon\left[\overrightarrow{E'} - \left(\vec{v} \times \overrightarrow{B'}\right)\right], \tag{17}$$

$$\left(\vec{v} \times \overrightarrow{D'}\right) = \frac{1}{\mu}\left[\overrightarrow{B'} + \frac{1}{c^2}\left(\vec{v} \times \overrightarrow{E'}\right)\right], \tag{18}$$

па на сличен начин како и претходно, со елиминација на $\overrightarrow{B'}$ од последните две равенки се добива:

$$\overrightarrow{D'} = \varepsilon\overrightarrow{E'_{\parallel}} + \varepsilon\frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}\overrightarrow{E'_{\perp}}. \tag{19}$$

Од третата Максвелова равенка, релацијата (3), следува дека:

$$\overrightarrow{E'} = -\vec{\nabla}\Psi' = -\frac{\partial\Psi'}{\partial x'}\hat{x} - \frac{\partial\Psi'}{\partial y'}\hat{y} - \frac{\partial\Psi'}{\partial z'}\hat{z},$$

каде што Ψ' е скаларна функција којашто не зависи од времето. Со користење на последнава релација, равенката (19) може да се запише:

$$\overrightarrow{D}' = -\varepsilon\frac{\partial\Psi'}{\partial x'}\hat{x} - \varepsilon\frac{\partial\Psi'}{\partial y'}\hat{y} - \varepsilon\frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}\frac{\partial\Psi'}{\partial z'}\hat{z}. \tag{20}$$

Со смена на (20) во (1) се добива:

$$\frac{\partial^2\Psi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\Psi'}{\partial y'^2} + \frac{1-\beta^2 n^2}{1-\beta^2}\frac{\partial^2\Psi'}{\partial z'^2} = -\frac{q}{\varepsilon}\frac{1-\beta^2 n^2}{1-\beta^2}\delta(x')\delta(y')\delta(z').$$

Во последнава равенка како и претходно правиме смена на променливите преку користење на релациите (12)–(14) и својствата на Дираковата делта-функција, при што се добива:

$$\frac{\partial^2\Psi'}{\partial \widetilde{x}'^2} + \frac{\partial^2\Psi'}{\partial \widetilde{y}'^2} + \frac{\partial^2\Psi'}{\partial \widetilde{z}'^2} = -\frac{q}{\varepsilon}\frac{1-\beta^2 n^2}{1-\beta^2}\delta(\widetilde{x}')\delta(\widetilde{y}')\delta(\widetilde{z}'). \tag{21}$$

Резултантната равенка (21) е равенка на Поасон, и нејзиното решение се запишува:

$$\Psi'(\widetilde{x}', \widetilde{y}', \widetilde{z}') = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1-\beta^2 n^2}{1-\beta^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\widetilde{x}'^2 + \widetilde{y}'^2 + \widetilde{z}'^2}}. \tag{22}$$

Со користење на (22), за електричното поле се добива:

$$\overrightarrow{E}'(x', y', z') = -\vec{\nabla}\Psi'(x', y', z')$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\sqrt{\frac{1-\beta^2 n^2}{1-\beta^2}}\frac{x'\hat{x} + y'\hat{y} + \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}z'\hat{z}}{\left(x'^2 + y'^2 + \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{23}$$

За наоѓање на полињата $\overrightarrow{B}'$ и $\overrightarrow{D}'$ ја користиме релацијата (19) и конститутивната равенка (18), при што се добива:

$$\overrightarrow{D}'(x', y', z') = \frac{q}{4\pi}\sqrt{\frac{1-\beta^2 n^2}{1-\beta^2}}\frac{x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}}{\left(x'^2 + y'^2 + \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{24}$$

$$\overrightarrow{B'}(x',y',z') = \frac{q\mu\beta c}{4\pi n^2}\frac{n^2-1}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\beta^2 n^2}}\frac{x'\hat{x}+y'\hat{y}}{\left(x'^2+y'^2+\frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (25)$$

Со користење на формулите за релативистичка трансформација на полињата, и релациите (16), (23), (24) и (25), конечно ги добиваме соодветните вектори во оригиналниот референтен систем S:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{(1-\beta^2 n^2)}{[(1-n^2\beta^2)(x^2+y^2)+(z-vt)^2]^{\frac{3}{2}}}[x\hat{x}+y\hat{y}+(z-vt)\hat{z}],$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E},$$

$$\vec{H} = \vec{v}\times\vec{D} = \varepsilon\vec{v}\times\vec{E},$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu\varepsilon\vec{v}\times\vec{E}.$$

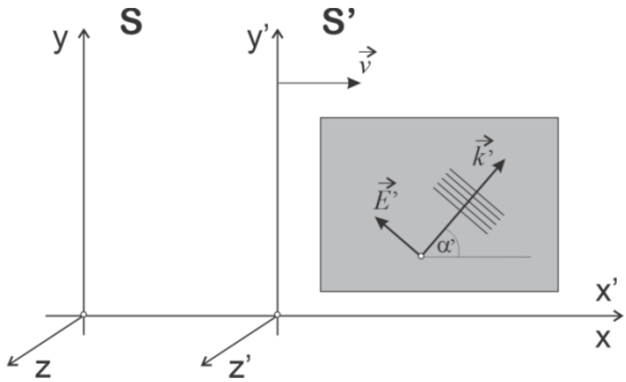
■

Задача 56.

Рамен електромагнетен бран се простира во диелектрична средина којашто се движи со константна брзина v. Во однос на сопствениот референтен систем диелектрикот е линеарен, хомоген и изотропен, и се карактеризира со диелектрична константа ε и магнетна пермеабилност μ. Да се најдат векторите на електромагнетното поле $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ и $\vec{H}$ на електромагетниот бран изразени преку соодветните величини во системот каде што диелектрикот мирува, и да се определи фазната брзина на бранот во подвижниот диелектрик.

Решение 56.

Прво ќе ги запишеме полињата на бранот во референтниот систем S' каде што диелектрикот е во мирување.



Слика 37

Одбираме векторот на електричното поле $\overrightarrow{E}'$ на бранот да лежи во рамнината *x'y'*, а брановиот вектор $\overrightarrow{k}'$ исто така да лежи во оваа рамнина правејќи агол α' со позитивната насока на *x'*-оската (види слика). Во *S'* брановиот вектор $\overrightarrow{k}'$ се запишува:

$$\overrightarrow{k}' = k_x'\hat{x} + k_y'\hat{y} \tag{1}$$

каде што

$$k_x' = k'\cos\alpha', \tag{2}$$

$$k_y' = k'\sin\alpha', \tag{3}$$

се неговите компоненти на соодветните оски. Равенките на електомагнетните полиња во системот *S'* се:

$$\overrightarrow{E}' = \overrightarrow{E_0'}e^{i\left(\overrightarrow{k'}\overrightarrow{r'}-\omega't'\right)}, \tag{4}$$

$$\overrightarrow{B}' = \overrightarrow{B_0'}e^{i\left(\overrightarrow{k'}\overrightarrow{r'}-\omega't'\right)}, \tag{5}$$

$$\overrightarrow{D}' = \overrightarrow{D_0'}e^{i\left(\overrightarrow{k'}\overrightarrow{r'}-\omega't'\right)}, \tag{6}$$

$$\overrightarrow{H}' = \overrightarrow{H_0'}e^{i\left(\overrightarrow{k'}\overrightarrow{r'}-\omega't'\right)}, \tag{7}$$

каде што ω' е аголната фреквенција на бранот во *S'*. Максвеловите равенки во овој референтен систем се запишуваат:

$$\vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{D'} = 0, \tag{8}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{B'} = 0, \tag{9}$$

$$\vec{\nabla} \times \overrightarrow{E'} = -\frac{\partial \overrightarrow{B'}}{\partial t}, \tag{10}$$

$$\vec{\nabla} \times \overrightarrow{H'} = \frac{\partial \overrightarrow{D'}}{\partial t}, \tag{11}$$

при што поради линеарноста на диелектрикот важат конститутивните релации:

$$\vec{D}' = \varepsilon \vec{E}',$$

$$\vec{B}' = \mu \vec{H}'.$$

Со заменување на релациите (4)–(7) во Максвеловите равенки, ги добиваме аналогните Максвелови равенки во доменот на фреквенции:

$$\overrightarrow{k'} \cdot \overrightarrow{E'} = 0, \tag{12}$$

$$\overrightarrow{k'} \cdot \overrightarrow{H'} = 0, \tag{13}$$

$$\overrightarrow{k'} \times \overrightarrow{E'} = \mu \omega' \overrightarrow{H'}, \tag{14}$$

$$\overrightarrow{k'} \times \overrightarrow{H'} = -\varepsilon \omega' \overrightarrow{E'}. \tag{15}$$

Од Максвеловата равенка (12) следува перпендикуларноста на брановиот вектор $\overrightarrow{k'}$ и векторот на електричното поле $\overrightarrow{E'}$. Исто така, од Максвеловите равенки (13) и (14) се гледа дека векторот $\overrightarrow{H'}$ е нормален на рамнината $x'y'$ во која што лежат $\overrightarrow{k'}$ и $\overrightarrow{E'}$, односно тој е паралелен на z'-оската и е насочен кон нејзината позитивна насока. Со земање на реалните делови од равенките (14) и (15) се добива:

$$k' \underline{E_0'} = \mu \omega' \underline{H_0'}, \tag{16}$$

$$k'\underline{H_0'} = \varepsilon\omega'\underline{E_0'}, \tag{17}$$

од каде што следува

$$k'^2 = \varepsilon\mu\omega'^2.$$

Следствено, за фазната брзина v_f' на бранот имаме:

$$v_f' = \frac{\omega'}{k'} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}, \tag{18}$$

каде што

$$n = c\sqrt{\varepsilon\mu}$$

е индексот на прекршување на диелектрикот во неговиот сопствен референтен систем. Од релацијата (17) добиваме:

$$\underline{H_0'} = \frac{\varepsilon\omega'}{k'}\underline{E_0'} = \frac{\varepsilon\underline{E_0'}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\underline{E_0'}. \tag{19}$$

Со земање на реалните делови во релациите за полињата (4)–(7) и земање предвид на резултатите од досегашната дискусија добиваме:

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}'} &= \underline{E_0'}\cos\left(\vec{k}'\vec{r}' - \omega' t' + \delta\right) \\ &= \left(-\underline{E_0'}\sin\alpha'\hat{x} \right. \\ &\quad \left. + \underline{E_0'}\cos\alpha'\hat{y}\right)\cos\left(\vec{k}'\vec{r}' - \omega' t' + \delta\right),\end{aligned} \tag{20}$$

$$\underline{\vec{H}'} = \hat{z}\underline{H_0'}\cos\left(\vec{k}'\vec{r}' - \omega' t' + \delta\right) = \hat{z}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\underline{E_0'}\cos\left(\vec{k}'\vec{r}' - \omega' t' + \delta\right), \tag{21}$$

$$\underline{\vec{B}'} = \mu\underline{\vec{H}'} = \hat{z}\sqrt{\varepsilon\mu}\underline{E_0'}\cos\left(\vec{k}'\vec{r}' - \omega' t' + \delta\right), \tag{22}$$

$$\underline{\vec{D}'} = \varepsilon\underline{\vec{E}'} = \left(-\varepsilon\underline{E_0'}\sin\alpha'\hat{x} + \varepsilon\underline{E_0'}\cos\alpha'\hat{y}\right)\cos\left(\vec{k}'\vec{r}' - \omega' t' + \delta\right). \tag{23}$$

Со користење на равенките (20)–(23) и релативистичките трансформации на компонентите на полињата:

$$E_x = E_x^{\prime}, \tag{24}$$

$$E_y = \gamma\left(E_y^{\prime} + vB_z^{\prime}\right), \tag{25}$$

$$E_z = \gamma\left(E_z^{\prime} - vB_y^{\prime}\right), \tag{26}$$

$$B_x = B_x^{\prime}, \tag{27}$$

$$B_y = \gamma\left(B_y^{\prime} - \frac{v}{c^2}E_z^{\prime}\right), \tag{28}$$

$$B_z = \gamma\left(B_z^{\prime} + \frac{v}{c^2}E_y^{\prime}\right), \tag{29}$$

$$D_x = D_x^{\prime}, \tag{30}$$

$$D_y = \gamma\left(D_y^{\prime} + \frac{v}{c^2}H_z^{\prime}\right), \tag{31}$$

$$D_z = \gamma\left(D_z^{\prime} - \frac{v}{c^2}H_y^{\prime}\right), \tag{32}$$

$$H_x = H_x^{\prime}, \tag{33}$$

$$H_y = \gamma\left(H_y^{\prime} - vD_z^{\prime}\right), \tag{34}$$

$$H_z = \gamma\left(H_z^{\prime} + vD_y^{\prime}\right), \tag{35}$$

каде што

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

ги добиваме соодветните полиња во референтниот систем S во однос на којшто диелектрикот се движи со брзина V долж позитивната насока на неговата x-оска:

$$\underline{E_x} = -\underline{E_0^{\prime}} \sin\alpha^{\prime} \cos\left(\overrightarrow{k}^{\prime}\overrightarrow{r}^{\prime} - \omega^{\prime} t^{\prime} + \delta\right), \tag{36}$$

$$\underline{E_y} = \gamma \underline{E_0^{\prime}} \left(\cos \alpha^{\prime} + \frac{nv}{c} \right) \cos \left(\overrightarrow{k^{\prime}} \overrightarrow{r^{\prime}} - \omega^{\prime} t^{\prime} + \delta \right), \tag{37}$$

$$\underline{E_z} = 0, \tag{38}$$

$$\underline{H_x} = 0, \tag{39}$$

$$\underline{H_y} = 0, \tag{40}$$

$$\underline{H_z} = \gamma \underline{E_0^{\prime}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(1 + \frac{nv}{c} \cos \alpha^{\prime} \right) \cos \left(\overrightarrow{k^{\prime}} \overrightarrow{r^{\prime}} - \omega^{\prime} t^{\prime} + \delta \right), \tag{41}$$

$$\underline{B_x} = 0, \tag{42}$$

$$\underline{B_y} = 0, \tag{43}$$

$$\underline{B_z} = \gamma n \frac{\underline{E_0^{\prime}}}{c} \left(1 + \frac{nv}{c} \cos \alpha^{\prime} \right) \cos \left(\overrightarrow{k^{\prime}} \overrightarrow{r^{\prime}} - \omega^{\prime} t^{\prime} + \delta \right), \tag{44}$$

$$\underline{D_x} = -\varepsilon \underline{E_0^{\prime}} \sin \alpha^{\prime} \cos \left(\overrightarrow{k^{\prime}} \overrightarrow{r^{\prime}} - \omega^{\prime} t^{\prime} + \delta \right), \tag{45}$$

$$\underline{D_y} = \varepsilon \gamma \underline{E_0^{\prime}} \left(\cos \alpha^{\prime} + \frac{nv}{c} \right) \cos \left(\overrightarrow{k^{\prime}} \overrightarrow{r^{\prime}} - \omega^{\prime} t^{\prime} + \delta \right), \tag{46}$$

$$\underline{D_z} = 0. \tag{47}$$

Со користење на Лоренцовите трансформации:

$$x^{\prime} = \gamma (x - vt),$$

$$y^{\prime} = y,$$

$$z^{\prime} = z,$$

$$t^{\prime} = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right),$$

го трансформираме аргументот на косинусната функција, односно фазата на бранот:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{k'}\overrightarrow{r'} - \omega' t' + \delta &= k'_x x' + k'_y y' + k'_z z' - \omega' t' + \delta \\ &= k'_x \gamma(x - vt) + k'_y y + k'_z z - \omega' \gamma\left(t - \frac{xv}{c^2}\right) + \delta \\ &= \gamma\left(k'_x + \frac{\omega' v}{c^2}\right)x + k'_y y + k'_z z - \gamma(\omega' + k'_x v)t + \delta \\ &= k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta = \vec{k}\,\vec{r} - \omega t + \delta,\end{aligned}$$

каде што зедовме предвид дека множителите пред *x*, *y*, *z* и *t* се константи:

$$k_x = \gamma\left(k'_x + \frac{\omega' v}{c^2}\right), \tag{48}$$

$$k_y = k'_y, \tag{49}$$

$$k_z = k'_z, \tag{50}$$

$$\omega = \gamma(\omega' + k'_x v). \tag{51}$$

Резултантните равенки (48)–(51) се релативистичките трансформации на компонентите на брановиот вектор и аголната фреквенција на бранот меѓу референтните системи. Тие можат да се искористат за да ги најдеме соодветните компоненти на брановиот вектор и аголната фреквенција на бранот во системот *S* во којшто диелектрикот се движи. Со оглед на (2) и (3), и релацијата

$$k' = \frac{\omega' n}{c} = \frac{\omega'}{v_f},$$

добиваме

$$k_x = \gamma \frac{\omega' n}{c}\left(\cos\alpha' + \frac{v}{nc}\right), \tag{52}$$

$$k_y = \frac{\omega' n}{c}\sin\alpha', \tag{53}$$

$$\omega = \gamma\omega'\left(1 + \frac{nv}{c}\cos\alpha'\right). \tag{54}$$

Компонентите на врановиот вектор во референтниот систем S се:

$$k_x = k\cos\alpha,$$

$$k_y = k\sin\alpha,$$

па со замена во равенките (52) и (53) се добива:

$$k\cos\alpha = \gamma\frac{\omega' n}{c}\left(\cos\alpha' + \frac{v}{nc}\right), \tag{55}$$

$$k\sin\alpha = \frac{\omega' n}{c}\sin\alpha', \tag{56}$$

од каде што следува релацијата која што ја опишува аберацијата на електромагнетниот бран во подвижниот диелектрик:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha'}{\gamma\left(\cos\alpha' + \frac{v}{nc}\right)}. \tag{57}$$

Ако ги квадрираме релациите (55) и (56) па потоа ги собереме, се добива изразот за модулот на врановиот вектор $\vec{k}$:

$$k = \frac{\omega' n}{c}\sqrt{\sin^2\alpha' + \gamma^2\left(\cos\alpha' + \frac{v}{nc}\right)^2}. \tag{58}$$

Со користење на последнава релација и равенката (54), за фазната брзина на бранот во референтниот систем S се добива:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}\frac{1 + \frac{nv}{c}\cos\alpha'}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\alpha' + \left(\cos\alpha' + \frac{v}{nc}\right)^2}}. \tag{59}$$

Во случај кога насоката на простирање на бранот е иста со насоката на брзината на диелектрикот, тогаш согласно (57) имаме $\alpha = \alpha' = 0$, па од равенката (59) за фазната брзина на бранот добиваме:

$$v_{f,\alpha=0} = \frac{\frac{c}{n}\left(1+\frac{nv}{c}\right)}{\left(1+\frac{v}{nc}\right)}.$$

Кога брзината на диелектрикот е значително помала од фазната брзина на бранот во сопствениот референтен систем S' на диелектрикот ($v \ll c/n$), тогаш последната релација може да ја апроксимираме земајќи ги членовите до прв степен на големина по v/c, при што се добива равенката којашто ја опишува промената на фазната брзина на светлинскиот зрак низ подвижниот флуид во експериментот на Физо:

$$v_f \approx \frac{c}{n} + V\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

■

8.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics - 3rd edition (Addison-Wesley, New York, 1999)

[2]. Đ. Mušicki, Uvod u teorijsku fiziku II deo (Zavod za izdavanje učbenika SRS, Beograd, 1965)

[3]. B. S. Milić, Zbirka zadataka iz teorijske fizike II deo (BIGZ, Beograd, 1971)

[4]. B. S. Milić, Kurs klasične teorijske fizike II deo: Meksvelova elektrodinamika (Studentski trg, Beograd, 2002)

[5]. Vida J. Žigman - Specijalna teorija relativnosti - Mehanika (Studentski trg, Beograd, 1997)

[6]. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, Сборник задач по электродинамике (Физматгиз, Москва, 1962)

[7]. И. Е. Иродов, Задачи по общей физике (БИНОМ ЛЗ, Москва, 2020)

[8]. А. Н. Матвеев, Электродинамика и теория относительности (Высшая школа, Москва, 1961)

[9]. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля (Физматгиз, Москва, 1962)

[10]. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред (Физматгиз, Москва, 1959)

[11]. J. D. Jackson, Classical Electrodynamics - 3rd edition (John Wiley & Sons - New York, 1999)

[12]. M. A. Heald and J. B. Marion, Classical Electromagnetic Radiation (Academic Press - London, 1995)

[13]. E. G. Cullwick, Electromagnetism and Relativity (Longman, New York, 1959).

[14]. W. K. H. Panofsky and M. Phillips, Classical Electricity and Magnetism -2nd edition (Addison Wesley, New York, 1962)

Е-издание: https://ukim.edu.mk/e-book/00167